UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PROFÍSICA

NAIRY ALEXIMAR VILLARREAL

CORRESPONDÊNCIA ADS/QCD COM DÍLATON QUADRÁTICO: TERMODINÂMICA E COEFICIENTES DE TRANSPORTE

ILHÉUS - BAHIA

2021

NAIRY ALEXIMAR VILLARREAL

CORRESPONDÊNCIA ADS/QCD COM DÍLATON QUADRÁTICO: TERMODINÂMICA E COEFICIENTES DE TRANSPORTE

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Santa Cruz para obtenção do título de Mestre em Física.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos e Ótica Quântica

Orientador: Prof. Dr. Alex dos Santos Miranda
Coorientador: Prof. Dr. Luis Alex Huahuachampi Mamani

ILHÉUS, BAHIA
2021

V722 Villarreal, Nairy Aleximar.
Correspondência AdS/QCD com dílaton quadrático: termodinâmica e coeficientes de transporte / Nairy Aleximar Villarreal. – Ilhéus, BA: UESC, 2021.
57 f. : il.

Orientador: Alex dos Santos Miranda.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Física.
Inclui referências.

1. Teoria quântica de campos. 2. Hidrodinâmica. 3. Relatividade (Física). 4. Holografia. 5. Buracos negros (Astronomia). I. Título.

CDD 530.143

NAIRY ALEXIMAR VILLARREAL

CORRESPONDÊNCIA ADS/QCD COM DÍLATON QUADRÁTICO: TERMODINÂMICA E COEFICIENTES DE TRANSPORTE

Ilhéus-BA, 27 de agosto de 2021.

Prof. Dr. Alex dos Santos Miranda
UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz
Orientador

Prof. Dr. Luis Alex Huahuachampi Mamani
UEMASUL - Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Coorientador

Prof. Dr. Saulo de Mesquita Diles
UFPA - Universidade Federal do Pará
Examinador Externo

Prof. Dr. Carlos Alfonso Martin Ballon Bayona
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Examinador Externo

Prof. Dr. Arturo Rodolfo Samana
UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz
Examinador Interno

Ilhéus-BA
2021

AGRADECIMENTOS

À Universidade Estadual de Santa Cruz por conceder a infraestrutura para o desenvolvimento da pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física - PROFÍSICA - pela oportunidade de cursar o mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudo.

Ao meu orientador, Alex Miranda, que durante este tempo, além de ter sido um grande orientador, também foi um grande apoio.

Ao meu coorientador, Luis Alex H. Mamani, por facilitar o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, obrigada por estar comigo mesmo estando longe de mim. Em particular à minha mãe Irian por seu sorriso e à Leonardo por crescer comigo e ser meu companheiro.

Às secretárias dos colegiados do PROFÍSICA e do PROCIMM, Roberta Carvalho e Caroline Gresik, pelo excelente atendimento.

CORRESPONDÊNCIA ADS/QCD COM DÍLATON QUADRÁTICO: TERMODINÂMICA E COEFICIENTES DE TRANSPORTE

RESUMO

Ao longo deste trabalho, estudamos a termodinâmica e calculamos os coeficientes de transporte de um plasma não-conforme com base em um modelo holográfico efetivo para a QCD, que surge de uma teoria Einstein-Dílaton em 5 dimensões. O modelo escolhido aqui é caracterizado por um espaço-tempo tipo buraco negro plano-simétrico assintoticamente anti-de Sitter (AdS) acoplado a um dílaton quadrático. O campo dilatônico é considerado dual a uma deformação por um operador da Teoria de Campos Conforme (CFT) da fronteira. A inclusão desse campo leva a uma quebra explícita da simetria conforme da teoria, além de garantir o confinamento linear no regime do infravermelho (IR). Para levar em conta os efeitos de temperatura finita, consideramos as soluções da ação de Einstein-Dílaton, em que a temperatura Hawking do buraco negro é identificada com a temperatura no plasma da teoria dual. Mostramos a existência de uma temperatura mínima, T_{min}, acima da qual surgem duas possíveis soluções: uma associada com os buracos negros grandes e outra com os buracos negros pequenos. Os resultados encontrados para as quantidades termodinâmicas, como entropia, calor específico, energia livre e velocidade do som, são consistentes com outros modelos holográficos. Investigando as perturbações na métrica e no dílaton, obtivemos também o coeficiente de viscosidade de cisalhamento η a partir de uma comparação direta das relações de dispersão das flutuações com os modos da hidrodinâmica relativística.

Palavras-chave: Correspondência AdS/CFT; QCD Holográfica; Branas Negras; Hidrodinâmica Relativística.

ADS/QCD CORRESPONDENCE WITH QUADRATIC DILATON: THERMODYNAMICS AND TRANSPORT COEFFICIENTS

ABSTRACT

Throughout this work, we study the thermodynamics and calculate the transport coefficients of a plasma based on an effective holographic model for QCD, that arises from an Einstein-Dilaton theory in 5 dimensions. The model chosen here is characterized by an asymptotically AdS black hole spacetime coupled to a quadratic dilaton. The dilatonic field is considered dual to a deformation by an operator in the boundary Conformal Field Theory (CFT). The inclusion of this field leads to an explicit break of the conformal symmetry, in addition to guaranteeing linear confinement in the infrared (IR) regime. To take into account the finite-temperature effects, we consider the solutions of the Einstein-Dilaton action, where the Hawking temperature of the black hole is identified with the plasma temperature of the dual theory. We show the existence of a minimum temperature T_{min}, above which two possible solutions appear: one identified with the large black holes and the other with the small black holes. The results found for thermodynamic quantities, such as entropy, specific heat, free energy, and speed of sound, are consistent with other holographic models. Investigating perturbations in the metric and dilaton, we also obtained the shear viscosity coefficient η from a direct comparison of the dispersion relations of the fluctuations with the modes of the relativistic hydrodynamics.

Keywords: AdS/CFT Correspondence; Holographic QCD; Black Branes; Relativistic Hydrodynamics.

Lista de Figuras

1 Comportamento da constante de acoplamento $\alpha_s(Q)$ com o momento Q (figura extraída da referência [1]). 9

2 Diagrama de fases da QCD (extraído da referência [6]). 10

1.1 Representação gráfica dos espaços-tempo AdS (figura extraída de [21]). Na figura vemos a coordenada radial r, com a fronteira conforme localizada em $r \to \infty$. 15

2.1 O fator de deformação para vários valores de c; obtemos o AdS para $c = 0$. . . 32

2.2 Temperatura em função da posição do horizonte, z_h. A linha preta tracejada indica o valor do z_{min}. A linha azul (vermelha) representa a solução de buraco negro grande (pequeno). 33

2.3 Densidade de entropia em função da posição do horizonte (esquerda) e da temperatura (direita). 34

2.4 Energia livre F como função da posição do horizonte (lado esquerdo) mostra uma transição de fases. À direita F vs T mostra a presença da transição de fases para $T_{cr} > T_{min}$. 35

2.5 A Densidade de energia como função da posição de horizonte decresce rapidamente a zero depois do valor z_{min} 35

2.6 Anomalia do traço como função da temperatura 36

2.7 Calor específico como função da posição do horizonte (esquerda), como função da temperatura (direita) as linhas tracejadas representam z_{min} e T_{min}. Nas duas Figura s é evidente as faixas com sinal contrario relacionadas com as fases estável e instável dos buracos negros. 37

2.8 Velocidade do som em função temperatura, a linha ponteada horizontal corresponde ao valor conforme 1/3 38

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 9

1 CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT **13**

1.1 Espaço-tempo Anti-de Sitter 13

1.2 Teorias de Campo Conforme 16

1.2.1 Funções de correlação de teorias de campo 18

1.3 Elementos de hidrodinâmica relativística 21

1.4 Origem da correspondência AdS/CFT 23

1.5 QCD Holográfica 25

2 QCD HOLOGRÁFICA À TEMPERATURA FINITA **29**

2.1 O espaço-tempo de fundo 29

2.2 Propriedades termodinâmicas 32

2.2.1 Temperatura 33

2.2.2 Entropia e densidade de entropia 34

2.2.3 Energia livre e densidade de energia 34

2.2.4 A anomalia do traço 36

2.2.5 Calor específico 36

2.2.6 Velocidade do som 37

2.3 Comportamento assintótico 38

2.3.1 Limite de grandes buracos negros 38

2.3.2 Limite de pequenos buracos negros 39

3 PERTURBAÇÕES GRAVIDILATÔNICAS **41**

3.1 Equações de Einstein linearizadas 42

3.2 Perturbações e transformações de calibre 43

3.3 Equações de perturbação invariantes de calibre 44

3.3.1 Setor tensorial 44

3.3.2 Setor vetorial 46

3.3.3 Setor escalar 49

DISCUSSÃO 52

REFERÊNCIAS **54**

INTRODUÇÃO

A teoria que descreve o comportamento dos quarks é a Cromodinâmica Quântica (QCD). Essa é uma Teoria Quântica de Campos (TQC) baseada no grupo $SU(3)$. As partículas que são trocadas na interação entre os quarks são os glúons. A fonte dessa interação é a carga de cor. Ao contrário da interação eletromagnética, descrita pela Eletrodinâmica Quântica (QED), em que as partículas de troca da interação, os fótons, são eletricamente neutros, os glúons podem transportar carga de cor durante a interação; portanto, os glúons podem interagir uns com os outros, o que complica significativamente a descrição das interações.

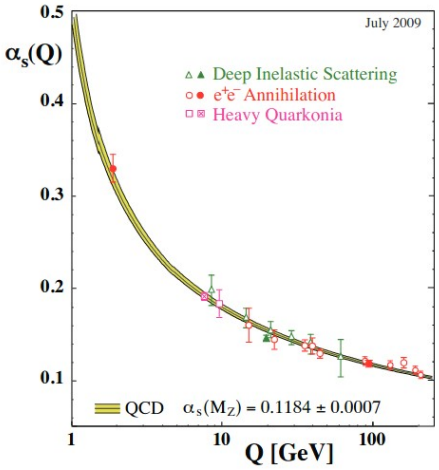

Figura 1: Comportamento da constante de acoplamento $\alpha_s(Q)$ com o momento Q (figura extraída da referência [1]).

O fato de que a constante de acoplamento α_s, na QCD, depende do inverso do logaritmo da energia, $1/\log(E)$, faz com que os métodos perturbativos usuais da TQC não sejam amplamente aplicáveis. As interações na QCD de altas energias, em que métodos tradicionais como as expansões diagramáticas ou as simulações de Monte Carlo têm sucesso, são bem conhecidas e têm sido frequentemente comparadas com os resultados experimentais, como na Figura 1, onde podemos ver o comportamento da constante de acoplamento em função do momento Q, bem como uma comparação dos dados experimentais com as aproximações da QCD. Por outro lado, no regime de baixas energias, em que os quarks e os glúons estão confinados, a descrição teórica da interação nuclear forte ainda representa um desafio. Uma parte desse desafio está no estudo da estrutura de fases da QCD (Figura 2), que nos fornece informações sobre as temperaturas (T) e os potenciais químicos bariônicos (μ_B) em que as mudanças de estado dos quarks e dos glúons ocorrem. Em baixas temperaturas e para pequenos valores

de μ_B, as partículas ainda estão fortemente acopladas. Em altas temperaturas, as partículas formam um plasma de quarks e glúons (QGP), observado inicialmente no *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) [2–5]. Neste plasma as partículas estão desconfinadas, porém elas se comportam (aproximadamente) como um fluido perfeito, fortemente interagente [6], que pode ser descrito pela hidrodinâmica relativística. A correspondência AdS/CFT, formulada por Maldacena em 1998 [7], representa uma alternativa para esse estudo, não apenas em relação às propriedades estáticas do QGP, tais como o espectro e as propriedades termodinâmicas, onde a QCD na rede tem sucesso, mas também na descrição de propriedades dinâmicas no tempo real, onde é necessário o desenvolvimento de novos métodos não perturbativos.

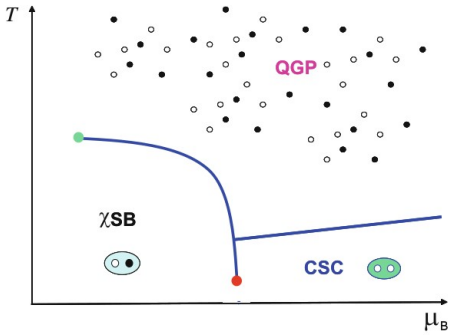

Figura 2: Diagrama de fases da QCD (extraído da referência [6]).

A correspondência AdS/CFT nos permite estabelecer uma relação entre modelos gravitacionais num espaço-tempo assintoticamente anti-de Sitter (AdS) em $d+1$ dimensões, baseados em Teoria de (Super)Cordas, e uma Teoria de Campos Conforme (CFT) na fronteira d-dimensional deste espaço-tempo. A implementação mais célebre da correspondência estabelece uma relação entre a teoria $\mathcal{N}=4$ Super-Yang-Mills (SYM) $4d$-dimensional e a Teoria de Supercordas do tipo IIB em um espaço $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ [7].

No contexto da correspondência AdS/CFT e, especialmente, em modelos de QCD Holográfica (HQCD) como o de Gubser e Nellore [8] e o *Improved* HQCD [9–11], torna-se possível obter uma boa aproximação à QCD por meio de uma CFT deformada. Nessa aproximação, a deformação da CFT pode ser interpretada como uma quebra da simetria conforme da QCD no limite de número de cores (N_c) grande [12]. A deformação da CFT é inserida por meio da presença de um campo no espaço-tempo assintoticamente AdS. As escolhas do espaço-tempo de fundo e do tipo de campo dependem das caraterísticas da teoria dual que se pretende estudar.

Em modelos holográficos, uma teoria de campos conforme à temperatura zero é dual a uma teoria gravitacional num espaço-tempo assintoticamente AdS_5. Por outro lado, um

fluido fortemente interagente, descrito por uma teoria de campos à temperatura finita, é dual a uma teoria gravitacional no espaço-tempo de um buraco negro AdS_5 plano-simétrico (brana negra). A temperatura de Hawking do buraco negro está associada à temperatura da teoria de campos dual, assim como a entropia e as demais quantidades termodinâmicas. De acordo com a referência [13], é possível obter algumas características da QCD por meio de um sistema Einstein-Dílaton no qual o campo escalar apresenta um comportamento quártico na região do ultravioleta e um comportamento quadrático na região do infravermelho. Nas referências [14,15] foi mostrado que um campo escalar com perfil quadrático garante o confinamento linear no infravermelho (IR). Várias interpolações entre esses dois limites foram apresentadas em [12], onde foram obtidos espectros dos setores escalar e tensorial dos glúons compatíveis com a QCD na rede, mas ainda não são compatíveis com a anomalia do traço da QCD com N_c grande. Posteriormente, na referência [16], o estudo deste modelo foi estendido para à temperatura finita. Quantidades termodinâmicas como densidade de entropia, calor especifico e velocidade do som foram calculadas nesse trabalho. Além disso, foram encontrados os coeficientes de viscosidade do plasma não-conforme a partir do estudo das perturbações lineares do buraco negro. Neste contexto as perturbações da métrica do buraco negro, acopladas às perturbações do campo escalar, representam perturbações no estado de equilíbrio térmico do plasma não-conforme da teoria de campos dual.

Para se obter os coeficientes de transporte, utilizando a correspondência AdS/CFT, é necessário considerar a expansão perturbativa da métrica de fundo, ou seja, as perturbações gravitacionais do buraco negro assintoticamente AdS. Na sequência, uma das possibilidades é expandir a ação até segunda ordem nas perturbações e escrever a ação *on-shell* em termos de variáveis invariantes de calibre. Então, é possível calcular as funções de Green retardadas e usar a fórmula de Kubo para extrair os coeficientes de viscosidade.

Nas referências [17, 18], emprega-se esses procedimentos para encontrar a viscosidade de cisalhamento e a velocidade do som por meio da perturbação de um buraco negro assintoticamente AdS_5, dual a um plasma conforme. Posteriormente, ampliou-se essa análise, calculando-se o espectro de modos quase-normais (QNM) em [19]. Foi mostrado também que é possível extrair os coeficientes de viscosidade, tomando-se o chamado limite hidrodinâmico dos QNM, com a vantagem de evitar a necessidade de escrever as perturbações até segunda ordem. Para isso, assume-se condições de fronteira de onda entrante no buraco negro (considerando que os buracos negros classicamente não emitem, a condição de onda sainte não é relevante neste caso) e condições de Dirichlet na fronteira AdS. Para os modelos *Improved* HQCD, pode-se calcular tanto o coeficiente de viscosidade de cisalhamento, recuperando o

resultado universal $\eta/s = 1/4\pi$, quanto o coeficiente de viscosidade de volume, obtendo um resultado diferente de zero, com uma dependência na temperatura, como se esperaria de um plasma não-conforme [11].

O modelo holográfico com dílaton quadrático à temperatura finita foi estudado primeiramente em [20], como uma solução particular no caso de um potencial químico zero. O comportamento das quantidades termodinâmicas obtidas é similar àquele das quantidades encontradas nos modelos IHQCD [9–11]. Um dos nossos objetivos aqui é ampliar o estudo da termodinâmica desse modelo holográfico com dílaton quadrático. Além disso, vamos calcular os coeficientes de viscosidade do plasma não-conforme, tomando o limite hidrodinâmico dos QNMs e comparando as relações entre frequência e número de onda, semelhantes àquelas encontradas em [19], com os modos de um fluido relativístico.

