UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PPGECM

LUANA LEMOS RIBEIRO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O RACIOCÍNIO FUNCIONAL NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

ILHÉUS-BAHIA

2020

LUANA LEMOS RIBEIRO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O RACIOCÍNIO FUNCIONAL NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciência e Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profª. Dra. Vera Lucia Merlini

ILHÉUS-BAHIA

2020

R484 Ribeiro, Luana Lemos.
Uma investigação sobre o raciocínio funcional no 6º ano do Ensino Fundamental / Luana Lemos Ribeiro. – Ilhéus, BA: UESC, 2020.
124 f.: il.

Orientadora: Vera Lucia Merlini.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino fundamental. 3. Raciocínio. 4. Álgebra. I. Título.

CDD 510.07

LUANA LEMOS RIBEIRO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O RACIOCÍNIO FUNCIONAL NO 6^0 ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Dissertação submetida ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática — PPGECM, em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA
EM 30/09/2020

Vera Merlini

Profa. Dra. Vera Lucia Merlini
Orientadora/Presidente da banca – PPGEC/UESC

Prof. Dr. Aparecido dos Santos

Examinador – Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

Larissa Pinca Sarro Gomes

Profa. Dra. Larissa Pinca Sarro Gomes
Examinadora – PPGEC/UESC

Ilhéus, Bahia, 30 de setembro de 2020.

A minha mainha Deborah Lemos, por tanto me apoiar nessa jornada, com amor e paciência.

A meu esposo Rudhero Monteiro, por ser meu amigo, companheiro e maior incentivador desse projeto.

AGRADECIMENTOS

À Deus por sempre estar comigo cuidando de mim em todos os momentos, por ter me dado forças e a oportunidade de realizar esta pesquisa.

À minha mãe Deborah Lemos, que tanto amo, por sempre acreditar em mim, por todo incentivo e amor.

Ao meu amor Rudhero Monteiro por estar sempre ao meu lado, pelo companheirismo e apoio incondicional à neste projeto.

À minha querida orientadora Dra. Vera Merlini, por sua paciência, confiança, incentivo e disponibilidade ao longo da minha vida acadêmica.

Aos amigos, quiçá irmãos, da minha turma do PPGEM (mais conhecida como turminha do 6º ano), que alegraram meus dias ao longo dessa caminhada: Anderson, Camilla, José Lucas, Luciano, Samuel, Taize e Thiago. Em especial, à Alex meu querido amigo, que tem um lugar garantido no céu por me aturar.

Aos amigos de Ubatã por todo amor oferecido, mesmo com a distância.

Aos amigos do Salobrinho, Uesc e região, em especial: Anella, Açucena, Caio, Ednailton, Fabiane Bibi, Joice, Juliana, Marcelo, Sabrina, Sirlêda, Rafaela Machado.

À minhas queridas amigas “Belas e Recatadas”: Ana Caroline, Geisa, Rafaela Brito e Tainara.

Aos amigos e familiares Camila Pereira, Daniela Pereira, Fabiane Andrade e tantos outros (que não esqueço, mas não tenho como citar o nome de todos) que me incentivaram nesta caminhada.

Aos mestrandos de outras turmas, anteriores e posteriores, com os quais tive a oportunidade de ampliar minha teia de amizades. Em especial, Edimilson e Sidnéia por terem dado mais graça e leveza aos meus dias de estudos na Uesc e por serem os melhores companheiros de viagens.

À equipe da Escola Municipal de Salobrinho, em especial a professora Andréa Ribeiro que abriu as portas das suas salas de aulas para que pudéssemos entrar e coletar os dados necessários para o nosso estudo.

Ao professor Dr. Aparecido e à professora Dra. Larissa, pelo tempo dedicado em ler meu trabalho e pelas ricas contribuições à pesquisa.

Aos membros do Grupo de Pesquisa RePARe que proporcionaram momentos de muitos conhecimentos e troca de experiências.

Aos professores do PPGEM, pela oportunidade de tê-los como mestres durante esses anos compartilhando seus conhecimentos, em especial às professoras doutoras: Sandra Magina, Eurivalda Santana e Zulma Elizabete.

À professora Irene Carzola, pela generosa colaboração nos testes estatísticos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

E a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse chegar ao fim de mais essa jornada.

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O RACIOCÍNIO FUNCIONAL NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

RESUMO

A presente pesquisa trata-se de um estudo diagnóstico que teve por objetivo investigar o desempenho e a competência de generalização que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional. Para isso, utilizamos como base a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1993), mais especificamente ao que se refere ao Campo Conceitual Multiplicativo. Buscamos, ainda, apoio teórico nos estudos no campo da *Early Algebra* (EA), tendo como principais pesquisadores Blanton e Kaput(2015), Radfor (2006), Carraher e Schliemann (2016). Nesse sentido, para atingir o objetivo desse estudo, foi elaborado um instrumento diagnóstico composto por 10 situações subdivididas em itens. Essas situações foram respondidas por 54 estudantes do 6º ano de três turmas de uma Escola Municipal do Sul da Bahia e requeriam o uso do raciocínio funcional em suas resoluções. Os resultados obtidos permitem afirmar que os estudantes apresentaram bom desempenho frente às situações envolvendo o raciocínio funcional, mesmo que ainda não tiveram o contato com a álgebra formal nesse ano escolar. Constatamos que os estudantes apresentam desempenho elevado quando se trata de funções lineares, mas baixo desempenho em situações de função afim. Notamos, ainda, que o ícone da situação não se portou como um facilitador para a resolução dos estudantes. No que concerne a competência de generalização, obtivemos resultados positivos, pois boa parte dos estudantes tentaram expressar algo a respeito, sendo que, majoritariamente, o fizeram de forma aritmética. Contatamos, também, que uma parcela dos estudantes conseguiu generalizar algebricamente algumas situações, mesmo que com uso da linguagem natural, sem uso de notações. Concluímos, então, que a generalização aritmética é um passo importante para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e, consequentemente, o raciocínio funcional.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Campo Conceitual Multiplicativo. *Early Algebra*. Raciocínio Funcional. Generalização.

AN INVESTIGATION ON FUNCTIONAL REASONING IN THE 6th GRADE OF MIDDLE SCHOOL

ABSTRACT

This research is a diagnostic study that aimed to investigate the performance and generalization competence that 6th grade students in middle school have when dealing with problems involving functional reasoning. For this, we use as basis the Theory of Conceptual Fields, proposed by Vergnaud (1993), more specifically to what refers to the Multiplicative Conceptual Field. We also seek theoretical support in studies in the field of Early Algebra (EA), with Blanton and Kaput (2015), Radfor (2006), Carraher and Schliemann (2016) as the main researchers. In this sense, in order to achieve the objective of this study, was elaborated a diagnostic instrument composed of 10 situations subdivided into items. These situations were answered by 54 students of 6th grade from three classes at a Municipal School in the South of Bahia and required the use of functional reasoning in their resolutions. The results obtained allow us to affirm that the students performed well in situations involving functional reasoning, even though they have not yet had contact with formal algebra in this school grade. We found that students have high performance when it comes to linear functions, but low performance in situations of non-linear functions. We also note that the icon of the situation did not act as a facilitator for students' resolution. Regarding the generalization competence, we obtained positive results, since most of the students tried to express something about it, and most of them did so in an arithmetic way. We also found that some students managed to generalize some situations algebraically, even if using natural language, without using notations. We conclude, then, that arithmetic generalization is an important step for the development of algebraic reasoning and, consequently, the functional reasoning.

Keywords: Middle School. Multiplicative Conceptual Field. Early Algebra. Functional Reasoning. Generalization.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EA	*Early Algebra*
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional de Ensino Médio
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PA	Progressão aritmética
PPP	Projeto político pedagógico
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
PPGEM	Pós-Graduação em Educação Matemática
RePARe	Grupo de Pesquisa Reflexão, Planejamento, Ação e Reflexão em Educação Matemática
TALE	Termo de assentimento livre e esclarecido
TCLE	Termo de consentimento livre e esclarecido
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ESQUEMAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O tema desse trabalho está relacionado à *Early Algebra*[1], contudo a princípio trago[2] um breve histórico de minha formação acadêmica a partir do Ensino Médio até o momento atual, como pesquisadora em formação, por considerar importantes as experiências vivenciadas em cada momento para as escolhas atuais. Em seguida, apresento uma contextualização do tema aqui tratado, trazendo o objetivo e questão de pesquisa da presente dissertação, bem como a organização geral de todo o texto.

Breve Histórico Acadêmico

No segundo semestre de 2011, prestes a completar o Ensino Médio, me inscrevi no Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) e consegui lograr uma vaga para o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), com início das aulas no primeiro semestre de 2012. A escolha para tal curso se deu por aptidão pessoal, bem como influência de familiares, professores e amigos.

Em meados do curso, tive a oportunidade de participar, na condição de bolsista, do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), no qual obtive minhas primeiras experiências como docente e desenvolvi diversas atividades relacionadas a algumas das teorias da Educação Matemática que refletiram nas minhas escolhas acadêmicas futuras.

Ainda na graduação, a partir das disciplinas de estágios supervisionados, estagiei em turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e percebi as dificuldades dos estudantes na compreensão e resolução de problemas que envolvessem conceitos relacionados às funções. Percebi ainda que as dificuldades desses estudantes não se davam apenas nas funções exponenciais, logarítmicas ou até mesmo nas quadráticas, mas no mais simples caso da função afim que é a função linear. Do meu ponto de vista essas dificuldades não faziam sentido, afinal problemas de proporcionalidade não era novidade àqueles estudantes,

[1] O termo *Early Algebra* surgiu em 1998, quando se iniciou a implementação de um projeto que estudou a possibilidade de se introduzir a álgebra nos Anos Iniciais do sistema educacional norte-americano. O projeto foi denominado de "*Early Algebra*" (para maiores detalhes ler KAPUT, 1999). A partir de então, esse termo foi cunhado para referir conceitos elementares da álgebra, envolvendo desde situações aritméticas até as funcionais, passando pelas sequências lógicas.

[2] Por se tratar de experiências particulares de uma das autoras, faz-se o uso da primeira pessoa do singular apenas na introdução.

uma vez que são situações desse tipo são trabalhadas desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Na busca de compreender essa problemática, procurei ajuda de uma das minhas professoras, pesquisadora da área, a qual me orientou a procurar trabalhos acadêmicos que tratassem dessa temática. Nesse momento, surgiu a ideia de usar esse tema como Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), visando pesquisar as possibilidades de introduzir o raciocínio funcional através de problemas envolvendo proporção simples no início dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Nessa ocasião como estava estagiando em turmas dos Anos Finais, conversei com a Professora Supervisora do Estágio que me cedeu uma turma para que eu pudesse desenvolver uma sequência de ensino, cujo objetivo foi introduzir o raciocínio funcional em uma turma de alunos de 6º ano, a partir de situações de proporção simples. Assim, planejei cinco encontros com essa turma, composta por 30 estudantes, sendo que o primeiro e o último foram desenvolvidos o pré e o pós teste.

A sequência de ensino que trabalhei foi toda inspirada no trabalho desenvolvido por Teixeira (2016) e, resguardadas as devidas proporções, encontrei resultados semelhantes à sua pesquisa. Alguns dos estudantes com os quais eu trabalhei, conseguiram generalizar algumas das situações propostas, escrevendo ou verbalizando, com a minha intervenção, sentenças matemáticas que as expressavam.

Embora tenha trabalhado com a sequência de ensino, para efeito de meu Relato de Experiência, que resultou no meu TCC, fiz somente a análise de desempenho. Apesar dessa análise ter apontado resultados interessantes, não foi possível analisar as estratégias utilizadas pelos estudantes para resolver as situações, o que ficou como sugestão de trabalhos futuros. Com isso em mente, após terminar a graduação em 2018, resolvi dar continuidade aos estudos iniciados no TCC ingressando no mestrado.

Como discente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática PPGEM (atualmente Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática PPGECM), tive a oportunidade de participar do Grupo de Pesquisa Reflexão, Planejamento, Ação e Reflexão em Educação Matemática (RePARe), coordenado pelas professoras Dra. Sandra Magina e Dra. Vera Merlini. Naquele momento estava sendo desenvolvido o Projeto de Pesquisa A *Early Algebra* no Ensino Fundamental: Mapeamento e diagnóstico e vários trabalhos já estavam em andamento. Desse modo, com esse projeto em andamento e com minhas aspirações comecei a pensar de forma mais assertiva como poderia desenvolver a minha pesquisa e o primeiro passo foi me integrar dos estudos já realizados dentro e fora do RePARe.

Contextualização do Tema

Durante as discussões no grupo RePARe, acerca da *Early Algebra*, muito se falava sobre o pensamento algébrico, raciocínio algébrico e raciocínio funcional de estudantes do Ensino Fundamental. Tais discussões eram pautadas nas pesquisas de autores como Kieran (1995, 2004) e Blanton e Kaput (2005), entre outros.

O pensamento algébrico nos primeiros anos escolares, segundo Kieran (1995, 2004), envolve o desenvolvimento de maneiras de pensar dentro de atividades para as quais a Álgebra simbólica das letras pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas da Álgebra e, mesmo sem o uso delas, os estudantes poderiam analisar relações entre quantidades, perceber estrutura, estudar mudanças, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever.

Vale destacar que, por raciocínio algébrico, Blanton e Kaput (2005) consideram como um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares e estabelecem essas generalizações através do discurso da argumentação e as expressam de maneiras cada vez mais formais e apropriadas à idade. Ainda no mesmo texto, os referidos autores definem o pensamento funcional como uma das formas assumidas pelo raciocínio algébrico em que se utiliza de generalizações de padrões numéricos para desenvolver relações funcionais.

De forma semelhante, Blanton *et al.* (2015) afirmam que o pensamento funcional envolve generalizar relações entre quantidades covariáveis e representar e raciocinar com essas relações por meio da linguagem natural, notação algébrica (simbólica), tabelas e gráficos. O leitor encontrará uma discussão mais detalhada sobre o pensamento algébrico e o raciocínio algébrico na página 37 do presente estudo.

Com base nessas definições, para nós do grupo RePaRe, o raciocínio funcional, mais especificamente, trata-se da capacidade dos estudantes em estabelecer a relação de dependência entre duas ou mais grandezas a partir das generalizações de padrões numéricos. Para exemplificar nosso ponto de vista, mostraremos três situações simples:

❖ A primeira situação envolve a compra e venda de pastéis dado um valor unitário, a saber: Se 1 pastel custa R$ 3,00, então na compra de 5 pastéis a pessoa pagará

R$ 15,00 ($3 \cdot 5$) e em uma quantidade qualquer, simbolizada por p, a pessoa pagará o valor correspondente a $3p$, em reais. Esta é uma situação em que o valor pago depende da quantidade de pastéis comprados e pode ser modelada por uma função linear $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = 3p$.

- ❖ A segunda situação envolve o valor pago em um conserto de uma televisão, a saber: Se o técnico cobra R$ 20,00 para ir verificar o problema da tv e mais R$ 10,00 por hora de trabalho, então se um conserto durou 3 horas ele receberá pelo trabalho R$ 50,00 ($20 + 10 \cdot 3$). Para uma quantidade qualquer de horas trabalhadas, digamos h, ele receberá o correspondente a $20 + 10h$, em reais. Nesta situação o valor recebido depende do valor fixo e da quantidade de horas trabalhadas, sendo modelada pela função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(h) = 20 + 10h$.
- ❖ O terceiro exemplo, envolve uma situação de padrão de sequência crescente da forma (2, 4, 6, ...) em que o número 2 encontra-se na 1ª posição, o número 4 na 2ª posição, o 6 na 3ª posição, e assim sucessivamente. Essa situação tratar-se de uma sequência de números pares positivos, os quais podem ser obtidos a partir da função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{N}^*$. Nesse caso, x representa a posição do número par e $f(x)$ o número par dessa posição.

Visto isso, em consonância com os autores supracitados, assumimos o termo “raciocínio algébrico” e, consequentemente, “raciocínio funcional”, por entendermos que o significado da palavra raciocínio se encaixa muito bem no contexto dos nossos estudos. Porém, em alguns trechos, aparecerão o termo pensamento algébrico, visto este constar em alguns dos textos aqui referenciados tais como os artigos de pesquisadores da Educação Matemática, bem como os documentos oficiais que regem a educação no Brasil.

A partir de um breve levantamento bibliográfico nas dissertações desenvolvidas no grupo RePAre, cuja a fonte é o banco de dados PPGEM-UESC (http://ppgemuesc.com.br/producao-discente/, acesso em 22 de outubro de 2018), tive uma ampla visão de todos os trabalhos que envolviam a temática *Early Algebra* nessa instituição. Após uma análise, encontrei oito estudos elaborados no grupo que trabalhavam com o desenvolvimento do raciocínio algébrico nos alunos e/ou nos professores do ensino fundamental.

Desses trabalhos, cinco abordaram o desenvolvimento do raciocínio algébrico, porém todos trabalharam com estudantes do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a saber Teixeira

(2015), Porto (2018), Jerônimo (2019), Bastos (2019) e Araújo (2020). Os estudos de Oliveira (2018) e Sousa (2020), trabalharam com o desenvolvimento algébrico na formação continuada, mais precisamente, com professores do Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Já Bitencourt (2018) analisou a abordagem do pensamento algébrico nos livros didáticos dos Anos Iniciais.

Mais especificamente, Teixeira (2015) introduziu o raciocínio funcional (a ideia de função polinomial de 1º grau), no 5º ano do Ensino Fundamental, a partir de uma intervenção de ensino. Porto (2018) por sua vez, investigou se estudantes de 3º e 5º anos do Ensino Fundamental conseguiriam entender problemas que envolvesse conceitos algébricos elementares tal como o de função afim. Essas dissertações foram pautadas na Teoria dos Campos Conceituais e nos estudos relacionados à *Early Algebra*.

Bastos (2019), investigou as estratégias que estudantes de 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental utilizaram para resolver situações que envolviam sequências, equivalência e relação funcional. Jerônimo (2019), diagnosticou estudantes de 6º e 9º ano de todas as vertentes da Álgebra, inclusive a equivalência. Na dissertação de Araújo (2020), foi analisado o desempenho e as estratégias que estudantes de 5º ano utilizaram para responder situações sobre equação de 1º grau. Tais dissertações também utilizaram como aposte teórico a *Early Algebra*.

O estudo de Oliveira (2018) teve como foco a aprendizagem e os saberes de professores que trabalham nos Anos Iniciais. O autor desenvolveu um curso de formação continuada, onde foi abordado conceitos da *Early Algebra*. Souza (2020), por sua vez, pesquisou como os textos, de relação funcional, produzidos em uma formação continuada em *Early Algebra*, na perspectiva do Ensino Híbrido, são recontextualizados nas salas de aula dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental dos respectivos participantes da formação.

Bitencourt (2018), analisou o pensamento algébrico abordado nos livros didáticos dos Anos Iniciais. Tal análise mostrou que as coleções apresentavam atividades que envolviam padrão de sequência, equivalência e relação funcional, colaborando para o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos estudantes.

Vale ressaltar que na maior parte das dissertações analisadas não houve a apresentação destacada das definições de pensamento e raciocínio algébrico, raciocínio funcional e outros termos, às vezes utilizados como sinônimos.

Sendo assim, tomamos como partida os estudos relacionados a *Early Algebra* do grupo RePARe, para fazer a nossa investigação. No entanto, diferentemente das dissertações mencionadas, o público alvo deste estudo são estudantes do 6º ano (início do Ensino Fundamental – Anos Finais, conforme denomina a Base Nacional Comum Curricular – BNCC), que apesar de já fazer parte dos Anos Finais, esses estudantes ainda não tiveram o ensino formal de Álgebra. Como o tema abordado está relacionado ao raciocínio funcional, trago também uma breve discussão as estruturas multiplicativas de Vergnaud (2009).

De acordo com Vergnaud (2009), muitos conceitos podem ser informalmente apresentados aos estudantes antes de sua programação curricular. Com isso, o conhecimento é construído e se desenvolve ao longo do tempo na interação do sujeito com as diferentes situações que vivencia. Baseando-se nessa ideia, o raciocínio funcional já pode ser trabalhado a partir de situações que envolvem a proporção simples e, assim, possibilita alguns benefícios ao processo de ensino e aprendizagem, uma vez que situações como essas são trabalhadas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Nesse contexto, pode-se considerar que a proporção simples está na base da função linear, sendo esta um caso particular da função afim. Isso significa que é importante, ao ser ministrado esse conteúdo, fazer a conexão entre a proporcionalidade e a função linear para que os estudantes não pensem que é novidade e sim uma ampliação de algo já conhecido.

Além da proporcionalidade, pode-se dizer que o raciocínio funcional no Ensino Fundamental por vezes se confunde com as noções de sequências (gráficas, pictóricas e numéricas). Para Ponte *et al.* (2009, p. 41), "ao longo de toda a escolaridade, a análise de sequências permite aos alunos progredir de raciocínios recursivos para raciocínios envolvendo relações funcionais".

Na tentativa de interpretar, organizar e generalizar o padrão de uma sequência, os estudantes estão propensos a utilizarem o raciocínio funcional. A partir da análise das regras e padrões espera-se que eles desenvolvam um forte sentido do número ao mesmo tempo desenvolvam o conceito de função.

Atualmente a BNCC (BRASIL, 2017, p.268) afirma ser "imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a Álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais". Outrossim, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998) fazem essa mesma indicação, pois

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecer diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis [...] (BRASIL, 1998, p. 50)

De todo modo, a partir das orientações destes documentos, a Álgebra formal continua sendo apresentada apenas a partir do 7º ano, sendo que é nesse ano que são abordados conteúdos relacionados à equação. No que tange ao conceito de funções, esse é trabalhado formalmente no 9º ano, último ano do Ensino Fundamental – Anos Finais.

Apoiada em Vergnaud (2009), no que se refere à estrutura multiplicativa, tive contato com vários trabalhos relacionados a *Early Algebra* realizados por Carraher e Schliemann (2016a, 2016b), Brizuela (2006), Kaput (1999), Radfor (2006), dentre outros.

Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é: **Investigar o desempenho e a competência de generalização que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional**.

Vale salientar que, de acordo com Vergnaud (1988), competência refere-se à capacidade do sujeito em escolher estratégias adequadas e adaptadas para resolver uma dada situação-problema. A partir do objetivo supracitado temos como interesse responder à seguinte questão de pesquisa: **Qual desempenho e a competência de generalização que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional?**

Descrição dos Capítulos Subsequentes

Para atingir o objetivo desse trabalho e responder à questão de pesquisa tracei uma trajetória que coloco em capítulos, os quais descrevo a seguir.

Após a Introdução, em que abordo minha trajetória acadêmica, a inserção no Grupo de Pesquisa RePARe, a problemática, objetivo e minha questão de pesquisa, inicio o Capítulo I o qual abordará a Álgebra, em especial a Função, sob alguns aspectos. Nesse capítulo traremos a trajetória da Função ao longo do tempo, em especial a Função Afim e seu caso particular de Função Linear; a Função na escola, trazendo nos documentos oficiais; e por fim, o Raciocínio Funcional na Educação Matemática.

No Capítulo 2 apresentaremos os procedimentos metodológicos, apresentando o universo de estudo dessa pesquisa, além dos procedimentos de coleta e análise dos dados.

No Capítulo 3 será contemplado a análise dos dados sob dois pontos de vista, do quantitativo que diz respeito ao desempenho dos estudantes, e do qualitativo no qual investigamos a competência de generalização desses estudantes.

Ao final, mas não menos importante, fecharemos com as considerações finais, destacando os principais resultados alcançados pela pesquisa e elencando algumas possibilidades de futuras pesquisas.

CAPÍTULO I: O RACIOCÍNIO FUNCIONAL EM DIFERENTES PERSPECTIVAS

Nesse capítulo tratamos nosso objeto matemático, a função, sob algumas perspectivas, são elas: na Matemática como conceito; na escola a partir da análise dos documentos oficiais; na Educação Matemática tendo em vista o Campo Conceitual Multiplicativo de Vergnaud (2009) e a *Early Algebra*. Dessa forma, apresentamos, a priori, um breve histórico do conceito de função até sua definição atual adotada nos livros didáticos e paradidáticos na seção que segue.

1.1 O CONCEITO DE FUNÇÃO NA MATEMÁTICA

Nessa seção trouxemos a função no contexto matemático, na sua formalidade, a fim de discutir o conceito e suas propriedades. Para isso, traçamos um breve histórico das funções, sendo estas, objetos de grande importância da Matemática. Todavia, de acordo com Eves (2011) e Boyer (1974), este conceito, tal como conhecemos hoje, só apareceu pela primeira vez no final do século XVII, e, por isso, é considerado relativamente novo comparado a outros objetos da Matemática tais como os entes geométricos formalizados por Euclides por volta do século III a.c. Para Eves (2011),

> A palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva (EVES, 2011, p. 660).

Segundo Boyer (1974, p. 297), “Leibniz não é o responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra ‘função’, praticamente no mesmo sentido em que hoje é empregada”.

Nota-se que ambos autores concordam que Gottfried Leibniz (1646-1727) foi o primeiro a utilizar a palavra e as ideias de função em seus estudos sobre o cálculo infinitesimal iniciados por volta de 1673. Leibniz foi um importante matemático para sua época e bastante conhecido por ter introduzido as notações de derivadas e integrais, até hoje utilizadas em cursos de nível superior. A ele se deve diversas outras notações como, por exemplo, o ponto “ · ” para indicar uma multiplicação, o til “ ~ ” para indicar as semelhanças, dentre outros comumente utilizados na matemática.

De acordo com Boyer (1974), pouco antes de Leibniz, o físico Isaac Newton (1643-1727), também com o desenvolvimento do cálculo, referenciava às funções com outros termos (as quantidades fluentes). Eves (2011) aponta, porém, que apenas dez anos depois, por volta de

1718, com João Bernoulli (1667-1748), a palavra função tomou forma com uma definição mais precisa, inclusive, usando os termos "expressão analítica", "variável" e "constante", sendo estes até hoje utilizados. Pouco tempo depois, por volta de 1748, foram também utilizados e aperfeiçoados tais termos por Leonhard Euler (1707-1783) em sua obra *Introductio in Analysin Infinitorum*.

Em sua obra, Euler considerou uma função de uma quantidade variável como uma expressão analítica composta, de um modo qualquer, desta quantidade e de números ou quantidades constantes. Porém, ele não definiu o que seria uma expressão analítica, mas, segundo Boyer (1974), ele se referia às funções algébricas e às funções transcendentes elementares (exponenciais, logarítmicas e trigonométricas). Da mesma forma que Leibniz, Euler foi um importante matemático da sua época e criador de diversas notações, dentre elas a notação $f(x)$ até hoje utilizada para designar uma função de x.

Tal definição, dada por Euler, durou até Joseph Fourier (1768-1830) considerar, em suas pesquisas sobre a propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas, afirmando que, a certa altura, "qualquer" função poderia ser escrita como uma soma de senos e cossenos, num intervalo apropriado. Isso aparece em sua obra *Théorie analytique de la chaleur* publicada em 1822. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente.

A partir daí, Dirichlet (1805-1859) se empenhou para entender em quais casos as integrais que definem os coeficientes de uma série de Fourier existiam, por isso foi levado a debruçar-se sobre o conceito de função e chegou a seguinte formulação:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função (EVES, 2011, p. 661).

Para evidenciar a natureza totalmente arbitrária da lei de correspondência que orienta a relação entre as variáveis, Dirichlet apresentou, em 1829, o exemplo de uma função que era descontínua em todos os seus pontos, não integrável e não podia ser representada por uma expressão analítica (pelo menos na época). Essa função é conhecida hoje como Função de Dirichlet e, na notação atual pode ser representada da seguinte forma:

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

Tal definição está bem próxima da função como uma relação entre dois conjuntos, porém, segundo Boyer (1974), tais conceitos ainda não haviam sido estabelecidos. Foi apenas com Georg Cantor (1845-1918), com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, que as funções apresentaram em sua definição a correspondência entre elementos de dois ou mais conjuntos, numéricos ou não, e, assim, este conceito passou a ser amplamente utilizado tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento.

Atualmente, o conceito de função é considerado imprescindível como afirma Eves (2011, p. 661): "é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática".

Contudo, o grau de formalidade de tal conceito depende do nível de ensino trabalhado. Nos livros didáticos do Ensino Fundamental, em geral os do 9º ano, é comum que a abordagem do conceito de função seja a partir de uma situação-problema do cotidiano, sem destacar sua definição formal. Observamos isso no livro adotado pela escola na qual aconteceu a presente pesquisa. "Convergências: Matemática, 9º ano" do autor Chavante (2015), que dispõe de um capítulo para abordar o estudo de funções polinomiais de 1º e 2º grau. Na introdução desse conceito o autor apresenta uma situação-problema envolvendo a comercialização de alimentos orgânicos e traz um pouco da história do tema.

Ao abordar e retomar o conceito de função no Ensino Médio, o livro didático, do 1º ano do Ensino Médio, Dante (2016) traz a seguinte definição para função: "Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$" (DANTE, 2016, p. 49).

Vale ressaltar que, antes de apresentar a definição de forma destacada, Dante (2016) traz um breve histórico do conceito de função e algumas noções intuitivas a partir de tabelas e diagramas. Só após definir o objeto matemático, traz-se as notações algébricas comumente utilizadas nos demais tópicos tais como $f: A \to B$ (lê-se: f de A em B) para indicar que a função f transforma x de A em y de B. Os significados e denominações para os conjuntos A e B só são apresentados mais adiante.

Em uma abordagem para professores do Ensino Médio[3], Lima *et al.* (2012) destacam a definição de função da seguinte forma:

> Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se: "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$

[3] Vale ressaltar que este livro é um dos três volumes (volume I) apresentados no programa de aperfeiçoamento para professores de Matemática do Ensino Médio realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Além disso, é voltado, também, a estudantes de Licenciatura em Matemática, portanto, não se trata de um livro didático voltado ao estudante do nível médio.

> um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f\,(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$ (LIMA *et al.*, 2012, p.45).

Note que nesta definição, o autor já destaca as denominações para os dois conjuntos usados para definir a função: o domínio e o contradomínio. Além destes, faz-se menção ao elemento $f(x)$ como a imagem de x, e, reunidos todos esses elementos forma-se o conjunto imagem da função f indicado comumente pela notação $Im(f)$.

Seguindo com uma abordagem para o ensino superior, Lima (2004), voltado especialmente aos cursos de Matemática na disciplina de Análise Matemática, traz a seguinte definição:

> Uma função $f : A \rightarrow B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x) (LIMA 2004, p. 13).

Notamos, na definição acima, algumas particularidades quanto a formalização comparando-a com as demais já apresentadas. Por exemplo, em Lima *et al.* (2012) os autores destacam como se faz a leitura da notação $f(x)$, o que já não acontece em Lima (2004), por entender que o leitor já esteja familiarizado com as notações elementares para este objeto matemático. A afirmação de que uma função consta de três partes indica que a não especificação de uma delas implica na inexistência da função.

Como primeiro tipo de função estudada de forma detalhada, os autores dos livros supracitados, tratam da função polinomial de primeiro grau, também conhecida como função afim. Chavante (2015), nesse momento, apresenta a seguinte definição de forma destacada em seu livro: "Função afim é toda função do tipo $f(x) = ax + b$, em que x é a variável independente e a e b são coeficientes reais. b é o coeficiente chamado termo independente" (CHAVANTE, 2015, p. 150).

Uma vez definido o conceito de função, trouxemos para discussão a função afim que é o objeto matemático desse estudo. Para Dante (2016), bem como Lima *et al.* (2012), "Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$" (DANTE, 2016, p. 75). As funções constantes e lineares são dadas como casos particulares, em que $a = 0$ e $b = 0$, respectivamente. Nesse caso, os autores fixam o domínio e contradomínio das funções no conjunto dos números reais, também conhecidas como funções reais de uma variável real.

De posse dessas definições, é possível obter uma função afim de forma recursiva desde que se conheça um valor inicial. Por exemplo, para uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, conhecemos sempre $f(0) = b$ (condição inicial), logo podemos obter uma expressão equivalente a

$$\begin{cases} f(0) = b \\ f(x) = f(x-1) + a \end{cases}.$$

Dessa forma pode-se relacionar o conceito de função linear ao de sequências. Mais precisamente, Lima (2004) trata as sequências como função. Para este autor, "uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado n-ésimo termo da sequência". Apesar de se tratar a sequência numérica como uma função, não é comum o uso da notação $x(n)$ e sim x_n para indicar o elemento associado a n. Além disso, pode-se escrever a sequência a partir de seus termos $(x_1, x_2, \dots x_n, \dots)$ ou de seu termo geral $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

De acordo com Lima *et al.* (2012) o caso particular da função afim, a função linear, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. Segundo estes autores, "a proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios" (LIMA *et al.*, 2012, p. 92). Quanto a este objeto matemático, os autores o definem da seguinte forma: "Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = f(x)/c$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa)" (LIMA *et al.*, 2012, p. 93).

Do ponto de vista da Educação Matemática, retomaremos os conceitos de padrões de sequência, bem como de proporcionalidade como estratégias para introdução do conceito de função conforme previsto no currículo (BNCC, 2017). Para isso, traremos estudos de alguns pesquisadores tais como Ponte, Branco e Matos (2009), Vale e Barbosa (2009), Vale e Pimentel (2011), dentre outros. As sequências são apresentadas aos estudantes desde os Anos Iniciais como propõe os documentos oficiais que regem a educação no Brasil os quais serão detalhados adiante.

1.2 O RACIOCÍNIO FUNCIONAL NA ESCOLA

Nessa seção, analisaremos dois documentos oficiais da Educação Básica no Brasil: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997, 1998) e a Base Nacional Comum

Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017). O objetivo é entender como é organizado e abordado o ensino da Álgebra nos Anos Iniciais (1º ao 5º ano) e no 6º ano dos Anos Finais, em especial o desenvolvimento do raciocínio funcional. Nesse sentido, discutiremos de um modo geral o que são esses documentos, como são apresentados e como abordam o raciocínio algébrico.

Os PCN (BRASIL, 1997, 1998), tratam-se de orientações quanto ao cotidiano escolar e os principais conteúdos que devem ser trabalhados em todo território nacional sem sobrepor a diversidade sociocultural de cada região do país, tampouco a autonomia de professores e instituições escolares que devem ter seu próprio Projeto Político Pedagógico (PPP). Um dos principais objetivos deste documento é o de dar subsídios aos educadores, para que suas práticas pedagógicas sejam da melhor qualidade.

Este documento surgiu após a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (Lei Federal n. 9.394), de 20 de dezembro de 1996, a qual previa, em seu Art. 22, assegurar a todos "a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores" (Brasil, 1996, Art. 22), tida como educação básica e dividida em Ensino Fundamental e Ensino Médio.

No que se refere a Matemática, os PCN c preveem sua caracterização como abstração, precisão, rigor lógico, caráter irrefutável de suas conclusões, bem como o extenso campo de suas aplicações. A abstração é uma das características de destaque no documento, ao afirmarem que "a matemática move-se quase que exclusivamente no campo dos conceitos abstratos" (BRASIL, 1997 p. 23), sem esquecer que a mesma é utilizada a todo tempo para modelar fenômenos da vida real em outras áreas do conhecimento como Física, Química e Astronomia.

O documento destaca, dentre as subáreas da Matemática a Álgebra para o Ensino Fundamental. Um importante conceito é o de proporcionalidade que oferece suporte na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções.

Vale ressaltar que, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997, p. 39), "embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados". Logo, este trecho corrobora em parte com os estudos ligados a *Early Algebra*, principalmente no que se refere a introdução de conceitos algébricos desde as séries iniciais (atuais Anos Iniciais).

No que se refere à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) é utilizada como referência para a elaboração dos currículos da educação básica de todas as escolas do país, que, foi homologada como um documento de caráter normativo em dezembro de 2017 para o Ensino Infantil e Ensino Fundamental – Anos Iniciais e Finais.

Cabe destacar que antes da homologação da BNCC (BRASIL, 2017) o documento vigente no Brasil, para determinar orientações à Educação Básica, era os PCN (BRASIL, 1997, 1998). Contudo, a BNCC (BRASIL, 2017) aprofunda e amplia alguns objetivos de ensino a serem alcançados em cada ano escolar. Sua implementação ocorreu de 2018 a 2020, com reelaborações de currículos, formação de professores e revisão dos materiais didáticos.

Vale salientar que a BNCC (BRASIL, 2017) não deve ser entendida como um currículo, mas sim como uma base para a construção dos currículos das escolas, em confluência ao PPP e o que é proposto em cada escola, levando em consideração sua regionalidade.

No que concerne a área de Matemática, a BNCC "propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do ensino fundamental" (BRASIL, 2017, p. 268), a saber: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística. Como o nosso estudo trata de raciocínio funcional, discutiremos apenas a unidade temática Álgebra.

A unidade temática Álgebra, tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo este considerado essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas. De forma geral, "essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações" (BRASIL, 2017, p. 270).

Além disso, a BNCC (BRASIL, 2017), sugere que o pensamento algébrico seja desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade. Vale ressaltar que essa proposta não é o adiantamento da Álgebra formal e sim uma forma de trabalhar com vistas ao desenvolvimento desse pensamento algébrico nos estudantes, incentivando-os a analisar as operações matemáticas e não apenas decorar algoritmos.

Apesar do 6º ano fazer parte dos Anos Finais, a Álgebra para esse nível de escolaridade ainda é apresentada informalmente. O documento apresenta uma tabela especificando as unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades de cada ano escolar. A seguir, trouxemos um recorte do quadro, contendo os objetos do 6º ano para a unidade temática Álgebra.

Quadro 1.1: Objetos de conhecimento do 6º ano na unidade temática Álgebra

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Álgebra	Propriedades da igualdade
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017, p. 302)

Podemos notar, pelo Quadro 1.1, que os objetos de conhecimentos na unidade Álgebra não traz nenhum tópico específico que remete às funções, como são apresentados em anos escolares anteriores (Anos Iniciais) em que os estudantes têm acesso às regras de formação de sequência, e começam a reconhecer mudanças e relações, sendo estes os primeiros indicativos da ideia de função.

A seguir, elaboramos um quadro contendo os objetos de conhecimento da unidade temática Álgebra para cada ano do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, proposta pela BNCC (BRASIL, 2017).

Quadro 1.2: Objetos de conhecimento do 1º ao 5º ano da unidade temática Álgebra

Unidade temática: Álgebra	
Anos Iniciais	**Objetos de conhecimento**
1º	• Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências • Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)
2º	• Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas • Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência
3º	• Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas • Relação de igualdade
4º	• Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural • Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero • Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão • Propriedades da igualdade
5º	• Propriedades da igualdade e noção de equivalência • Grandezas diretamente proporcionais • Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017).

Percebe-se, no Quadro 1.2, que a proposta da BNCC (BRASIL, 2017) é promover o desenvolvimento do raciocínio algébrico desde os Anos Iniciais, a partir de investigações de padrões em sequências, a construção de sequências, propriedades de igualdade, noções de equivalência.

Tal documento evidencia a importância da abordagem da proporcionalidade para desenvolvimento do raciocínio funcional, por meio da multiplicação simples entre grandezas, que é o mote dessa pesquisa. Assim, a seguir, retomamos os conceitos relacionados ao nosso objeto de estudos sob a perspectiva da Educação Matemática.

1.3 O RACIOCÍNIO FUNCIONAL NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nessa seção tratamos os estudos que embasaram a presente pesquisa. Dessa forma, inicialmente, abordamos a Teoria dos Campos Conceituais, a fim de discutir a importância da observação dos aspectos conceituais dos esquemas na análise cognitiva dos estudantes, mediante as situações envolvendo o raciocínio funcional. Por conseguinte, apresentamos alguns estudos relacionados à *Early Algebra* que tratam dessa temática, a fim de dar luz às discussões no presente texto.

1.3.1 A Teoria dos Campos Conceituais

Nosso estudo foi embasado na Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1983, 1988, 1994, 2009) por se tratar de uma teoria cognitivista que oferece um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas.

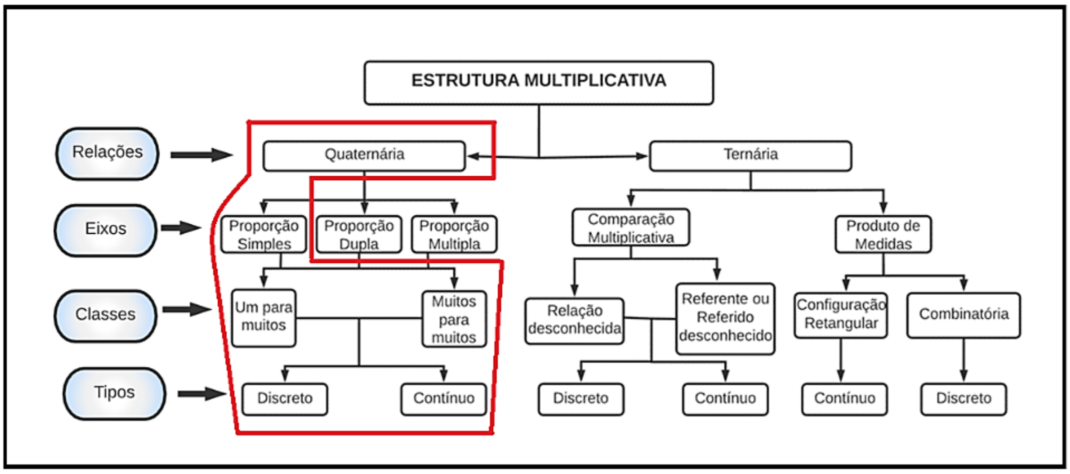
Entende-se por campo conceitual um conjunto de situações em que Vergnaud (1993) destaca a vantagem desse tipo de abordagem permitir a produção de uma classificação baseada na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser adotados em cada um deles. Nesse caso, o referido autor analisou os tipos de situações matemáticas, seus tipos de formulação aliados às idades psicológicas e à maturação matemática, chegando às estruturas envolvidas na resolução dos problemas, a fim de entender as filiações e saltos dos conhecimentos dos estudantes, isto é, compreender as relações.

A Teoria dos Campos Conceituais afirma que os conceitos matemáticos adquirem sentido ao sujeito se ele interagir com situações variadas e, por sua vez, cada situação, por mais simples que possa parecer, não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Isso reforça o fato de que um campo conceitual considera um conjunto de situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros.

No que se refere à Matemática, Vergnaud (1990) destaca que dois campos conceituais são especialmente importantes por alicerçarem todos os demais conceitos matemáticos: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. O primeiro se caracteriza como um conjunto de situações que requer, para a sua resolução, as operações de adição ou de subtração ou, ainda, as duas combinadas. Quanto ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, este se caracteriza como sendo um conjunto de situações que requer, para a sua resolução, as operações de divisão ou de multiplicação ou a combinação de ambas. Para o nosso estudo nos ateremos apenas ao Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, que discorremos a seguir.

O Campo Conceitual Multiplicativo envolve vários conceitos, entre eles podemos destacar: a multiplicação e a divisão, a razão e a proporção, as funções lineares e a n-lineares, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração e a porcentagem. A partir da teoria de Vergnaud (1983, 1988, 1994, 2009) sobre o Campo Conceitual Multiplicativo, Magina, Merlini e Santos (2014) fizeram uma releitura e elaboraram um esquema sobre as ideias centrais, apresentado no Esquema 1.1.

Esquema 1.1: O Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2014), grifo nosso

Para desenvolver as situações relacionadas a função linear em nossa pesquisa, utilizaremos a parte destacada no Esquema 1.1 que trata da relação quaternária do eixo proporção simples. Esse eixo possui duas classes: correspondência um para muitos e correspondência muitos para muitos, podendo estas trabalhar com dois tipos de quantidades: discreta e contínua.

A relação quaternária envolve uma relação entre duas ou mais grandezas de naturezas distintas, relacionadas duas a duas. O eixo proporção simples pertence à relação quaternária entre quatro quantidades, sendo duas de uma natureza e as outras duas de outra natureza. Esse eixo, por sua vez, pode ser subdivido em duas classes de situações: a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos.

- ❖ Classe 1: Correspondência um para muitos – acontece quando a relação entre as quantidades está explícita. Exemplo 1: Uma caixa de lápis de cor tem 6 lápis. Quantos lápis têm em 5 caixas? Nesse caso a relação está explícita, para cada caixa temos 6 lápis, a razão é 1 para 6.
- ❖ Classe 2: Correspondência muitos para muitos – Nesta classe, a relação entre as quantidades está implícita, sendo que, para essa classe, temos duas situações a considerar. Uma quando é possível chegar à relação um para muitos (Exemplo 2) e outra quando não faz sentido se obter a relação um para muitos (Exemplo 3). Exemplo 2: Três caixas iguais de lápis contêm, ao todo, 15 lápis. Quantos lápis terão em 5 caixas? Nesse exemplo a relação entre a quantidade de uma caixa para a quantidade de lápis está implícita. Sabemos que há a relação de 3 caixas para 15 lápis e podemos encontrar a razão de 1 caixa para 5 lápis.

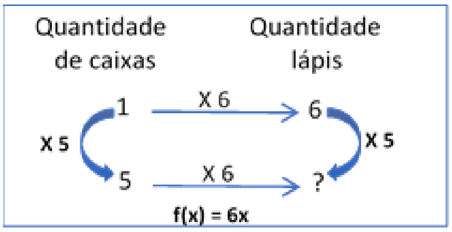
  O mesmo não acontece na situação apresentada a seguir. Exemplo 3: A cada 5 caixas de lápis comprada a Loja RisqueRabisque oferece de brinde 3 apontadores. Tiago comprou 20 caixas de lápis, quantos apontadores ele ganhou? Nessa situação não faz sentido chegar na correspondência um para muitos, pois ao comprar 1 caixa de lápis, a loja não oferecerá o brinde. Então a razão será de 5 (caixas de lápis) para 3 (apontadores).

De acordo com Magina *et al.* (2012), ao trabalhar com a relação quaternária no eixo de proporção simples, os procedimentos de resolução podem ampliar, permitindo que o estudante, pense a questão tanto por meio da aplicação do operador escalar quanto por meio operador funcional. Os autores afirmam que “esse último se configura como conhecimento de base que é central para a apropriação do conceito de função em anos mais avançados de escolaridade” (MAGINA *et al.*, 2012).

Apresentamos a seguir um exemplo de uma situação, envolvendo a proporção simples, que contribuirá para que o leitor visualize uma e outra estratégia:

- Situação: Considerando que uma caixa de lápis de cor vem com 6 lápis, 5 caixas terão quantos lápis?

Esquema 1.2: Estratégias das aplicações do operador escalar e operador funcional



Fonte: Elaborado pelas autoras

Note que, conforme Esquema 1.2, ao usarmos a estratégia de estabelecer relação entre as duas grandezas (quantidade de caixas e quantidade de lápis), estaremos lançando mão da relação funcional. Já se estabelecermos o operador escalar existente entre os dois valores da mesma grandeza (no caso 5) e aplicarmos esse mesmo valor para a outra grandeza, estaremos lançando mão do operador escalar.

Para o nosso estudo, o que mais interessa nesse esquema é o operador funcional, a relação que há entre as grandezas de naturezas distintas (caixas e lápis), que é de 1 para 6. Como podemos observar, estamos nos referindo a uma função linear em que temos as duas variáveis: a independente (quantidade de caixas) e a dependente (quantidade de lápis).

Vergnaud (1993) afirma que o conceito de função linear assume sentido, primitivamente, nos problemas de proporção, sendo que estes servirão como potencializadores do raciocínio funcional.

Tendo realizado uma breve explanação da importância e uso do campo conceitual multiplicativo para apropriação e desenvolvimento do raciocínio funcional, passaremos, a seguir, a apresentar e refletir sobre os estudos no âmbito da *Early Algebra*. Nosso interesse é interagir com estudos voltados para a investigação do raciocínio funcional entre estudantes que ainda não tenham estudado função formalmente.

1.3.2 A *Early Algebra*

Nosso estudo investigativo está baseado, também, na perspectiva da *Early Algebra* (EA), uma vez que estamos trabalhando com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental (Início dos Anos Finais de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017)), os quais ainda não passaram pelo ensino formal da Álgebra segundo os documentos apresentados na seção anterior. Para

Carraher e Schliemann (2007), a *Early Algebra* abrange o raciocínio algébrico e o ensino relacionado à Álgebra desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Para Blanton *et al.*, a EA proporciona

> "uma forma de pensar que traz um novo significado, profundidade e coerência à compreensão matemática das crianças por mergulhar mais profundamente em conceitos que já estão a ser ensinados para que haja oportunidade de generalizar relações e propriedades em Matemática". (BLANTON *et al*., 2007, p.7)

Na mesma perspectiva, Carraher e Schliemann (2007) descrevem a EA como uma expressão utilizada para envolver o desenvolvimento do (pensamento) raciocínio algébrico e o ensino relacionado à Álgebra aos alunos, de aproximadamente 6 e 12 anos de idade. Em outras palavras, a EA visa discutir os processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra a partir dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Alguns pesquisadores na área como Blanton e Kaput (2005); Canavarro (2007); Silva e Savioli (2012); Carraher e Sehliemann (2016a) e Yamanaka e Magina (2008), ressaltam que a proposta da EA não trata-se da antecipação do ensino da Álgebra de maneira formal, tampouco do acréscimo de mais um conteúdo na Matriz Curricular dos Anos Iniciais. Na verdade, a proposta é trabalhar atividades que contribuam no desenvolvimento do raciocínio algébrico em estudantes. Esses autores alertam para a importância da educação algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Mas o que, de fato, é o pensamento algébrico? Há diferença entre pensamento algébrico e raciocínio algébrico? Apesar de parecer simples a pergunta, definir estes conceitos não é uma tarefa fácil. Segundo Canavarro (2007), nos últimos anos, muitos pesquisadores têm dedicado atenção a discutir este conceito, em especial no contexto do ensino da Matemática nos Anos Iniciais. Para a autora, destaca-se a associação de pensamento algébrico ao reconhecimento daquilo que é geral numa dada situação matemática e à expressão dessa generalização. Nesse texto não temos a pretensão de esgotar as discussões sobre tais conceitos, tampouco apresentar uma definição universal, mas discutimos a concepção de alguns pesquisadores a respeito desse pensamento.

Segundo Kieran (1995, 2004), o pensamento algébrico envolve o desenvolvimento de maneiras de pensar dentro de atividades para as quais a Álgebra simbólica das letras pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas da Álgebra e, mesmo sem o uso delas, os estudantes poderiam analisar relações entre quantidades, perceber estrutura, estudar mudanças, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10) "o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas". A primeira diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação. Na segunda vertente assumem especial importância o relacionar (em particular, analisando propriedades de certos objetos matemáticos) e o generalizar (estabelecendo relações válidas para uma certa classe de objetos). Por fim, na terceira vertente, trata-se de usar representações diversas de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Blanton e Kaput (2005, p. 413) conceituam o raciocínio algébrico como um “processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade”. Esses mesmos autores afirmam ainda que os principais elementos caracterizadores do raciocínio algébrico são:

> 1. o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); 2. a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); 3. a modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações e 4. a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413)

O nosso estudo está diretamente relacionado a segunda caracterização do raciocínio algébrico apresentada pelos autores acima, a qual foi denominada de pensamento funcional. Em estudos mais recentes, Blanton *et al.* (2015, p. 45), dizem que o pensamento funcional envolve: (a) generalizar relações entre quantidades de covariância; e (b) representar e raciocinar com essas relações através da linguagem natural, notação algébrica (simbólica), tabelas, e gráficos.

Com base nessas definições, como um tipo de pensamento funcional, e com objetivo mais específico, assumimos o termo raciocínio funcional nos textos que seguem para designar a capacidade dos estudantes em estabelecer a relação de dependência entre duas ou mais grandezas a partir das generalizações de padrões numéricos ou icônicos com representação na linguagem natural ou notação algébrica. Tal estratégia parte da ideia de que o significado da palavra raciocínio, como em Ponte, Branco e Matos (2009), se encaixa muito bem no contexto dos nossos estudos.

Segundo Canavarro (2009), introduzir o pensamento algébrico (consequentemente, o raciocínio funcional) nos Anos Iniciais representa um avanço muito significativo, possibilitando um tratamento à matemática mais instigante e integrado às outras áreas da própria ciência. Isso pode permitir que estudantes desenvolvam suas capacidades matemáticas a partir de significado e, assim, amplie seu repertório, seja no nível dos processos, seja nos produtos matemáticos.