Segue abaixo a organização do material contido nessa dissertação. No capítulo 1, apresentamos os aspectos mais básicos requeridos para compreender os fundamentos da correspondência AdS/CFT. Além disso, são apresentados brevemente alguns modelos holográficos, focando principalmente em modelos HQCD com um espaço-tempo $5d$ assintoticamente AdS e um campo escalar dilatônico Φ geral. O capítulo 2 contém uma análise detalhada da termodinâmica de um buraco negro plano-simétrico, bem como uma análise assintótica de diversas quantidades termodinâmicas nos limites de pequenos e de grandes buracos negros. No Capítulo 3, apresentamos um estudo das perturbações lineares acopladas na métrica e no dílaton (perturbações gravidilatônicas), em termos de variáveis invariantes de calibre, e os os coeficientes de viscosidade encontrados. Para finalizar, são resumidos alguns aspectos termodinâmicos do modelo HQCD adotado aqui.

1 CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT

O estudo de sistemas fortemente acoplados, como aqueles encontrados nos experimentos do RHIC, mostrou a existência de uma transição de fases de um estado confinado para o QGP. As caraterísticas físicas apresentadas por esses sistemas mostram a necessidade do desenvolvimento de métodos não-perturbativos. Ao longo das últimas duas décadas, a correspondência AdS/CFT e suas variações têm tido êxito na descrição de sistemas fortemente acoplados. Tomando por base as referências [6, 19, 21, 23, 24], apresentamos neste capítulo um breve resumo dos aspectos da correspondência que serão utilizados mais adiante.

1.1 Espaço-tempo Anti-de Sitter

O espaço AdS faz parte dos espaços com curvatura constante; no caso do AdS, temos curvatura constante negativa. Uma das formas de explorar as características geométricas desse espaço é a partir do conceito de um espaço mergulhado em outro [22]. No exemplo simples da esfera S^2, vamos considerar um espaço base $3d$ euclidiano, com coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2, 3$, cuja métrica é dada por

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \,. \tag{1.1}$$

A superfície esférica, mergulhada nesse espaço euclidiano, é formada por todos os pontos que satisfazem a relação

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L^2, \tag{1.2}$$

sendo L o raio da esfera. Realizando a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x_1 = L \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \\ x_2 = L \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \\ x_3 = L \cos\theta, \end{cases} \tag{1.3}$$

a métrica induzida sobre a superfície pode ser escrita como $ds^2 = L^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2)$. Tanto a esfera quanto o espaço euclidiano $3d$ são invariantes sob o grupo de rotações $SO(3)$: qualquer ponto da superfície esférica pode ser mapeado em um outro mediante uma transformação de $SO(3)$. O vinculo entre os espaços, dado por (1.2), permite dizer que a esfera S^2 pode ser vista como um espaço mergulhado no $\mathbb{R}^3$.

Uma análise similar pode ser feita para o espaço hiperbólico H^2. Consideramos um

espaço base de Minkowski $3d$ e definimos H^2 como a superfície

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = -L^2, \tag{1.4}$$

sendo L o raio de curvatura. Usando coordenadas levemente diferente das esféricas

$$\begin{cases} X = L \operatorname{senh} \rho \cos \varphi, \\ Y = L \operatorname{senh} \rho \operatorname{sen} \varphi, \\ Z = L \cosh \rho, \end{cases} \tag{1.5}$$

podemos escrever a métrica da superfície definida por (1.4) como $ds^2 = L^2(d\rho^2 + \operatorname{senh}^2\rho\, d\phi^2)$. Nesse caso, os dois espaços são invariantes sob $SO(1,2)$. Consequentemente, H^2 pode ser mergulhado em um espaço tipo Minkowski, mas não no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ [6].

Seguindo a ideia anterior, por simplicidade, vamos descrever o espaço tempo AdS_2 mergulhado em um espaço-tempo plano. Diferentemente dos casos anteriores, nosso espaço base é um espaço-tempo plano com duas coordenadas temporais, cuja métrica é dada por

$$ds^2 = -dZ^2 - dX^2 + dY^2\,. \tag{1.6}$$

Definimos uma superfície formada pelos pontos que satisfazem o vinculo

$$-Z^2 - X^2 + Y^2 = -L^2, \tag{1.7}$$

onde L é o raio do AdS. Mediante uma transformação de coordenadas $Z = L\cosh\rho\cos\tau$, $X = L\cosh\rho \operatorname{sen}\tau$ e $Y = L\operatorname{senh}\rho$, podemos escrever a métrica induzida sobre a superfície, em coordenadas globais, como

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2\rho\, d\tau^2 + d\rho^2). \tag{1.8}$$

De modo similar aos casos descritos anteriormente, podemos realizar uma mudança de coordenadas de modo que os pontos representados no espaço-tempo $3d$ plano possam ser mapeados na superfície formada pelos pontos que satisfazem o vínculo (1.7). Assim, temos um espaço-tempo AdS mergulhado em um espaço plano. A metrica (1.8) pode ser escrita em otras coordenadas, por exemplo, as coordenadas de Poincaré (t, r), no qual X, Y e Z vem dadas

por

$$\begin{cases} X = Lrt, \\ Y = \dfrac{Lr}{2}\left(-t^2 + \dfrac{1}{r^2} - 1\right), \\ Z = \dfrac{Lr}{2}\left(-t^2 + \dfrac{1}{r^2} + 1\right), \end{cases} \tag{1.9}$$

com $r > 0$, $t : -\infty \to \infty$. A métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2}\, dr^2 - L^2 r^2\, dt^2. \tag{1.10}$$

A métrica do espaço AdS_{d+1}, com d dimensões espaciais, pode ser escrita como

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2}(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu), \tag{1.11}$$

onde $x^0 = t$, $\mu = 0, .., d$ e $r \geq 0$. Nestas coordenadas, para um r fixo, temos um espaço-tempo chato de Minkowski $\mathbb{R}^{d-1,1}$.

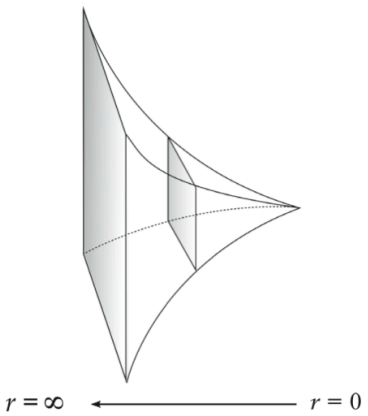

Figura 1.1: Representação gráfica dos espaços-tempo AdS (figura extraída de [21]). Na figura vemos a coordenada radial r, com a fronteira conforme localizada em $r \to \infty$.

Na Figura 1.1, podemos observar como a coordenada r pode ser interpretada como uma coordenada radial no espaço-tempo AdS. Os comportamentos da geometria para $r \to 0$ e $r \to \infty$ são particularmente interessantes. Por um lado, quando $r \to 0$, temos uma (pseudo-)singularidade devido à escolha das coordenadas. Por outro lado, quando $r \to \infty$ a métrica tem uma divergência quadrática característica do comportamento assintótico dos espaços-tempo AdS. É conveniente trocar a coordenada r por uma nova coordenada radial $z = L^2/r$, a qual será amplamente utilizada mais adiante. Neste sentido é importante definir a *fronteira conforme* do espaço-tempo AdS como o espaço resultante quando $z \to 0$, que no contexto

da métrica (1.11) corresponde ao espaço-tempo chato em $r \to \infty$, ilustrado na Figura 1.1. Além disso, temos que mencionar que a métrica de fundo pode levar a diferentes fronteiras conformes, sendo que todas elas estão relacionadas por transformações conformes.

1.2 Teorias de Campo Conforme

Em geral, as simetrias conformes estão associadas às transformações que deixam a métrica $g_{\mu\nu}$ invariante, exceto por um fator de escala, isto é, se tivermos $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ a transformação conforme produz uma mudança na métrica da forma

$$g_{\mu\nu}(x) \to \Omega(x)^{-2} g_{\mu\nu}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x). \tag{1.12}$$

Esse tipo de transformação preserva os ângulos e, consequentemente, a estrutura causal, mas altera o comprimento (intervalo) entre pontos do espaço-tempo. As CFT's consideradas aqui são invariantes sob o grupo de transformações conformes em um espaço-tempo de d dimensões, e possuem um tensor energia-momento $T^{\mu\nu}(x)$ local, conservado.

O grupo conforme em d dimensões é resultado da extensão do grupo de Poincaré. No caso em que $d > 2$, temos as translações com operador associado P_μ, as dilatações D, as transformações de Lorentz $J_{\mu\nu}$ e as transformações conformes especiais K_ν. Esses geradores satisfazem a álgebra de Poincaré, bem como as relações de comutação abaixo [21]:

$$\begin{aligned} &[D, K_\mu] = -iK_\mu, \qquad [D, P_\mu] = iP_\mu, \qquad [K_\mu, P_\nu] = -2i(-J_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} D), \\ &[D, J_{\mu\nu}] = 0, \qquad [K_\mu, K_\rho] = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, K_\rho] = i(\eta_{\mu\nu} K_\nu + \eta_{\nu\rho} k_\mu). \end{aligned} \tag{1.13}$$

A álgebra conforme em d dimensões é equivalente ao $SO(d, 2)$ na assinatura de Minkowski e equivalente ao $SO(d+1, 1)$ na assinatura euclidiana [24].

As teorias quânticas de campo que apresentam operadores locais $\mathcal{O}(x^\mu)$ que podem ser classificados pelas suas propriedades de transformação sob os grupos menores, que compõem o grupo conforme $SO(d, 2)$. Os operadores com a dimensão de escala Δ do campo se transformam da seguinte forma sob $SO(2)$:

$$\mathcal{O}_\Delta(\lambda x^\mu) = \lambda^{-\Delta} \mathcal{O}_\Delta(x^\mu) \Leftrightarrow [D, \mathcal{O}_\Delta(0)] = -i\Delta \mathcal{O}_\Delta(0). \tag{1.14}$$

Na quantização radial [24], o espaço de Hilbert da CFT vem dado por corte radial. Neste espaço por exemplo, o operador dilatações D, gera a evolução de um estado entre diferentes cortes. Os operadores aniquilados pelos geradores conformes especiais K^μ na ori-

gem são conhecidos como operadores *primários*. Para uma posição arbitrária, as relações de comutação são dadas por:

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, \mathcal{O}_\Delta(x)] &= i\partial_\mu \mathcal{O}_\Delta(x), \\
[J_{\mu\nu}, \mathcal{O}_\Delta(x)] &= \left[i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \Sigma^R_{\mu\nu}\right]\mathcal{O}_\Delta(x), \\
[D, \mathcal{O}_\Delta(x)] &= i(x^\mu\partial_\mu - \Delta)\mathcal{O}_\Delta(x), \\
[K_\mu, \mathcal{O}_\Delta(x)] &= \left[i(x^2\partial_\mu - 2x^\nu_\mu\partial_\nu + 2x^\nu\Delta) - 2x^\nu\Sigma^R_{\mu\nu}\right]\mathcal{O}_\Delta(x),
\end{aligned}
$$

onde $\Delta \geq (d-2)/2$ é a dimensão conforme do operador primário e $\Sigma^R_{\mu\nu}$ são as matrizes na representação irredutível do spin R. A dimensão conforme depende do spin R. Existem também operadores *descendentes* que são definidos pela sua atuação com P^μ sobre um operador primário, sendo que tanto P^μ quanto K^μ permitem aumentar ou diminuir a dimensão Δ, [24], ou seja, a atuação de um operador local junto com P^μ ou K^μ permite aumentar ou diminuir a dimensão conforme Δ.

A invariância sob transformações conformes impõem restrições na forma das funções de correlação das teorias quânticas de campos, e permite calcular as funções de correlação com um numero manejável de parâmetros, como a dimensão de escala [21, 24]. Por exemplo, para operadores escalares, as funções de correlação de dois e três pontos são

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\rangle = \delta_{1,2}\prod_{i<j}^{2}|x_i - x_j|^{-\Delta}, \tag{1.15}$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x^3)\rangle = c_{123}\prod_{i<j}^{3}|x_i - x_j|^{\Delta-2\Delta_i-2\Delta_j}, \tag{1.16}$$

$$\vdots \tag{1.17}$$

onde $\Delta = \sum_i \Delta_i$ são a soma das dimensões dos operadores na correlação. É possível também fazer uma expansão do produto de operadores como combinações lineares de operadores conformes na vizinhança do ponto. O calculo das funções de correlação é notoriamente difícil, já que envolve o manejo de um grande número de termos. Porém a informação contida nas funções de correlação das CFT's, por sua vez, podem ser obtidas tomando derivadas funcionais da função gerador, ou seja,

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)...\rangle_{CFT} = \left.\frac{\delta^n \mathcal{W}[\phi_{\Delta_i(0)}]}{\delta\phi_{\Delta_1}(x_1)\delta\phi_{\Delta_2}(x_2)\ldots}\right|_{\phi_{\Delta_i}=0}, \tag{1.18}$$

onde $\phi_{\Delta_i}(x)$ é a fonte clássica associada ao operador. O campo fonte pode ser inserido na ação da teoria de campo como um termo fonte e daí podemos ter a função geradora da teoria de campos,

$$S' = S - \int d^d \phi_{\Delta_i(0)}(x)\mathcal{O}(x). \tag{1.19}$$

Com isso, podemos calcular a função de partição da ação S' na assinatura Euclidiana,

$$\mathcal{Z}[\phi_{\Delta_i(0)}] = \left\langle \exp\left(\int d^d x \phi_{\Delta_i}(x)\mathcal{O}_{\Delta_i}(x)\right)\right\rangle_{CFT}. \tag{1.20}$$

1.2.1 Funções de correlação de teorias de campo

Para uma teoria quântica de campos relativística em um espaço-tempo de Minkowski d-dimensional, vamos discutir a estrutura de índices de Lorentz das funções de correlação retardadas do tensor energia-momento com base na revisão de Kovtun e Starinets em [19].

As funções de Green sob análise são

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -i\theta(x^0 - y^0)\left\langle[\hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \hat{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{y})]\right\rangle, \tag{1.21}$$

onde é assumida a invariância da teoria por rotações e translações. Dado que os valores esperados referem-se a estados invariantes sob translações, é conveniente empregar a transformada de Fourier das funções de Green

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}), \tag{1.22}$$

onde $\mathbf{k} = (\kappa_0, \kappa)$ é o vetor momento linear d-dimensional, $\mathbf{kx} = \kappa_0 x^0 + \kappa\mathbf{x}$. Aqui é assumido que todas as cargas globais são nulas no estado de equilíbrio, ou seja, os sistemas considerados têm potenciais químicos nulos. Assim, a invariância CPT (Carga, Paridade, Tempo Reverso) do estado em equilíbrio e as simetrias do tensor energia-momento implicam em

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = G_{\alpha\beta,\mu\nu}(\mathbf{k}), \tag{1.23}$$

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = G_{\nu\mu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = G_{\mu\nu,\beta\alpha}(\mathbf{k}). \tag{1.24}$$

A conservação de $\hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ indica que é possível definir as funções de correlação de modo que satisfaçam as identidades de Ward $k^\mu G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 0$ e $\eta^{\mu\nu} G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 0$, se a teoria é invariante por mudanças na escala.