Diante dos conceitos definidos, relacionados ao nosso objeto de estudo (a função afim), Carraher e Schliemann (2016b) destacam quatro pontos importantes na matemática, os quais os chamam de ideias poderosas. De acordo com esses autores

> A primeira ideia poderosa é que as operações aritméticas são literalmente definidas como funções. Na verdade, elas são os primeiros exemplos de funções que os estudantes encontram em matemática. [...]
> A segunda ideia poderosa destaca porque funções e relações merecem um papel mais proeminente. Estes conceitos são fundamentais para os estudantes na expansão do conceito de números elementares além dos números naturais e para a introdução de variáveis como espaços reservados para elementos de conjuntos.
> A terceira ideia poderosa diz respeito ao papel das funções em unir aritmética, álgebra e geometria. [...]
> A quarta ideia poderosa baseia-se no fato de que equações e inequações podem ser consideradas como a comparação entre os domínios de duas funções. [...] (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2016b, p 192-193, tradução nossa)

Os três primeiros pontos estão diretamente ligados ao nosso estudo, em especial o primeiro, visto que em nossos instrumentos de coleta de dados utilizamos situações nas quais as operações aritméticas são imprescindíveis e podem ser pensadas como funções. Por exemplo, a operação de soma pode ser pensada como a função com domínio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$) e contradomínio $\mathbb{R}$, em que cada par ordenado de números reais $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ está associado um número real $a + b \in \mathbb{R}$. Em notação algébrica, isso é equivalente a:

$$\begin{array}{rcl} +: \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array}.$$

Outro exemplo para a primeira ideia poderosa pode ser encontrado nos estudos de Teixeira (2016) no qual foi realizado uma intervenção em que as situações com multiplicação foram tratadas como relações funcionais e, com isso, houve resultados positivos quanto a generalização dos estudantes quando observados a evolução de um pré-teste com um pós-teste. Este autor sugere que esse tratamento para a operação mencionada faz romper a forte ligação que se tem da multiplicação como uma adição de parcelas repetidas. Tal resultado é relevante, pois Magina; Merlini e Santos (2012) afirmam que essa ruptura com a estrutura aditiva é um salto importante na direção da apropriação da multiplicação como uma relação funcional.

De acordo com Carraher e Schliemann (2016b), a abstração das funções permite e exige que estas sejam representadas nas mais diversas formas, como tabelas, gráficos, expressões aritméticas e algébricas, diagramas e linguagem falada e/ou escrita. Corroborando com essa ideia, Yamanaka e Magina (2008), afirmam que os estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental podem aprender conceitos matemáticos e representações, bem como a notação algébrica pode desempenhar papel importante no apoio ao conhecimento matemático.

Para Carraher, Martinez e Schliemann (2008), o conceito de função pode ser introduzido como um texto que descreve uma regra para determinar o valor de um elemento de uma posição arbitrária em uma sequência conhecendo alguns de seus elementos. Nesse caso, não se faz necessário a definição formal ou uso do método dedutivo seguido de teoremas e demonstrações, mas, pelo contrário, trata-se de um processo indutivo informal, baseado em situações cotidiana dos estudantes.

Estudos como os de Nachieli e Tabach (2015) e Viirman (2014) indicam que a natureza estrutural lógica dos textos presentes em vários livros didáticos (com as definições formais e propriedades pautadas na teoria dos conjuntos, por exemplo) pode causar dificuldade no entendimento das funções, principalmente para uma abordagem inicial e, nesse caso, é necessário reconsiderar o seu lugar no processo de ensino e aprendizagem no decorrer da Educação Básica. Esses autores sugerem que o conceito de função deve ser acessível aos estudantes desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, porém utilizando a ideia de relação de dependência por meio da análise de regularidades e padrões em sequências numéricas e geométricas.

Nessa perspectiva, Vale e Pimentel (2011) destaca que o estudo de padrões (em sequências) fornece um contexto propício para os estudantes pensarem matematicamente. Nos padrões de crescimento, por exemplo, cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior (de forma recursiva) e, para essas autoras, na análise dessa mudança podem ser utilizados vários modos de ver que conduzem a outras tantas representações numéricas e/ou algébricas. Ressaltamos que por padrão (ou regularidade), Vale e Pimentel (2013, p. 108) entendem como "uma relação discernível, apreendida de modo pessoal, num arranjo de qualquer natureza, através de um processo mental que pode ser partilhado, e que corresponde a uma estrutura traduzível por uma lei matemática". Nesse caso, as autoras supracitadas sugerem que a observação de padrões permite fazer e entender generalizações.

Muitos autores têm se debruçado na investigação da capacidade de generalização por parte de estudantes do Ensino Fundamental. Molina, Merindo e Cañandas (2013) afirmam que existem diferentes tipos de tarefas de generalização sendo que estas envolvem sempre a busca de padrões.

No que se refere à generalização destacamos dois termos os quais Radford (2006) denomina de (1) generalização aritmética e (2) generalização algébrica. Para este autor, a generalização aritmética envolve resolver problemas específicos (ou locais) sem ser possível fornecer uma expressão que exprima qualquer termo de uma sequência. Esse tipo de generalização está associado ao raciocínio recursivo o qual não permite descrever o que se passa com um termo de qualquer ordem, principalmente quando se trata de quantidades grandes.

Quanto a generalização algébrica, essa envolve o uso do raciocínio funcional que permite relacionar qualquer termo com sua respectiva ordem e fornece, de imediato, uma descrição sobre tal termo, sem a necessidade de conhecer outro.

Pouco antes, mas de forma equivalente, Stacey (1989) usou os termos de generalização próxima, isto é, quando envolve encontrar um padrão para quantidades próximas (pequenas) ou se pode lançar mão da estratégia de contagem para obter facilmente um resultado; e generalização distante no qual encontrar uma quantidade qualquer (geralmente grande) requer conhecer uma regra geral. Apoiados nessas definições, Molina; Merindo e Cañandas (2013, p. 27) afirma que generalizar um padrão algebricamente "repousa sobre a capacidade de compreender uma semelhança observada em alguns elementos de uma sequência S, sabendo que essa semelhança se aplica a todos os termos de S e pode-se usar para fornecer uma expressão direta de qualquer termo de S".

Vale ressaltar que os autores supracitados se referem à padrões de sequências numéricas e/ou icônicas. Nesse caso, em outras palavras, a generalização algébrica de um padrão de sequência está relacionada à observação de um ou mais casos particulares a fim de se obter todos os demais a partir de uma regra geral.

Além dos padrões de sequência para introduzir o raciocínio funcional, não podemos deixar de citar os estudos que tratam da proporcionalidade cujo conceito está associado ao de função linear. Nesse contexto, Post *et al.* (1995), fazem uma síntese entre estes dois conceitos. Os autores descrevem que

> A proporcionalidade é um exemplo simples, mas importante, de função matemática e pode ser representada como uma função linear. Como tal, é uma ponte adequada e talvez necessária entre experiências e modelos numéricos comuns e as relações mais abstratas, que se expressarão de forma algébrica. A representação algébrica da proporcionalidade ($y = mx$) abrange uma classe incrivelmente ampla de ocorrências físicas. (Post *et al.* 1995, p. 91).

Vergnaud (1993), afirma que o conceito de função linear assume sentido, primitivamente, nos problemas de proporção e se desenvolvem como instrumentos de raciocínio a partir do progressivo domínio dessas situações. Assim, por esses autores, é possível pensar no ensino de função linear por meio de situações envolvendo proporção simples. Mais ainda, pode-se pensar no ensino de função afim a partir das estruturas multiplicativas tal como é visto em Carraher e schliemann (2016, p. 207).

É com base nos autores citados nesse capítulo que pretendemos investigar a capacidade de generalização dos estudantes participantes da presente pesquisa. Assim, passamos a discorrer sobre os materiais e métodos no capítulo a seguir.

CAPÍTULO II: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesse capítulo descreveremos de forma detalhada a metodologia adotada para a pesquisa, bem como os materiais que foram necessários para a coleta e análise dos dados. Aproveitamos, também, para descrever o espaço escolar onde foi desenvolvida uma parte da pesquisa e traremos uma breve análise do instrumento investigativo baseado nos conceitos da Matemática Elementar e no nosso aporte teórico.

Na busca por alcançar o objetivo proposto por este estudo, a saber: analisar o desempenho e a competência de generalização que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional, entendemos que essa investigação consistiu-se de um estudo diagnóstico, a partir de uma pesquisa descritiva. Pois, Prodanov e Freitas (2013, p. 52) afirmam que nas pesquisas descritivas "o pesquisador apenas registra e descreve os fatos observados sem interferir neles. Visa a descrever as características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis".

Sendo assim, pretendemos classificar, explicar e interpretar o desempenho e as estratégias dos estudantes frente às situações-problema propostas em um teste que denominamos de Caderninho 1 e 2. Por isso, essa metodologia, somada ao nosso aporte teórico, nos permite investigar a existência ou não do raciocínio funcional em estudantes que iniciam no Ensino Fundamental – Anos Finais.

Assim, para validar o estudo faremos um tratamento científico (fundamentação teórica) e um tratamento estatístico (teste *Qui-quadrado*). Compararemos os desempenhos dos estudantes frente às situações icônicas e não icônicas, com funções afins e lineares, bem como suas particularidades, observando seus respectivos percentuais de acertos. Dessa forma, traremos os resultados sob a luz da estatística e dos estudos teóricos que fundamentam a pesquisa.

Em partes do presente texto, trazemos alguns registros e contribuições de outros autores acerca do tema aqui estudado. Nesse caso, realizamos um estudo bibliográfico para compreender os estudiosos da *Early Algebra* e trabalhos relacionados com o objeto da pesquisa. Para Prodanov e Freitas (2013), todos os tipos de pesquisa envolvem o estudo bibliográfico, pois elas necessitam de um referencial teórico.

Do ponto de vista de abordagem da problemática, trata-se de uma pesquisa com abordagem quantitativa – visto que analisaremos o desempenho a partir dos percentuais de acertos e erros das questões presentes nos Caderninhos 1 e 2 – e qualitativa, pois pretendemos compreender a competência de generalização dos estudantes frente as situações-problema propostas. Além disso, de acordo com Bogdan e Biklen (1994) os dados quantitativos podem ser utilizados em uma investigação qualitativa, pois para fazer comparações necessitamos de dados numéricos para validar e/ou categorizar resultados que correspondem a uma realidade ou para evidenciar verdades parciais.

Na pesquisa em educação matemática, Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 110) destacam que a abordagem qualitativa "busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno e contexto sociocultural".

A utilização de um teste como técnica de pesquisa para coleta de dados, é apoiada em Marconi e Lakatos (2003, p. 223) os quais afirmam que os testes são "instrumentos utilizados com a finalidade de obter dados que permitam medir o rendimento, a competência, a capacidade ou a conduta dos indivíduos, em forma quantitativa". Além disso, quando se trata do levantamento dos dados, Fiorentini e Lorenzato (2012) afirmam que

> se o pesquisador pretende investigar os movimentos de pensamento dos alunos na resolução de problemas matemáticos, terá que escolher um instrumento que permita explicitar as estratégias e heurísticas utilizadas pelos alunos. Ou seja, pedir, nesse caso, que os alunos pensem em voz alta, durante a resolução do problema, ou registrem no caderno como construíram sua resolução. Esse levantamento pode ser complementado com registros em áudio e em vídeo. (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, p. 98)

Nessa perspectiva, as discussões dos autores supracitados corroboram com a nossa proposta de investigação, bem como a escolha de um teste como instrumento para coleta dos dados, visto que vai além da descrição de fatos, com abordagem tanto quantitativa quanto qualitativa. Uma vez que buscamos compreender, além do desempenho, as estratégias dos estudantes diante de situações-problema que envolvem o raciocínio funcional.

Para melhor organização e entendimento do presente texto, apresentamos a seguir o nosso universo da pesquisa, aonde os dados foram coletados em três encontros em cada turma para o desenvolvimento das etapas.

2.1 UNIVERSO DO ESTUDO

Para atingirmos o objetivo dessa pesquisa, realizamos a coleta dos dados em três turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal em Ilhéus no sul da Bahia. A escola escolhida possui as modalidades de ensino fundamental (Anos Finais) e Educação de Jovens e Adultos (EJA) e funciona nos três turnos atendendo 340 alunos ao todo, destes, 188 alunos são do turno matutino, 106 do turno vespertino e 46 do turno noturno na modalidade EJA.

Os estudantes participantes dessa pesquisa tinham faixa etária variando entre 10 e 13 anos de idade. Para melhor organização, denominamos as turmas por A, B e C, sendo que em cada uma haviam 30, 31 e 28 estudantes, respectivamente, totalizando 89 estudantes. Contudo, pelo fato de termos feito a coleta dos dados em dois dias distintos, nem todos participaram de ambos, conforme frequência da Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Quantidade de alunos que responderam os Caderninhos

Turmas	A	B	C	Total
Caderninho 1	20	25	18	63
Caderninho 2	23	27	19	69
Caderninhos 1 e 2	19	19	16	54

Fonte: Elaborado pelas autoras

Pela Tabela 2.1, dos 89 estudantes, 54 responderam aos dois instrumentos. Por isso, para efeito de análise dos dados consideramos somente os protocolos dos estudantes que responderam ambos os caderninhos.

Escolhemos estudantes desse ano escolar específico porque eles já se encontram no começo dos Anos Finais do Ensino Fundamental, mas ainda não tiveram contato com conceitos da álgebra elementar formal, como equação, inequação, incógnita, variável e função. Ademais, pressupomos que eles já estudaram formalmente as operações de multiplicação e divisão durante os Anos Inicias do Ensino Fundamental.

2.2 MATERIAL UTILIZADO

O material que utilizamos para a coleta dos dados foi um teste composto por 10 situações, sendo que algumas foram subdivididas em itens. Distribuímos as situações em dois instrumentos que denominamos de Caderninho 1 (com as situações de 1 a 5) e Caderninho 2 (com as situações de 6 a 10), para que houvesse tempo suficiente da leitura e não ficasse cansativo para os estudantes. As situações 1 e 6 apresentavam apenas um item a ser respondido, as situações 3, 4, 5, 7, 8 ,9 e 10 tinham três itens em cada uma e a situação 2 apresentava quatro itens, totalizando 27 itens. Vale ressaltar que, apesar do instrumento conter 27 itens de análise, dois foram descartados pelas razões que serão expostas nas análises preliminares das questões que compõem o instrumento de pesquisa.

Esses testes foram elaborados na forma de caderno (metade de uma folha A4). A primeira página de cada caderno continha espaço para o nome, o ano escolar e turma do estudante. As outras cinco páginas continham uma única situação com espaços reservados para a escrita das estratégias de resolução e a reposta final. Reforçamos que os testes são excelentes instrumentos de coleta de dados, pois permitam medir o rendimento, a competência, a capacidade ou a conduta dos indivíduos (MARCONI; LAKATOS, 2003).

A seguir, apresentaremos esse teste em detalhes, analisando cada situação, e seus respectivos itens.

2.2.1 Teste

Nesse tópico, fizemos a descrição de cada uma das situações do instrumento diagnóstico, com os objetivos e possíveis resoluções nas quais explicitamos diferentes estratégias esperadas pelos estudantes. Com exceção das situações (1) e (6), todas as demais tem por objetivo geral a generalização do problema abordado.

Vale destacar, inicialmente, que algumas situações são semelhantes, seja no conteúdo propriamente dito ou na forma de abordagem do problema. Para ilustrar, em relação ao conteúdo, destacamos o seguinte quadro.

Quadro 2.1: Distribuição das situações por conteúdo

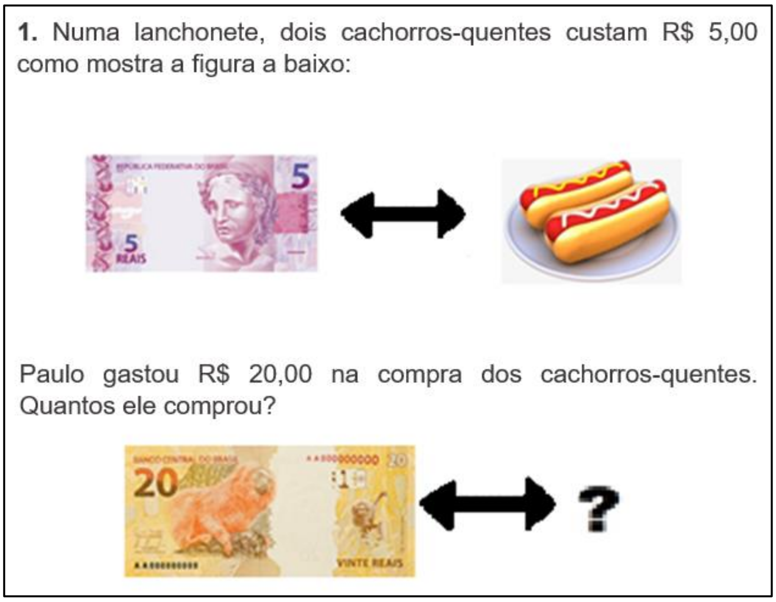
Conteúdos	Situações
Função Linear ($f(x) = ax + b$ com $b = 0$)	S1, S2, S4, S9, S10
Função Afim ($f(x) = ax + b$ com $b \neq 0$)	S3, S5, S6, S7, S8

Fonte: Elaborado pelas autoras

Pelo Quadro 2.1, observamos que as situações foram distribuídas em grupos diferentes sem que houvesse interseção entre eles. Para a análise das respostas dos estudantes, destacaremos também, no próximo capítulo, as situações semelhantes por forma de abordagem, com uso ou não de ícones, por exemplo.

A situação 1 traz o seguinte enunciado:

Figura 2.1: Situação 1 do Caderninho 1



Fonte: Adaptada de atividades do grupo RePARe

A situação, conforme Figura 2.1, apresenta uma relação funcional, icônica, e foi baseada em atividades elaboradas no grupo de pesquisa RePARe, a qual teve como objetivo levar os estudantes a utilizar o conceito de proporção simples. Vale ressaltar que, como aponta Post et. al (1995), em todo problema de proporcionalidade pode-se utilizar o conceito de função linear na forma $y = mx$.

Nesse caso, o problema acima é modelado pela função $f: X \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = \frac{2}{5}x$, onde o domínio $X = \left\{\frac{5}{2}, 5, \frac{15}{2}, 10, \dots\right\} \subset \mathbb{R}$ é o conjunto[4] formado pelos termos da sequência $\left(\frac{5n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e as variáveis x e $f(x)$ representam o valor pago em reais e a quantidade de cachorros-quentes, respectivamente. Note que, dessa forma, o domínio da função não corresponde aos números naturais, uma vez que se pode atribuir o valor de 2,5 à x, por exemplo, logo f não deve ser considerado como uma sequência.

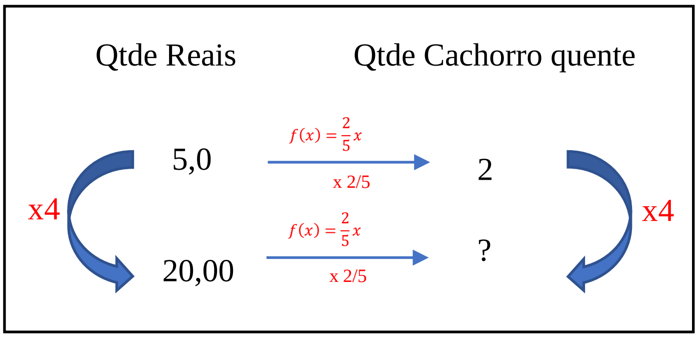
Além disso, nessa atividade, a estratégia de resolução utilizada pelos estudantes poderia contemplar o raciocínio multiplicativo, visto se tratar de uma situação de proporção simples que envolve uma relação quaternária do tipo "muitos para muitos" e com valores discretos, conforme Esquema 1.1 (ver p. 34).

[4] De acordo com Lima (2004, p. 101) "não se deve confundir a sequência x com o conjunto $x(\mathbb{N})$ dos seus termos", isto é, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ enquanto que $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$. Por exemplo, o conjunto dos termos da sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots)$ é formado por apenas dois elementos, a saber $\{1, -1\}$.

.

No raciocínio multiplicativo ele ainda teria duas resoluções distintas, uma pela relação funcional e outra pelo operador escalar, conforme Esquema 2.1.

Esquema 2.1: Estratégias das aplicações do operador escalar e relação funcional $f(x) = \frac{2}{5}x$



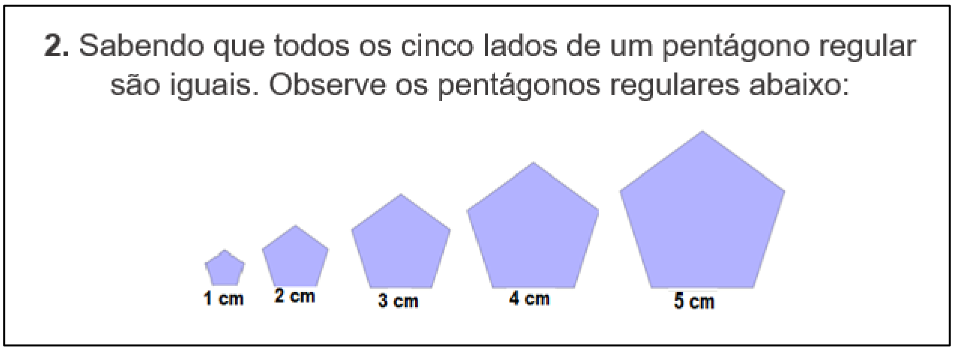
Fonte: Elaborado pelas autoras

De acordo com o Esquema 2.1, ao resolver pelo operador escalar o estudante poderia pensar na relação entre as duas quantidades de mesma natureza (quantidade de reais) e replicar essa relação ($\times$ 4) na quantidade conhecida da outra natureza (cachorro-quente). Outro modo de resolver está atrelado à relação funcional, aquela entre duas grandezas distintas (quantidade de reais e quantidade cachorros-quentes). Como são valores relativamente pequenos, mesmo tendo números não inteiros (R$ 2,50 na relação funcional) era esperado que o estudante não apresentasse dificuldade para resolver essa situação.

Uma outra forma de resolução passaria pela estrutura aditiva, na qual o estudante poderia raciocinar a partir do operador escalar com a operação de adição. Nesse caso, se $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ então, acompanhando a mesma quantidade de parcelas, teria $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Cabe salientar que essas seriam algumas das possibilidades dado que, por exemplo, os estudantes poderiam acompanhar os ícones do próprio enunciado da situação, acrescentando os que achassem necessário (estratégia de contagem por desenhos ou símbolos).

A situação 2 traz o seguinte enunciado:

Figura 2.2: Parte inicial da Situação 2 do Caderninho 1



Fonte: Elaborado pelas autoras

Essa situação, conforme Figura 2.2, foi elaborada pelas autoras e apresenta uma situação funcional, icônica, em que o objetivo geral era de generalizar o cálculo do perímetro de um pentágono regular em função do tamanho de um de seus lados. Para se chegar a esse objetivo, dividimos essa atividade em quatro itens como mostra a figura a seguir:

Figura 2.3: Itens da Situação S2 do Caderninho 1

a) O quadro a seguir indica a medida do lado de cada um dos pentágonos apresentados. Calcule o perímetro (a soma de todos os lados) correspondente de cada um deles.

Lado (cm)	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
Perímetro (cm)					

b) É possível que dois pentágonos regulares de tamanhos diferentes tenham o mesmo perímetro? Justifique sua resposta.

Resposta:

c) Qual é a medida do lado de um pentágono regular sendo que seu perímetro mede 40 cm?

Resposta:

d) Existe um jeito de medir o perímetro de qualquer pentágono regular. Escreva qual é esse jeito.

Resposta:

Fonte: Elaborada pelas autoras

Note que as grandezas utilizadas tratam-se de unidades de comprimento (tanto a medida do lado quanto do perímetro do pentágono) as quais têm caráter contínuo, apesar de nos exemplos (ícones) aparecerem apenas valores inteiros, conforme Figura 2.3. Usando a definição de função linear é possível obter a função $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = 5x$, onde x e $p(x)$ representam o tamanho do lado do pentágono e o perímetro, respectivamente. Dessa forma, essa situação não pode ser tratada como uma sequência, já que o domínio da função em questão não é o conjunto dos números naturais.

Porém, a partir dos dados da tabela do item (a), é esperado que alguns estudantes recorram a sequência (5, 10, 15, 20, 25, ...) para responder os itens (a), (b) e (c) de forma recursiva, mas dificilmente esse raciocínio levaria a uma generalização de forma correta, como é solicitado no item (d), pois tal sequência não contempla todos os valores que podem ser assumidos pelas medidas dos lados dos pentágonos. Segundo Carraher e Schliemann (2008), quando uma função é visualizada como nada mais do que uma sequência, os alunos geralmente não conseguem reconhecer a variável independente como uma variável.

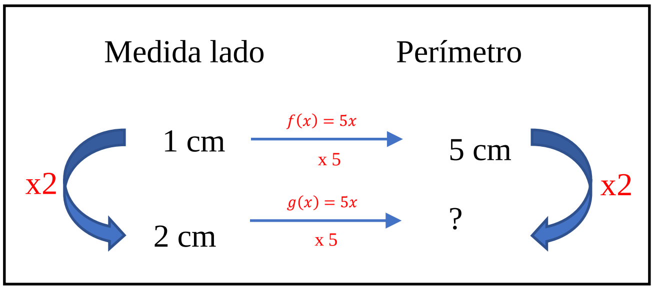
Vale salientar que apenas os itens (a) e (b) serão utilizados para a análise quantitativa, por permitirem respostas passíveis de certo ou errado. O item (c) deixou de ser interessante para a presente pesquisa após a aplicação do instrumento, devido ao fato de apresentar o conceito de função inversa, o qual não é nosso foco e, por isso, não foi discutido no texto. Já o item (d) apresenta uma resolução de caráter pessoal, uma vez que os estudantes participantes da pesquisa ainda não têm formalizados os conceitos inerentes ao estudo de funções e, por isso, serão analisadas qualitativamente a partir das estratégias adotadas por eles. Nesse caso, para este item e outros semelhantes das demais questões, serão criadas, no próximo capítulo, categorias de análise qualitativa das estratégias dos estudantes.

No item (a) o objetivo era que os estudantes completassem o quadro dado. Esperava-se que os estudantes compreendessem a definição de perímetro como a soma das medidas dos lados do pentágono e, a partir de alguma estratégia adotada (seja com operador aditivo ou multiplicativo), pudessem preencher os espaços em branco do quadro com os números 5, 10, 15, 20 e 25, respectivamente.

A estratégia usando o operador aditivo segue a própria definição de perímetro mostrado no item (a) da situação, isto é, para o lado de medida 1 cm, tem-se o perímetro $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$, e assim sucessivamente.

Já a estratégia usando operador multiplicativo remete ao conceito de proporcionalidade e, consequentemente – como sugere Vergnaud (1993) – o de função linear, desde que ele obtenha o perímetro do primeiro ícone (5 cm) cujo lado tem medida 1cm (conforme Esquema 2.2). Nesse caso, tem-se uma proporção simples de classe "um para muitos" e do tipo contínuo conforme Esquema 1.1 de Magina, Merlini e Santos (2014) (ver p. 34).