As funções de correlação de dois pontos do tensor energia-momento, no vácuo, podem

ser escritas como uma soma de cinco termos admitidos pelas simetrias mencionadas anteriormente e proporcionais a $\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}$, $(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}+\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha})$, $(\eta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta+k_\mu k_\nu\eta_{\alpha\beta})$, $(\eta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta+\eta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta+\eta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha+\eta_{\nu\beta}k_\mu k_\beta)$ e $k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta$. Porém, só duas combinações lineares compatíveis com a hermeticidade de $\hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ e a invariância sob rotações implica $G_{\mu\nu,\alpha\beta}(k_0,\mathbf{k})=G_{\mu\nu,\alpha\beta}(-k_0,\mathbf{k})^*$. As duas combinações podem ser escolhidas como $P_{\mu\nu}P_{\alpha\beta}$ e $P_{\mu\alpha}P_{\nu\beta}+P_{\mu\beta}P_{\nu\alpha}$ onde $P_{\mu\nu}$ é dado por

$$P_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}. \tag{1.25}$$

Uma forma conveniente de escrever a função de Green é

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k})=P_{\mu\nu}P_{\alpha\beta}G_B(\mathbf{k}^2)+H_{\mu\nu,\alpha\beta}G_S(\mathbf{k}^2), \tag{1.26}$$

onde

$$H_{\mu\nu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}(P_{\mu\alpha}P_{\nu\beta}+P_{\mu\beta}P_{\mu\beta})-\frac{1}{d-1}P_{\mu\nu}P_{\alpha\beta}, \tag{1.27}$$

é um projetor sobre tensores simétricos conservados e sem traço, construído de maneira de satisfazer $\eta^{\mu\nu}H_{\mu\nu,\alpha\beta}=0$. Se a teoria tem invariância por mudanças de escala, tem-se $G_B(\mathbf{k}^2)=0$ e a função de correlação tem a forma $G_{\mu\nu,\alpha\beta}=H_{\mu\nu,\alpha\beta}G_S(\mathbf{k}^2)$. No caso em que o valor esperado refere-se a um estado sem invariância por transformações de Lorentz, como o estado de um sistema em equilíbrio termodinâmico em um ensemble canônico, é conveniente separar $H_{\mu\nu,\alpha\beta}$ em dois projetores ortogonais:

$$P_{\mu\nu}=P^T_{\mu\nu}+P^L_{\mu\nu}, \tag{1.28}$$

onde $P^T_{\mu\nu}$ e $P^L_{\mu\nu}$ são definidos por

$$P^T_{00}=0,\qquad P^T_{0i}=0,\qquad P^T_{ij}=\delta_{ij}=\frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2},\qquad P^L_{\mu\nu}=P_{\mu\nu}-P^T_{\mu\nu}, \tag{1.29}$$

e satisfazem as relações $k^\mu P^T_{\mu\nu}=k^\mu P^L_{\mu\nu}=0$. Qualquer expressão construída com $P^T_{\mu\nu}$ e $P^L_{\mu\nu}$ satisfaz o vínculo de conservação. Um par de combinações importantes que formam projetores são

$$S_{\mu\nu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}(P^T_{\mu\alpha}P^L_{\nu\beta}+P^L_{\mu\alpha}P^T_{\nu\beta}+P^T_{\mu\beta}P^L_{\nu\alpha}+P^L_{\mu\beta}P^T_{\nu\alpha}), \tag{1.30}$$

que satisfaz $k^\mu S_{\mu\nu,\alpha\beta}=0$ e também $\eta^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}=0$. E uma outra combinação com as mesmas

propriedades é dada por

$$Q_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{d-1}\left[(d-2)P^L_{\mu\nu}P^L_{\alpha\beta} + \frac{1}{d-2}P^T_{\mu\nu}P^T_{\alpha\beta} - (P^T_{\mu\nu}P^L_{\alpha\beta} + P^L_{\mu\nu}P^T_{\alpha\beta})\right]. \tag{1.31}$$

Esses projetores são também ortogonais um ao outro, $S_{\mu\nu,\alpha\beta}\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\rho}Q_{\lambda\rho,\sigma\tau} = 0$. Portanto, o projetor $H_{\mu\nu,\alpha\beta}$, pode ser separado em

$$H_{\mu\nu,\alpha\beta} = S_{\mu\nu,\alpha\beta} + Q_{\mu\nu,\alpha\beta} + L_{\mu\nu,\alpha\beta}, \tag{1.32}$$

onde $L_{\mu\nu,\alpha\beta}$ é ortogonal a $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $Q_{\mu\nu,\alpha\beta}$. Desse modo, em uma teoria invariante de escala as funções de correlação podem ser escritas como a soma de três estruturas de índices independentes

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta} = S_{\mu\nu,\alpha\beta}G_1(k_0,\mathbf{k}^2) + Q_{\mu\nu,\alpha\beta}G_2(k_0,\mathbf{k}^2) + L_{\mu\nu,\alpha\beta}G_3(k_0,\mathbf{k}^2). \tag{1.33}$$

Além disso, é possível mostrar que devido à invariância sob rotações, os limites de $\mathbf{k} \to 0$ (com k_0 fixo) das três funções escalares coincidem

$$\lim_{\mathbf{k}\to 0} G_1(k_0,\mathbf{k}^2) = \lim_{\mathbf{k}\to 0} G_2(k_0,\mathbf{k}^2) = \lim_{\mathbf{k}\to 0} G_3(k_0,\mathbf{k}^2). \tag{1.34}$$

Quando a teoria não é invariante por mudanças na escala, é necessário definir duas funções para definir $G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k})$ da forma

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = &\left[((P^T_{\mu\nu}P^T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(P^T_{\mu\nu}P^L_{\alpha\beta} + P^L_{\mu\nu}P^T_{\alpha\beta})\right] C_T(k_0,\mathbf{k}^2) \\ &+ \left[((P^L_{\mu\nu}P^L_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(P^T_{\mu\nu}P^L_{\alpha\beta} + P^L_{\mu\nu}P^T_{\alpha\beta})\right] C_L(k_0,\mathbf{k}^2) \\ &+ S_{\mu\nu,\alpha\beta}G_1(k_0,\mathbf{k}^2) + Q_{\mu\nu,\alpha\beta}G_2(k_0,\mathbf{k}^2) + L_{\mu\nu,\alpha\beta}G_3(k_0,\mathbf{k}^2). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Para uma teoria 4-dimensional à temperatura zero, escolhendo $k_\mu = (-\omega, 0, 0, q)$, pode-se encontrar as funções de correlação listadas abaixo.

As funções de correlação da densidade de momento transverso são

$$G_{tx^1,tx^1}(k) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\omega^2 - q^2}G_1(\omega,q), \tag{1.36}$$

$$G_{tx^1,x^1x^3}(k) = -\frac{1}{2}\frac{q\omega}{\omega^2 - q^2}G_1(\omega,q), \tag{1.37}$$

$$G_{x^1x^3,x^1x^3}(k) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - q^2}G_1(\omega,q). \tag{1.38}$$

As correlações de densidade de momento longitudinal, densidade de energia e estresse diagonal

$$G_{tt,tt}(k) = \frac{1}{3}\frac{q^4}{(\omega^2 - q^2)^2}[2G_2(\omega, q) + 3C_L(\omega, q)], \tag{1.39}$$

$$G_{tt,tx^3}(k) = -\frac{1}{3}\frac{\omega q^3}{(\omega^2 - q^2)^2}[2G_2(\omega, q) + 3C_L(\omega, q)], \tag{1.40}$$

$$G_{tt,x^1x^1}(k) = \frac{1}{6}\frac{q^2}{(\omega^2 - q^2)}[2G_2(\omega, q) - 3C_L(\omega, q) - 3C_T(\omega, q)], \tag{1.41}$$

e a correlação de estresse transverso

$$G_{x^1x^2,x^1x^2}(k) = \frac{1}{2}G_3(\omega, q). \tag{1.42}$$

As funções de correlação de um sistema em equilíbrio térmico a baixas energias ($\omega \ll T$, $q \ll T$) são descritas na aproximação hidrodinâmica efetiva. Os polos das funções de Green retardadas de um sistema que apresenta um comportamento hidrodinâmico depende de um conjunto de parâmetros do fluido que representa o limite contínuo do sistema, que por sua vez, estão associadas com as singularidades das funções escalares. No caso $G_3(\omega, q)$, não apresenta singularidades porque não está acoplada com flutuações de densidade de momento ou energia. Por outro lado, as funções $G_1(\omega, q)$ e $G_2(\omega, q)$, tem polos simples $\omega = -i\gamma_\eta q^2$ e $\omega = \pm c_s q - i\Gamma_s q^2$, respectivamente. γ_η é uma constante proporcional à viscosidade de cisalhamento, c_s é a velocidade do som, e Γ_s também é proporcional à viscosidade de cisalhamento no modo do som.

1.3 Elementos de hidrodinâmica relativística

Em geral, um sistema com um grande numero de elementos interagentes, apresenta em algum limite um comportamento que pode ser descrito pela hidrodinâmica. Em um plasma descrito por uma teoria interagente à T finita, a escala de comprimento é dada pelo livre caminho médio ou pelo tempo de colisões sucessivas das partículas do sistema, que é inversamente proporcional à temperatura do plasma, [23]. Quando o comprimento de onda é muito maior que o caminho livre médio, ou seja quando $\omega \ll 1$ e $q \ll 1$, as flutuações do equilíbrio térmico do sistema são bem descritas pela hidrodinâmica. Está seção é um resumo do artigo [25] sobre flutuações hidrodinâmicas em teorias relativistas, mas focado na dinâmica do tensor energia momento, porém no artigo podemos encontrar a revisão para fluidos carregados. A dinâmica do sistema é dada por leis de conservação, em um espaço-

tempo com simetria translacional a corrente conservada é o tensor energia momento, $T^{\mu\nu}$, e a lei de conservação é

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Na hidrodinâmica escolhe-se descrever estados levemente fora do equilíbrio, expressados em termos de funções que mudam lentamente: a temperatura local $T(x)$ e o vetor $u^\mu(x)$ que representa a velocidade local do fluido , e se for o caso $\mu(x)$ o potencial químico local (associado à corrente conservada da simetria global $U(1)$). É possível decompor o tensor energia momento em componentes transversais e longitudinais respeito ao vetor u^μ em um espaço-tempo plano, usado o projetor $\Delta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$, como [26]

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{E} u^\mu u^\nu + \mathcal{P}\Delta^{\mu\nu} + (Q^\mu u^\nu + Q^\nu u^\mu) + t^{\mu\nu}, \tag{1.43}$$

onde os coeficientes $\mathcal{E}$ e $\mathcal{P}$ são escalares, Q^μ é um vetor transverso, ou seja, $u_\mu Q^\mu = 0$, $t^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, transverso e sem traço. Explicitamente eles são

$$\begin{aligned} \mathcal{E} =& u_\mu u_\nu T^{\mu\nu}, \qquad \mathcal{P} = \frac{1}{d}\Delta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \qquad Q_\mu = -\Delta_{\mu\alpha}u_\beta T^{\alpha\beta}, \\ t_{\mu\nu} =& \frac{1}{2}\left(\Delta_{\mu\alpha}\Delta_{\nu\beta} + \Delta_{\nu\alpha}\Delta_{\nu\beta} - \frac{2}{d}\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}\right)T^{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{1.44}$$

onde d é a dimensão espacial. A hidrodinâmica se centra em expressar os coeficientes $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$, Q^μ, $t^{\mu\nu}$ em termos das variáveis hidrodinâmicas, u_μ e T. As expressões para $T^{\mu\nu}$ em temos das variáveis hidrodinâmicas são chamadas de relações constitutivas, [25]. As relações constitutivas podem são escritas em expansão derivativa, ou seja como potências das derivadas das variáveis hidrodinâmicas. Nesta expansão, a ordem zero corresponde a um sistema não perturbado, ou seja, a um fluido ideal.

Neste ordem, Q^μ, $t^{\mu\nu}$ transversos não podem ser construídos, porque eles dependem das derivadas das variáveis hidrodinâmicas. Porém, os coeficientes $\mathcal{E}$ e $\mathcal{P}$ dependem de T e sua interpretação física vem de considerar que em estado de equilíbrio, $T^{\mu\nu} = diag(\epsilon, P, ..., P)$, onde ϵ é a densidade de energia P é a pressão em equilíbrio. Para um fluido movendo-se com velocidade constante u^μ, o tensor energia momento pode ser obtido realizando a correspondente transformação de Lorentz, [25] e temos

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu + P\Delta^{\mu\nu}, \tag{1.45}$$

podemos identificar então $\mathcal{E}(x) = \epsilon(x)$ com a densidade de energia local, $\mathcal{P}(x) = P(x)$ com a pressão local e $u^\mu(x)$ com a velocidade local do fluido. A equação de estado em equilíbrio

permite obter a densidade de energia $\epsilon = -P + Ts$, a densidade de entropia $s = \partial P/\partial T$. A partir da componente longitudinal da equação de conservação do tensor energia momento, é possível obter um a corrente de entropia conservada, $\partial_\mu(su^\mu) = 0$, que estabelece que a entropia não aumenta na hidrodinâmica não dissipativa, [25].

A hidrodinâmica a primeiro ordem, apresenta a necessidade de escolher um quadro de referencia (*frame*). No *frame* de Landau, onde a velocidade u^μ é escolhida para que $Q^\mu = 0$ e T para que $\mathcal{E} = \epsilon$. É necessário expressar os coeficiente $\mathcal{P}$, $t^{\mu\nu}$ em termos de variáveis hidrodinâmicas, para obter as relações constitutivas a primeira ordem. Neste caso existem duas quantidades escalares associadas ao tensor energia momento, além de T que podem ser construídas: $u^\lambda\partial_\lambda T$, $\partial_\lambda u^\lambda$. Também temos dois vetores transversos, $\Delta^{\mu\nu}\partial_\nu T$, $\Delta^{\mu\nu}\dot{u}_\nu$ com $\dot{u}_\nu \equiv u^\lambda\partial_\lambda u^\nu$. Existe também um tensor simétrico, transverso e sem traço

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \Delta^{\mu\alpha}\Delta^{\nu\beta}\left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - \frac{2}{d}\eta_{\alpha\beta}\partial_\mu u^\mu\right), \tag{1.46}$$

fazendo uso das equações a ordem zero, é possível escrever de forma simples a expansão derivativa para $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = P - \zeta\partial_\lambda u^\lambda + \mathcal{O}(\partial^2), \tag{1.47}$$

onde ζ é o coeficiente de viscosidade do volume que pode ser calculado de diferentes formas. Para o tensor $\sigma^{\mu\nu}$ temos só

$$t^{\mu\nu} = -\eta\sigma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\partial^2), \tag{1.48}$$

onde η é o coeficiente de cisalhamento. Então a relação constitutiva no *frame* do Landau pode ser tomada como [25]

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu + P\Delta^{\mu\nu} - \eta\Delta^{\mu\alpha}\Delta^{\nu\beta}\left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - \frac{2}{d}\eta_{\alpha\beta}\partial_\mu u^\mu\right) - \zeta\Delta^{\mu\nu}\partial_\lambda u^\lambda + \mathcal{O}(\partial^2). \tag{1.49}$$

Os coeficientes η, ζ, podem obter-se da teoria da resposta linear em termos das funções de correlação do tensor energia momento como vimos na seção anterior. Pode-se estabelecer que os coeficientes tem valores independentes do *frame* embora apareçam em lugares diferentes nas relações constitutivas.

1.4 Origem da correspondência AdS/CFT

Uma das primeiras tentativas de descrever as interações fortes foi a teoria de cordas. Nesse contexto, as interações quark-antiquark, são mediadas por cordas com uma certa tensão.

A teoria obteve sucesso ao estabelecer a relação massa-spin como $J = \alpha' m^2 + \alpha(0)$, para certos mésons. A relação é conhecida como trajetórias de Regge, onde α' é o inverso da tensão da corda, chamada de inclinação de Regge, e $\alpha(0)$ representa as correções quânticas. Posteriormente foi adotada a Cromodinâmica Quântica (QCD) como a teoria que melhor descreve as interações fortes. Em certos casos, entretanto, podemos ver que a QCD continua tendo semelhanças com a teoria de cordas. Se pensarmos nas linhas de campo de cor, elas formam um *tubo de fluxo* fino devido à auto-interação dos glúons, sendo que essas linhas podem ser interpretadas como cordas com uma certa tensão, dando origem a uma teoria de cordas efetiva.

Existe uma relação entre algumas teorias de campos de *gauge* e teorias de cordas. Um dos exemplos mais conhecidos envolve a relação entre a teoria $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills (SYM) $3+1$-dimensional, que é uma teoria de campos conforme (CFT), e a teoria de Supercordas tipo IIB em $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ [21], ou seja, o produto direto entre um espaço AdS e uma esfera, ambos de cinco dimensões.

As duas teorias possuem parâmetros livres que permitem estabelecer uma equivalência dinâmica entre elas. Do lado da SYM, temos a constante de acoplamento g_{YM} e o número de cores N_c, enquanto do lado AdS, temos a constante de acoplamento g_s e a razão L^2/α', onde L é o raio de curvatura e $\sqrt{\alpha'} = l_s$, sendo l_s o comprimento da corda. As relações entre estas constantes são dadas por

$$g_{YM}^2 = 2\pi g_s \qquad \text{e} \qquad 2g_{YM}^2 N_c = \frac{L^4}{\alpha'^2}. \tag{1.50}$$

A equivalência entre as teorias, estabelecida pela correspondência AdS/CFT, implica que toda a física da teoria de campos pode ser mapeada na física da teoria de cordas, no lado gravitacional, e vice-versa. Existem assim vários regimes da correspondência dependendo dos valores dos parâmetros presentes nas equações (1.50). Na referência [21], podemos encontrar um resumo dos diferentes regimes da correspondência AdS/CFT. Vamos considerar aqui o chamado limite de 't Hooft [27], no qual é considerado o limite de N_c grande ou $N_c \to \infty$ e $\alpha' \to 0$, mas de maneira que, quando $g_{YM} \ll 1$, a quantidade $g_{YM}^2 N_c$ seja grande. Nesse limite a teoria de campos dual descreve interações fortes a teoria dual gravitacional torna-se clássica, ou seja, espaço-tempo com curvatura pequena [21]. Além disso, neste limite é possível desprezar correções de teoria de cordas para a ação gravitacional.

Nesse regime da correspondência é possível estabelecer uma relação entre a função de partição do lado AdS em $(d+1)$ dimensões e as funções de correlação da CFT d-dimensional.

Essa relação, foi obtida pelos Gubser, Klebanov, Polyakov [28] e Witten [29] que ficou conhecida pela sigla GKP-W, pode ser escrita como

$$\langle e^{\int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} \rangle_{CFT} = e^{-S[\phi]}, \tag{1.51}$$

em geral do lado direito temos uma integral de caminho da ação gravitacional S, mas para o limite de N_c grade, a integral de caminho se reduz à exponencial da ação gravitacional para um campo escalar ϕ clássico $d+1$ dimensional, com condições de contorno na fronteira $\phi|_{u=0} = \phi_0$, a condição de contorno faz possível escrever um termo de superfície na fronteira AdS. Do lado esquerdo temos o funcional generatriz de uma teoria de campos d dimensional com ϕ_0 considerada uma fonte externa, [6]. No caso por exemplo de uma teoria de campos de calibre $4d$ (na fronteira AdS) está representada por uma teoria gravitacional clássica $10d$.

1.5 QCD Holográfica

A descrição das interações fortes usando a QCD apresenta dificuldades importantes. Por um lado, temos que os parâmetros livres, como a constante de acoplamento, assumem valores grandes na fase de confinamento (baixas energias). Por outro lado, mesmo na fase QGP, ainda fortemente interagente, a teoria apresenta apenas invariância conforme no regime ultravioleta . Essas duas características tornam inviável a obtenção de quantidades observáveis a partir da utilização dos métodos perturbativos.

Os modelos baseados na correspondência AdS/CFT evoluíram em duas direções principais ao longo das últimas duas décadas. Alguns foram desenvolvidos diretamente da teoria de cordas e são conhecidos como modelos *top-down*. Nesses modelos, a teoria de campo é completamente identificada e todos os parâmetros da ação gravitacional dual são fixados. Em geral, nos modelos *top-down*, a transição de fase de confinamento e de simetria quiral da QCD é interpretada como uma mudança na geometria da teoria gravitacional dual. Em tais modelos, consegue-se reproduzir algumas características da dinâmica da QCD no infravermelho (IR), mas não é possível obter, por exemplo, a característica linear do um espectro de mésons, decretas pelas das trajetórias de Regge [30]. Logo após, surgem os chamados modelos *bottom-up* [31, 32]. Nesses modelos são considerados operadores, inicialmente relevantes, da teoria de campos e é construída a ação com seus campos gravitacionais duais. Isso permite descrever efetivamente diferentes teorias de calibre, em contraste com os modelos *top-down*, já que existe uma liberdade na escolha das constante de acoplamento, massas e potenciais, [33]. Em esse sentido, qualquer escolha deve ser comparada com resultados obtidos para a teo-

ria de campos, porém na escolha são consideradas as principais características dos modelos derivados das cordas. Os modelos *bottom-up*, geralmente são modelos gravitacionais $5d$ com campos acoplados, eles apresentam varias possibilidades. A inserção do gap de massa mediante um *hard-cut-off* na geometria, que leva a um espectro discreto de energia, [15]. Uma outra possibilidade são os modelos *soft-wall*, [14] no qual originalmente, o gap de massa é inserido mediante um campo escalar não-uniforme em um espaço-tempo AdS, obtendo o espectro de massa linear, de acordo com as trajetórias de Regge. Os modelos conseguem reproduzir holograficamente a quebra da simetria quiral da QCD, porém o cálculo das correlações para gluôns e portanto dos coeficientes de transporte não predizem resultados confiáveis.

Em modelos holográficos inspirados no *soft-wall* original, se permite uma descrição não-perturbativa da QCD, baseada em uma teoria do tipo Einstein-Dílaton ou Einstein-Maxwell-Dílaton. Para descrever a teoria de Super-Yang-Mills $4d$, considera-se uma ação Einstein-Dílaton $5d$ da forma

$$S = M_p^3 N_c^2 \int d^5x \sqrt{-g}[R + \mathcal{L}_\phi], \tag{1.52}$$

onde M_p é a escala de Planck efetiva, N_c é o numero de cores, $g = \det(g_{mn})$, com coordenadas $5D$ $\{\mu, z\}_{\mu=0,x^i}$, os x^i serão usados como índices espaciais, e $\mathcal{L}_\phi$ é a lagrangiana do dílaton, dada por

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{4}{3} g^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi + V(\phi). \tag{1.53}$$

Para escrever o escalar de Ricci R, vamos definir os símbolos de Christoffel $\Gamma^p_{mn} = \frac{1}{2} g^{pq}(\partial_m g_{pn} + \partial_n g_{pm} - \partial_q g_{mn})$, e o tensor de Ricci $R_{mn} = R^p_{mpn} = \partial_p \Gamma^p_{nm} - \partial_n \Gamma^p_{pm} + \Gamma^p_{pq}\Gamma^q_{nm} - \Gamma^p_{nq}\Gamma^p_{pm}$. Tomando extremos da ação (1.52) em relação ás variações dos campos, obtemos as equações de movimento para o campo ϕ e para a métrica. No caso do dílaton, usando a equação de Euler-Lagrange correspondente, encontramos a equação que descreve a dinâmica de ϕ em um espaço-tempo curvo,

$$\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_m [\sqrt{-g} g^{mn} \partial_n \phi] + \frac{1}{2} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0.$$

Definindo o operador Laplaciano ∇^2 aplicado a uma função escalar f qualquer por

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_m [\sqrt{-g} g^{mn} \partial_n f],$$

podemos reescrever a equação de movimento para ϕ como

$$\frac{4}{3} \nabla^2 \phi + \frac{1}{2} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \tag{1.54}$$

Por outro lado, tomando variações da ação (1.52) com respeito à métrica, obtemos a equação de Einstein

$$R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R = \frac{1}{2M_p^3 N_c^2}T_{mn}, \tag{1.55}$$

com T_{mn} dado por

$$T_{mn} = M_p^3 N_c^2 \left(\frac{8}{3}\partial_m\phi\partial_n\phi - \frac{4}{3}g_{mn}g^{pq}\partial_p\phi\partial_q\phi + g_{mn}V(\phi)\right). \tag{1.56}$$

Existem algumas alternativas para resolver o sistema de equações de movimento, iniciando com propor um *ansatz* adequado às caraterísticas da CFT em estudo. Para descrever um sistema de glúons puros, é possível definir analiticamente o perfil das funções, seja dos coeficientes da métrica ou do dílaton. Por exemplo, em alguns trabalhos a temperatura zero, como nas referências [12, 13, 15], o *ansatz* adotado é o seguinte:

$$ds^2 = e^{2A(z)}[dz^2 + \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu], \qquad \phi = \phi(z), \tag{1.57}$$

onde $A(z)$ é o fator de deformação e ϕ é o campo dílaton. Em termos do fator de deformação, do dílaton e de seu potencial, as equações de movimento são dadas por:

$$\begin{aligned} 12A'' + 4\phi'^2 &= e^{2A}V, \\ 3A'' + 9A'^2 &= e^{2A}V, \\ \frac{8}{3}[\partial_z + 3A']\phi' &= -e^{2A}\frac{dV}{d\phi}, \end{aligned} \tag{1.58}$$

onde $' = \partial_z$. Dentre essas equações, apenas duas são independentes, conforme é mostrado em [13]. Além disso, é possível definir $\zeta(z) = \exp[-A(z)]$, de maneira que a equação resultante para ζ pode ser escrita como uma equação tipo Schrödinger da forma

$$\zeta'' - \frac{4}{9}\phi'^2\zeta = 0. \tag{1.59}$$

Uma outra alternativa para resolver o sistema de equações apresentado acima é conhecida como *Improved* HQCD, foi proposta por Gürsoy, Kiritsis and Nitti em [11]. O modelo considera um potencial específico para o dílaton, que é compatível com a liberdade assintótica no ultravioleta (UV). O IHQCD permite obter com boa aproximação o espectro de glueball linear para valores da coordenada radial z grandes, ou seja, na região do IR, estabelecendo o perfil do dílaton quadrático compatível com o confinamento.

Ao considerar um modelo gravitacional com um campo dílaton, vamos levar em conta

os comportamentos do dílaton encontrados no modelo IHQCD, [11]. Porém a interpretação da presença do dílaton é associada com a deformação da CFT o que leva a uma quebra explícita da simetria conforme [12]. Considera-se que o comportamento do dílaton é conhecido ao se estabelecer as condições assintóticas sobre as possíveis soluções. Para cumprir com a liberdade assintótica e o confinamento, $\phi(z) \to c\,z^4$ para $z \to 0$ (região do UV) e $\phi(z) \to c\,z^2$ para $z \to \infty$ (região do IR) [13], porém os modelo que consideram um dílaton quártico apresentam uma quebra espontânea de simetria conforme .

Nos modelos [13, 34, 35] em que o dílaton interpola entre as soluções assintóticas no UV (quártica) e no IR (quadrática) como $\phi(z) \approx \mathfrak{c}\,z^2 \tanh\left(\mathfrak{c}^2 z^2\right)$ onde $\mathfrak{c}$ estabelece a escala de energia. Podemos ver que para $\mathfrak{c}$ muito grande, o dílaton tem um comportamento quadrático, o que resulta interessante neste tipo de modelos, já que é comprovado que os espectros dos mésons e as equações de estado são mais dependentes do comportamento do dílaton na região IR. Na referência [12], duas propostas de interpolação foram estudadas:

$$\phi(z) = \hat{\phi}_0(\Lambda z)^{\epsilon} + \frac{(\Lambda z)^{4-\epsilon}}{1+(\Lambda z)^{2-\epsilon}}, \tag{1.60}$$

$$\phi(z) = \hat{\phi}_0(\Lambda z)^{\epsilon} + (\Lambda z)^2 \tanh[(\Lambda z)^{2-\epsilon}], \tag{1.61}$$

onde $\hat{\phi}_0$ e ϵ estão associados com a escala de energia no UV e a dimensão conforme do operador $\mathcal{O}$ da CFT, respectivamente. Fixando os parâmetros com os primeiros valores de massa de glueballs da QCD na rede, os dílaton semi-analíticos propostos conduzem a resultados para os setores escalar e tensorial que são compatíveis com o espectro obtido da QCD na rede. Além disso, o modelo [12] garante de maneira consistente a quebra de simetria conforme.

O dicionário encontrado em [12] difere significativamente do proposto em [9, 10], enquanto estabelece uma nova conexão entre QCD e CFTs deformadas. Em [12], obtém um valor diferente de zero para densidade de energia do vacum $\langle T^{00}\rangle$ e do valor esperado VEV do operador $\mathcal{O}$ na teoria $4d$, como consequência da deformação CFT. Neste caso, essas quantidades são mapeadas para a energia do vácuo QCD e condensado de glúon, respectivamente. Também é reproduzido o resultado universal para a anomalia do traço $\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle$ nas CFTs deformadas $4d$, o qual é reinterpretado em termos da anomalia de traço QCD. Isso sugere um mapa entre a dimensão conforme ϵ a função β da teoria de campo do tipo QCD. Em geral os resultados em [12] indicam que a descrição holográfica da QCD como uma CFT deformada pode ser consistente com a liberdade assintótica sem o necessidade de construir um potencial.

2 QCD HOLOGRÁFICA À TEMPERATURA FINITA

Nos modelos holográficos a escolha do *ansatz* limita as possíveis soluções das equações de movimento e determina completamente as propriedades geométricas do modelo gravitacional, devendo ser compatível com as características conhecidas da teoria de campos dual, com base na correspondência AdS/QCD. De acordo com [14, 15], a escolha do perfil quadrático do dílaton $\phi(z) = c\,z^2$ é uma forma simples de obter o comportamento linear das trajetórias de Regge para o espectro de massa dos mésons. No caso dos mésons vetoriais, o espectro de massa resulta na relação $m^2_{V_n} = 4c(n+1)$, enquanto o espectro de massa dos *glueballs* é obtido da relação $m^2_{G_n} = 4c(n+2)$. Os espectro depende do spin das partículas, do número quântico radial n e do parâmetro c, associado com a escala de energia. Essas partículas, a temperatura zero, são descritas pelo *ansatz*: campo escalar (dílaton) no espaço-tempo assintoticamente AdS $5d$ plano, dado em (1.57), só que esses modelos não levam em conta o acoplamento do dílaton e o espaço-tempo.

Ao longo deste capitulo, descreveremos o modelo holográfico escolhido em que o campo dilatônico é dado por $\phi(z) = cz^2$, similar ao encontrado em [14, 15], mas levando em conta o *backreaction*. Vamos considerar o dicionário estabelecido em [12]. No contexto de QCD holográfica, estudaremos a termodinâmica de um plasma não conforme, que mostra resultados compatíveis com modelos como [11, 16]. Estamos falando então de considerar uma ação de Einstein-Dílaton $5d$,

$$S = M_p^3 N_c^2 \int dx^5 \sqrt{-g}\left(R - \frac{4}{3}\partial^m\phi\partial_m\phi + V(\phi)\right). \tag{2.1}$$

De forma geral, as equações de movimento podem ser escritas como

$$\frac{4}{3}\nabla^2\phi + \frac{1}{2}\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \tag{2.2}$$

$$R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R = \frac{4}{3}\partial_m\phi\partial_n\phi - \frac{2}{3}g_{mn}g^{pq}\partial_p\phi\partial_q\phi + \frac{1}{2}g_{mn}V(\phi). \tag{2.3}$$

Como vimos no capítulo anterior, para resolver o sistema de equações anterior, temos que escolher o *anstaz*, ou seja, além do campo escalar temos que definir a métrica apropriada.

2.1 O espaço-tempo de fundo

Vamos considerar aqui um perfil quadrático para o dílaton, o que facilitará o estudo das propriedades termodinâmicas do sistema dual e, especialmente, das transições de fase do

QGP. A escolha de um dílaton quadrático nos permite encontrar soluções tanto analíticas, em termos de funções especiais, quanto numéricas para as quantidades termodinâmicas (como temperatura, densidades de entropia, energia livre, calor específico e velocidade do som) do buraco negro plano-simétrico assintoticamente AdS (ou brana negra) de 5 dimensões. O sistema gravitacional com o do dílaton acoplado à métrica (*backreaction*) constitui um modelo interessante para o estudo da transição de fase do confinamento ao desconfinamento da QCD, já que é possível resolver as equações de Einstein de forma consistente e o modelo mostra os comportamentos mais relevantes de modelos mais complexos com outros abordagens, como [11] onde o potencial é escolhida como *ansatz*, e mais recentemente [16] onde o perfil dilaton é dado pela equação (1.60) e a termodinâmica é obtida numericamente.

A métrica do fundo que vamos considerar para resolver as equações de movimento, é um buraco negro plano-simétrico assintoticamente AdS, combinado com um dílaton quadrático,

$$ds^2 = \frac{1}{\zeta^2(z)}\left(-f(z)dt^2 + \frac{1}{f(z)}dz^2 + dx_i dx^i\right), \qquad \phi(z) = cz^2, \tag{2.4}$$

onde $i = 1$, 2 e 3, $f(z)$ é a chamada função horizonte, $\zeta(z)$ é uma função associada ao fator de deformação do caso $T = 0$ e $z \propto 1/r$ é o inverso da coordenada radial r mostrada na seção 1.1. Como resultado obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\zeta''(z)}{\zeta(z)} - \frac{4}{9}\phi'^2(z) = 0; \tag{2.5}$$

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} - 3\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = 0; \tag{2.6}$$

$$3\zeta''(z) - 12\frac{\zeta'^2(z)}{\zeta(z)} + 3\frac{f'(z)\zeta'(z)}{f(z)} + \frac{V(\phi)}{\zeta(z)f(z)} = 0, \tag{2.7}$$

onde $'$ indica ∂_z.

É possível obter uma solução analítica da equação (2.5) em termos de funções de Bessel [20, 36]. De fato, ainda que não seja evidente, podemos levar a equação diferencial (2.5) numa forma conhecida (padrão) por meio de diversas mudanças de variáveis. Primeiro, fazendo $\zeta(z) = e^{-acz^2}v(z)$, obtemos

$$v''(z) + 4cazv'(z) + \frac{2}{9}\left[9ca(2caz^2 + 1) - 2\phi'(z)^2\right]v(z) = 0, \tag{2.8}$$

sendo a uma constante a ser definida. Na equação acima, substituímos $\phi'(z)$ e consideramos

$x \equiv cz^2$, de maneira que

$$x\frac{d^2}{dx^2}v(x) + \left(2ax + \frac{1}{2}\right)\frac{d}{dx}v(x) + \left[\left(a^2 - \frac{4}{9}\right)x + \frac{a}{2}\right]v(x) = 0. \tag{2.9}$$

Adotando $a = -2/3$, a equação anterior se reduz a

$$x\frac{d^2}{dx^2}v(x) + \frac{1}{6}(3 - 8x)\frac{d}{dx}v(x) - \frac{v(x)}{3} = 0. \tag{2.10}$$

Finalmente, trocando $y = bx$ e $v(x) \to w(y)$, encontramos

$$y\frac{d^2}{dy^2}w(y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3b}y\right)\frac{d}{dy}w(y) - \frac{1}{3b}w(y) = 0, \tag{2.11}$$

ou, fazendo $b = 4/3$, vem

$$y\frac{d^2}{dy^2}w(y) + \left(\frac{1}{2} - y\right)\frac{d}{dy}w(y) - \frac{w(y)}{4} = 0. \tag{2.12}$$

Essa é a famosa equação diferencial modificada de Bessel, cujas soluções são as funções de Bessel modificadas $I_{\pm\frac{1}{4}}$. Retornando à variável independente z, temos

$$\zeta(z) = \frac{-2c_2\sqrt{cz^2}I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{2cz^2}{3}\right) + \sqrt{2}(c_1 + c_2)\sqrt{-icz^2}I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{2cz^2}{3}\right)}{\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{-icz^2}}. \tag{2.13}$$

Para fixar as contantes de integração c_1 e c_2 em (2.13), impomos a condição de que $\zeta(z) = z$ no UV ($z \to 0$), ou seja, recuperamos um espaço-tempo assintoticamente AdS para z pequeno. Dessa forma,

$$\zeta(z) = \left(\frac{3}{c}\right)^{1/4}\Gamma\left[\frac{5}{4}\right]\sqrt{z}I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{3}cz^2\right).$$

Essa solução pode também ser escrita em termos de uma função hipergeométrica confluente [20, 36],

$$\zeta(z) = z\ {}_0F_1\left[\frac{5}{4}, \frac{c^2z^4}{4}\right]. \tag{2.14}$$

Na Figura 2.1, podemos observar o comportamento de $\zeta(z)$ para diferentes valores de c. Para $c = 0$ recuperamos o espaço-tempo AdS dual a uma teoria de campos conforme. Os diferentes valores de c indicam diferentes valores de energia.