Esquema 2.2: Estratégias das aplicações do operador escalar e relação funcional $f(x) = 5\,x$



Fonte: Elaborado pelas autoras

No item (b) esperava-se que os estudantes percebessem que não poderiam existir perímetros iguais de pentágonos regulares com lados diferentes, dando exemplos em que isso acontece. Uma demonstração para esse fato segue da ideia de que dados dois pentágonos regulares A e B cujos lados medem l_1 e l_2, então seus perímetros são dados por $p(l_1) = 5l_1$ e

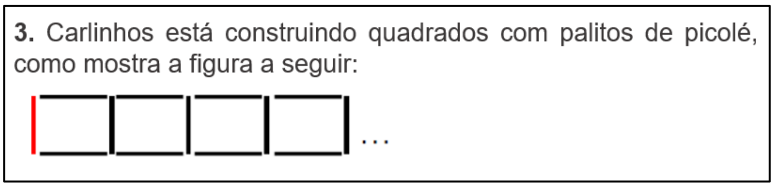
$p(l_2) = 5l_2$, respectivamente. Logo, para que os perímetros de A e B fossem iguais deveríamos ter

$$p(l_1) = p(l_2) \leftrightarrow 5l_1 = 5l_2 \leftrightarrow l_1 = l_2,$$

isto é, os lados deveriam ser iguais. Por contra positiva, lados diferentes implicam perímetros diferentes. Isso conclui as resoluções dos itens (a) e (b).

A situação 3 apresenta o seguinte enunciado:

Figura 2.4: Parte inicial da situação 3 do Caderninho 1


3. Carlinhos está construindo quadrados com palitos de picolé, como mostra a figura a seguir:

Fonte: Adaptado de Texeira (2016)

Essa situação, conforme Figura 2.4, apresenta uma relação funcional, icônica, a qual foi adaptada de duas atividades apresentadas em Texeira (2016) e teve como objetivo explorar a capacidade de observação, comparação e generalização dos estudantes frente a uma situação envolvendo função afim. O problema apresentado nessa situação promove uma interação entre aritmética, álgebra e geometria sendo este um dos papeis das funções – terceira ideia poderosa de Carraher e Schliemann (2016b).

Para se chegar a esse objetivo, dividimos essa atividade em quatro itens como mostra a Figura 2.5:

Figura 2.5: Itens da Situação S3 do Caderninho 1

a) Quantos palitos são necessários para montar 6 quadrados?

Resposta:

b) Quantos palitos são necessários para montar 20 quadrados?

Resposta:

c) Existe um jeito de ajudar Carlinhos saber quantos palitos são necessários para construir qualquer quantidade de quadrados. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

Fonte: Adaptado de Texeira (2016)

Pode-se relacionar a quantidade de quadrados x com a quantidade de palitos $f(x) = 1 + 3x$, sendo esta uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Nessa função fica destacada a relação do número 1 com o palito vermelho, enquanto o termo $3x$ refere-se à quantidade de palitos necessários para a construção dos quadrados em questão.

Uma outra forma, seria pensar recursivamente a partir da observação de que no primeiro quadrado utiliza-se 4 palitos e nos demais utilizam-se apenas 3 palitos em cada, formando a sequência (4, 7, 10, 13, 16, 19, ...). Assim, podemos definir o sistema recursivo

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = x_n + 3 \end{cases}.$$

Usando os conceitos de PA, pode-se obter o n-ésimo termo da sequência dado por $x_n = 1 + 3n$, semelhante à função obtida acima.

No item (a) esperava-se que os estudantes chegassem à conclusão usando o raciocínio funcional ou a partir da ilustração em sequência, ou com uso do raciocínio aditivo e/ou multiplicativo. A partir da ilustração, o mais intuitivo seria desenhar mais 6 palitos para formar os quadrados pedidos e contar o total de palitos usados, obtendo o número 19.

Com o raciocínio aditivo e/ou multiplicativo, o estudante poderia observar que o primeiro quadrado era formado por 1 palito destacado em vermelho mais 3 palitos pretos, e todos os outros eram formados adicionando mais 3 palitos para cada. Portanto, para obter 6 quadrados precisaria de $1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ ou $1 + (3 \times 6)$ palitos. Essa última solução traz a ideia da dependência entre a variável “quantidade de palitos” em relação a quantidade de quadrados, o que leva ao raciocínio funcional.

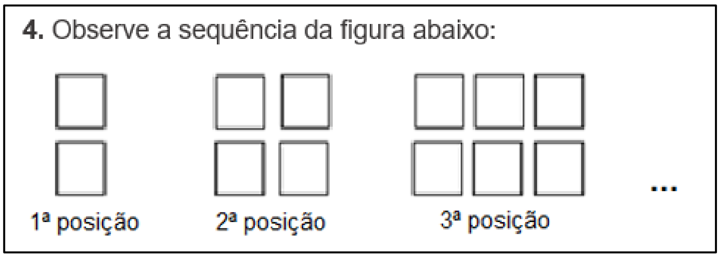
O item (b) segue análogo ao item anterior, porém com grau de dificuldade mais elevado, visto que a utilização de ilustração não seria eficiente e muito menos adequada para resolver a situação. A estrutura aditiva também deixa de ser eficiente (no que diz respeito a velocidade do cálculo e quantidade de operações), o que faz necessário o uso preferencial da estrutura multiplicativa ou do raciocínio funcional.

No item (c) o objetivo específico era a generalização, seja a partir de uma expressão matemática ou a utilização da língua materna e, assim como os demais itens de generalização até aqui descritos, tais questões tinham respostas de caráter pessoal e serão analisadas caso a caso em capítulo próximo.

Vale ressaltar que essa atividade apresenta um grau de complexidade maior do que as anteriores por não se tratar de um problema de proporcionalidade direta entre as grandezas (quantidade de palitos e quantidade de quadrados).

A atividade 4 apresenta o seguinte enunciado inicial:

Figura 2.6: Parte inicial da situação 4 do Caderninho 1



Fonte: Adaptada de atividades do grupo RePARe

Essa situação, conforme Figura2.6, apresenta uma situação sequencial, icônica, foi baseada em atividades elaboradas no grupo de pesquisa RePARe, na qual o objetivo era de generalizar a quantidade de quadrados da figura, dada a sua posição. Para atingir tal objetivo, dividimos essa situação em 3 itens conforme a Figura 2.7 a seguir

Figura 2.7: Itens da Situação S4 do Caderninho 1

a) Qual é a próxima figura da sequência? Desenhe.

Resposta:

b) Imagine que seu colega não entendeu o item (a) e a professora pediu para você explicar como encontrou a próxima figura. Escreva o que você falaria ao seu colega.

Resposta:

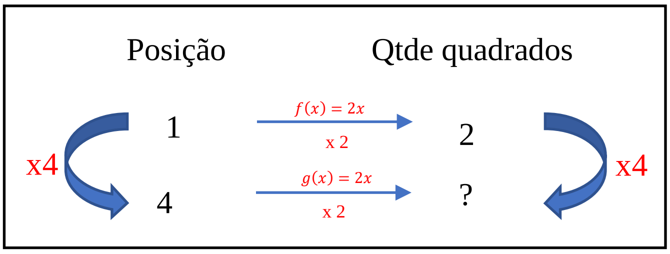
c) Existe um jeito de descobrir a quantidade de quadradinhos numa posição qualquer. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

Fonte: Adaptadas de atividades do grupo RePARe

No item (a), esperava-se que os estudantes observassem o padrão da sequência (2, 4, 6, ...) em que cada posição posterior é igual a anterior acrescida de 2 quadrados e, com isso, desenhasse 8 quadrados na 4ª posição. Essa é um exemplo de sequência conhecida como progressão aritmética (PA) já que a diferença entre duas posições vizinhas é sempre fixa (2 quadrados), chamada de razão. A partir dos conceitos de PA, obtemos facilmente o n-ésimo termo dado por $x_n = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do mesmo modo, pode-se modelar o problema com a função linear $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ em que x e $f(x)$ indicam a posição e a quantidade de quadrados, respectivamente.

Esquema 2.3: Estratégias das aplicações do operador escalar e relação funcional $f(x) = 2\,x$



Fonte: Elaborado pelas autoras

Assim como nas questões 1 e 2, que tratam de funções lineares, os estudantes poderiam utilizar como estratégia o conceito de proporcionalidade a partir do operador multiplicativo, conforme Esquema 2.3. Porém, essa situação difere da situação 1 por ser da classe “um para muitos” e difere da situação 2 por ser do tipo discreto, conforme Esquema 1.1 de Magina, Merlini e Santos (2014).

Os itens (b) e (c) apresentam resoluções de caráter pessoal e, por isso, serão analisados apenas qualitativamente, no próximo capítulo, a partir das estratégias adotadas pelos estudantes.

A atividade 5 traz o seguinte enunciado inicial:

Figura 2.8: Parte inicial da situação 5 do Caderninho 1

5. O taxista João cobra suas corridas da seguinte maneira: R$ 4,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por quilômetro (km) rodado.

Fonte: Elaborada pelas autoras

Nessa situação, conforme Figura 2.8, tínhamos como objetivo fazer com que o estudante utilizasse do raciocínio funcional para generalizar o valor pago em uma corrida de táxi em função do percurso percorrido em km. Assim como as demais questões que versam sobre função afim, pressupomos que os estudantes teriam maior dificuldades comparadas as que tratam da função linear, já que não apresentam proporcionalidade direta.

Para atingir o objetivo da situação realizamos a divisão em três itens, conforme Figura 2.9 a seguir.

Figura 2.9: Itens da Situação S5 do Caderninho 1

a) Baseado nestas informações complete o quadro a seguir:

km rodado	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km	6 km
Total cobrado em R$						

b) O taxista João cobrou R$ 24,00 em uma corrida. Quantos quilômetros ele percorreu nessa corrida?

Resposta:

c) Existe um jeito que seu João pode calcular o valor de uma corrida para qualquer quilometragem. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

Fonte: Elaborada pelas autoras

Note que, apesar de aparecer números inteiros na tabela (cf. Figura 2.9), é sabido que a medida de distância tem caráter contínuo, e por isso o domínio da função é o conjunto dos números reais, sendo, portanto, possível obter a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 4$, em que x e $f(x)$ representam a quantidade de km rodados e o valor pago, respectivamente. Nesse caso, o número 4 está associado ao valor fixo descrito na situação enquanto o número 2 está associado ao valor pago por km rodado.

No item (a) esperava-se que os estudantes completassem a tabela seguindo o raciocínio funcional em que ao percorrer 1 km, o taxista João cobra R$ 4,00 fixos, acrescidos de R$ 2,00, totalizando R$ 6,00 pela corrida; e ao percorrer 2 km, são cobrados o preço fixo de R$ 4,00 acrescidos de R$ 4,00 (R$ 2,00 por cada km); e assim sucessivamente até os 6 km, completando a tabela com os valores R$ 6,00, R$ 8,00, R$ 10,00, R$ 12,00, R$ 14,00 e R$ 16,00, respectivamente.

Dessa forma, a partir do primeiro valor (o número 6), e considerando os números descritos em sequência para os quilômetros rodados, os estudantes poderiam lançar mão da estrutura aditiva, de forma recursiva, acrescentando sempre 2 unidades ao valor anterior para o preenchimento da célula seguinte da tabela. Vale lembrar que este raciocínio não é totalmente correto (apesar de ser possível responder o que é pedido no item (a)) por não se tratar de uma sequência uma vez que, quando se amplia o problema e considera-se diferentes valores para os km rodados, principalmente com a inclusão de números decimais, acrescentar 2 ao anterior para encontrar o próximo não terá nenhum sentido.

Já o item (b) apresenta um grau de complexidade maior já que a operação pedida é inversa a do item anterior. Por esse motivo, resolvemos não utilizá-la para análise.

O item (c) o objetivo específico era a generalização, seja a partir de uma expressão matemática ou a utilização da língua materna e, assim como os demais itens de generalização até aqui descritos, tais questões tinham respostas de caráter pessoal.

A atividade 6 apresenta o seguinte enunciado:

Figura 2.10: Situação 6 do Caderninho 2

> **6.** Seu José conserta TV. Ele cobra R$ 20,00 pela visita (para descobrir o defeito da TV) e depois cobra R$ 10,00 por hora de trabalho para fazer o conserto. Ontem ele foi consertar a minha TV. Ele descobriu o defeito e gastou 3 horas consertando minha TV. Quanto eu tenho que pagar para ele?

Fonte: Adaptadas de atividades do grupo RePARe

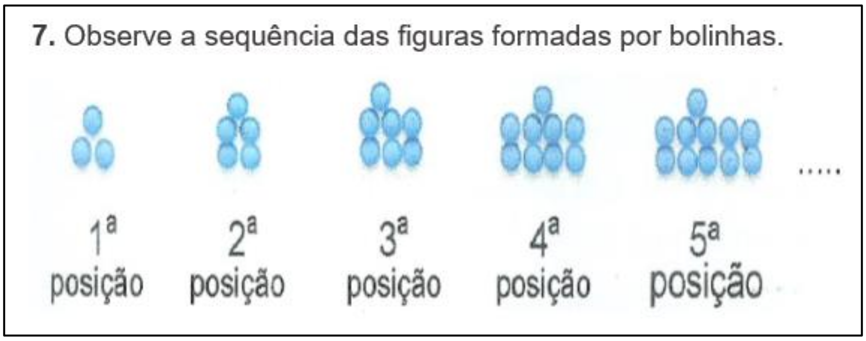
Aqui é apresentado, em um único enunciado (cf. Figura 2.10), uma situação-problema comum no cotidiano dos estudantes: o conserto de um aparelho eletrônico, nesse caso uma TV, mas podendo ser um rádio, um celular, etc. Foi baseada em atividades elaboradas no grupo de pesquisa RePARe e como não é solicitado nenhum tipo de generalização do problema, essa situação será analisada apenas quantitativamente.

Nessa situação aparece o conceito de função afim, sendo que 20 reais é um valor fixo e 10 reais é o custo por hora trabalhada. Assim, pode-se obter a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 10x + 20$, onde x e $f(x)$ representam a quantidade de horas gastas e o valor a ser pago pelo conserto da TV, respectivamente.

Porém, era esperado que os estudantes lançassem mão do raciocínio aditivo e/ou multiplicativo já que em 3 horas são cobrados R$ 30,00 ($10 + 10 + 10$ ou 3×10), pois cada hora de serviço de seu José corresponde ao valor de R$ 10,00. Além desse valor, seu José cobra R$ 20,00 por descobrir o defeito do aparelho ao fazer a visita a domicílio. Logo, o total a ser pago para ele é de R$ 50,00 ($30 + 20$).

A atividade 7 apresenta o seguinte enunciado:

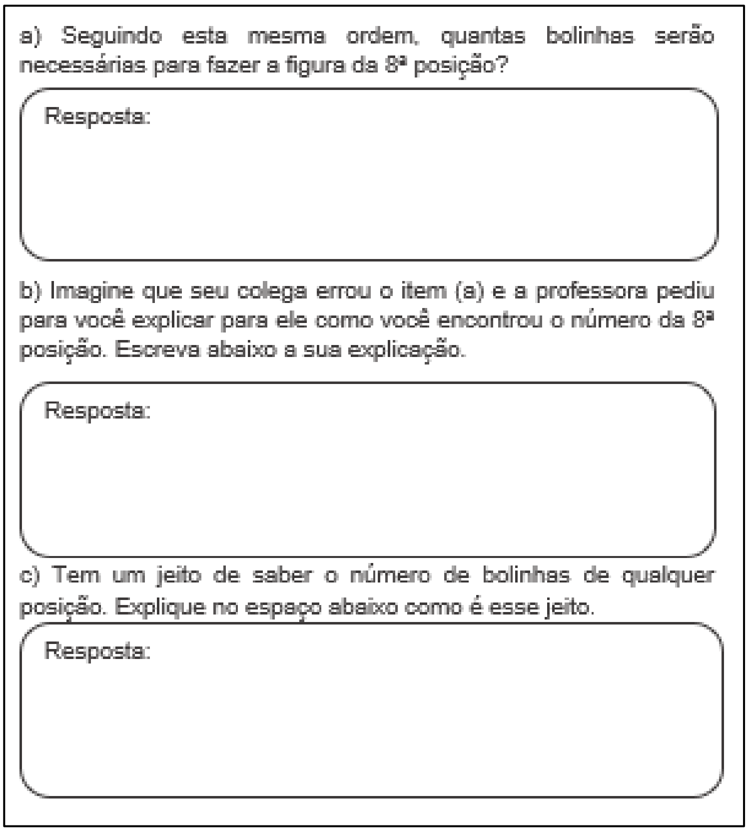
Figura 2.11: Parte inicial da situação 7 do Caderninho 2



Fonte: Adaptadas de atividades do grupo RePARe

De forma análoga à situação 4, essa situação (cf. Figura 2.11) apresenta uma situação sequencial, icônica e foi baseada em atividades elaboradas no grupo de pesquisa RePARe, com o objetivo de generalizar a quantidade de bolinhas da figura, dada a sua posição. Para atingir tal objetivo, dividimos essa situação em 3 itens conforme a Figura 2.12 a seguir:

Figura 2.12: Itens da Situação S7 do Caderninho 2



a) Seguindo esta mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer a figura da 8ª posição?

Resposta:

b) Imagine que seu colega errou o item (a) e a professora pediu para você explicar para ele como você encontrou o número da 8ª posição. Escreva abaixo a sua explicação.

Resposta:

c) Tem um jeito de saber o número de bolinhas de qualquer posição. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta:

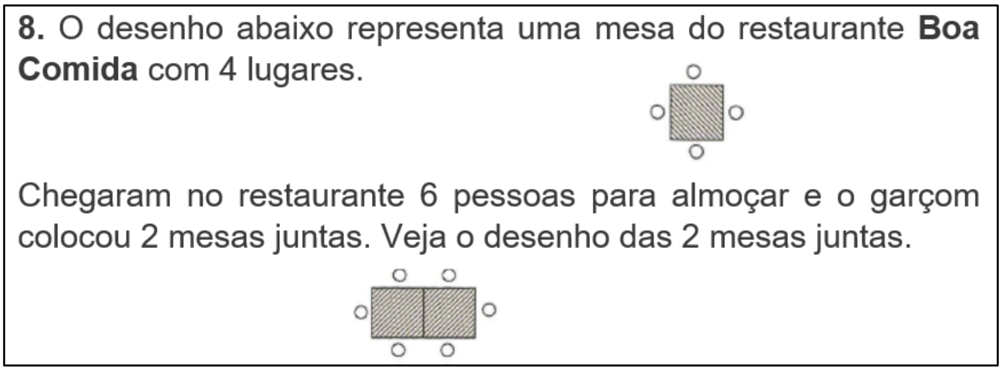
Fonte: Adaptadas de atividades do grupo RePARe

No item (a), esperava-se que os estudantes observassem o padrão da sequência (3, 5, 7, 9, 11, ...) em que cada posição posterior é igual a anterior acrescida de 2 bolinhas e, com isso, ele poderia desenhar as bolinhas até chegar as 17 bolinhas na 8ª posição de forma recursiva. Tal sequência pode ser generalizada a partir da expressão $x_n = 2n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, pode-se relacionar tal sequência com o conceito de função afim com domínio no conjunto dos números inteiros positivos (os números naturais) e a imagem é formada pelos números ímpares positivos. Dessa forma obtém-se a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$, onde x e $f(x)$ representam a posição das bolinhas e a quantidade de bolinhas dessa posição, respectivamente.

O item (b) proporciona a possibilidade do estudante expor seu raciocínio da resposta do item anterior e, assim, mostrar as estratégias adotadas. Dessa forma, a resposta passa a ser de caráter pessoal assim como o item (c) que trata da generalização do problema. Por isso, ambos itens serão analisados qualitativamente.

A atividade 8 apresenta o seguinte enunciado:

Figura 2.13: Parte inicial da situação 8 do Caderninho 2



8. O desenho abaixo representa uma mesa do restaurante **Boa Comida** com 4 lugares.

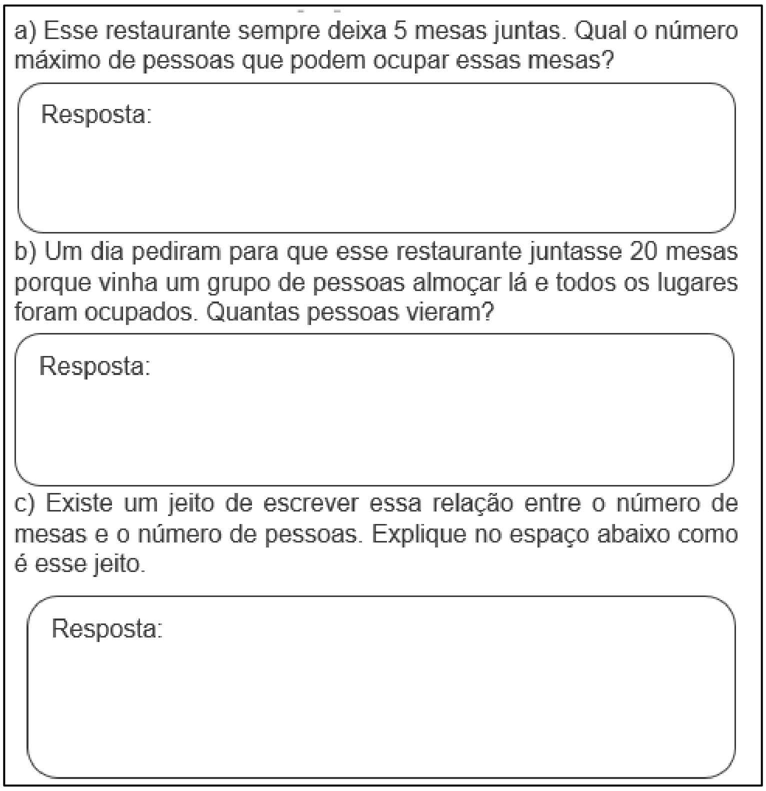
Chegaram no restaurante 6 pessoas para almoçar e o garçom colocou 2 mesas juntas. Veja o desenho das 2 mesas juntas.

Fonte: Adaptada de Carraher, Martinez e Schliemann, (2008)

O objetivo dessa situação foi de explorar a capacidade de observação, comparação e generalização dos estudantes frente a uma situação-problema envolvendo uma sequência numérica e icônica, que pode ser também tratada por função afim. Vale ressaltar que essa situação foi adaptada de uma outra, presente no trabalho de Carraher, Martinez e Schliemann, (2008). Essa situação foi dividida em três itens, conforme Figura 2.14.

No item (a) tínhamos como objetivo investigar se os estudantes conseguiriam entender a sequência numérica e responder, utilizando alguma estratégia (com uso de desenho ou dos números apresentados), o que lhe foi pedido. A ideia era que os mesmos percebessem que em cada cabeceira da fileira com as mesas deveria ser ocupado com uma pessoa e nas laterais de cada mesa, duas pessoas.

Figura 2.14: Itens da Situação S8 do Caderninho 2



a) Esse restaurante sempre deixa 5 mesas juntas. Qual o número máximo de pessoas que podem ocupar essas mesas?

Resposta:

b) Um dia pediram para que esse restaurante juntasse 20 mesas porque vinha um grupo de pessoas almoçar lá e todos os lugares foram ocupados. Quantas pessoas vieram?

Resposta:

c) Existe um jeito de escrever essa relação entre o número de mesas e o número de pessoas. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta:

Fonte: Adaptada de Carraher, Martinez e Schliemann, (2008)

Nesse caso, esperava-se que os estudantes encontrassem 12 como o número máximo de pessoas para ocupar as mesas. A sequência em questão é (4, 6, 8, 10, 12, ...) onde o n-ésimo termo dado por $x_n = 2n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$, pode ser obtido a partir dos conceitos de PA. Além disso, é claro a dependência entre o número de mesas e o máximo de pessoas a se sentar, o que sinaliza a ideia de função. Nesse caso, podemos obter a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 2$, onde x e $f(x)$ representam a quantidade de mesas e o máximo de pessoas que podem ser acomodadas, respectivamente.

O item (b) seguia a mesma ideia do item anterior, porém, com um número maior de cadeiras, no intuito de dificultar a resolução a partir de desenhos. Nesse caso, esperava-se que os estudantes utilizassem os princípios aditivo e/ou multiplicativo para resolver o problema. Seguindo o raciocínio da situação anterior, as laterais das 20 mesas podem ser ocupadas por 40 pessoas (20×2 ou $20 + 20$) e as cabeceiras por 2 pessoas (1 em cada), totalizando a acomodação de no máximo de 42 pessoas.

Para o item (c), os estudantes deveriam, de alguma forma, generalizar o problema. Isso permite uma resposta de cunho pessoal e será analisada apenas qualitativamente.

A atividade 9 apresenta o seguinte enunciado:

Figura 2.15: Parte inicial da situação 9 do Caderninho 2

9. Dona Rita vende pasteis nas praias do sul de Ilhéus durante a semana. Cada pastel custa R$ 3,00. Com base nessa informação, responda as perguntas abaixo:

Fonte: Adaptado de Texeira (2016)

Essa situação, conforme Figura 2.15, apresenta uma situação funcional, não-icônica, a qual foi adaptada de uma atividade apresentada em Teixeira (2016) e teve como objetivo levar os estudantes a utilizar o conceito de proporção simples, sendo esta de classe “um para muitos” e do tipo discreto conforme esquema de Magina, Merlini e Santos (2014), Esquema 1.1 (ver p. 34). Vale ressaltar que, assim como os demais problemas de proporcionalidade aqui propostos, pode-se utilizar o conceito de função linear na forma $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$, onde x e $f(x)$ representam a quantidade de pastéis e o valor a ser pago à dona Rita, respectivamente. Para atingir esse objetivo, dividimos essa atividade em três itens como mostra a Figura 2.16:

Figura 2.16: Itens da Situação S9 do Caderninho 2

a) Uma pessoa comprou 5 pasteis. Quanto ela pagou a dona Rita?

Resposta:

b) Se dona Rita vender 60 pasteis em um dia, quanto ela arrecadará?