O comportamento da função no UV ($z \to 0$) é evidente na expansão em série de (2.14),

ou seja,

$$\zeta(z) = z + \frac{4}{45}c^2 z^5 + \dots . \tag{2.15}$$

Entretanto, na região do IR ($z \to \infty$), temos

$$\zeta(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{z}} e^{\frac{2}{3}cz^2}, \tag{2.16}$$

que apresenta uma diferença com os modelos soft-wall usados para calcular espectro de hadróns, em eles $\zeta(z) \simeq \frac{1}{z} e^{\frac{2}{3}cz^2}$.

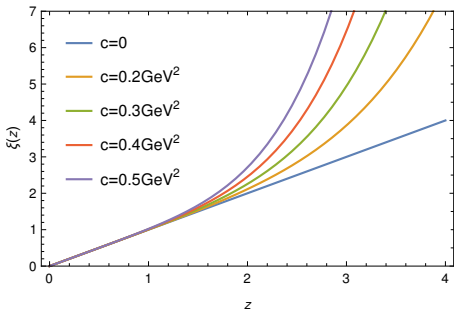

Figura 2.1: O fator de deformação para vários valores de c; obtemos o AdS para $c = 0$.

2.2 Propriedades termodinâmicas

Ao considerar um espaço-tempo do tipo buraco negro assintoticamente AdS, podemos obter as variáveis termodinâmicas e com elas analisar o comportamento deste modelo holográfico da QCD. Este comportamento é tipicamente interpretado em modelos holográficos como uma transição de fase do plasma não-conforme na QCD. Vamos iniciar o análise da termodinâmica do sistema resolvendo a equação (2.6) para obter a função horizonte $f(z)$.

Para resolver (2.6), precisamos considerar que $f(0) = 1$, o que implica ter um espaço-tempo assintoticamente AdS na fronteira, perto do UV ($z \to 0$) [20,37], de maneira que nossa solução seja compatível com a solução à temperatura zero. Da equação (2.6), temos:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = 3\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}, \qquad \text{fazendo uma primeira integração;} \tag{2.17}$$

$$f'(z) = C_1 \zeta^3(z), \qquad \text{integrando e impondo } f(0) = 1; \tag{2.18}$$

$$f(z) = 1 + C_1 \int_0^z \zeta^3(\tilde{z}) d\tilde{z}, \qquad \text{impondo } f(z_h) = 0; \tag{2.19}$$

$$f(z) = 1 - C \int_0^z \zeta^3(\tilde{z}) d\tilde{z}, \qquad \text{onde } C = \frac{1}{\int_0^{z_h} \zeta^3(\tilde{z}) d\tilde{z}}. \tag{2.20}$$

Da equação (2.20), vemos que $f'(z) < 0$ e $C > 0$ para $0 < z < z_h$. As integrais acima possuem soluções semi-analíticas. De fato, podemos obter não só a constante C, como também a função horizonte $f(z)$, em termos da posição do horizonte de eventos, z_h.

2.2.1 Temperatura

A temperatura de um buraco negro é obtida a partir da fórmula de Hawking

$$T = \frac{|f'(z_h)|}{4\pi}. \tag{2.21}$$

A temperatura do buraco negro é interpretada como a temperatura da teoria de campos quântica dual, nosso caso um plasma não conforme, segundo a correspondência AdS/QCD. Para o modelo considerado aqui, a derivada da função horizonte vem da solução da equação (2.6). O gráfico da temperatura em função da posição do horizonte é mostrado na Figura 2.2 para $c = 0.4\,GeV^2$. A linha tracejada indica o valor de $z_h = z_{min} = 1.9551\,GeV^{-1}$ para o qual a temperatura é mínima e assume o valor $T_{min} = 215\,MeV$. O comportamento não monotônico da temperatura em função de z_h mostra o surgimento de dois regimes da solução de buraco negro AdS a partir da temperatura miníma. Por um lado, temos o regime de buracos negros grandes para $z_h < z_{min}$, a qual representa uma fase termodinâmica (localmente) estável, onde a temperatura incrementa conforme z_h diminui (linha azul). Por outro lado, temos o regime de buracos negros pequenos para valores de $z_h > z_{min}$, onde a temperatura incrementa conforme z_h aumenta (linha vermelha). A partir do cálculo do calor específico, veremos à frente que essa é uma fase termodinamicamente instável. [20, 37, 38].

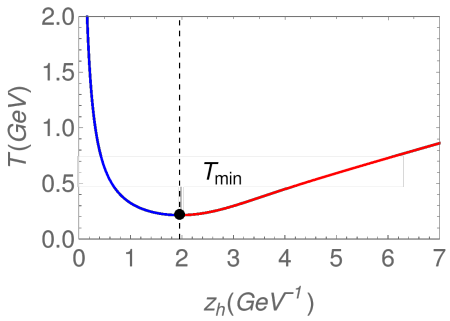

Figura 2.2: Temperatura em função da posição do horizonte, z_h. A linha preta tracejada indica o valor do z_{min}. A linha azul (vermelha) representa a solução de buraco negro grande (pequeno).

2.2.2 Entropia e densidade de entropia

A entropia de um buraco negro é calculada por meio da fórmula de Bekenstein-Hawking,

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4G_5} = \frac{V_3}{4G_5\zeta^3(z_h)}, \tag{2.22}$$

onde $\mathcal{A}$ é a área do horizonte de eventos, V_3 é o volume $3d$ da parte espacial transversal, $G_5 = 1/16\pi M_p^3 N_c^2$. Com isso, a densidade de entropia $s = S/V_3$ pode ser escrita como

$$s = \frac{4\pi M_P^3 N_c^2}{\zeta^3(z_h)}\,. \tag{2.23}$$

A densidade de entropia do buraco negro $5d$ é associado à densidade de entropia de um plasma não conforme. Na Figura 2.3, é possível ver o comportamento da entropia como função do horizonte de evento (esquerda) e como função da temperatura (direita), as linhas azul e vermelha representa as soluções de buraco negro grande e buraco negro pequeno respetivamente. Vemos que, como função da temperatura, a entropia aumenta no buraco negro grande e decresce no buraco negro pequeno.

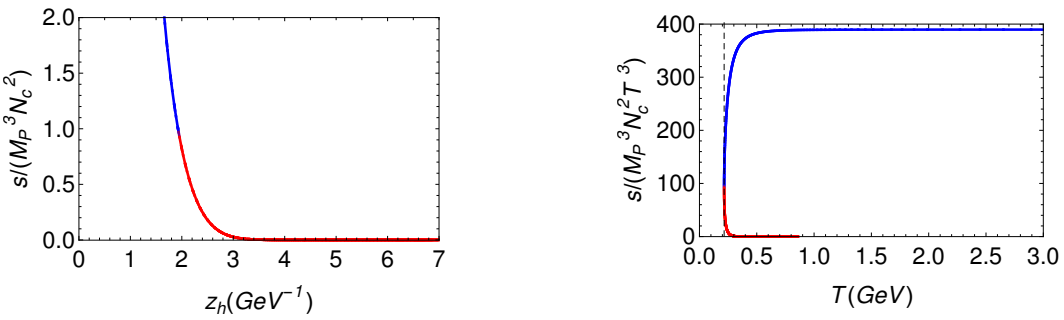

Figura 2.3: Densidade de entropia em função da posição do horizonte (esquerda) e da temperatura (direita).

2.2.3 Energia livre e densidade de energia

Podemos obter a energia livre a partir da primeira lei da termodinâmica $dF = -sdT$ ou, em forma integral,

$$F = \int_{z_h}^{\infty} s(\tilde{z}_h)\frac{dT}{d\tilde{z}_h}d\tilde{z}_h. \tag{2.24}$$

A pressão, por sua vez, é dada por $p = -F$. Na equação (2.24) estamos impondo a implicitamente a condição $F(z_h \to \infty) = 0$ de maneira que neste limite coincida com o gás térmico. No lado esquerdo da Figura 2.4, mostramos a energia livre como função da posição do horizonte de eventos. Pode-se notar que existe um $z_h < z_{min}$, sendo z_{min} indicado pela linha tracejada

na figura, em que a energia livre muda de sinal, sugerindo a existência de uma transição de fases nas proximidades de T_{min}. Após essa região, a energia livre vai a zero conforme $z_h \to \infty$, o que concorda com a solução térmica, em que a pressão desaparece, descrevendo a fase de deconfinamento [37,39]. Porém, temos que destacar que, para $z_h \to 0$, existe uma divergência que não pode ser removida.

No lado direito da Figura 2.4, apresentamos a energia livre como função da temperatura e percebemos um comportamento similar àquele encontrado na referência [37]. Em particular, é possível observar a existência de uma temperatura critica T_{cr} maior do que T_{min}. Mais adiante, veremos como é o comportamento assintótico da energia livre e, portanto, da pressão como função da temperatura.

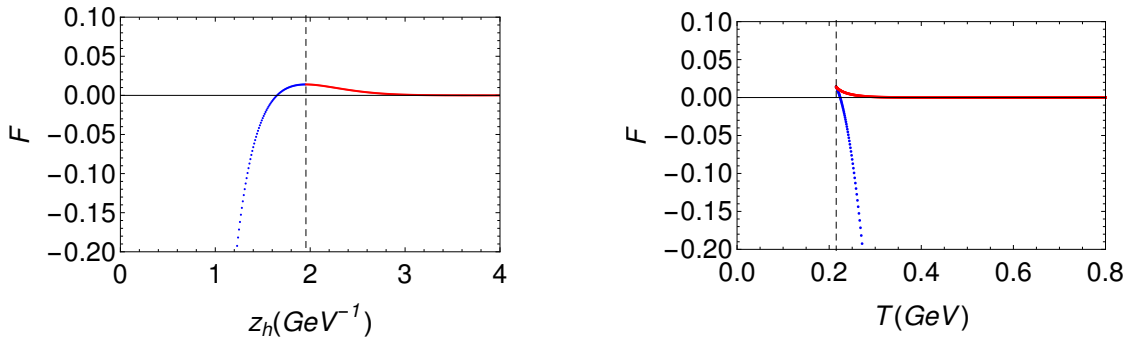

Figura 2.4: Energia livre F como função da posição do horizonte (lado esquerdo) mostra uma transição de fases. À direita F vs T mostra a presença da transição de fases para $T_{cr} > T_{min}$.

Para finalizar, temos a densidade de energia, dada por $\epsilon = F + sT$, e apresentada na Figura 2.5 como função da posição do horizonte de eventos z_h; a linha azul (vermelha) representa o buraco negro grande (pequeno).

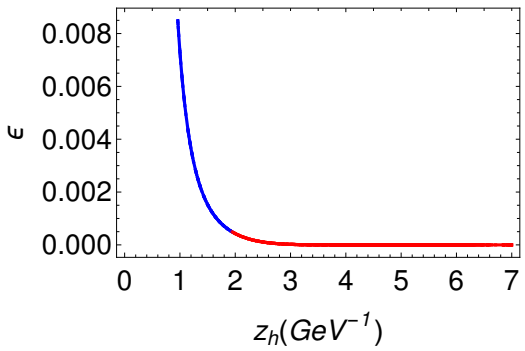

Figura 2.5: A Densidade de energia como função da posição de horizonte decresce rapidamente a zero depois do valor z_{min}

2.2.4 A anomalia do traço

A anomalia do traço do tensor energia-momento à temperatura finita vem dada por $\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = \epsilon - 3p$ ou de forma integral como

$$\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = \int_0^{z_h} T^4 \frac{d}{dT}\left(\frac{s}{T^3}\right) d\tilde{z}_h. \tag{2.25}$$

Na Figura 2.6, podemos ver que para nosso modelo o resultado não é zero para todo T, o resultado obtido é compatível com a descrição de um plasma não conforme, mesmo resultado obtido no modelos [12, 16]. Numa teoria de campos conforme $\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = 0$, o fato de obter valores diferentes de zero nestos modelos indica a quebra de simetria conforme na CFT, que tem sido interpretada como QCD deformada. Essa deformação inserida mediante o campo escalar não-uniforme no lado gravitacional.

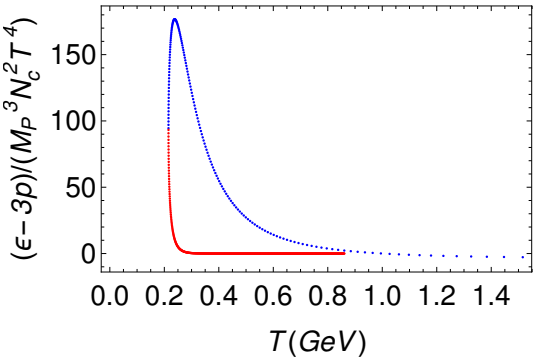

Figura 2.6: Anomalia do traço como função da temperatura

2.2.5 Calor específico

No estudo da termodinâmica de buracos negros, o calor específico C_v permite conhecer a estabilidade (local) do sistema. A condição para se ter uma fase estável é dada pela mudança da área com respeito à z_h, ou seja, $d\mathcal{A}(z_h)/dz_h < 0$, o que corresponde à $dT/dz_h < 0$ [16,37,39]. Em termos da temperatura, o calor específico é definido por

$$C_v = T\frac{ds}{dT}. \tag{2.26}$$

Podemos obter também o comportamento de C_v como função da posição do horizonte e o resultado pode ser observado no lado esquerdo da Figura 2.7. A linha preta tracejada indica a posição de z_{min} ou T_{min}. Na Figura 2.2 da temperatura respeito do z_h, tendo que $dT/dz_h < 0$

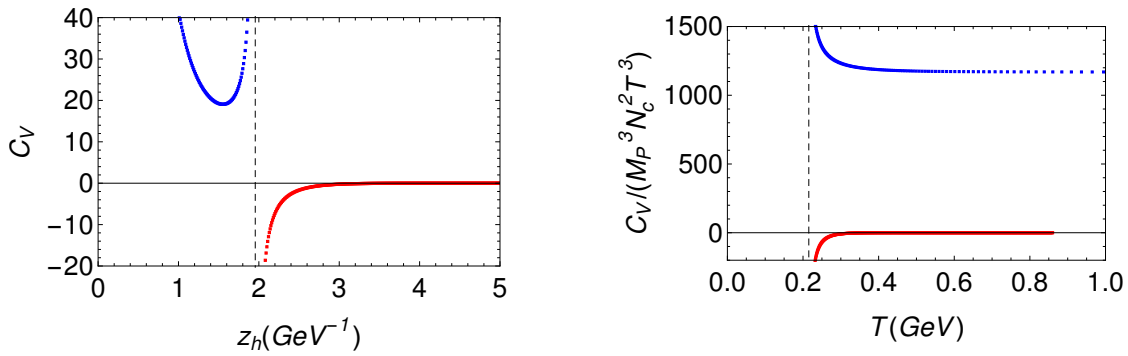

Figura 2.7: Calor específico como função da posição do horizonte (esquerda), como função da temperatura (direita) as linhas tracejadas representam z_{min} e T_{min}. Nas duas Figura s é evidente as faixas com sinal contrario relacionadas com as fases estável e instável dos buracos negros.

para $z_h < z_{min}$ é o mesmo intervalo em que o calor específico é positivo (linha azul), essa é a fase (ou regime) termodinamicamente estável dos buracos negros grandes. No entanto, para $z_h > z_{min}$, o calor específico é negativo (linha vermelha), representando a fase instável dos buracos negros pequenos. Do lado direito da Figura 2.7, temos a solução do calor específico como função da temperatura, onde podemos ver também a existência de uma faixa em que o calor específico é negativo, mostrando novamente que temos a fase termodinamicamente estável correspondente aos buracos negros grandes (linha azul) e a fase termodinamicamente instável correspondente aos buracos negros pequenos (linha vermelha).

2.2.6 Velocidade do som

A velocidade do som pode ser obtida da equação $c_s^2 = dP/d\epsilon$, mas uma forma mais conveniente para nosso calculo é dada pela expressão $c_s^2 = s/C_v$. A Figura 2.8 mostra c_s^2 como função da temperatura e vemos que uma mudança de sinal ocorre em T_{min}, fazendo com que c_s se torne um imaginário puro. A faixa de c_s^2 positivo corresponde ao intervalo de valores positivos do calor específico, ou seja a solução dos buracos negros grandes. Nesta fase vemos que, para $T \to \infty$ o comportamento assintótico corresponde ao valor conforme $c_s^2 = 1/3$. Ou seja quando nos consideramos uma teoria de campo conforme temos que a anomalia do traço $\langle T^\mu_\mu \rangle = 0$ o que leva a $\epsilon = 3P$ e portanto à $c_s^2 = dP/d\epsilon = 1/3$, na fase de buracos negros grandes é possível interpretar o comportamento assintótico da velocidade do som ao valor conforme como uma possível evidencia da restauração da simetria conforme na fronteira. Finalmente temos a faixa de valores da velocidade do som negativa e complexa que corresponde à fase instável dos buracos negros pequenos.

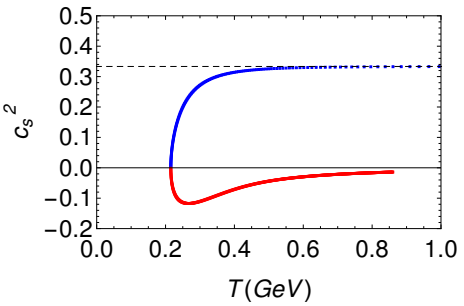

Figura 2.8: Velocidade do som em função temperatura, a linha ponteada horizontal corresponde ao valor conforme 1/3

2.3 Comportamento assintótico

2.3.1 Limite de grandes buracos negros

A partir da expansão de $\zeta(z_h)$ para $z_h \to 0$, dada pela equação (2.15) com $z = z_h$,

$$\zeta(z_h) \approx z_h + \frac{4}{45} c^2 z_h^5 \,, \tag{2.27}$$

podemos obter as quantidades termodinâmicas neste limite [36]. Começando com a temperatura, a simplicidade da função $\zeta(z_h)$ nos permite integrar analiticamente a equação (2.20) e obter a expansão da temperatura mediante (2.21),

$$T(z_h) \approx \frac{1}{\pi z_h} + \frac{2c^2 z_h^3}{15\pi} \,. \tag{2.28}$$

Neste caso, não temos um valor de z_h associado com o mínimo de temperatura, mas ao impor $\partial_{z_h} T(z_h) = 0$, encontramos $T(z_h) = 0{,}205\, GeV$, que é comparável com o valor de $T_{min} = 0{,}215\, GeV$, o qual representa a mudança do regime dos buracos negros grandes para os pequenos, conforme mostrado na Figura 2.2.

Além disso, podemos escrever z_h como função da temperatura T, fazendo a inversão da série, o que nos permite obter as quantidades termodinâmicas diretamente em termos da temperatura e não de z_h [40]. Invertendo a equação (2.28), obtemos

$$z_h(T) \approx \frac{1}{\pi T} + \frac{2c^2}{15\pi^5 T^5} \,. \tag{2.29}$$

As variáveis termodinâmicas são calculadas usando as mesmas relações da seção anterior, mas com as expressões (2.15), (2.28) e (2.29). Em particular, para a densidade de

entropia, temos

$$s(z_h) \approx \frac{1}{2\pi z_h^3} - \frac{2c^2 z_h}{15\pi} \qquad \text{ou} \qquad s(T) \approx \frac{\pi^2 T^3}{2} - \frac{2c^2}{15\pi^2 T}\,. \tag{2.30}$$

Abaixo, seguem as demais quantidades:

$$F(T) \approx -\frac{\pi^2 T^4}{8} + \frac{2c^2}{15\pi^2}\log(T); \tag{2.31}$$

$$\epsilon(T) \approx \frac{3\pi^2 T^4}{8} + \frac{2c^2\log(T)}{15\pi^2} - \frac{2c^2}{15\pi^2}; \tag{2.32}$$

$$C_V(T) \approx \frac{3\pi^2 T^3}{2} + \frac{2c^2}{15\pi^2 T}; \tag{2.33}$$

$$c_s^2(T) \approx \frac{1}{3} - \frac{16c^2}{3\left(4c^2 + 45\pi^4 T^4\right)}. \tag{2.34}$$

Em todos os casos apresentados acima, os primeiros termos concordam com aqueles reportados na literatura (veja, por exemplo, [37, 39, 40]). O primeiro termo da energia livre é comparável com a energia livre de uma teoria de Yang-Mills $SU(N_c)$ pura [37], a qual se comporta como um gás livre para altas temperaturas. Vemos também que os valores do C_V são sempre positivos, ou seja, o mesmo resultado mostrado na Figura 2.7 para a fase estável dos buracos negros grandes da solução exata. Torna-se também evidente o comportamento assintótico $c_s^2 \to 1/3$ para T grande, mostrado na Figura 2.8.

2.3.2 Limite de pequenos buracos negros

No limite de pequenos buracos negros, a análise é feita de maneira diferente, já que a expansão em série de potências de (2.14) com $z_h \to \infty$ é dada em termos de senos e cossenos. A função (2.16) com $z = z_h$,

$$\zeta(z_h) \approx \frac{e^{\frac{2}{3}c{z_h}^2}}{\sqrt{z_h}}, \tag{2.35}$$

é uma função mais simples de trabalhar e representa uma boa aproximação [36]. De acordo com [37], o comportamento da temperatura para uma Teoria de Campos que apresenta confinamento cresce assintoticamente com z_h, como na Figura 2.2 para a solução completa. O comportamento assintótico da temperatura para z_h grande é dado por:

$$T(z_h) \approx \frac{3cz_h}{2\pi} - \frac{5}{8\pi z_h} - \frac{5}{24\pi c z_h^3}, \tag{2.36}$$

onde temos um crescimento assintótico para $z_h \to \infty$, dominado pelo primeiro termo reportado em [39]. As outras quantidades termodinâmicas possuem comportamentos semelhantes

àqueles apresentados pela solução completa:

$$s(T) \approx \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}} e^{-\frac{4\pi^2 T^2}{3c}} \left(\frac{T}{c}\right)^{3/2}; \tag{2.37}$$

$$F(T) = \frac{T\left(\frac{T}{c}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{5}{4}, \frac{4\pi^2 T^2}{3c}\right)}{8\sqrt[4]{3}\pi^2 \left(\frac{T^2}{c}\right)^{5/4}}; \tag{2.38}$$

$$\epsilon(T) \approx \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}} T e^{-\frac{4\pi^2 T^2}{3c}} \left(\frac{T}{c}\right)^{3/2}; \tag{2.39}$$

$$C_v \approx \frac{\sqrt{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{4\pi^2 T^2}{3c}} \left(\frac{T}{c}\right)^{3/2} (9c - 16\pi^2 T^2)}{9c}; \tag{2.40}$$

$$c_s^2(T) \approx \frac{6c}{9c - 16\pi^2 T^2}. \tag{2.41}$$

As exponenciais negativas dão conta do decrescimento rápido das quantidades termodinâmicas neste limite.

3 PERTURBAÇÕES GRAVIDILATÔNICAS

O comportamento do QGP indica a criação de bolas de plasma de quarks e glúons, em equilíbrio térmico, que se expandem e esfriam abaixo da temperatura de transição na qual ocorre novamente a formação de hádrons. As técnicas de QCD na rede têm obtido sucesso em descrever o comportamento térmico da QCD, porém a extensão para o cálculo de quantidades hidrodinâmicas não é simples [11].

Os modelos holográficos da QCD abrem a possibilidade de obtenção dos coeficientes de transporte do plasma dual, sendo um dos resultados mais conhecidos o cálculo da razão entre a viscosidade de cisalhamento e a densidade de entropia η/s, que apresenta um valor universal de $1/4\pi$ [41,42]. Esse resultado está ligeiramente abaixo dos valores obtidos em QCD na rede em [43], onde o valor do coeficiente de viscosidade de cisalhamento para um plasma de glúons é encontrado numa faixa entre $0.1 - 0.2$. No caso do coeficiente da viscosidade de volume, o mesmo é zero se consideramos o plasma como um fluido conforme ($\mathcal{N} = 4$ SYM), porém a QCD não é uma teoria conforme (salvo no UV).

De acordo com o dicionário holográfico, as perturbações métricas de um buraco negro plano-simétrico assintoticamente AdS são duais às flutuações do tensor energia-momento da teoria de campos dual. Os polos das funções de Green retardadas no espaço de Fourier estão associados com as relações de dispersão no plano das frequências complexas.

As soluções das equações de perturbação lineares, escritas em termos de quantidades invariantes de calibre, são obtidas com condições de contorno específicas. No caso de um buraco negro assintoticamente AdS, impondo condições de onda plana entrante no horizonte de eventos e condições de Dirichlet na fronteira, é possível encontrar os chamados modos quasenormais [19]. Por conveniência, as variáveis invariantes de calibre Z_T, Z_V e Z_S (respectivamente, para os setores tensorial, vetorial e escalar) são construídas como combinações lineares das perturbações e de suas derivadas em um calibre particular.

As variáveis Z_p ($p = T, V, S$) obedecem equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes variáveis e apresentam, de forma geral, singularidades ao redor dos quais as soluções podem ser escritas como séries de Frobenius. Ao estabelecer a condição de onda entrante no horizonte, as soluções podem ser escritas como

$$Z_p^{in}(z) = \mathcal{A}\varphi_1(z) + \mathcal{B}\varphi_2(z), \tag{3.1}$$

onde $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$ são as soluções não-normalizável e normalizável, respectivamente, nas vizi-

nhanças da fronteira AdS, e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são coeficientes que, via de regra, dependem da frequência ω e do momento k.

Na prescrição Lorentziana da AdS/CFT [17, 19, 44], as funções de correlação de dois pontos de um operador $\mathcal{O}$ são dadas em termos dos coeficientes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como

$$\langle \mathcal{O}\mathcal{O} \rangle_R \sim \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} + \text{contra termos.} \tag{3.2}$$

Os polos das funções de correlação retardadas aparecem como zeros do coeficiente $\mathcal{A}$. Do ponto de vista gravitacional, os polos dessas funções de Green correspondem ao espectro quasi-normal dos buracos negros AdS e, no limite hidrodinâmico, os polos estão associados com os modos da hidrodinâmica relativística, de onde podemos obter os coeficientes de transporte do plasma dual. Em [19], o modo de cisalhamento γ_η e o modo de onda sonora no espaço-tempo de um buraco negro plano-simétrico assintoticamente AdS corresponde no dicionario holográfico a uma onda cisalhante e uma onda sonora se propagando em um plasma conforme em equilíbrio térmico. Em [16], os coeficientes de viscosidade são calculados para um plasma não conforme, ou seja, para um modelo gravitacional Einstein-Dílaton, com o dílaton dado por (1.60). O procedimento é diferente, porém eles obtém a viscosidade de cisalhamento, compatível com o resultado conhecido de $1/4\pi$. Mais importante ainda obtém a viscosidade de volume diferente de zero, compatível com os resultados para um plasma não conforme apresentados em [45].

3.1 Equações de Einstein linearizadas

As equações de Einstein dadas em (1.55) e (1.56) podem ser escrita na forma de Ricci

$$R_{mn} = \frac{4}{3}\partial_m\Phi\partial_n\Phi - \frac{1}{3}g_{mn}V(\Phi), \tag{3.3}$$

que apresenta uma vantagem ao momento de perturbar o sistema. Vamos considerar pertubações da forma $\tilde{g}_{mn} = g_{mn} + h_{mn}$ e $\Phi = \phi + \chi$, onde g_{mn} é a métrica de fundo (2.4), $h_{mn}(t, x^3, z)$ é a perturbação ao redor da métrica de fundo, ϕ é o campo escalar dílaton dado em (2.4) e $\chi(t, x^3, z)$ é a pertubação do campo escalar. À ordem zero nas perturbações, obtemos a equação de movimento da métrica de fundo g_{mn}, as quais foram resolvidas no Capitulo 2, além disso vamos fazer uso contínuo das equações à ordem zero, para simplificar a solução das equações perturbativas a primeiro ordem. À primeiro ordem nas perturbações, as equações

de movimento são

$$R^{(1)}_{mn} = \frac{8}{3}\left(\partial_m\phi\partial_n\chi + \partial_m\chi\partial_n\phi\right) - \frac{2}{3}\left(g_{mn}(\partial_\phi V)\chi + h_{mn}V\right), \tag{3.4}$$

$$\frac{4}{3}(\nabla^2\phi)^{(1)} = -\frac{1}{2}(\partial^2_\phi V)\chi. \tag{3.5}$$

3.2 Perturbações e transformações de calibre

Vamos considerar as perturbações ao redor da métrica e o campo escalar escritos como

$$ds^2 = [g_{mn} + Re\{\zeta^2 e^{-i\omega t + iqx^3} h_{mn}(z)\}]dx^m dx^n, \tag{3.6}$$

$$\Phi = \phi(z) + Re\{e^{-i\omega t + iqx^3}\chi(z)\}, \tag{3.7}$$

essa escolha preserva as rotações espaciais $SO(3)$, [46]. Por simplicidade na notação, vamos considerar diretamente as perturbações complexas. Os campos se transformam sob transformações de coordenadas, dadas por um $\varepsilon^m(t, \vec{x}, z)$, como

$$\delta g_{mn} = \varepsilon^l\partial_l g_{mn} + (\partial_m\varepsilon^l)g_{ln} + (\partial_n\varepsilon^l)g_{lm}, \tag{3.8}$$

$$\delta\phi = \varepsilon^m\partial_m\phi. \tag{3.9}$$

Sendo assim, as transformações das perturbações, tanto da métrica quanto do dílaton, podem ser calculadas. Para preservar a invariância de (3.7), as transformações também são consideradas como ondas $\varepsilon^m(t, \vec{x}, z) = e^{-i\omega t + iqx^3}\varepsilon^m(z)$. Além disso, vamos considerar $h_{x^1x^1} = h_{x^2x^2}$ e escolher um calibre radial, ou seja, $h_{zm}(z) = 0$ com $m = z, x^i, t$. Sob as transformações de calibre, temos

$$\delta h_{tt} = g'_{tt}\varepsilon^z + \frac{2i\omega f}{\zeta^2}\varepsilon^t, \tag{3.10}$$

$$\delta h_{tx^i} = -i\frac{\omega}{\zeta^2}\varepsilon^{x^i} - \frac{iqf}{\zeta^2}\delta_{x^ix^3}\varepsilon^t, \tag{3.11}$$

$$\delta h_{x^ix^i} = g'_{ii}\varepsilon^z + \frac{2iqf}{\zeta^2}\delta_{x^ix^3}\varepsilon^{x^i}, \tag{3.12}$$

$$\delta h_{x^ix^3} = i\frac{q}{\zeta^2}\varepsilon^{x^i}, \quad x^i \neq x^3, \tag{3.13}$$

$$\delta h_{x^1x^2} = 0, \tag{3.14}$$

$$\delta\phi = \varepsilon^z\partial_z\phi = \varepsilon^z\phi', \tag{3.15}$$

com $x^i = x^1, x^2, x^3$. Existem certas combinações das flutuações, que são graus de liberdade de calibre, com as quais se pode construir quantidades invariante de calibre. Podemos ver como a flutuação $h_{x^1x^2}$ se desacopla naturalmente. Por outro lado, podemos combinar (3.12) e (3.14) e construir um outro invariante:

$$\begin{aligned}
\delta h_{tx^i} &= -i\frac{\omega}{\zeta^2}\varepsilon^{x^i}, \\
\frac{i\zeta^2\delta h_{tx^i}}{\omega} &= \varepsilon^{x^i}, \\
\frac{i\zeta^2\delta h_{tx^i}}{\omega} &= \frac{-i\zeta^2\delta h_{x^ix^3}}{q}, \\
q\zeta^2\delta h_{tx^i} + \omega\zeta^2\delta h_{x^ix^3} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Sob este tipo de transformação, as equações linearizadas das perturbações à primeira ordem se desacoplam naturalmente em três setores, que serão analisados na próxima seção.

3.3 Equações de perturbação invariantes de calibre

3.3.1 Setor tensorial

A equação que governa este setor é só a equação da componente $h_{x^1x^2}(t, x^3, z)$, que se desacopla das outras componentes. Lembrando que f, ζ, ϕ são funções de z dadas pelas (2.20), (2.14), (2.4), temos

$$\begin{aligned}
\partial_z^2 h_{x^1x^2} + \left(\frac{f'}{f} + \frac{\zeta'}{\zeta}\right)\partial_z h_{x^1x^2} + \left(\frac{2f'\zeta'}{f\zeta} - \frac{4\zeta'^2}{\zeta^2} + \frac{8}{9}\phi'^2\right) h_{x^1x^2} \\
+ \frac{1}{f^2}(f\partial_{x^3}^2 h_{x^1x^2} - \partial_t^2 h_{x^1x^2}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Vamos reescrever essa equação em termos de quantidades invariantes de calibre, usando a variável mestre de Kovtun-Starinets [19] para o setor transverso sem traço, $Z_T = g^{x^1x^1}h_{x^1x^2} = \zeta^2 h_{x^1x^2}$, semelhante com (3.15). É possível colocar a equação (3.17) na forma

$$\partial_z^2 Z_T + \left(\frac{f'}{f} - \frac{f''}{f'}\right)\partial_z Z_T + \frac{\partial_{x^3}^2 Z_T}{f} - \frac{\partial_t^2 Z_T}{f^2} = 0. \tag{3.18}$$

Tomando a transformada de Fourier $Z_T(t, x^3, z) = e^{-it\omega + iqx^3} Z_T(z)$, a equação (3.18) pode ser escrita como

$$Z_T'' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{f''}{f'}\right) Z_T' + \frac{1}{f^2}\left(\omega^2 - fq^2\right) Z_T = 0. \tag{3.19}$$

Quando $q = 0$ e $\omega = 0$, temos

$$Z_T'' - Z_T' \partial_z \ln\left(\frac{f'}{f}\right) = 0. \tag{3.20}$$

Essa equação tem como solução analítica $Z_T = c_1 \ln(f) + c_2$. Porém, as soluções gerais para (3.19) são dadas por séries generalizadas de Frobenius, considerando que $f = 0$ indica um ponto singular regular e que isso acontece para $f(z_h)$. Propomos uma solução da forma $Z_T = f^\alpha F_T$, onde F_T é uma função regular em z_h. Substituindo em (3.19), obtemos os valores do expoente

$$\alpha = \pm \frac{i\omega}{f'(z_h)}, \tag{3.21}$$

associados com ondas entrando e saindo do buraco negro [47]. Além disso, considerando que $T = |f'(z_h)|/4\pi$ e, segundo (2.20), temos que $f'(z_h) < 0$, vamos considerar então o expoente α positivo, relacionado às ondas que entram no buraco negro. Isso nos permite escrever soluções do tipo (3.1) e identificar os coeficientes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Daqui para diante, vamos verificar a existência ou não de singularidades associadas à $\mathcal{A}$ que, como mencionamos anteriormente no texto, estão relacionados aos coeficientes de transporte.