Resposta:

c) Existe um jeito que dona Rita utiliza para calcular quanto ela arrecadará para qualquer que seja a quantidade de pasteis vendidos. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

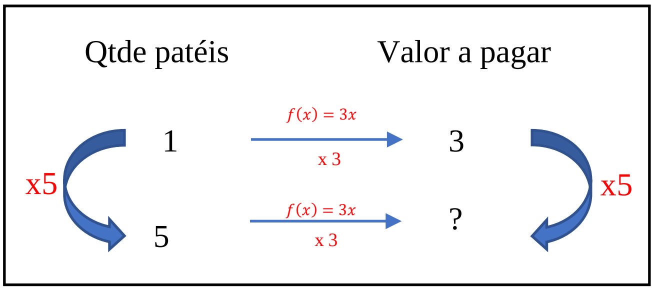
Resposta:

Fonte: Adaptado de Texeira (2016)

No item (a), esperava-se que os estudantes utilizassem de diferentes estratégias para a resolução. Em uma delas, eles poderiam lançar mão do raciocínio aditivo. Pelo princípio aditivo, cada pastel seria vendido por R$ 3,00, então 5 pastéis seriam $(3 + 3 + 3 + 3 + 3)$ que resulta em R$ 15,00.

Outra estratégia seria pelo princípio multiplicativo (cf. Esquema 2.4), na qual esperava-se que os estudantes observassem a proporção entre o preço do pastel e a quantidade de pasteis pedido, logo bastaria multiplicar 3 (valor do pastel) por 5 (quantidade de pastéis) e obter o valor total a ser pago de R$15,00.

Esquema 2.4: Estratégias das aplicações do operador escalar e relação funcional $f(x) = 3\,x$



Fonte: Elaborado pelas autoras

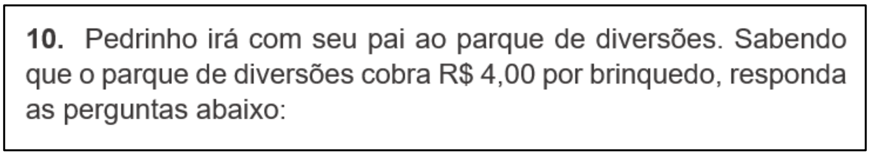
Nesse caso, cabe pensar no conceito de função linear na forma $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 3x$, onde x e $f(x)$ representam a quantidade de pastéis comprados e o valor a ser pago, respectivamente. Ou ainda, por se tratar de um domínio com números naturais, podemos obter a sequência (3, 6, 9, ...) cujo n-ésimo termo dado por $x_n = 3n$, com $n \in \mathbb{N}$, indica o valor a ser pago por n pastéis comprados.

De forma análoga, no item (b), os estudantes deveriam encontrar quanto dona Rita arrecadará vendendo uma quantidade maior de pasteis. Dessa forma, o princípio aditivo se torna mais lento e, por isso, é favorável o uso do princípio multiplicativo e, consequentemente, o raciocínio funcional. Esperava-se que observassem a proporção entre o preço do pastel e a quantidade de pasteis pedido, logo bastaria multiplicar 3 (valor de 1 pastel) por 60 (quantidade de pastéis) e obter o valor total de R$180,00 que dona Rita arrecadará nessa venda.

O item (c) será analisado qualitativamente no próximo capítulo a partir das estratégias adotadas pelos estudantes quanto a generalização do problema.

A atividade 10 apresenta o seguinte enunciado:

Figura 2.17: Parte inicial da situação 10 do Caderninho 2

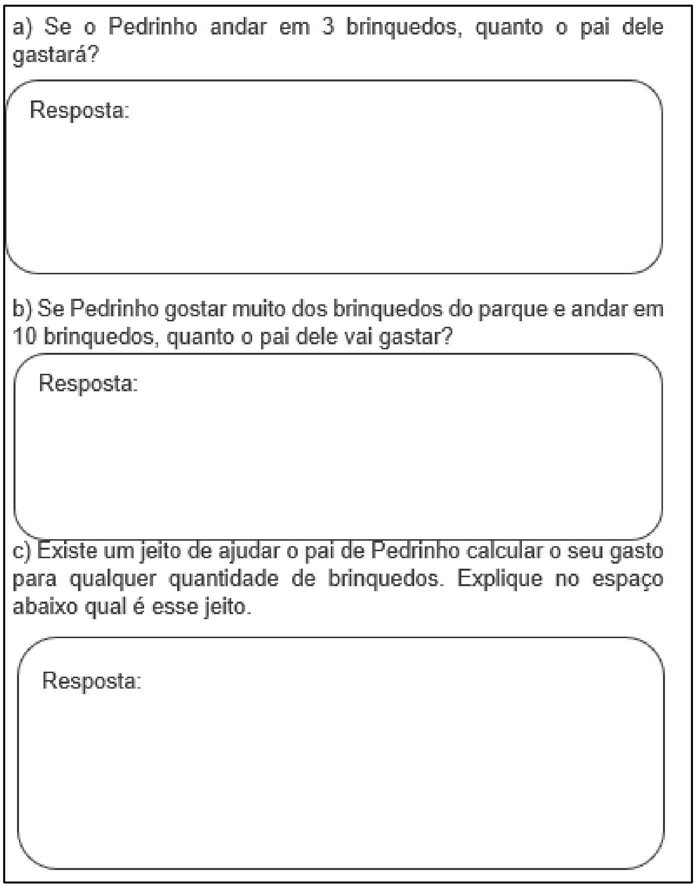

10. Pedrinho irá com seu pai ao parque de diversões. Sabendo que o parque de diversões cobra R$ 4,00 por brinquedo, responda as perguntas abaixo:

Fonte: Adaptadas de atividades do grupo RePARe

Essa atividade, conforme Figura 2.17, foi baseada em atividades elaboradas no grupo de pesquisa RePARe. Trata-se de uma situação na qual aparecem os conceitos relacionados a função afim, especificamente o de função linear. Nesse caso, pode-se utilizar os conceitos de proporcionalidade para a solução, visto se tratar de uma proporção simples de classe "um para muitos" e tipo discreto.

O objetivo principal da situação é fazer com que o estudante observe, compare e encontre uma expressão genérica para determinar o valor pago em um parque para brincar em uma determinada quantidade de brinquedos. Para atingir esse objetivo, a situação foi subdividida em 3 itens, como mostra a Figura 2.18:

Figura 2.18: Itens da Situação S10 do Caderninho 2


a) Se o Pedrinho andar em 3 brinquedos, quanto o pai dele gastará?

Resposta:

b) Se Pedrinho gostar muito dos brinquedos do parque e andar em 10 brinquedos, quanto o pai dele vai gastar?

Resposta:

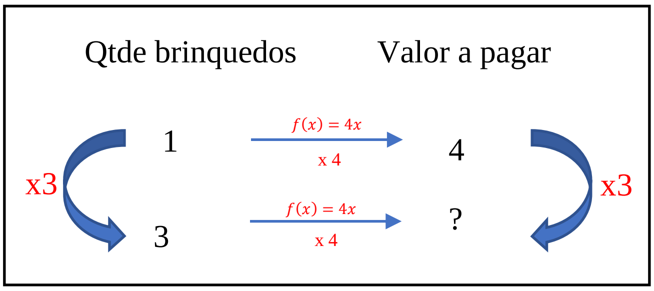
c) Existe um jeito de ajudar o pai de Pedrinho calcular o seu gasto para qualquer quantidade de brinquedos. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

Fonte: Adaptadas de atividades do grupo RePARe

No primeiro item, é apresentado um problema inicial com pequeno valor para a quantidade de brinquedos usados, onde os estudantes podem utilizar-se do raciocínio aditivo para responder procedendo da seguinte forma: se 1 brinquedo custa R$ 4,00, então 2 custará R$ 8,00 $(4 + 4)$ e, por fim, 3 custará R$ 12,00 $(4 + 4 + 4)$. Espera-se, também, que os estudantes possam utilizar o raciocínio multiplicativo (cf. Esquema 2.5), obtendo os R$ 12,00 a partir da multiplicação de 3 com o 4, uma vez que a cada brinquedo paga-se R$ 4,00.

Esquema 2.5: Estratégias das aplicações do operador escalar e relação funcional $f(x) = 4x$



Fonte: Elaborado pela autora

O item (b) reforça a ideia de usar o princípio multiplicativo ao invés do aditivo, visto este último, apesar de obter o resultado correto, ser lento e pouco eficiente para quantidades grandes. Nesse caso, esperava-se que os estudantes realizassem a multiplicação entre os números 10 (quantidade de brinquedos) e 4 (valor a ser pago em cada brinquedo), resultando no valor de R$ 40,00. Usando a definição de função linear é possível obter a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 4x$, onde x e $f(x)$ representam a quantidade de brinquedos usados e o valor a ser pago, respectivamente.

Note que, assim como a situação anterior, temos um domínio discreto (números naturais) e, por isso, podemos pensar esse problema equivalentemente por uma sequência de termos (4, 8, 12, ...) no qual o n-ésimo termo é dado por $x_n = 4n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Este raciocínio permite aos estudantes observar

O item (c) trata da generalização do problema a qual admite solução pessoal e, por isso, será analisado no próximo capítulo.

2.2.2 Procedimentos de aplicação do teste

Para a realização da aplicação do teste, combinamos antecipadamente com a professora das turmas que as atividades seriam realizadas no horário normal das aulas de matemática. Foi combinado também que ela comunicaria os estudantes acerca da pesquisa. Segundo a professora mencionada, no momento do comunicado em cada turma, todos os estudantes presentes demonstraram o interesse de participar da pesquisa.

Como dito anteriormente, a aplicação do teste ocorreu em três turmas (A, B e C), sendo que em cada uma tivemos três encontros. O primeiro encontro foi destinado para a apresentação e entrega dos documentos que serão detalhados a seguir. Enquanto que os outros dois foram destinados para realização do teste pelos estudantes.

Com relação ao primeiro encontro, vale ressaltar que entramos em cada turma, juntamente com a professora de Matemática regente e os seus respectivos estudantes, em seguida cumprimentamos a todos e explicamos aos estudantes que os mesmos iriam participar de uma pesquisa relacionada a Matemática. Em seguida, explanamos que eles só poderiam participar da pesquisa com a permissão de seus responsáveis e, nesse momento, distribuímos e lemos o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE). Além disso, entregamos e lemos o termo de assentimento livre e esclarecido (TALE) no qual era explicado os procedimentos da pesquisa, o qual deveria ter, em caso de concordância, a assinatura do estudante como colaborador.

Por fim, pedimos aos estudantes que levassem o TCLE para casa e, em caso de concordância, seus responsáveis deveriam assinar. Aproveitamos para comunicar que o segundo encontro seria na semana posterior e que, naquele momento, eles precisariam devolver ambos os termos às pesquisadoras.

No segundo encontro, em cada turma, utilizamos duas aulas de 50 minutos. A princípio, recolhemos os documentos TALE e TCLE, devidamente assinados pelos estudantes e seus responsáveis, respectivamente. Em seguida, iniciamos com a aplicação do Caderninho 1 composto pelas situações de 1 a 5.

Nesse momento, entregamos os caderninhos para cada estudante e fizemos a leitura de todas as situações em voz alta, para garantir que eles entendessem o que estava sendo solicitado, principalmente aqueles com dificuldade de leitura. Aproveitamos para informar que não responderíamos a qualquer questionamento referente ao teste, a não ser sobre os significados de algumas palavras ou termos desconhecidos.

Vale ressaltar que a professora regente acompanhou todo o momento de aplicação do teste e, assim como as pesquisadoras, não fez nenhum tipo de intervenção para auxiliar os estudantes nas resoluções das situações. Sequer, mencionamos os conteúdos abordados no teste. Entretanto, a toda hora chamávamos a atenção dos estudantes para sempre registrarem suas soluções nos espaços reservados e que tentassem, ao máximo, resolver cada situação de forma a não deixar espaço em branco. Assim, à medida que os estudantes terminavam de responder uma situação, passavam para a próxima.

Ao findar o horário previsto, recolhemos os caderninhos de todos os estudantes. Dessa forma, agradecemos e lembramo-los que haveria um terceiro encontro, ainda naquela semana, para aplicação de um segundo Caderninho.

No terceiro encontro, foi realizado a aplicação do Caderninho 2 seguido os moldes do encontro anterior. Ao findar a aplicação, recolhemos todos os caderninhos, agradecemos e nos despedimos dos estudantes e da professora da turma.

De posse dos dados coletados nos caderninhos 1 e 2 passamos à análise quantitativa, no que se refere aos percentuais de acertos das situações com uso de um software estatístico, e qualitativa no que se refere a competência de generalização dos estudantes participantes da pesquisa. Mais detalhes são apresentados no capítulo que segue.

CAPÍTULO III: A ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo temos por objetivo analisar os dados obtidos na pesquisa sob duas perspectivas, quais sejam, o desempenho e a competência de generalização dos estudantes. No que se refere ao desempenho, contamos com teste estatístico para analisar diferenças significativas em análises comparativas. No que diz respeito à análise da competência de generalização, criamos categorias a partir das respostas aos itens relativos à generalização, em conjunto com resoluções dos itens anteriores, registrados nos protocolos.

3.1 ANÁLISE DO DESEMPENHO

A análise do desempenho dos estudantes foi realizada tendo em vista o percentual de acertos e contou com análise estatística com uso de um dos testes do pacote SPSS[5], *Qui-quadrado*[6] (χ^2). Para procedermos a análise separamos as 10 atividades em quatro grupos, a saber: (1) as que se tratavam de funções lineares (FL); (2) as que se tratavam de funções afim (FA); (3) as que apresentavam ícones em seus enunciados (IC); (4) e as que não apresentavam ícones (NI). Vale relembrar que a função linear é um caso particular da função afim, dada por $f(x) = ax + b$ com $b = 0$, ou seja, é $f(x) = ax$.

Conforme descrito no Capítulo II da presente pesquisa, as 10 situações do nosso instrumento diagnóstico contemplavam o total de 25 itens. Porém, para a análise de desempenho, faremos uso das respostas de 15 desses itens, visto que os outros 10 estão relacionados a questões abertas que não permitem quantificar em certo ou errado.

O Quadro 3.1 a seguir resume as situações, por item, dentro de cada um dos grupos supracitados. Para efeito de organização, as situações de 1 a 10 são denominadas S1, S2, ..., S10 e, quando se quer discriminar o item, fizemos o acréscimo da respectiva letra à direita, por exemplo, S2a e S2b referem-se aos itens a e b da situação 2, respectivamente.

Quadro 3.1: Distribuição dos itens das situações por grupos

GRUPOS	SITUAÇÕES
1. **FUNÇÃO LINEAR (FL)**	S1, S2a, S2b, S4a, S9a, S9b, S10a, S10b
2. **FUNÇÃO AFIM (FA)**	S3a, S3b, S5a, S6, S7a, S8a, S8b
3. **ICÔNICAS (IC)**	S1, S2a, S2b, S3a, S3b, S4a, S7a, S8a, S8b

[5] *Statistical Package for the Social Sciences – Software* que transforma os dados de uma pesquisa em informações estatísticas.

[6] Fonseca e Martins (2011) afirma que o *Qui-quadrado* é o teste não paramétrico mais popular, por permitir verificar se há adequação de ajustamento entre frequências observadas e frequências esperadas, isto é, se as discrepâncias entre essas frequências são devidas ao acaso, ou se de fato existe diferença significativa entre elas.

4. **NÃO ICÔNICAS (NI)**	S5a, S6, S9a, S9b, S10a, S10b

Fonte: Elaborado pelas autoras

Note que, pelo Quadro 3.1, os grupos FL e FA (assim como IC comparado a NI) são disjuntos, isto é, não há situações em comum entre eles. Com base nas informações desse quadro fizemos as análises comparativas do desempenho intra e inter grupos.

A priori realizamos uma análise de desempenho geral dos estudantes, considerando todos os 15 itens juntos. Na sequência, analisamos o desempenho no grupo FL; o desempenho no grupo FA; o comparativo entre os grupos FL e FA; e, finalmente, o comparativo entre os grupos IC e NI.

A fim de darmos mais confiabilidade aos resultados obtidos, adotamos um teste estatístico para que pudéssemos verificar se as diferenças entre os números de acertos das situações entre os grupos supracitados foram significativos ou não. Sendo assim, utilizamos o software SPSS com uso do teste Q*ui-quadrado*, visto que ele é adequado para comparar frequências observadas e frequências esperadas, ou seja, é apropriado para análise comparativa entre dados de dois ou mais conjuntos.

Dessa forma, o teste Q*ui-quadrado* foi utilizado para sabermos se houve diferença estatisticamente significativa entre os desempenhos apresentados pelos estudantes entre as situações do grupo, assim como entre os grupos. Para isso adotamos um nível de significância de 5%. Portanto, se o p-valor (representa a probabilidade de a diferença observada ser ou não ser resultado do acaso) encontrado no teste for menor que 5%, a diferença é significativa (FONSECA E MARTINS, 2011).

Explicitadas essas informações iniciais, apresentamos a seguir a análise do desempenho geral dos estudantes.

3.1.1 Desempenho Geral

Nessa subseção, analisamos o desempenho geral de cada item das situações. Vale lembrar que 54 estudantes participaram dos dois momentos da coleta de dados da presente pesquisa (Aplicação do caderninho 1 e 2) e, assim, atingimos um total de 810 possíveis respostas (810 representa o produto entre 54 alunos e 15 itens das situações).

A Tabela 3.1 a seguir apresenta a quantidade total de acertos em cada um dos 15 itens.

Tabela 3.1: Quantidades de acertos das situações por item

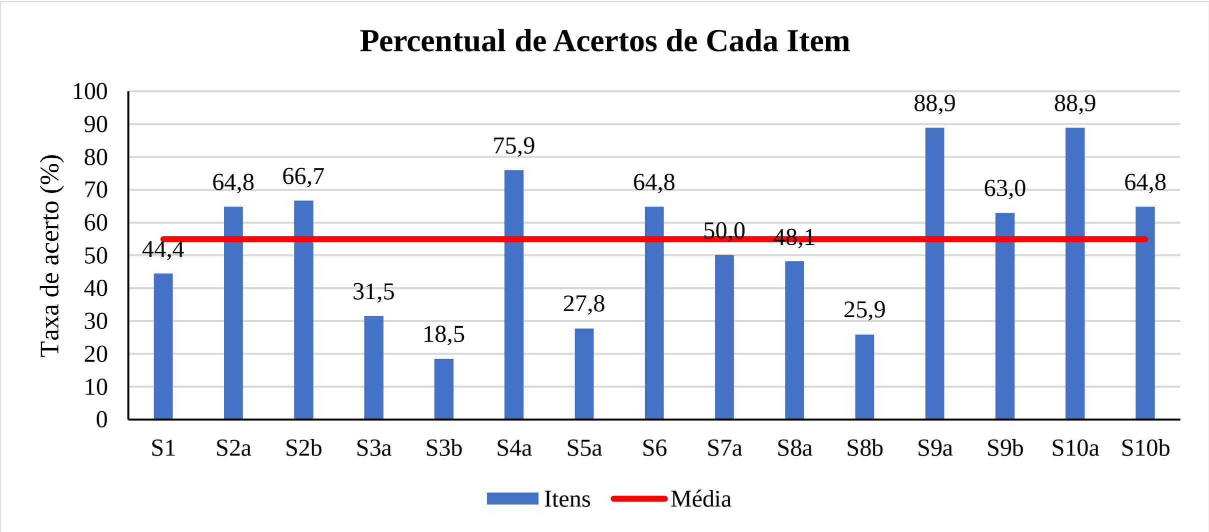
Itens	S1	S2a	S2b	S3a	S3b	S4a	S5a	S6	S7a	S8a	S8b	S9a	S9b	S10a	S10b	Total
Acertos	24	35	36	17	10	41	15	35	27	26	14	48	34	48	35	**445**
Percentual (%)	44,4	64,8	66,7	31,5	18,5	75,9	27,8	64,8	50,0	48,1	25,9	88,9	63,0	88,9	64,8	**54,9**

Fonte: Dados da pesquisa.

Dos dados da Tabela 3.1, observamos o total de 445 acertos dos 810 possíveis, o equivalente a 54,9% de respostas corretas. De antemão, tal resultado aponta para um desempenho positivo dos estudantes frente a situações que envolvem o conceito de função, visto que este ultrapassa metade do total de acertos possíveis. Porém, analisando item a item na tabela, observa-se que os dados não são homogêneos, uma vez que aparecem valores percentuais distantes um do outro 18,5% (S3b) e 88,9% (S9a e S10a). Isso é confirmado ao calcularmos o desvio padrão e obter o valor 12 (22,2%), sendo que tal valor indica que os pontos dos dados tendem a estar afastados da média das porcentagens de acerto (54,9%) ou do valor esperado.

Para melhor visualização, dispomos os dados da Tabela 3.1 no Gráfico 3.1 a seguir de forma que consigamos observar as diferenças e/ou semelhanças entre as taxas de acertos dos itens.

Gráfico 3.1: Desempenho geral dos estudantes em cada item



Fonte: Dados da pesquisa

No Gráfico 3.1 destacamos a linha horizontal referente a média geral de acertos, equivalentemente a 54,9%. Dessa forma, podemos observar que os estudantes foram acima da média em 8 itens (todos acima de 60% de taxa de acerto), sendo 3 de situações icônicas e 5 não icônicas. Isso nos faz inferir que o ícone não necessariamente levou os estudantes a acertarem a situação, o que corrobora com os resultados apontados nos estudos de Araújo (2020). Para fins de confirmação dessa inferência, faremos uma análise comparativa detalhada entre o desempenho dos estudantes frente às situações icônicas e não icônicas com uso do teste *Qui-quadrado* na Seção 3.1.4.

Dos itens acima da média, sete dizem respeito aos itens de situações que envolvem função linear, ou seja, de proporcionalidade. Esse, conceito faz parte da estrutura multiplicativa (VERGNAUD, 1990) e é comumente trabalhado a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, o que torna a situação mais próxima dos estudantes do 6º ano.

Dos itens abaixo da média, com exceção da S1, todas as situações envolvem o conceito de função afim, o que não impede aos estudantes a utilização direta de uma proporção simples. Na pesquisa de Teixeira (2016) com estudantes de 3º e 5º ano observa-se um resultado próximo ao nosso quando a situação envolve a função afim. Vale relembrar que esse estudo foi de caráter intervencionista com aplicação de três testes diagnósticos (o que difere do nosso) e os resultados apontados em situações envolvendo função afim foi expressivamente menor do que aquelas relativas à função linear.

Em suma, o desempenho geral foi, de certa forma, razoável se olharmos para a média de acerto (54,9%), contudo ele não foi homogêneo, tendo em vista que tivemos itens que variaram de 18,5% a 88,9%, uma diferença de 70,4 pontos percentuais. Cabem alguns questionamentos, será que entre os itens de cada grupo a diferença do desempenho também se mantém? Existe diferença de desempenho entre os grupos? Para que possamos responder essas e outras perguntas, passamos a analisar os itens por grupos.

3.1.2 Desempenho dos Estudantes em Situações de Função Linear

Nessa seção discutimos o desempenho dos estudantes do grupo que denominamos por FL, referente às situações que envolvem o conceito de função linear. Para isso, detalhamos os dados acerca dos acertos dos estudantes na Tabela 3.2 a seguir.

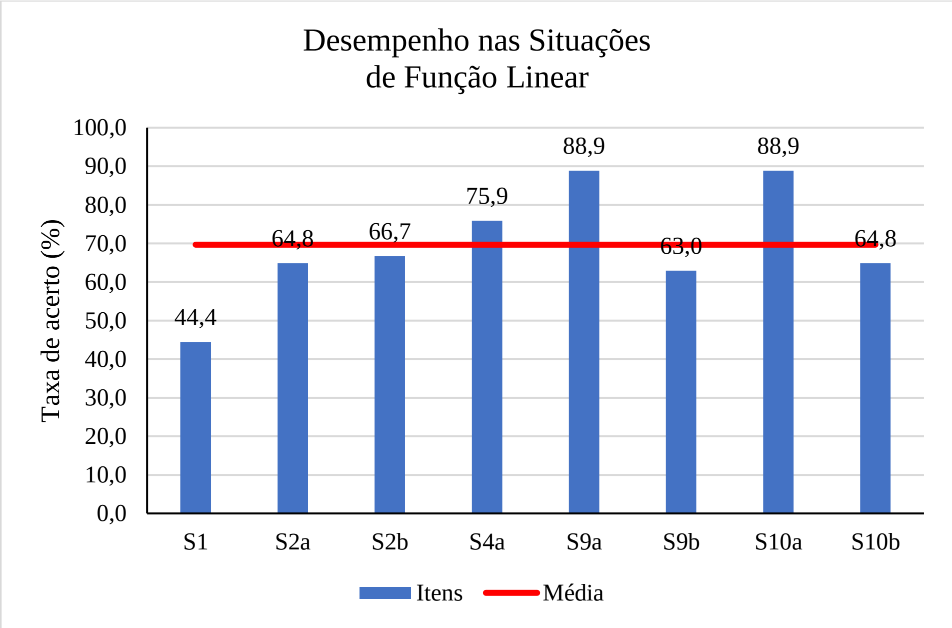
Tabela 3.2: Quantidade de acertos dos itens de função linear

Itens	S1	S2a	S2b	S4a	S9a	S9b	S10a	S10b	Total
Acertos	**24**	35	36	41	48	34	48	35	301
Percentual (%)	**44,4**	64,8	66,7	75,9	88,9	63,0	88,9	64,8	69,7

Fonte: Dados da pesquisa

Nos dados apresentadas na Tabela 3.2, observamos que a média, dentre os itens das situações envolvendo função linear, foi de 69,7% de acerto, alcançando patamares acima da média do desempenho geral (54,9%). Constatamos também que, com exceção da S1 que atingiu 44,4%, todos os outros itens atingiram percentuais maiores que 63%. Podemos observar estes dados dispostos no Gráfico 3.2 a seguir.

Gráfico 3.2: Desempenho dos estudantes frente a situações de função linear



Fonte: Dados da pesquisa

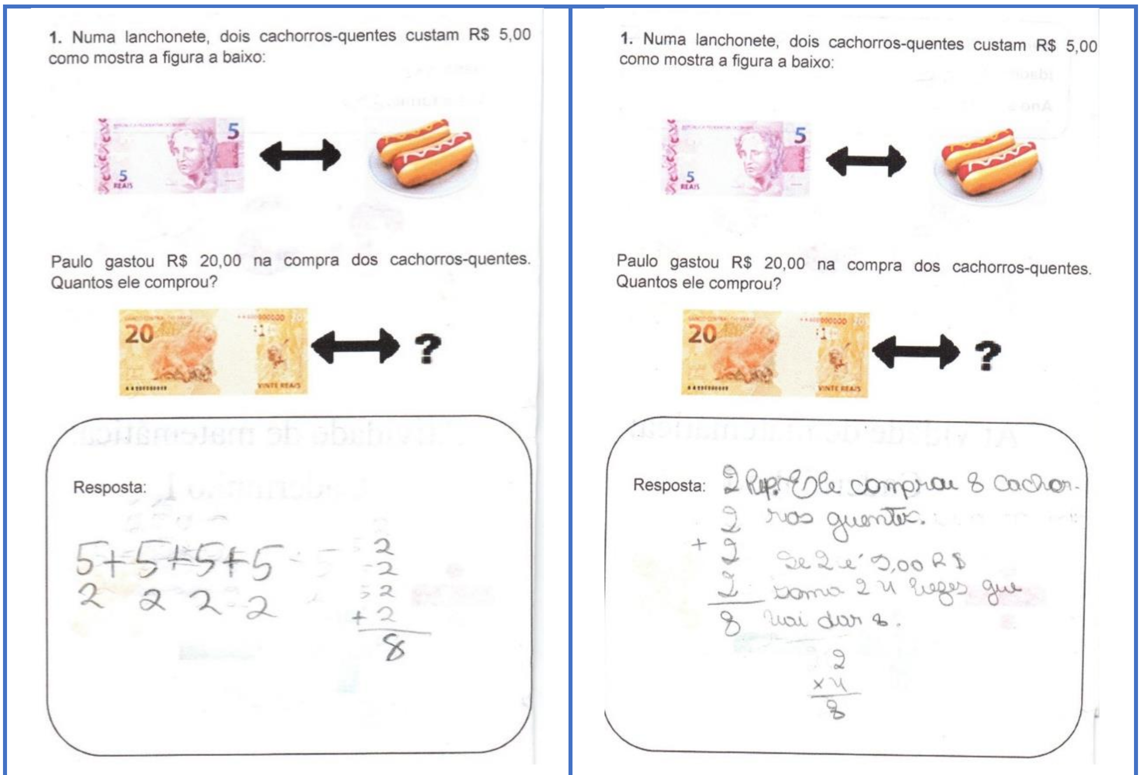
Apesar de todas as situações apresentadas no Gráfico 3.2 serem do mesmo grupo FL, de proporção simples (VERGNAUD, 1993), a S1 é a única que faz parte da classe de "muitos para muitos", sendo que todas as demais são tidas como "um para muitos". Situações como S1 nem sempre são trabalhadas em sala de aula (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014). Podemos inferir que esse seja também o motivo que o desempenho dos estudantes nessa situação (44,4%) destoa da média (69,7%) alcançada por esse grupo, apresentando uma diferença de 25,3 pontos percentuais e, diante disso, suscita-nos alguns questionamentos. Será que de fato há diferença significativa entre a S1 (muitos para muitos) e as outras situações (um para muitos)? Se sim, será que se considerarmos tão somente o desempenho das situações de "um para muitos" há diferença significativa entre elas?

Para respondermos a esses questionamentos, recorremos ao teste *Qui-quadrado*. Ao compararmos o desempenho de S1 com o desempenho de todas as outras do grupo FL, obtemos o p-valor entre esses percentuais inferior a 5% (igual a 0,000) o que demonstra que a diferença é estatisticamente significativa. Isso nos permite afirmar que os estudantes, de fato, tiveram desempenho maior nas situações de classe "um para muitos".

Diferente das outras situações, a S1 não apresenta o item referente a generalização e, portanto, não faz parte da análise qualitativa da seção 3.2. Por isso, apesar dessa subseção tratar do desempenho do grupo FL, optamos por trazer algumas discussões acerca das estratégias adotadas pelos estudantes na resolução da S1, com intuito de entendermos o baixo percentual comparado às demais situações desse grupo.

Dentre as resoluções da S1 que levaram ao sucesso, os estudantes utilizaram, majoritariamente, o operador escalar de forma aditiva, muito semelhante aos resultados encontrados pelos pesquisadores Magina, Santos e Merlini (2014) que classificaram como sendo Nível 3: Transição que corresponde ao Pensamento Aditivo para o Multiplicativo.

Figura 3.1: Extratos dos protocolos dos estudantes E4 e E2 na S1



Extrato do Protocolo do E4

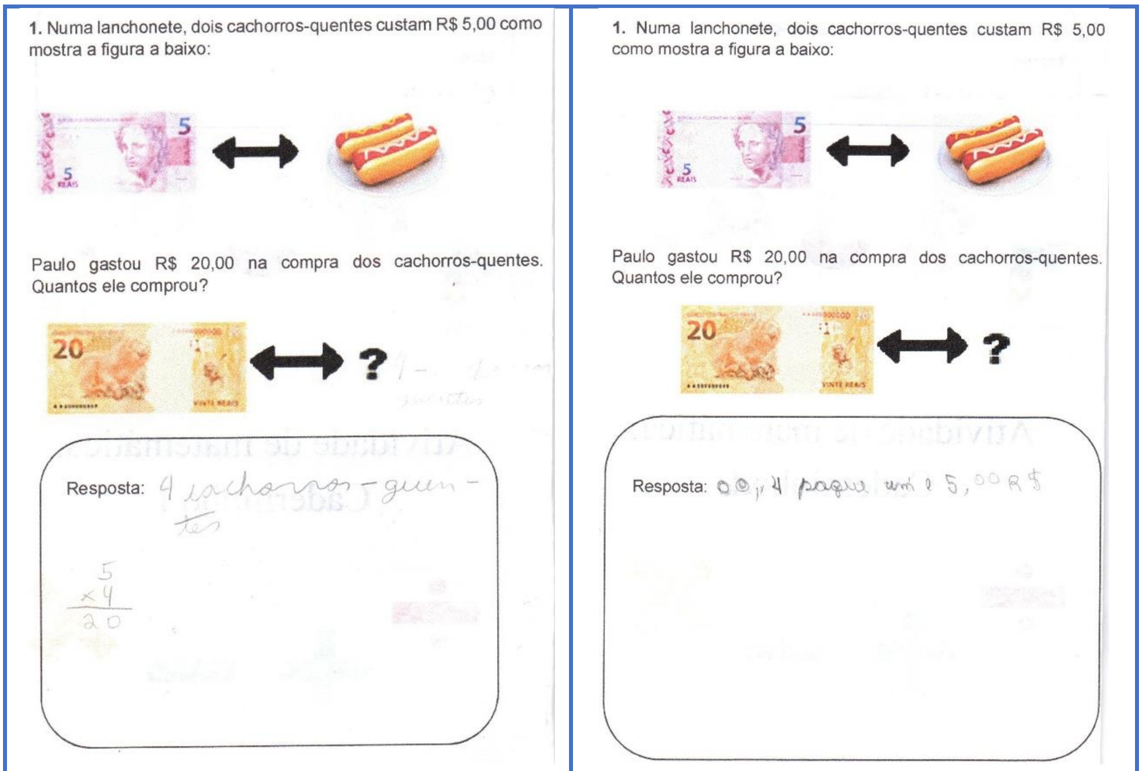
Extrato do Protocolo do E2

Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que o estudante E4 ancora-se explicitamente no raciocínio aditivo. Em seu extrato de protocolo, ele relaciona cada parcela de valor 5 ao número 2, em seguida faz a adição das parcelas ($2 + 2 + 2 + 2 = 8$). Quanto ao estudante E2, apesar de fazer a adição de parcelas repetidas ($2 + 2 + 2 + 2 = 8$) seguindo o raciocínio aditivo, traz o produto ($2 \times 4 = 8$), o que mostra, também, o domínio do pensamento multiplicativo.

Por outro lado, o insucesso no desempenho nessa situação que tentamos entender parece estar atrelado ao fato de os estudantes utilizarem a proporção simples de classe “um para muitos” de forma equivocada. Como citamos no capítulo II, havia a possibilidade do estudante considerar R$ 2,50 como sendo o valor de 1 cachorro-quente. Porém, o fato de mais da metade dos estudantes errarem pode estar atrelado a ideia de não conseguirem essa relação. Isso pode ser melhor observado nos protocolos abaixo.

Figura 3.2: Extratos dos protocolos dos estudantes E33 e E53 da S1



Extrato do Protocolo do E33 | Extrato do Protocolo do E53

Fonte: Dados da pesquisa

Dos estudantes que erraram a S1, a maioria registrou como resposta o número 4 como quantidade de cachorros-quentes. O extrato do estudante E53 evidencia, conforme Figura 3.2, a correspondência de “um para muitos” ao escrever: “4 porque um é R$ 5,00”. Por esse registro, podemos inferir que o estudante E33 teve raciocínio semelhante ao colocar a operação $4 \times 5 = 20$. Esse tipo de resposta que o E33 registrou foi recorrente, ignorando a possibilidade de encontrar a relação “um para muitos”, na qual cada cachorro-quente custa R$ 2,50, afinal os valores não eram grandes e essa é uma situação que poderia ser vivenciada por eles fora do contexto escolar.

Retomando os resultados apresentados pelo grupo FL, é notável que os estudantes tiveram sucesso relevante, uma vez que atingiram níveis superiores a 63,0% em todas as situações, com exceção da S1, sendo que em três delas superaram a média do grupo de 69,7%. Nessa perspectiva, merece destaque os resultados obtidos em duas situações, a saber a S9 e a S10, nos seus respectivos itens (a) e (b). Vale destacar que o item (a) de ambas apresentam os maiores percentuais, não somente desse grupo, mas também no geral (vide Gráfico 3.1) e, além disso, são iguais a 88,9%. De forma análoga, no item (b) ambas tiveram queda no desempenho dos estudantes. Este dado reflete que, de fato, as situações são semelhantes em sua estrutura, pois ambas são de proporções simples de classe “um para muitos” com valores discretos e não apresentam ícones ou sequência destacada. A Figura 3.3 apresenta as situações ora discutidas.

Figura 3.3: Situações S9 e S10 com os itens (a) e (b)

9. Dona Rita vende pasteis nas praias do sul de Ilhéus durante a semana. Cada pastel custa R$ 3,00. Com base nessa informação, responda as perguntas abaixo:

a) Uma pessoa comprou 5 pasteis. Quanto ela pagou a dona Rita?

b) Se dona Rita vender 60 pasteis em um dia, quanto ela arrecadará?

10. Pedrinho irá com seu pai ao parque de diversões. Sabendo que o parque de diversões cobra R$ 4,00 por brinquedo, responda as perguntas abaixo:

a) Se o Pedrinho andar em 3 brinquedos, quanto o pai dele gastará?

b) Se Pedrinho gostar muito dos brinquedos do parque e andar em 10 brinquedos, quanto o pai dele vai gastar?

Fonte: Elaborado pelas autoras

Desse modo, fomos investigar se essa queda do item (a) para o (b) foi significativa. Notamos que houve diferença significativa entre os itens S10a e S10b, assim como entre os itens S9a e S9b, confirmado pelo teste *Qui-quadrado*, ao obtermos o p-valor igual a 0,003 e 0,002, respectivamente (ambos menores que 5%). Tal resultado pode estar atrelado ao fato de que os itens diferem apenas quanto à quantidade requerida ao estudante, sendo que no item (a) o estudante poderia recorrer ao raciocínio aditivo ou de contagem, porque a quantidade era relativamente pequena. Contudo, no item (b) tal estratégia seria exaustiva e poderia incorrer a erros de cálculo, sendo ideal o raciocínio multiplicativo. Para Stacey (1989), bem como, Merino, Cañadas e Molina (2013), encontrar um valor para quantidades próximas daquelas já conhecidas é mais fácil, uma vez que os estudantes podem lançar mão da estratégia de contagem. Enquanto que encontrar uma quantidade qualquer, distante daquela já conhecida, requer reconhecer uma regra geral e esta está associada à generalização algébrica.

De todo modo, a partir da análise dos dados do grupo FL é possível destacar que os estudantes dominam situações de “um para muitos” em especial quando lhes é solicitado valores próximos. Embora seu desempenho seja menor quando os valores aumentam, ainda assim eles chegam a patamares acima de 63%. A seguir apresentamos o desempenho dos estudantes no grupo FA.

3.1.2 Desempenho dos Estudantes em Situações de Função Afim

Nessa seção discutimos o desempenho dos estudantes frente às situações que envolvem o conceito de função afim, relativo ao grupo FA. Para isso, detalhamos os dados acerca dos acertos dos estudantes na Tabela 3.3 a seguir.

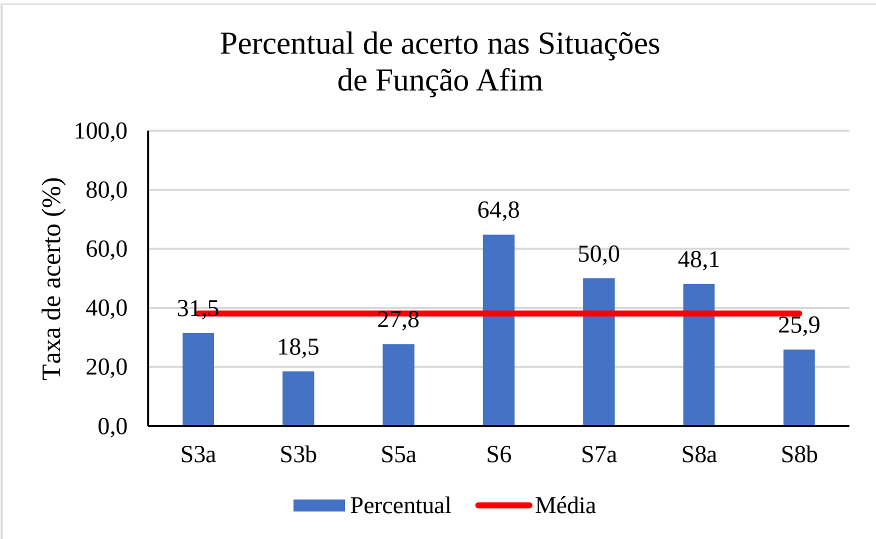
Tabela 3.3: Quantidade de acertos em situações de função afim

Itens	S3a	S3b	S5a	S6	S7a	S8a	S8b	Total
Acertos	17	10	**15**	**35**	27	26	14	144
Percentual (%)	31,5	18,5	**27,8**	**64,8**	50,0	48,1	25,9	38,1

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados da Tabela 3.3 mostra-nos que a média dentre as situações envolvendo função afim foi de 38,1% de acerto, contudo, com exceção da S6 que atingiu 64,8%, todas as outras atingiram percentuais inferiores ou igual a 50%. Vale ressaltar que, dentre estas situações, apenas a S6 ficou acima da média geral de 54,9%. Podemos observar estes dados também no gráfico a seguir.

Gráfico 3.3: Desempenho dos estudantes em situações de função afim



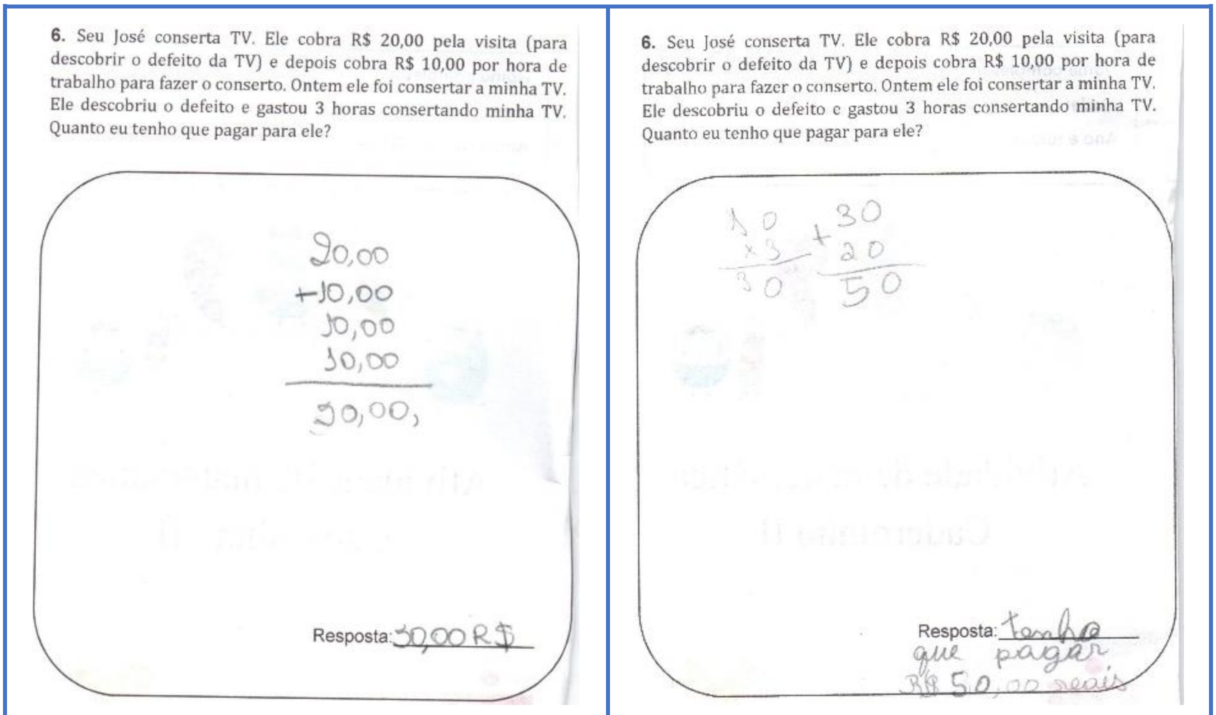
Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com os dados do Gráfico 3.3, ressaltamos o baixo percentual de acerto das situações do grupo FA, com exceção da S6. Desse modo, se desconsiderarmos a S6 do grupo FA, a média cai de 38,1% para 33,3%. O teste *Qui-quadrado* confirma que tal diferença é significativa (*p*-valor igual a 0,000).

Assim como a S1 do grupo FL, a S6 não apresenta item referente a generalização da situação e, por isso, estará ausente na análise qualitativa da Seção 3.2. Isso posto, apesar dessa subseção tratar do desempenho em FA, optamos por trazer algumas discussões acerca das estratégias adotadas pelos estudantes na resolução da S6, a fim de entendermos o alto percentual comparado às demais situações desse grupo.

Diante dos resultados apontados, analisamos as respostas dos estudantes na situação S6, independente se corretas ou não. Na Figura 3.4 a seguir, trouxemos os extratos dos protocolos de dois estudantes, os quais registram, de forma distinta, a resolução em que consideraram os R$ 20,00 da visita correspondente ao coeficiente b da expressão $ax + b$.

Figura 3.4: Extratos dos protocolos dos estudantes E02 e E37 referentes à S6



Extrato do Protocolo do E02 | Extrato do Protocolo do E37

Fonte: Dados da pesquisa

A partir dos extratos apresentados na Figura 3.4, observamos que o estudante E02 utilizou explicitamente a estrutura aditiva $(20 + 10 + 10 + 10 \ = \ 50)$ para a resolução do problema. Esse tipo de resolução é pertinente quando o valor de x é relativamente pequeno, uma vez que a adição repetida de muitas parcelas torna-se exaustivo, podendo incorrer a erros de cálculo. A resolução do estudante E37 passa pelo uso da estrutura multiplicativa associada a aditiva ($10 \times 3 = 30$ e depois $30 + 20 = 50$), e ambos obtêm o resultado correto equivalente a R$ 50,00.

Outros resultados que nos chamaram a atenção foram os percentuais de acertos distintos de situações que consideramos semelhantes: (i) a S5a comparado à S6; (ii) e a S3 com a S8, que merecem uma discussão. Iniciamos a primeira discussão trazendo as duas situações na Figura 3.5 a seguir.

Figura 3.5: Situações S5a e S6

5. O taxista João cobra suas corridas da seguinte maneira: R$ 4,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por quilômetro (km) rodado.

a) Baseado nestas informações complete o quadro a seguir:

km rodado	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km	6 km
Total cobrado em R$						

6. Seu José conserta TV. Ele cobra R$ 20,00 pela visita (para descobrir o defeito da TV) e depois cobra R$ 10,00 por hora de trabalho para fazer o conserto. Ontem ele foi consertar a minha TV. Ele descobriu o defeito e gastou 3 horas consertando minha TV. Quanto eu tenho que pagar para ele?

Fonte: Elaborado pelas autoras

De acordo com os dados da Tabela 3.3, os percentuais de acerto da S5a e S6 foram de 27,8% e 64,8%, respectivamente. O teste *Qui-quadrado* demonstrou que há diferença significativa entre o desempenho dos estudantes frente às duas situações (S5a e S6), uma vez que o p-valor foi igual a 0,000.

Após a aplicação do diagnóstico e antes do início da análise, acreditávamos que essas duas situações eram semelhantes a ponto de podermos descartar uma delas, afinal bastaria uma já que o raciocínio para sua resolução nos parecia ser o mesmo. Ao fazermos a correção dos protocolos, foi surpreendente a diferença entre os percentuais de acerto. Como não fizemos entrevista com os estudantes que responderam ao teste, só nos resta fazer pelo menos três inferências. Relembrando, o instrumento diagnóstico foi confeccionado em dois caderninhos para que a sua aplicação fosse realizada em dois encontros. O primeiro caderninho continha as cinco primeiras situações e o segundo, por sua vez, continhas as cinco últimas situações.

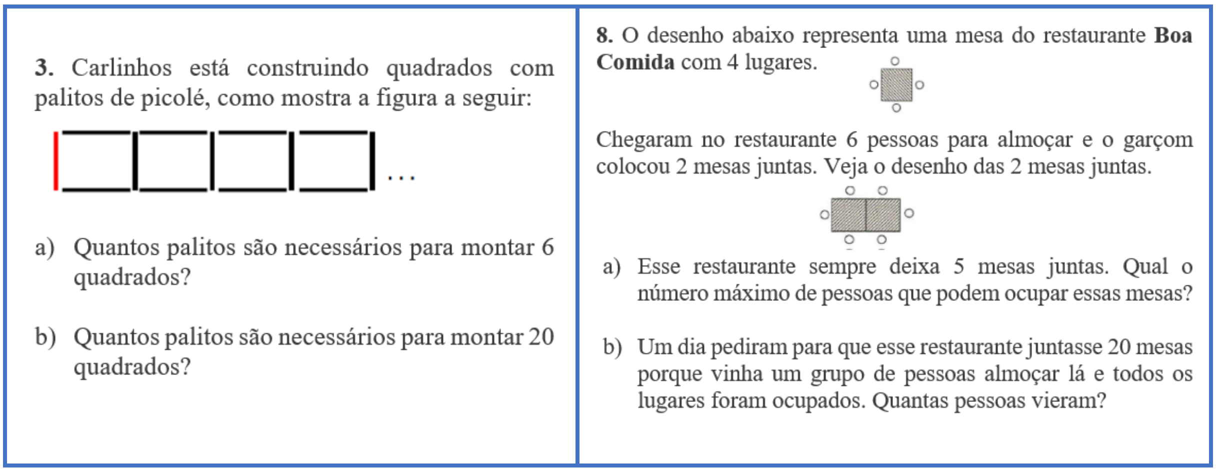
Assim sendo, a situação S5 foi a última do primeiro encontro e a S6 foi a primeira do segundo encontro. O fato da S5 ser a última nos leva a inferir que os estudantes já estavam cansados de responder as situações propostas e, por isso, o baixo desempenho. Em contrapartida a S6 foi a primeira situação do segundo encontro, ou seja, eles estavam iniciando o processo e isso pode ter levado ao sucesso.

A segunda inferência é a de que os estudantes podem ter aprendido com o próprio diagnóstico. Como a S5 foi a última situação apresentada, eles podem ter discutido entre si e, desse modo, ao se deparar com uma situação semelhante puderam rever o seu raciocínio.

Nossa última inferência quanto a comparação da S5 com a S6 está relacionada aos dados do quadro que foram apresentados aos estudantes no item S5a. O fato de apresentarmos os números de 1 a 6 em sequência no quadro pode ter contribuído para que o estudante fixasse a sua atenção apenas na parte variável da situação, desconsiderando o valor fixo de R$ 4,00.

A segunda discussão que fizemos diz respeito à comparação entre os percentuais de acertos dos itens da S3a e S3b, a saber 31,5% e 18,5%, respectivamente. Da mesma forma, fizemos a comparação entre os percentuais de acertos dos itens S8a e S8b, a saber 48,1% e 25,9%, respectivamente. Para que possamos dar continuidade a essa discussão, trouxemos as duas situações na Figura 3.6 a seguir.

Figura 3.6: Situações S3 e S8 com os itens (a) e (b)



3. Carlinhos está construindo quadrados com palitos de picolé, como mostra a figura a seguir:

a) Quantos palitos são necessários para montar 6 quadrados?

b) Quantos palitos são necessários para montar 20 quadrados?

8. O desenho abaixo representa uma mesa do restaurante **Boa Comida** com 4 lugares.

Chegaram no restaurante 6 pessoas para almoçar e o garçom colocou 2 mesas juntas. Veja o desenho das 2 mesas juntas.

a) Esse restaurante sempre deixa 5 mesas juntas. Qual o número máximo de pessoas que podem ocupar essas mesas?

b) Um dia pediram para que esse restaurante juntasse 20 mesas porque vinha um grupo de pessoas almoçar lá e todos os lugares foram ocupados. Quantas pessoas vieram?

Fonte: Elaborado pelas autoras

Como podemos observar, são duas situações icônicas, cujas resoluções poderiam contar com estratégias semelhantes. Contudo, o teste *Qui-quadrado* confirma que apenas a diferença entre S8a e S8b foi significativa (p-valor igual a 0,017), já que o p-valor entre S3a e S3b foi igual a 0,120 (maior que 5%) e, portanto, não houve diferença significativa entre elas. Desse resultado temos que a S3a foi tão difícil quanto a S3b, contudo isso não ocorreu na S8a que se mostrou menos difícil que a S8b.

Outra comparação foi realizada entre os itens S3a com S8a; assim como S3b com S8b. Para ambas comparações, o teste *Qui-quadrado* mostrou que as diferenças entre os percentuais não foram significativas (p-valor igual a 0,077 na comparação de S3a com S8a e p-valor igual a 0,355 quando comparado S3b com S8b). Esses resultados reforçam que os itens (a) e (b) das duas situações foram igualmente difíceis.