Para isso é conveniente escrever a equação (3.19) em termos de uma variável adimensional. Inspirados em [50], realizamos uma normalização pela temperatura, tanto na variável z quanto em ω e q, fazendo

$$u = (\pi T) z, \qquad \mathfrak{w} = \frac{\omega}{\pi T}, \qquad \mathfrak{q} = \frac{q}{\pi T}. \tag{3.22}$$

A solução mantém a forma, ou seja,

$$Z_T = f^{-i\frac{\mathfrak{w}}{4}} F_T, \tag{3.23}$$

só que agora depende da variável adimensional u e a $'$ agora indica ∂_u. Ao substituir na equação de Z_T, obtemos uma equação diferencial para a função F_T:

$$F_T''(u) + \left(-\frac{f''(u)}{f'(u)} + \frac{(2 - i\mathfrak{w}) f'(u)}{2 f(u)}\right) F_T'(u) - \frac{(\mathfrak{w}^2 (f'(u)^2 - 16) + 16\mathfrak{q}^2 f(u))}{16 f(u)^2} F_T(u) = 0. \tag{3.24}$$

Propomos uma solução de forma $F_T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_T^{(n)}(u)$, junto com a reparametrização $\mathfrak{w} = \lambda \mathfrak{w}$, $\mathfrak{q} = \lambda \mathfrak{q}$, onde λ é um parâmetro $<< 1$ que nos permite manejar a expansão multiparamétrica de $F_T(u)$, $\mathfrak{w}$ e $\mathfrak{q}$. As equações à ordem zero e primeira ordem em λ são dadas por (3.25) e (3.26). Para a primeira ordem em λ, vamos considerar a solução da equação à

ordem zero como um termo tipo "fonte":

$$F_T^{(0)\prime\prime}(u) + \left(\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{f''(u)}{f'(u)}\right) F_T^{(0)\prime}(u) = 0, \tag{3.25}$$

$$F_T^{(1)\prime\prime}(u) + \left(\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{f''(u)}{f'(u)}\right) F_T^{(1)\prime}(u) - \frac{i\mathfrak{w} f'(u) F_T^{(0)\prime}(u)}{2f(u)} = F_T^{(0)}(u). \tag{3.26}$$

As soluções respectivas são

$$F_T^{(0)}(u) = c_2 + c_1 \ln f(u), \qquad c_1 = 0, \tag{3.27}$$

onde por condições de regularidade no horizonte, impomos que $c_1 = 0$; portanto, $F_T^{(0)}(u) = F_T^{(0)} = c_2$. Isso traz mudanças na equação (3.26), sendo que o terceiro termo será zero. Além disso, a condição $Z_T(0) = 0$ nos leva a considerar $F_T^{(0)} \to 0$, e a equação (3.26) fica

$$F_T^{(1)\prime\prime}(u) + \left(\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{f''(u)}{f'(u)}\right) F_T^{(1)\prime}(u) = 0. \tag{3.28}$$

A solução é semelhante com (3.27); impondo a condição de regularidade no horizonte, temos que $F_T^{(1)}(u)$ é contante e proporcional à $F_T^{(0)}$. A solução (3.23) é

$$Z_T(u) = F_T^{(0)} f(u)^{-i\frac{\mathfrak{w}}{4}} (1 + \cdots). \tag{3.29}$$

Para obter o limite hidrodinâmico, fazemos a expansão em séries de Z_T ao redor de $\mathfrak{w} \to 0$:

$$Z_T(u) = F_T^{(0)} \left(1 - \frac{1}{4} i\mathfrak{w} \ln(f(u)) - \frac{1}{32}\mathfrak{w}^2 \ln^2(f(u))\right)(1 + \cdots). \tag{3.30}$$

Tomando o limite $u \to 0$, podemos identificar a função $\mathcal{A}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) = 1 + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2)$. Com base nas discussões anteriormente sobre os zeros da função $\mathcal{A}$, vemos que este setor não apresenta soluções compatíveis com o limite hidrodinâmico.

3.3.2 Setor vetorial

Neste setor, temos seis equações, que podem ser reduzidas a três, já que são idênticas. Especificamente, as equações das componentes h_{tx^i}, h_{zx^i} e $h_{x^3x^i}$ (com $x^i = x^1, x^2$) são dadas

por:

$$h''_{tx^i} + h_{tx^i}\left(-\frac{q^2}{f} + \frac{2\zeta''}{\zeta} - \frac{4\zeta'^2}{\zeta^2}\right) + \frac{\zeta' h'_{tx^i}}{\zeta} - \frac{q\omega h_{x^i x^3}}{f} = 0; \tag{3.31}$$

$$h'_{x^i x^3} + \frac{2h_{x^i x^3}\zeta'}{\zeta} + \frac{2\omega h_{tx^i}\zeta'}{qf\zeta} + \frac{\omega h'_{tx^i}}{qf} = 0; \tag{3.32}$$

$$h''_{x^i x^3} + \left(\frac{f'}{f} + \frac{\zeta'}{\zeta}\right) h'_{x^i x^3} + \left(\frac{2f'\zeta'}{f\zeta} + \frac{\omega^2}{f^2} + \frac{2\zeta''}{\zeta} - \frac{4\zeta'^2}{\zeta^2}\right) h_{x^i x^3} + \frac{q\omega}{f^2} h_{tx^i} = 0; \tag{3.33}$$

onde tomamos a transformada de Fourier nas perturbações $h_{mn}(t, x^3, z) = e^{-i\omega t + iqx^3} h_{mn}(z)$. Dessas equações só duas são independentes e elas podem ser reduzidas a uma única equação. Neste setor usamos uma variável inspirada em (3.16) e na quantidade invariante de calibre de Kovtun-Starinets [19], $Z_V = q\zeta^2 h_{tx^i} + \omega\zeta^2 h_{x^i x^3}$. Substituindo $h_{x^i x^3}$ e suas derivadas na equação (3.31), encontramos

$$Z''_V + \left(-\frac{f''}{f'} + \frac{\omega^2 f'}{f\left(\omega^2 - q^2 f\right)}\right) Z'_V + \frac{(\omega^2 - q^2 f)}{f^2} Z_V = 0. \tag{3.34}$$

A solução para $q = 0$ e $\omega = 0$ é

$$Z_V(z) = c_1 \ln(f(z)) + c_2.$$

Fazendo a normalização pela temperatura (3.22), obtemos (3.34) em termos da variável adimensional u:

$$Z'_V(u)\left(\frac{\mathfrak{w}^2 f'(u)}{f(u)\left(\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 f(u)\right)} - \frac{f''(u)}{f'(u)}\right) + \frac{Z_V(u)\left(\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 f(u)\right)}{f(u)^2} + Z''_V(u) = 0, \tag{3.35}$$

Com a finalidade de encontrar soluções para a equação (3.35) e estabelecer o limite hidrodinâmico, vamos implementar uma solução semelhante àquela utilizada no caso anterior. Vamos considerar também a solução ao redor de $f(u) = 0$, ou seja, em torno de $u = u_h$. A equação de índice da solução tipo Frobenius tem como resultado $\alpha = \pm\frac{i\omega}{f'(z_h)}$, resultado idêntico ao do setor tensorial. Então, vamos considerar a solução de onda entrando no horizonte, ou seja, o α com sinal positivo, uma vez que $f'(u_h) < 0$ de acordo com (2.20). Propomos

$$Z_V(u) = f^{-i\frac{\mathfrak{w}}{4}} F_V(u), \tag{3.36}$$

onde $F_V(u)$ é uma função regular no horizonte. Considerando valores de $\mathfrak{w} \to 0$ e $\mathfrak{q} \to 0$ nesse

limite, a equação diferencial para $F_V(u)$ se transforma em

$$F_V(u)\left(-\frac{\mathfrak{w}^2\left(f'^2-16\right)}{16f^2}-\frac{\mathfrak{q}^2\left(4\mathfrak{w}+if'^2\right)}{4\mathfrak{w}f}\right)+F_V'(u)\left(\frac{\mathfrak{q}^2f'}{\mathfrak{w}^2}-\frac{i\mathfrak{w}f'}{2f}+\frac{f'}{f}-\frac{f''}{f'}\right)+F_V''(u)=0. \tag{3.37}$$

Propomos novamente uma solução de forma $F_V(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n F_V^{(n)}(u)$, e a reparametrização $\mathfrak{w}=\lambda\mathfrak{w}$, $\mathfrak{q}=\lambda\mathfrak{q}$, onde λ é um parâmetro $<< 1$, que permite manejar a expansão multi-paramétrica de $F_V(u)$, $\mathfrak{w}$ e $\mathfrak{q}$. Em ordem zero,

$$-\frac{f'F_V^{(0)\prime}(u)\left(\mathfrak{q}^2f+\mathfrak{w}^2\right)}{\mathfrak{w}^2f}-\frac{f''F_V^{(0)\prime}(u)}{f'}+F_V^{(0)\prime\prime}(u)=0, \tag{3.38}$$

a solução é

$$F_V^{(0)}(u)=c_1+c_2\int_0^u\frac{f'(x)e^{-\frac{\mathfrak{q}^2f(x)}{\mathfrak{w}^2}}}{f(x)}dx. \tag{3.39}$$

Considerando o limite de $\mathfrak{q}\to 0$, impomos a condição de regularidade no horizonte e, como consequência, temos que $c_2=0$, de modo que a solução à ordem zero é constante:

$$F_V^{(0)}(u)=c_1=F_V^{(0)}.$$

Em primeira ordem, e considerando o resultado de ordem zero constante, temos a equação

$$F_V^{(1)\prime\prime}(u)+F_V^{(1)\prime}(u)\left(\frac{f'(u)}{f(u)}-\frac{f''(u)}{f'(u)}\right)-\frac{iF_V^{(0)}\mathfrak{q}^2f'(u)^2}{4\mathfrak{w}f(u)}=0. \tag{3.40}$$

A solução para $\mathfrak{q}$ pequeno é

$$F_V^{(1)}(u)=c_3+c_4\ln(f(u))+\frac{iF_V^{(0)}\mathfrak{q}^2f(u)}{4\mathfrak{w}}. \tag{3.41}$$

Dessa forma, no limite hidrodinâmico, $\mathfrak{w}\ll 1$ e $\mathfrak{q}\ll 1$, a solução para o setor vetorial é dada por

$$Z_V(u)=F_V^{(0)}f(u)^{-i\frac{\mathfrak{w}}{4}}\left(1+\frac{i\mathfrak{q}^2f(u)}{4\mathfrak{w}}+\mathcal{O}(\mathfrak{q}^2,\mathfrak{w}^2)\right). \tag{3.42}$$

Temos visto que a condição $\mathcal{A}(\mathfrak{w},\mathfrak{q})=0$ nos permite identificar os polos das funções de correlação retardadas. Neste caso, temos $\mathcal{A}(\mathfrak{w},\mathfrak{q})=1+\frac{i\mathfrak{q}^2}{4\mathfrak{w}}=0$, o que nos leva a

$$\mathfrak{w}=-i\frac{\mathfrak{q}^2}{4}\qquad\text{ou}\qquad\omega=-i\frac{q^2}{4\pi T}.$$

Em resumo, para este setor, temos soluções compatíveis com o regime hidrodinâmico. Da

relação de dispersão, podemos identificar o coeficiente $\gamma_\eta = 1/4\pi T$. Levando em conta os resultados obtidos em [16] e [19], é possível obter a relação $\eta/s = 1/4\pi$.

3.3.3 Setor escalar

Neste caso, temos sete equações que contêm apenas as componentes h_{tt}, h_{zz}, h_{tz} e $h_{x^ix^i}$, com $x^i = x^1, x^2, x^3$. Tomando a transformada de Fourier das perturbações, $h_{mn}(t, x^3, z) = e^{-i\omega t + iqx^3} h_{mn}(z)$, e levando em conta o calibre radial, definido nas seções anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned} -H''_{tt} + \left(\frac{4f''}{3f'} - \frac{3f'}{2f}\right) H'_{tt} + \left(\frac{f'}{f} - \frac{2f''}{3f'}\right) H'_{x^1x^1} + \left(\frac{f'}{2f} - \frac{f''}{3f'}\right) H'_{x^3x^3} \\ + \frac{q^2 H_{tt}}{f} + \frac{2q\omega H_{tx^3}}{f^2} + \frac{2\omega^2 H_{x^1x^1}}{f^2} + \frac{\omega^2 H_{x^3x^3}}{f^2} - \frac{2\chi V_\phi(\phi)}{3f\zeta^2} = 0; \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} -H''_{x^1x^1} - \frac{f'' H'_{tt}}{3f'} + \left(\frac{5f''}{3f'} - \frac{f'}{f}\right) H'_{x^1x^1} + \frac{f'' H'_{x^3x^3}}{3f'} \\ + \frac{H_{x^1x^1}\left(q^2 f - \omega^2\right)}{f^2} + \frac{2\chi V_\phi(\phi)}{3f\zeta^2} = 0; \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} -H''_{x^3x^3} - \frac{f'' H'_{tt}}{3f'} + \frac{2f'' H'_{x^1x^1}}{3f'} + \left(\frac{4f''}{3f'} - \frac{f'}{f}\right) H'_{x^3x^3} \\ - \frac{q^2 H_{tt}}{f} + \frac{2q^2 H_{x^1x^1}}{f} - \frac{2q\omega H_{tx^3}}{f^2} - \frac{\omega^2 H_{x^3x^3}}{f^2} + \frac{2\chi V_\phi(\phi)}{3f\zeta^2} = 0; \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} H''_{tt} - 2H''_{x^1x^1} - H''_{x^3x^3} + \left(\frac{3f'}{2f} - \frac{f''}{3f'}\right) H'_{tt} + \left(\frac{2f''}{3f'} - \frac{f'}{f}\right) H'_{x^1x^1} + \left(\frac{f''}{3f'} - \frac{f'}{2f}\right) H'_{x^3x^3} \\ + \frac{2}{3}\left(\frac{\chi V_\phi(\phi)}{f\zeta^2} - 8\chi'\phi'\right) = 0; \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\frac{f'' H'_{tx^3}}{f'} - \frac{2q\omega H_{x^1x^1}}{f} - H''_{tx^3} = 0; \tag{3.47}$$

$$-\frac{qf' H_{tx^3}}{f} - \frac{\omega f' H_{x^1x^1}}{f} - \frac{\omega f' H_{x^3x^3}}{2f} + qH'_{tx^3} + 2\omega H'_{x^1x^1} + \omega H'_{x^3x^3} + \frac{8}{3}\omega\chi\phi' = 0; \tag{3.48}$$

$$\frac{qf' H_{tt}}{2f} + \frac{\omega H'_{tx^3}}{f} + qH'_{tt} - 2qH'_{x^1x^1} - \frac{8}{3}q\chi\phi' = 0; \tag{3.49}$$

onde definimos $H_{tt} = \zeta^2 h_{tt}/f$, $H_{x^ix^i} = \zeta^2 h_{x^ix^i}$ e $H_{tx^3} = \zeta^2 h_{tx^3}$. O sistema de equações acima pode ser reduzido a quatro equações independentes. Considerando as equações (3.43)-(3.46)

e (3.48), encontramos

$$
\begin{aligned}
H'_{tx^3} = & \frac{\omega f' H_{x^1x^1}\left(\frac{4\left(\omega^2-q^2 f\right)}{f'^2-2ff''}+1\right)}{qf} + \frac{2q\omega f' H_{tt}}{f'^2-2ff''} + \frac{2\omega f f'' H'_{tt}}{qf'^2-2qff''} \\
& + \frac{\omega f' H_{x^3x^3}\left(\frac{4\omega^2}{f'^2-2ff''}+1\right)}{2qf} + \frac{f' H_{tx^3}\left(-2ff''+f'^2+4\omega^2\right)}{f\left(f'^2-2ff''\right)} - \\
& \frac{2\omega\chi f' V_\phi(\phi)}{q\zeta^2\left(f'^2-2ff''\right)} + \frac{8\omega\phi'\left(-\frac{2ff'\chi'}{f'^2-2ff''}-\chi\right)}{3q}.
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Utilizando (3.50) e (3.49), vem

$$
\begin{aligned}
H'_{x^1x^1} = & H'_{tt}\left(\frac{\omega^2 f''}{q^2\left(f'^2-2ff''\right)}+\frac{1}{2}\right) + \frac{\omega^2 f' H_{x^1x^1}\left(\frac{4\left(\omega^2-q^2 f\right)}{f'^2-2ff''}+1\right)}{2q^2 f^2} \\
& + \frac{\omega^2 f' H_{x^3x^3}\left(\frac{4\omega^2}{f'^2-2ff''}+1\right)}{4q^2 f^2} \\
& + \frac{\omega f' H_{tx^3}\left(-2ff''+f'^2+4\omega^2\right)}{2qf^2\left(f'^2-2ff''\right)} + \frac{f' H_{tt}\left(\frac{4\omega^2}{f'^2-2ff''}+1\right)}{4f} \\
& + \frac{\omega^2\chi f' V_\phi(\phi)}{q^2 f\zeta^2\left(2ff''-f'^2\right)} \\
& + \frac{4\phi'\left(2\omega^2 f f'\chi' + \chi\left(q^2 f+\omega^2\right)\left(f'^2-2ff''\right)\right)}{3q^2 f\left(2ff''-f'^2\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Usando (3.50), (3.51) e (3.47), temos