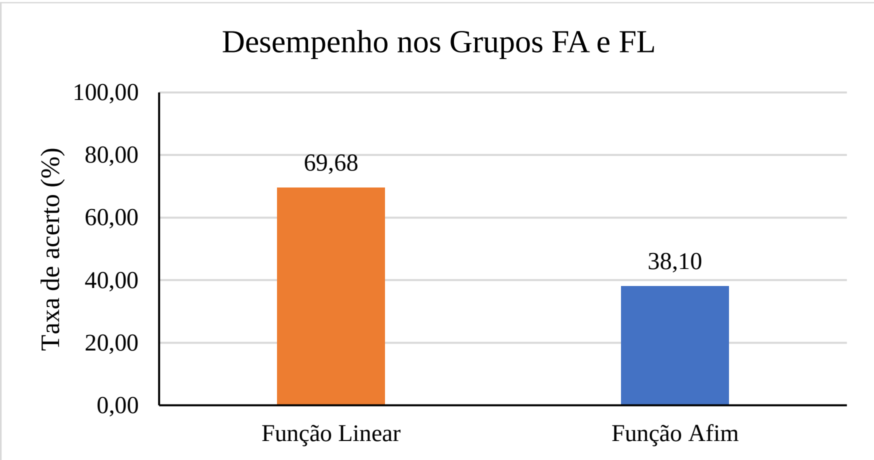
A partir dessas discussões é possível inferir que para situações do grupo FA os estudantes, apesar de apresentar níveis de baixo desempenho (variando de 18,5% a 50% em quatro dos cinco itens do grupo), é possível admitir que esse resultado é relevante. Essa nossa afirmação leva em conta que esses estudantes ainda não passaram pelo ensino formal de função afim e, é possível, que situações desse tipo ainda não são trabalhadas nesse ano escolar, mesmo que de maneira informal.

Na próxima seção trazemos a análise comparativa a comparação entre os desempenhos dos estudantes frente às situações dos grupos FL e FA.

3.1.3 Comparativo entre os desempenhos dos grupos de Função Linear e de Função Afim

Nessa subseção analisaremos de forma comparativa os desempenhos dos estudantes frente às situações dos grupos FL e FA. Para tanto, a fim de melhor visualizar os dados apresentados na Tabela 3.1, dispomo-los no gráfico a seguir com destaque para esses dois grupos.

Gráfico 3.4: Comparativo entre os desempenhos nos grupos FL e FA



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com os dados com o Gráfico 3.4, notamos que o desempenho dos estudantes frente às situações do grupo FL foi quase o dobro comparado ao desempenho em FA. De acordo com o teste *Qui-quadrado* essa diferença entre os grupos foi significativa, uma vez que o *p*-valor é igual a 0,000 (menor que 5%).

Nossos resultados vão ao encontro dos encontrados nos estudos de Teixeira (2016) no qual o pesquisador observou que estudantes do 5º ano tem melhor desempenho em situações de função linear em detrimento as de função afim.

Além dessa análise seja comparativa entre o desempenho dos grupos FL com FA, fizemos também uma análise comparativa do desempenho dos estudantes na situação S1 e as situações do grupo da FA. Essa comparação se deu pelo baixo desempenho alcançado pelos estudantes e queríamos saber se, para eles, a S1 (44,4%) era tão difícil quanto às situações do grupo FA (38,1%).

Com o teste *Qui-quadrado* obtemos o *p-valor* igual a 0,323 (maior do que 5%), o que confirma não haver diferença significativa entre estes dois resultados. Em outras palavras, para esses estudantes a S1 foi tão difícil quanto às situações do grupo FA, embora a BNCC (BRASIL, 2017) prevê trabalhar conceito de proporcionalidade desde os anos iniciais com foco no 5° ano.

Nesse contexto, nossos resultados vão ao encontro dos estudos de Teixeira (2016) no qual o pesquisador observou que estudantes do 5º ainda não conseguem ter um bom desempenho em situações que exigem a compreensão do conceito função afim, ou seja, ainda não conseguem conceber a ideia da existência de uma relação entre duas grandezas mais uma constante. Resultados semelhantes de baixo desempenho frente à situações desse tipo foram encontrados por Magina, Santos e Merlini (2014).

De acordo com Merlini, Magina e Santos (2013), quando se trata de elaborar problemas que envolvem as estruturas multiplicativas, os professores, majoritariamente, tendem a relacioná-los com o eixo de proporção simples e, consequentemente, os estudantes tendem a ter maior sucesso nesses tipos de problemas. Em consonância com estes autores, quando se trata de situações do eixo proporção simples, Souza (2015) acrescenta o fato de os professores utilizarem predominantemente a classe “um para muitos”. Dessa forma, os problemas da classe “muito para muitos” são pouco requisitados aos estudantes.

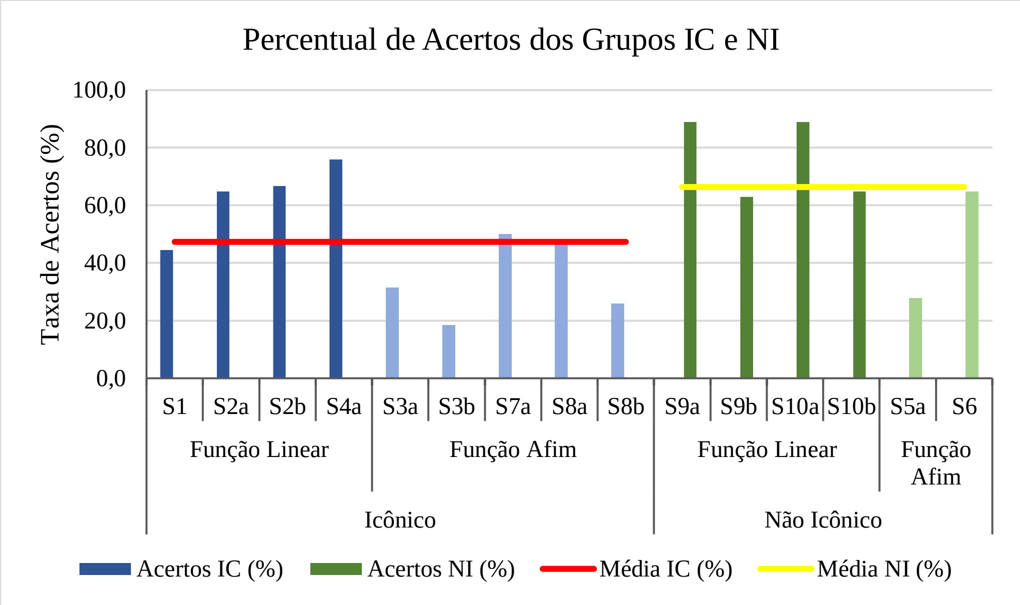
Em síntese, temos que, para esses estudantes, as situações que dizem respeito à função afim apresentam nível de maior complexidade do que as do grupo FL. Cabe salientar que esse resultado foi encontrado somente em situações que envolviam a proporção simples da classe de “um para muitos”. Destacamos ainda que a situação de proporção simples da classe de “muitos para muitos” se iguala no nível de dificuldade com as situações do grupo FA.

3.1.4 Comparativo entre os desempenhos das situações Icônicas e Não Icônicas

Nessa subseção, fizemos três análises comparativas entre os desempenhos: (i) dos grupos IC e NI; (ii) dentro do grupo FL das situações IC e NI; (iii) dentro do grupo FA das situações IC e NI. Essas análises comparativas foram feitas a partir dos percentuais de acertos, nos quais investigamos estatisticamente se as diferenças são significativas ou não.

Os dados da Tabela 3.1 foram reorganizados no Gráfico 3.5 de acordo com o tipo de situação, Icônica e Não Icônica.

Gráfico 3.5: Comparativo entre os percentuais de acertos dos grupos IC e NI



Fonte: Dados da pesquisa

A partir da apresentação dos dados apresentados no Gráfico 3.5, notamos uma diferença evidente entre a média de acertos das situações do grupo IC (47,3%) comparada à média de acertos das situações do grupo NI (66,4%). De fato, o teste *Qui-quadrado* confirma que tal diferença é significativa ao obtermos o *p-valor* igual a 0,000. Nesse caso, com uma visão geral dos grupos IC e NI, podemos inferir que o ícone não influenciou de forma positiva no desempenho dos estudantes.

Seguindo com a análise, dentro do grupo de FL, ao comparamos os grupos IC com NI obtemos uma diferença estatisticamente significativa (*p*-valor igual a 0,002) entre as novas médias 63,0% e 76,4% dos respectivos grupos. Seguindo com a análise, dentro do grupo de FL, de forma análoga, dentro do grupo FA, comparamos os grupos IC com NI (34,8% e 46,3%, respectivamente) e novamente, obtivemos uma diferença significativa (*p*-valor igual a 0,038).

Dessa forma, nossos resultados vão ao encontro de partes dos resultados encontrados nos estudos de Araújo (2020) ao afirmar que, no geral, o ícone não foi um facilitador para a obtenção de sucesso nas respostas dadas pelos estudantes. Afirmamos em partes porque, em seus resultados, a pesquisadora não obteve diferença significativa entre os desempenhos dos estudantes frente às situações dos grupos IC e NI. Enquanto que, em nossos resultados, os desempenhos frente às situações de NI foram superiores quando comparados aos de IC, estatisticamente comprovados pelo teste *Qui-quadrado*.

De posse desses resultados, podemos concluir que o ícone não se portou como um facilitador para a resolução dos estudantes, uma vez que eles tiveram melhor desempenho, estatisticamente comprovado, nas situações não icônicas. Esse resultado se fez presente tanto nas situações do grupo FL quanto no grupo FA.

Finalizamos aqui a análise do desempenho dos estudantes e passamos à análise e categorização da competência de generalização, relativas exclusivamente ao último item das situações.

3.2 ANÁLISE DA COMPETÊNCIA DE GENERALIZAÇÃO

Para realizar a segunda parte do nosso objetivo, que é investigar a competência de generalização dos estudantes, categorizamos o último item das situações que diz respeito à generalização. Das 10 situações que compõem o instrumento diagnóstico, nós analisamos e categorizamos oito delas, aquelas que, no último item, solicitam a generalização, são elas: S2, S3, S4, S5, S7, S8, S9, S10.

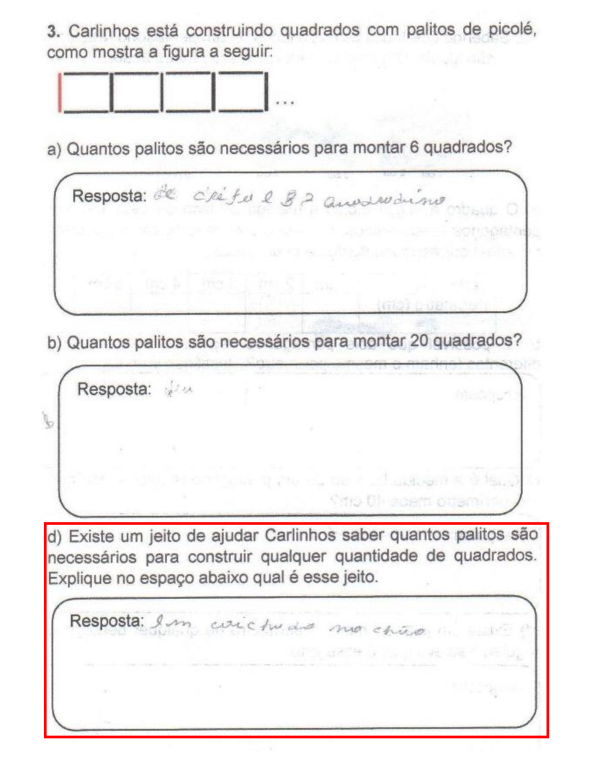
Cabe ressaltar, ainda, que para essa análise não estamos levando em consideração o acerto ou erro, mas sim como o estudante se reporta ao último item de cada uma das situações supracitadas. Estamos interessadas em saber se ele generaliza ou não e, se generaliza, de que forma ele faz. Vale salientar ainda que, para classificar cada uma das respostas do último item atentamos também ao que foi respondido nos itens anteriores. Assim, de posse dos dados, criamos dois grandes grupos de categorias de análise, o primeiro deles nomeamos de “G1 Não Generaliza” e o segundo de “G2 Generaliza”.

Entretanto, tivemos dois tipos de resposta que não se enquadram nesses dois grupos, mas trazem importantes resultados, são eles: respostas em Branco e respostas que denominamos como Incompreensível. Ao todo tivemos 432 possíveis respostas (produto entre 54 de estudantes e oito itens), sendo que 35 delas (8%) os estudantes deixaram em Branco. Consideramos como sendo um índice relativamente baixo, levando em conta que esse tipo de situação que solicita a generalização, comumente, não faz parte das atividades desenvolvidas em sala de aula. Esse resultado nos leva a inferir que os estudantes se empenharam em responder o último item.

O outro tipo de resposta que classificamos como Incompreensível, é importante explicitar que essa incompreensão não é por parte do estudante, nós é que não compreendemos o que o estudante quis expressar, mesmo analisando as respostas dadas aos itens anteriores.

Nessa classificação cabem as respostas que não compreendemos o texto por conta da caligrafia e/ou excesso de erros ortográficos. Com relação à essa classificação, notamos uma quantidade expressiva de respostas, cerca de 24% do total de respostas possíveis. A Figura 3.7, traz dois extratos de protocolos que analisaremos em seguida.

Figura 3.7: Exemplos de protocolos classificados na categoria G1C3



3. Carlinhos está construindo quadrados com palitos de picolé, como mostra a figura a seguir:

a) Quantos palitos são necessários para montar 6 quadrados?

Resposta:

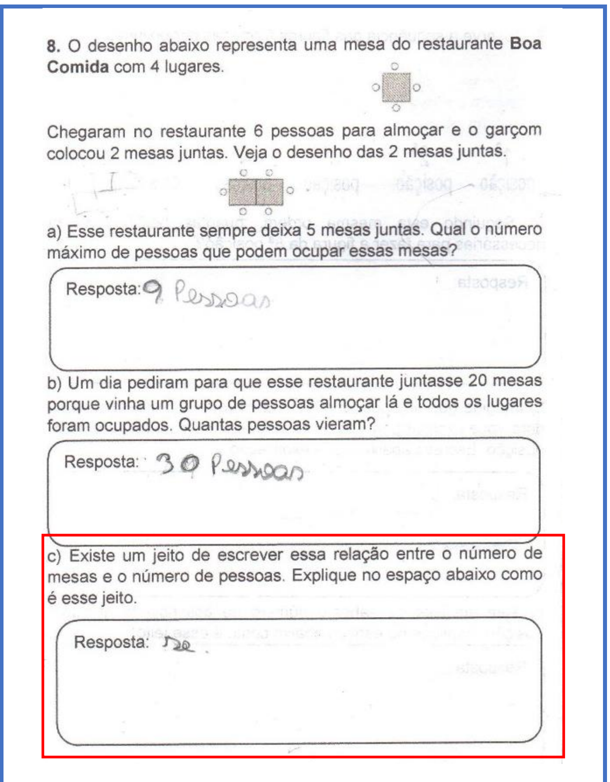
b) Quantos palitos são necessários para montar 20 quadrados?

Resposta:

d) Existe um jeito de ajudar Carlinhos saber quantos palitos são necessários para construir qualquer quantidade de quadrados. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

Extrato do protocolo do estudante E45 na S3



8. O desenho abaixo representa uma mesa do restaurante **Boa Comida** com 4 lugares.

Chegaram no restaurante 6 pessoas para almoçar e o garçom colocou 2 mesas juntas. Veja o desenho das 2 mesas juntas.

a) Esse restaurante sempre deixa 5 mesas juntas. Qual o número máximo de pessoas que podem ocupar essas mesas?

Resposta: 9 Pessoas

b) Um dia pediram para que esse restaurante juntasse 20 mesas porque vinha um grupo de pessoas almoçar lá e todos os lugares foram ocupados. Quantas pessoas vieram?

Resposta: 30 Pessoas

c) Existe um jeito de escrever essa relação entre o número de mesas e o número de pessoas. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta: se

Extrato do protocolo do estudante E43 na S8

Fonte: Dados da pesquisa

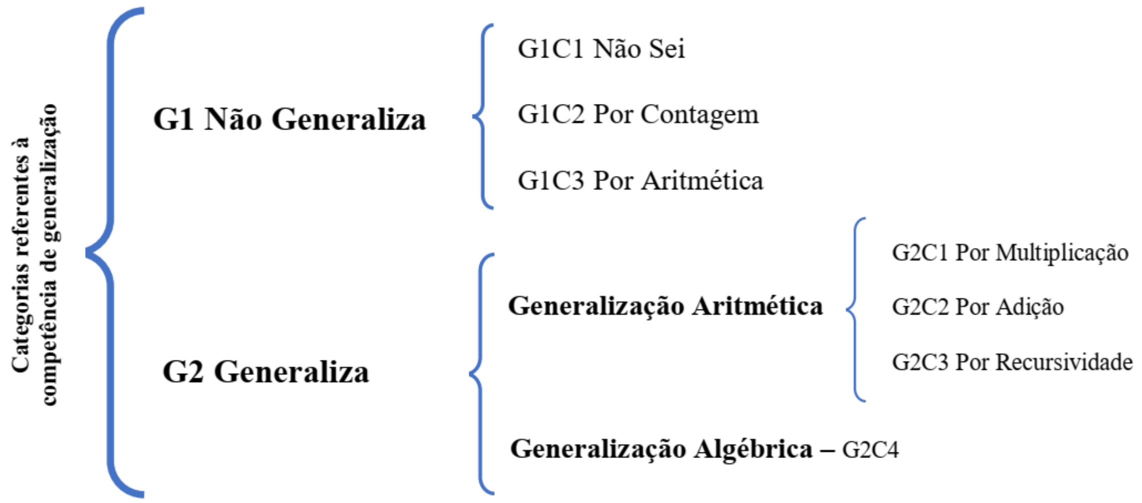
Uma característica dessa classificação foi a impossibilidade de compreender a grafia do estudante. O extrato do protocolo de E45 representa exatamente o que acabamos de descrever, ou seja, não há como entender o que foi escrito tanto no último item quanto nos demais da situação S3.

Outra característica é que apesar da busca de algum significado do que fora escrito pelo estudante, ainda assim não conseguimos compreender a resposta dada por ele e, como não fizemos entrevista para que pudesse explicitar, sua escrita foi tida como incompreensível. O extrato do protocolo de E43 apresenta como resposta ao último item da S8 a palavra “se” que, apesar de ser legível, não há como compreender o seu significado em relação ao que lhe foi solicitado. Além disso, as respostas dos itens (a) e (b) do E43 não permitem entender o raciocínio adotado, uma vez que este está implícito, pois apresenta somente respostas e estas estão incorretas.

Ainda que quase um quarto das respostas estarem nessa classificação, entendemos como um resultado positivo, na medida que, de alguma forma, os estudantes tentaram se expressar algo a respeito da generalização.

Retomando, após a retirada dessas respostas (35 em Branco e 104 Incompreensíveis), distribuímos as 293 restantes nos dois grupos: (i) Não Generaliza com três categorias; e (ii) Generaliza com duas categorias e três subcategorias, conforme apresentamos no Esquema 3.1 a seguir.

Esquema 3.1: Categorias do item de generalização das situações



Fonte: elaborado pelas autoras

É importante ressaltar que as categorias são excludentes, ou seja, cada uma das 293 respostas está vinculada a somente uma categoria. Apesar dessa análise ser de natureza qualitativa e, portanto, não ter foco em dados numéricos, acreditamos que estes apresentados na Tabela 3.4 podem contribuir para a discussão das categorias por situação, acerca da competência de generalização por parte dos estudantes.

Tabela 3.4: Quantitativo de respostas por grupo e categoria

	G1 Não Generaliza			**G2 Generaliza**			
Situações / Categorias	G1C1	G1C2	G1C3	G2C1	G2C2	G2C3	G2C4
S2			11		21	2	
S3		17	8	6			
S4	2					39	
S5	2		7	15	1	4	4
S7	3					34	
S8		28	1	5	3		1
S9			25				14
S10			25				15

Total / categoria	**7**	45	77	26	25	**79**	34
Total / grupo	129 (44,1%)			**164** **(55,9%)**			

Fonte: Dados da pesquisa

Alguns dados da Tabela 3.4 chamam a nossa atenção, o primeiro deles é que mais da metade das respostas dos estudantes apresentaram algum tipo de generalização (55,9%). Este é um resultado relevante, visto que esses estudantes não tiveram qualquer tipo de intervenção, ou ainda o ensino formal de conceitos algébricos.

Este resultado ganha força se considerarmos que a categoria G1C1 Não sei, do grupo Não Generaliza, teve somente sete ocorrências, cerca de 2% das 293 respostas categorizadas, em detrimento aos que tentaram responder de alguma forma. Nesse caso, os estudantes declaram oficialmente não saber como poderia ser a generalização. Outro ponto que destacamos é relativo à frequência da subcategoria G2C3 do grupo Generaliza, a qual se refere a utilização da recursividade e apresenta o maior número do G2.

A recursividade, surge como principal estratégia de resolução e de generalização desses estudantes ao procurarem por padrões numéricos ou icônicos nas situações, a partir do conhecimento de um ou mais casos particulares. Para Merino, Cañadas e Molina (2013), as tarefas de generalização envolvem a busca de padrões e sua solução exige encontrar um elemento a partir de outros já conhecidos, de forma que sejam possíveis obter novos casos particulares ou até mesmo a expressão de um termo geral. Na mesma linha, Vale e Pimentel (2011) apontam que, habitualmente, os alunos utilizam o raciocínio recursivo ao lidarem com situações de padrões de crescimento, nas quais o próximo termo muda em relação ao anterior de forma previsível. Ao observarmos os dados obtidos na categoria G2C3 Por recursividade 73 das 77 respostas dos alunos, dizem respeito a duas situações relacionadas a padrões (S4 e S7).

Destacados esses pontos que julgamos relevantes, na sequência fizemos a descrição de cada uma das categorias e subcategorias, trazendo protocolos que as exemplificam com as devidas discussões.

3.2.1 Análise das respostas Categorizadas do G1 Não Generaliza

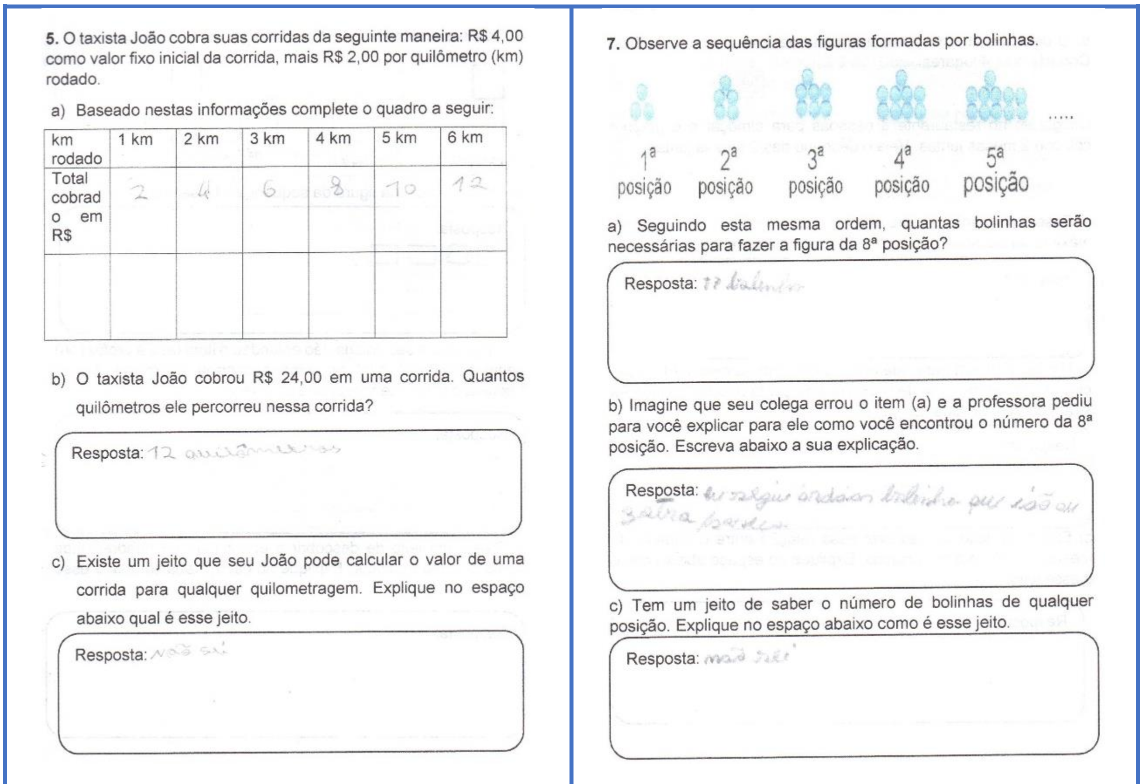
No grupo G1 Não Generaliza estão presentes os protocolos dos estudantes nos quais pudemos identificar o uso de alguma estratégia coerente para resolução dos itens anteriores (obtendo sucesso ou não), mas ainda assim, não conseguem generalizar. Para tanto, nesse grupo, conseguimos identificar três tipos distintos de respostas, as quais categorizamos da seguinte maneira: (*i*) os que afirmam não saber generalizar explicitada pela a frase “não sei” (G1C1); (*ii*) os que utilizam contagem a partir de desenhos ou símbolos (G1C2); e (*iii*) os que fazem uso das operações aritméticas, de adição e multiplicação, ou ainda a combinação entre elas (G1C3).

Os dados da Tabela 3.4 revelam que 44,1% das respostas categorizadas os estudantes não conseguem generalizar e foram assim distribuídas: 2,4% na categoria G2C1; 15,4% na categoria G1C2; e 26,3% na categoria G1C3. A seguir, apresentamos e discutimos essas categorias trazendo extratos de protocolos que evidenciam cada uma delas.

3.2.1.1 Categoria G1C1 Não Sei

No que se refere à categoria G1C1 Não Sei, identificamos sete respostas em três situações (S4, S5 e S7) com a grafia explícita “não sei”. Nesse caso, o estudante deixa claro que não consegue generalizar a situação. Trouxemos como exemplo os extratos dos protocolos dos estudantes E46 e E35 conforme Figura 3.8.

Figura 3.8: Exemplos da categoria G1C1 referente as situações S5 e S7



5. O taxista João cobra suas corridas da seguinte maneira: R$ 4,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por quilômetro (km) rodado.

a) Baseado nestas informações complete o quadro a seguir:

km rodado	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km	6 km
Total cobrado em R$	2	4	6	8	10	12

b) O taxista João cobrou R$ 24,00 em uma corrida. Quantos quilômetros ele percorreu nessa corrida?

Resposta: 12 [illegible]

c) Existe um jeito que seu João pode calcular o valor de uma corrida para qualquer quilometragem. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta: não sei

7. Observe a sequência das figuras formadas por bolinhas.

a) Seguindo esta mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer a figura da 8ª posição?

Resposta: [illegible]

b) Imagine que seu colega errou o item (a) e a professora pediu para você explicar para ele como você encontrou o número da 8ª posição. Escreva abaixo a sua explicação.