$$
\begin{aligned}
H'_{x^3x^3} = & \frac{f' H_{tt}\left(f\left(4q^2-2f''\right)+f'^2+4\omega^2\right)}{2f\left(2ff''-f'^2\right)} \\
& - \frac{H'_{tt}\left(2\omega^2 f''+q^2 f'^2\right)}{q^2\left(f'^2-2ff''\right)} - \frac{\omega f' H_{tx^3}\left(f\left(4q^2-2f''\right)+f'^2+4\omega^2\right)}{qf^2\left(f'^2-2ff''\right)} \\
& + \frac{\omega^2 f' H_{x^3x^3}\left(f\left(4q^2-2f''\right)+f'^2+4\omega^2\right)}{2q^2 f^2\left(2ff''-f'^2\right)} \\
& + \frac{f' H_{x^1x^1}\left(-2\omega^2 ff''+\omega^2 f'^2-4q^4 f^2+4\omega^4\right)}{q^2 f^2\left(2ff''-f'^2\right)} - \frac{2\chi f' V_\phi(\phi)\left(q^2 f+\omega^2\right)}{q^2 f\zeta^2\left(2ff''-f'^2\right)} \\
& - \frac{8\phi'\left(q^2 f+\omega^2\right)\left(2ff'\chi'+\chi\left(f'^2-2ff''\right)\right)}{3q^2 f\left(2ff''-f'^2\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Finalmente, combinando (3.43), (3.51) e (3.52), obtemos:

$$
\begin{aligned}
H''_{tt} = & \frac{4q^2 f'' H_{tt}}{6ff'' - 3f'^2} + \frac{H_{x^1x^1}\left(6q^2 f'^2 - 4f''\left(q^2 f + 2\omega^2\right)\right)}{3f\left(f'^2 - 2ff''\right)} \\
& - \frac{8q\omega f'' H_{tx^3}}{3ff'^2 - 6f^2 f''} - \frac{\left(12f^2 f''^2 + 9f'^4 - 20ff'^2 f''\right) H'_{tt}}{6ff'^3 - 12f^2 f' f''} \\
& - \frac{4\omega^2 f'' H_{x^3x^3}}{3ff'^2 - 6f^2 f''} - \frac{\chi V_\phi(\phi)\left(2ff'' + f'^2\right)}{3f\zeta^2\left(2ff'' - f'^2\right)} \\
& + \frac{8\chi'\phi'\left(3f'^2 - 2ff''\right)}{9\left(f'^2 - 2ff''\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

As quatro equações anteriores são equivalentes àquelas apresentadas em [19]. Uma das dificuldades para se reduzir o sistema de equações acima a uma única equação fundamental, como foi feito nos outros setores, está na definição da variável invariante de calibre. Nesse sentido, consideramos

$$
Z_S(z) = \chi(z) - \frac{\phi'(z)}{2A'}\frac{1}{3}(2h_{x^1x^1} + h_{x^3x^3}) \tag{3.54}
$$

inspirada no artigo de DeWolfe, Gubser e Rosen [46], onde A guarda relação com nosso fator de deformação ζ. No artigo supracitado o sistema é resolvido, porém eles levam em conta só a parte temporal da transformada de Fourier e usam a fórmula de Kubo para obter a viscosidade de volume.

DISCUSSÃO

O surgimento do plasma de quarks e glúons (QGP) foi uma das motivações para a extensão à temperatura finita de modelos não-perturbativos baseados na correspondência AdS/CFT, a chamada QCD holográfica. Os modelos gravitacionais com um campo escalar dilatônico acoplado a uma métrica de buraco negro AdS plano-simétrico $5d$ representam uma oportunidade de investigar a transição de fases do confinamento/desconfinamento da QCD. A escolha de um dílaton quadrático, que garante o confinamento linear na região IR, permite a obtenção de uma solução analítica para a função horizonte em termos de funções especiais, sendo possível também a obtenção de expansões assintóticas. Uma das caraterísticas da termodinâmica presente nesses modelos é a existência de uma temperatura miníma T_{min} associada a $z_h = z_{min}$, conforme mostrado na Figura 2.2, sendo que, para $z_h > z_{min}$, temos um sistema fisicamente instável (buraco negro pequeno) e para $z_h < z_{min}$ o sistema é estável (buraco negro grande) [37]. O comportamento assintótico do modelo é comparável àquele obtido nas referências [16, 37, 39, 40].

Quantidades termodinâmicas como entropia, densidade de energia, calor específico, velocidade do som e energia livre mostram claramente as diferenças entre os regimes de grandes e de pequenos buracos negros. Na Figura 2.7 para a velocidade do som, podemos observar que, no limite de altas temperaturas, c_s aproxima-se do valor de uma CFT, o que sugere a recuperação da teoria conforme neste limite. Além disso, a existência de valores de z_h e, portanto, de temperatura para os quais a anomalia de traço é diferente de zero sugere a quebra da simetria conforme da CFT, porém essa quantidade decresce rapidamente e também vai a zero em altas temperaturas. A possibilidade de encontrar uma solução analítica para o fator de deformação ζ permite obter o comportamento assintótico das quantidades termodinâmicas, tanto para $z_h \to 0$ quanto para $z_h \to \infty$. No limite de buracos negros grandes, os resultados são compatíveis com os modelos apresentados em [37, 39, 40] e mais recentemente em [16], onde vemos que os primeiros termos das expressões assintóticas correspondem ao fator de deformação do AdS, amplamente divulgado na literatura, enquanto que os segundos termos podem ser associados com a deformação gerada pelo dílaton. O limite de buracos negros pequenos, $z_h \to \infty$, mostrado em (2.36), é compatível com o resultado de confinamento linear à temperatura zero apresentado em [37] e [16].

Com base em modelos de QCD holográfica, é possível obter propriedades únicas do QGP. Considerando que o plasma possui um comportamento próximo de um fluido perfeito, pode-se assim calcular alguns coeficientes de transporte, tais como os coeficientes de viscosi-

dade. Uma das formas de se obter os coeficientes de transporte, usando a correspondência AdS/QCD, é a partir do cálculo dos modos quasenormais (QNM). Esses modos formam um conjunto discreto de oscilações amortecidas [23], originalmente associadas com os polos das funções de Green, propostas como soluções das equações diferenciais parciais resultantes das pertubações dos buracos negros. Neste trabalho, obtivemos o resultado universal para a razão do coeficiente de viscosidade de cisalhamento pela densidade de entropia $\eta/s = 1/4\pi$.

Em termos de perspectivas futuras, introduzindo variáveis invariantes de calibre inspiradas nos trabalhos [12, 19, 46], esperamos encontrar no setor escalar tanto a velocidade do som quanto o coeficiente de viscosidade de volume, identificando o limite hidrodinâmico das soluções das equações de perturbação com as relações de dispersão de um fluido relativístico. Neste caso, são esperadas correções na velocidade do som e na viscosidade de volume para valores perto da temperatura miníma. Já de posse das equações de perturbação, será possível calcular posteriormente o espectro completo de modos quasenormais associados às perturbações gravidilatônicas. Além disso, pretendemos considerar, futuramente, campos de natureza distinta, como é o caso dos campos de gauge, ou seja, considerar buracos negros eletricamente carregados assintoticamente AdS, o que nos permitirá realizar um estudo similar ao realizado em [20] e [50].

Referência

[1] Bethke. S. *The 2009 World Average of α_s*. Eur. Phys. J.C64 689-703, 2009.

[2] Adcox K. et al. (PHENIX Collaboration), *Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration*, Nucl. Phys. A 757, 184, 2005. [arXiv: nucl-ex/0410003].

[3] Back B. B. et al. (PHOBOS Collaboration), *The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC*, Nucl. Phys. A 757, 28, 2005. [arXiv: nucl-ex/0410022].

[4] Arsene I. et al. (BRAHMS Collaboration), *Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment*, Nucl. Phys. A 757, 1, 2005. [arXiv: nucl-ex/0410020].

[5] Adams J. et al. (STAR Collaboration), *Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions*, Nucl. Phys. A 757, 102, 2005, [arXiv: nucl-ex/0501009].

[6] Natsuume M. *AdS/CFT Duality User Guide*, Springer, 2015.

[7] Maldacena J.M. *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231, 1998. [ArXiv:hep-th/9711200]

[8] Gubser S. S.; Nellore A.; *Mimicking the QCD equation of state with a dual black hole*, Phys. Rev. D 78, 086007, 2008. [ArXiv: 0804.0434 [hep-th]]

[9] Gürsoy U.; Kiritsis E. *Exploring improved holographic theories for QCD: Part I*, J. High Energy Phys. 0802, 032, 2008. [arXiv: 0707.1324 [hep-th]].

[10] Gürsoy U.; Kiritsis E.; Nitti F. *Exploring improved holographic theories for QCD: Part II*, J. High Energy Phys. 0802, 019, 2008. [arXiv: 0707.1349 [hep-th]].

[11] Gürsoy U.; Kiritsis E; Mazzanti L.; Michalogiorgakis G.; Nitti F. *Improved Holographic QCD.* 2010. [arXiv: 1006.5461v1[hep-th]]

[12] Ballon-Bayona A.; Boschi-Filho H.; Mamani L. A. H.; Miranda A. S.; Zanchin V. T. *Effective holographic models for QCD: glueball spectrum and trace anomaly*, Phys. Rev. D 97, no. 4, 046001, 2018.

[13] Li D.; He S.; Huang M. *Temperature dependent transport coefficients in a dynamical holographic QCD model.* 2014. [arXiv: 1411.5332v1 [hep-ph]]

[14] Karch A.; Katz E.; Son D. T.; Stephanov M. A. *Linear confinement and AdS/QCD* Phys. Rev. D 74, 015005, 2006. [hep-ph/0602229]

[15] Miranda A. S.; Ballon-Bayona A.; Boschi-Filho H.; Braga N. R. F. *Black-hole quasinormal modes and scalar glueballs in a finite-temperature AdS/QCD model*, J. High Energy Phys. 0911,119, 2009. [arXiv: 0909.1790[hep-th]].

[16] Ballon-Bayona A.; Mamani L. A. H.; Miranda A. S.; Zanchin V. T. *Effective holographic models for QCD:thermodynamics and viscosity coefficients*, 2021. [arXiv: 2103.14188v2 [hep-th]].

[17] Policastro G.; Son D. T.; Starinets A. O. *From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics*, J. High Energy Phys. 0209, 043, 2002. [arXiv: hep-th/0205052[hep-th]].

[18] Policastro G.;Son D. T.; Starinets A. O. *From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics. II. Sound waves*, J. High Energy Phys. 0212, 054, 2002. [arXiv: hep-th/0210220[hep-th]].

[19] Kovtun P. K.; Starinets A. O. *Quasinormal modes and holography*, Phys. Rev. D 72, 086009, 2005. [arXiv: hep-th/0506184 [hep-th]].

[20] Ballon-Bayona A.; Boschi-Filho H.;Capossoli E. F.;Rodrigues D. M. *Criticality from EMD holography at finite temperature and density*, Phys. Rev. D 102, 126003, 2020. [arXiv: 2006.08810v1[hep-th]].

[21] Ammon M.;Erdmenger J. *Gauge/Gravity Duality*, ISBN 978-1-107-01034-5 (Cambridge University), 2015.

[22] Lages E. *Variedades Diferenciáveis*, ISBN: 978-85-244-0267-8 (IMPA), 2011.

[23] Miranda A. S. *Modos Quase Normais e a Correspondência AdS/CFT*, (2009),Tese (Doutorado em Física), Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2009.

[24] Papantonopoulus E. *From Gravity to Thermal Gauge Theories: The AdS/CFT Correspondence*, Springer, 2011.

[25] Kovtun P. *Lectures on hydrodynamic fluctuations in relativistic theories*, 2012. [arxiv: 1205.5040v1[hep-th]].

[26] Eckart C. *The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid* , Phys. Rev. 58 (Nov, 1940) 919–924.

[27] 'T HOOFT G. *A planar diagram theory for strong interactions.* Nucl. Physics B, v. 72, p. 461-73, 1974.

[28] Gubser S.S.;Klebanov I.R.; Polyakov A.M.; *Gauge theory correlators from non-critical string theory*, Phys. Lett. B428, 105, 1998. [arXiv: hep-th/9802109]

[29] Witten E. *Anti-de Sitter space and holography* Adv. Theor. Math. Phys. 2, 253, 1998. [arXiv: hep-th/9802150]

[30] He S.; Wu S.; Yuan P.; Yang Y. *Phase Structure in a Dynamical Soft-Wall Holographic QCD Model*, 2013. [arXiv: 1301.0385v1 [hep-th]]

[31] Erlich J.; Katz E.; Son D. T.; . Stephanov M. A *QCD and a holographic model of hadrons*, Phys. Rev. Lett. 95, 261602, 2005. [arXiv: hep-ph/0501128]

[32] Da Rold L.; Pomarol A. *Chiral symmetry breaking from five dimensional spaces*. Nucl. Phys. B 721, 79. 2005. [ArXiv: hep-ph/0501218].

[33] Jarvinen M. *Recent progress in backreacted bottom-up holographic QCD*, 2015. [arXiv: 1501.03693 [hep-ph]].

[34] Li D.; Huang M. *Dynamical holographic QCD model for glueball and light meson spectra*, J. High Energy Phys. 1311, 088, 2013. [arXiv: 1303.6929 [hep-ph]].

[35] Li D.; Liao J.; Huang M. *Enhancement of jet quenching around phase transition: Result from the dynamical holographic model* Phys. Rev. D 89, 126006, 2014.

[36] Rodrigues D. M.; Da Rocha R. *Configurational entropy and spectroscopy of pomeron resonances in dynamical AdS/QCD*, 2020. [arXiv: 2006.00332v1[hep-th]].

[37] Gürsoy U.; Kiritsis E.; Mazzanti L.; Nitti F. *Holography and Thermodynamics of 5D Dilaton-gravity*, J. High Energy Phys. 0905, 033, 2009. [arXiv: 0812.0792 [hep-th]].

[38] Li D.; He S.; Huang M.; Yan Q. *Thermodynamics of deformed AdS 5 model with a positive/negative quadratic correction in graviton-dilaton system*, J. High Energy Phys. 09.041, 2011.

[39] Zuo F. *Thermal power terms in the Einstein-dilaton system*, 2014. [arXiv: 1404.4512v1[hep-ph]].

[40] Mamani L. A. H.; Vasquez C.; ZanchinV. T. *Phase diagram and compact stars in a holographic QCD model*, 2020. [arXiv: 2006.09401v2[hep-th]].

[41] Kovtun P.; Son D. T.; Starinets A. O. *Viscosity in Strongly Interacting Quantum Field Theories from Black Hole Physics*, Phys. Rev. Lett. 94, 111601 (2005) [arXiv:hep-th/0405231].

[42] Policastro G.; Son D. T.; Starinets A. O. *The shear viscosity of strongly coupled $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma*, Phys. Rev. Lett. 87.081601, 2001. [arXiv: hep-th/0104066].

[43] Nakamura A.; Sakai S. *Transport Coefficients of Gluon Plasma*, Phys. Rev. Lett. 94:072305, 2005. [arXiv: hep-lat/0406009v1].

[44] Son D. T.; Starinets A. O. *Minkowski-space correlators in AdS/CFT correspondence: Recipe and applications*, J. High Energy Phys. 0209, 042, 2002. [arXiv: hep-th/0205051].

[45] Gubser S. S.; Pufu S. S.; Rocha F. D. *Bulk viscosity of strongly coupled plasmas with holographic duals*, J. High Energy Phys. 08, 085, 2008. [arXiv: 0806.0407 [hep-th]].

[46] DeWolfe O.; Gubser S. S.; Rosen C. *Dynamic critical phenomena at a holographic critical point* Phys. Rev. D 84, 126014, 2011.

[47] Horowitz G. T.; Hubeny V. E. *Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium*, Phys. Rev. D 62, 024027, 2000. [arXiv: hep-th/9909056].

[48] Li D.; Liao J.; Huang M. *Enhancement of jet quenching around phase transition: result from the dynamical holographic model*, Phys. Rev. D 89, no.12, 126006, 2014. [arXiv: 1401.2035 [hep-ph]].

[49] Diles S.; Mamani L. A. H.; Miranda A. S.; Zanchin V. T. *Third-order relativistic hydrodynamics: dispersion relations and transport coefficients of a dual plasma*, J. High Energy Phys. 05, 019, 2020. [arXiv: 1909.05199 [hep-th]].

[50] Mamani, L. A. H.; Defu H. *Holographic picture of heavy vector mesons melting in a finite density plasma*. Em andamento.

[51] Kodama H.; Ishibashi A. *A master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions*, Prog. Theor. Phys. 110, 701-722, 2003. [arXiv: 0305147 [hep-th]].

[52] Jansen A.; Rostworowski A.; Rutkowski M. *Master equation and stability of Einstein-Maxwell-scalar black holes*, J. High Energy Phys. 12, 036, 2019.