Resposta: [illegible]

c) Tem um jeito de saber o número de bolinhas de qualquer posição. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta: não sei

Extrato do protocolo do estudante E46 da S5

Extrato do protocolo do estudante E35 da S7

Fonte: Dados da pesquisa

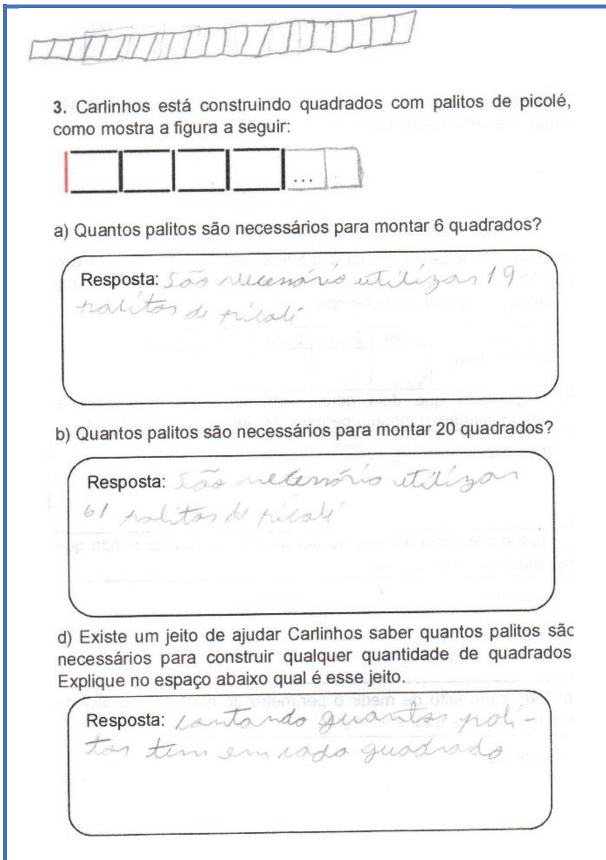
Conforme mencionamos anteriormente, a baixa incidência dessa categoria (2,4%) traduz um resultado relevante, uma vez que entendemos que os estudantes se empenharam para responder, em especial, o último item da situação, relativo à generalização.

3.2.1.2 Categoria G1C2 Por Contagem

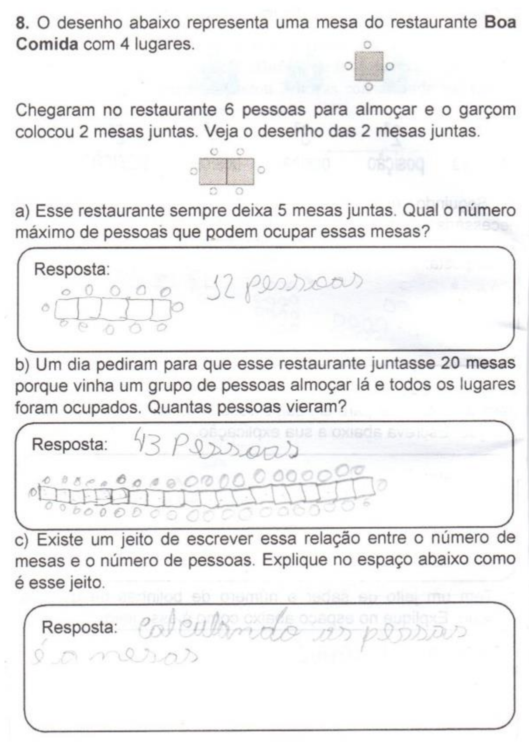
Na categoria G1C2, classificamos dois tipos de respostas dos estudantes, aquelas que foi possível perceber no registro o ato de contar, a partir do uso de desenhos, marcações e/ou símbolos; além daquelas em que o estudante escreveu, literalmente, na linguagem natural, que contou. As respostas pertencentes a essa categoria, são oriundas de duas situações: a S3 e a S8.

Vale ressaltar que os extratos de protocolos dizem respeito às situações que envolvem o conceito de função afim e apresentam ícones em seus enunciados, o que pode ter influenciado os estudantes a utilizar a estratégia de contagem. A seguir, apresentamos dois protocolos de estudantes referentes a estas situações, os quais servem de exemplos para a categoria G1C2.

Figura 3.9: Exemplos da categoria G1C2 referente as situações S3 e S8



Extrato do Protocolo do E33 da S3



Extrato do Protocolo do E23 da S8

Fonte: Dados da pesquisa

A fim de visualizar com maior nitidez as respostas dadas pelos estudantes optamos por transcrevê-las com possíveis correções de erros ortográficos, quando necessário, para melhor entendimento. O estudante E33 colocou como resposta para o último item da S3 o seguinte: "contando quantos palitos tem em cada quadrado". Para o último item da situação S8, o estudante E07 respondeu: "Desenhar 20 quadrados e colocar 2 pessoas em cada mesa".

Notamos, pelas respostas apresentadas no último item de cada situação, que nenhum dos estudantes generalizou a situação. Mais ainda, que eles se apoiaram no desenho (ícone) para chegar aos seus resultados. Embora eles não tenham alcançado a generalização, de acordo com Post; Behr e Lesh (1995), o desenho é uma das representações que envolve o raciocínio e o conhecimento algébrico, ou seja, o desenho pode ser um bom ponto de partida para desenvolve-los.

Ao analisar as respostas dos itens anteriores de cada situação (vide Figura 3.9), nota-se que, apesar de utilizarem a mesma estratégia, o estudante E33 acertou os itens (a) e (b) da S3, enquanto que o E23 acertou apenas o item (a) da S8. Isso nos leva a inferir que ambos entenderam as respectivas situações, entretanto, a contagem pode não ser a estratégia mais indicada, em especial frente a uma quantidade relativamente grande.

De acordo com Carraher, Schliemann e Martinez (2008) esse tipo de situação tem como objetivo estimular os estudantes a abandonar a abordagem iterativa e demorada (por contagem com auxílio do desenho) e procurar outra maneira de abordar o problema.

Isso nos permite afirmar, amparados nos estudos de Merino, Cañadas e Molina (2013), que o método de contagem utilizado (desenhos) leva o estudante a responder com sucesso quando se pede quantidades pequenas, mas dificilmente leva ao sucesso quando se trata de quantidades grandes. Dessa forma, mesmo respondendo de forma correta alguns dos itens que solicitam uma quantidade numérica específica, dificilmente esses estudantes chegariam à generalização requerida no último item de cada situação com uso dessa estratégia.

Vale destacar que alguns dos estudantes que apresentam respostas nessa categoria (G1C2), percebem a existência de uma relação entre as grandezas envolvidas, todavia, não conseguem expressá-las adequadamente (cf. Figura 3.9). Nossos resultados vão ao encontro aos resultados iniciais do estudo de Carraher, Schliemann e Martinez (2008), uma vez que, frente a esse tipo de situação, a maioria dos estudantes lançaram mão do desenho para resolvê-la e só chegaram à generalização sob intervenção.

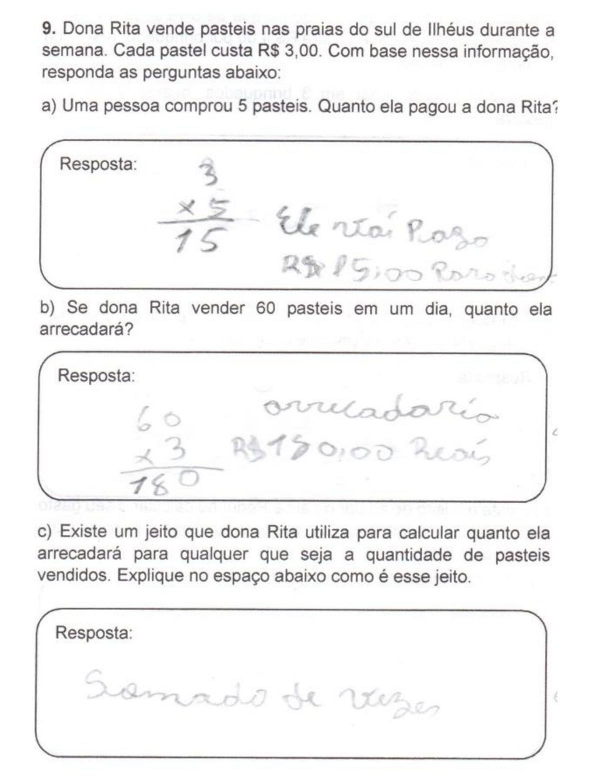
Em suma, a categoria se mostrou recorrente nas situações que envolvem função afim com ícones em seus enunciados. Embora não tenha levado à generalização, a contagem se mostrou um bom ponto de partida para desenvolver o raciocínio algébrico, em especial quando é possível a continuação do desenho para resolver um caso particular. Entretanto, quando se trata de quantidades distantes de uma quantidade dada, o processo de contagem se torna exaustivo e, portanto, inadequado para obter a generalização.

3.2.1.3 Categoria G1C3 Por Aritmética

Nessa categoria listamos 77 respostas nas quais os estudantes compreendem o que é pedido nos itens iniciais e os respondem de forma coerente lançando mão de operações aritméticas (adição e/ou multiplicação), porém, no último item, não apresentam nenhum indício de generalização. Kieran (2004) considera que os estudantes habituados a trabalhar no contexto aritmético não veem aspectos relacionais entre as operações e tende a centrar-se nos cálculos. Para esta autora, uma das formas de fazer a transição da aritmética para a álgebra é focar nas relações e não meramente no cálculo de respostas numéricas.

Como exemplo para esta categoria trouxemos os extratos de protocolos dos estudantes a seguir.

Figura 3.10: Exemplos de respostas na categoria G1C3


9. Dona Rita vende pasteis nas praias do sul de Ilhéus durante a semana. Cada pastel custa R$ 3,00. Com base nessa informação, responda as perguntas abaixo:

a) Uma pessoa comprou 5 pasteis. Quanto ela pagou a dona Rita?

Resposta: 3 × 5 = 15 Ele vai Pagar R$ 15,00

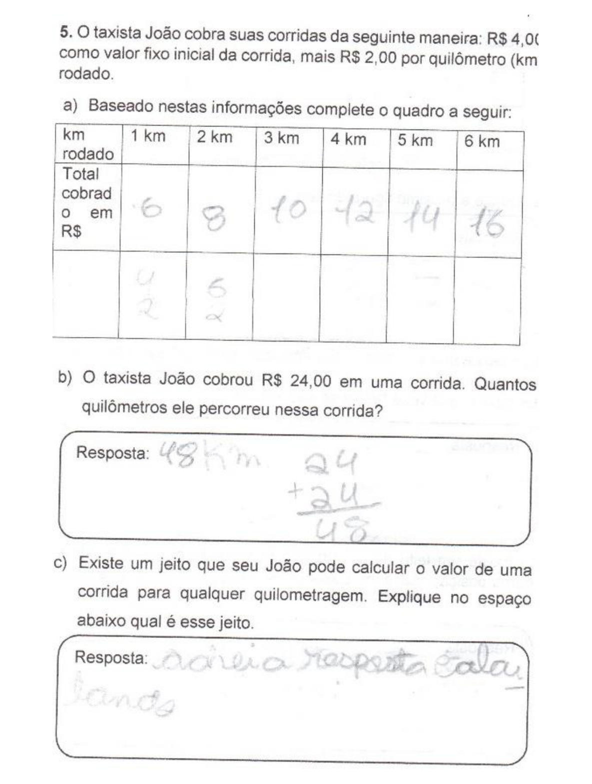
b) Se dona Rita vender 60 pasteis em um dia, quanto ela arrecadará?

Resposta: 60 × 3 = 180 arrecadaria R$ 180,00 Reais

c) Existe um jeito que dona Rita utiliza para calcular quanto ela arrecadará para qualquer que seja a quantidade de pasteis vendidos. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta: Somado de vezes

Extrato do Protocolo do E04 da S9


5. O taxista João cobra suas corridas da seguinte maneira: R$ 4,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por quilômetro (km rodado.

a) Baseado nestas informações complete o quadro a seguir:

km rodado	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km	6 km
Total cobrado em R$	6	8	10	12	14	16
	4 2	6 2				

b) O taxista João cobrou R$ 24,00 em uma corrida. Quantos quilômetros ele percorreu nessa corrida?

Resposta: 48 Km 24 + 24 = 48

c) Existe um jeito que seu João pode calcular o valor de uma corrida para qualquer quilometragem. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta: a cheia a resposta calando

Extrato do Protocolo do E41da S5

Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que as respostas registradas nos itens anteriores, tanto do estudante E04 quanto do estudante E41, estão de acordo ao que foi solicitado, conforme os extratos de protocolos apresentados na Figura 3.10. Para a resolução os estudantes apresentam as operações de adição e/ou multiplicação com representação algorítmica e, no último item, não generalizam, deixando explícito que operaram aritmeticamente. Transcrevemos as respostas do item (c) de cada um dos extratos, o E04 respondeu: "somando de vezes"; e o E41: " achei a resposta calculando".

É possível inferir que eles compreenderam a situação, com exceção da resposta do item (b) do extrato de protocolo do E41, pelo fato de resolver utilizando operações aritméticas de forma coerente. Esse fato é positivo na medida que para Carraher e Schliemann (2016b), as operações aritméticas são os primeiros exemplos de funções que os estudantes deparam na Matemática, que os autores a denominam como a primeira ideia poderosa. Desse modo, situações semelhantes poderiam ser indicadas para o início do desenvolvimento do raciocínio algébrico, em especial o funcional.

3.2.2 Análise do G2 Generaliza

No segundo grupo, denominado por "G2 Generaliza", categorizamos as respostas que apresentam algum tipo de generalização, e contou com duas categorias: (i) Generalização Aritmética; e (ii) Generalização Algábrica. A categoria (i) Generalização Aritmética contempla três subcategorias: (G2C1) Generalização por Multiplicação cuja resposta apresenta operações da estrutura multiplicativa; (G2C2) Generalização por Adição oriunda de resposta baseada em operações da estrutura aditiva; (G2C3) Generalização por Recursividade advinda de resposta que se utiliza dessa estratégia.

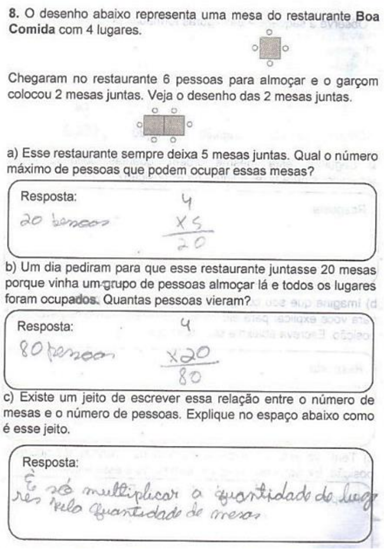
No que concerne a categoria (ii) Generalização Algébrica (G2C4), esta apresenta resposta na qual é possível observar que o estudante consegue revelar a função, expressando sua competência de generalização, embora não de maneira formal.

3.2.2.1 Categoria Generalização Aritmética G2C1 Por Multiplicação

A categoria G2C1 Generalização por Multiplicação diz respeito, particularmente, à três situações que se referem a função afim. Em todas as respostas dessa categoria houve generalização, contudo é possível observar que os estudantes não levaram em conta parte fixa (b) da função afim ($f(x) = ax + b$). Suas respostas estão alicerçadas em um raciocínio proporcional (BLANTON *et al.*, 2015), ou seja, eles compreendem a relação funcional entre as quantidades, mas de forma incompleta. Desse modo, é possível afirmar que houve generalização embora não levasse ao sucesso.

Outro destaque para essa categoria é que as respostas, encontradas nos protocolos, os estudantes as registraram na linguagem materna. Para ilustrar essa categoria, trouxemos três extratos de protocolos que traduzem o que acabamos de afirmar (vide Figura 3.11).

Figura 3.11: Exemplos da categoria G3C1 Generalização por Multiplicação



8. O desenho abaixo representa uma mesa do restaurante **Boa Comida** com 4 lugares.

Chegaram no restaurante 6 pessoas para almoçar e o garçom colocou 2 mesas juntas. Veja o desenho das 2 mesas juntas.

a) Esse restaurante sempre deixa 5 mesas juntas. Qual o número máximo de pessoas que podem ocupar essas mesas?

Resposta: 20 pessoas $4 \times 5 = 20$

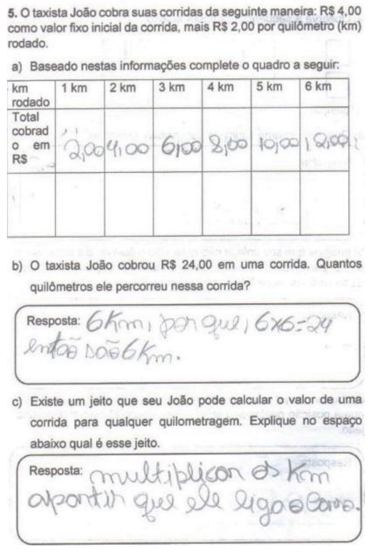
b) Um dia pediram para que esse restaurante juntasse 20 mesas porque vinha um grupo de pessoas almoçar lá e todos os lugares foram ocupados. Quantas pessoas vieram?

Resposta: 80 pessoas $4 \times 20 = 80$

c) Existe um jeito de escrever essa relação entre o número de mesas e o número de pessoas. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta: É só multiplicar a quantidade de lugares pela quantidade de mesas

Extrato do Protocolo E03 da S8



5. O taxista João cobra suas corridas da seguinte maneira: R$ 4,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por quilômetro (km) rodado.

a) Baseado nestas informações complete o quadro a seguir:

km rodado	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km	6 km
Total cobrado em R$	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00

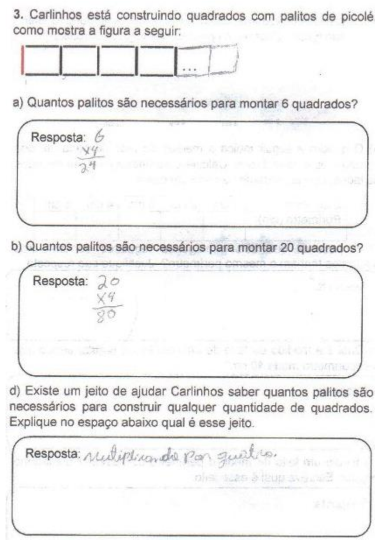
b) O taxista João cobrou R$ 24,00 em uma corrida. Quantos quilômetros ele percorreu nessa corrida?

Resposta: 6km, porque, 6x6=24 então são 6km.

c) Existe um jeito que seu João pode calcular o valor de uma corrida para qualquer quilometragem. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta: multiplicar os km apartir que ele ligo o carro.

Extrato do Protocolo E07 da S5



3. Carlinhos está construindo quadrados com palitos de picolé como mostra a figura a seguir:

a) Quantos palitos são necessários para montar 6 quadrados?

Resposta: $6 \times 4 = 24$

b) Quantos palitos são necessários para montar 20 quadrados?

Resposta: $20 \times 4 = 80$

d) Existe um jeito de ajudar Carlinhos saber quantos palitos são necessários para construir qualquer quantidade de quadrados. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta: multiplicando por quatro.

Extrato do Protocolo E38 da S3

Fonte: Dados da pesquisa

Trouxemos um extrato de protocolo de cada uma das três situações que foram contempladas nessa categoria. Com a finalidade de visualizar as respostas (vide Figura 3.11) optamos por transcrevê-las para analisá-las. O estudante E3 colocou como resposta do item (c) da S8 o seguinte: "É só multiplicar a quantidade de lugares pela quantidade de mesas".

A resposta registrada pelo estudante E3 deixa explícito que ele faz a relação entre as quantidades envolvidas (de lugares e de mesas). Contudo, essa relação é feita tratando as mesas separadamente, relacionando essas quantidades como uma função linear ($f(x) = 4x$), desprezando o que a situação solicita, ou seja, a quantidade de lugares quando as mesas estejam juntas. Esse problema com mesas separadas foi abordado e discutido nos estudos de Carraher, Martinez e Schliemann (2008), a fim de dar segmento ao problema com mesas juntas, sendo que este último foi considerado mais difícil para as crianças. A generalização foi alcançada por meio da intervenção de instrutores e, ao observar os relatos, as crianças tiveram dificuldade em compreender a mudança do número máximo de pessoas a se sentar em duas mesas separadas e juntas (8 e 6, respectivamente).

O estudante E7 respondeu da seguinte forma o item (c) da S5: “multiplicar os Km a partir que ele liga o carro”; e o estudante E38 registrou a resposta do item (c) da S3 desse modo: “multiplicando por quatro”. A resposta registrada no extrato de protocolo do Estudante E7 também traduz o desprezo do valor inicial da bandeirada, considerando tão somente o valor total relativo aos quilômetros rodados, como podemos visualizar nos cálculos realizados no item (a).

De forma semelhante à resposta dos extratos anteriores, temos a resposta dada pelo estudante E38 para a situação S3, que considera os quadrados separadamente, cuja formação necessita de quatro palitos, desprezando a figura apresentada na situação.

De modo geral, é possível afirmar que os estudantes compreendem a possibilidade de generalização, contudo eles ainda estão presos ao raciocínio proporcional (BLANTON *et al.*, 2015). Uma possível justificativa para esse tipo de comportamento é que a maioria das situações da estrutura multiplicativa trabalhada com estudantes do Ensino Fundamental Anos Iniciais, são de relação quaternárias, do eixo de proporção simples, da classe um para muitos (VERGNAUD, 2009).

Este resultado que encontramos está próximo ao resultado obtido por Teixeira (2016) em seu pós-teste após uma intervenção que visava investigar o raciocínio funcional introdutório dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, apoiado em uma intervenção de ensino pautada em situações multiplicativas e sequenciais. Seus resultados revelam que os estudantes conseguem generalizar essa situação, contudo não levam em conta a parte fixa (2) dessa função afim ($f(x) = 2x + 2$).

Em resumo, ao analisarmos essas três situações de função afim, podemos destacar que os estudantes conseguem fazer a relação entre as variáveis, (mesas e pessoas; quilômetros rodados e valor a pagar) e, de maneira ainda equivocada, são capazes de fazer generalização a partir da multiplicação. Esse resultado sugere que situações de proporcionalidade, de fato, podem ser uma boa alavanca para o desenvolvimento do raciocínio funcional dos estudantes.

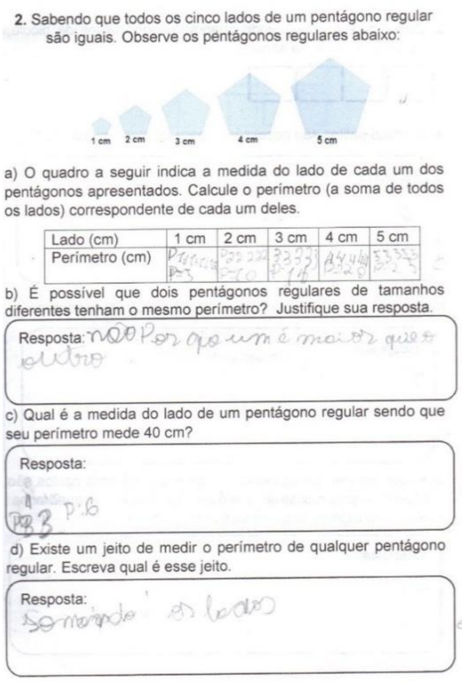
3.2.2.2 Categoria Generalização Aritmética G2C2 Generalização por Adição

Nessa categoria encontram-se as respostas dos estudantes que lançaram mão da operação de adição na tentativa de generalizar quaisquer das situações. Ao analisar os itens iniciais das situações que apresentaram respostas na categoria G2C2, percebemos o uso da adição repetida de quantidades para obter um resultado.

Para Santos, Magina e Merlini (2013), a concepção do currículo que norteia a ação pedagógica do professor, com a ideia de uma sequência lógica de conteúdos, faz com que a multiplicação seja apresentada ao estudante após o ensino da operação de adição. Nesse caso, a operação multiplicação é introduzida por meio da adição de parcelas iguais, cujos invariantes são distintos. Na adição o invariante é o parte-todo e na multiplicação o invariante é a relação fixa. Isso nos reporta mais uma vez, a Carraher e Schliemann (2016b), ao afirmarem que operações aritméticas são os primeiros exemplos de funções que os estudantes encontram na Matemática, uma das suas ideias poderosas.

Um número expressivo de respostas classificadas na G2C2 nos chamou a atenção, em especial as da situação S2 (foram 21 respostas), sobre a qual discutimos, algumas peculiaridades. A primeira delas é que a S2 apresenta em seu enunciado a definição de perímetro de um pentágono regular como a soma (das medidas) de todos os lados, sendo esta uma definição válida para qualquer polígono. Isso posto, inferimos que essa escrita no enunciado influenciou fortemente nas respostas dadas pelos estudantes no item referente a generalização. Para melhor visualizar, trouxemos extratos de protocolos de dois estudantes em situações diferentes para exemplificar G2C2 na Figura 3.12.

Figura 3.12: Exemplos de respostas da categoria G2C2


2. Sabendo que todos os cinco lados de um pentágono regular são iguais. Observe os pentágonos regulares abaixo:

a) O quadro a seguir indica a medida do lado de cada um dos pentágonos apresentados. Calcule o perímetro (a soma de todos os lados) correspondente de cada um deles.

Lado (cm)	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
Perímetro (cm)	P=5	P=10	P=15	P=20	P=25

b) É possível que dois pentágonos regulares de tamanhos diferentes tenham o mesmo perímetro? Justifique sua resposta.

Resposta: não Por que um é maior que o outro

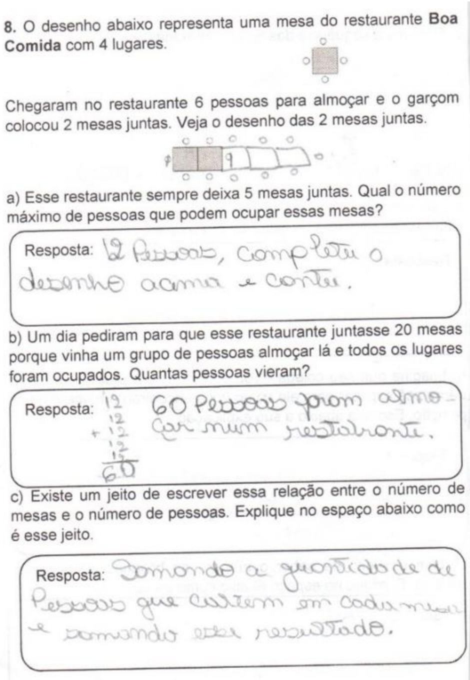
c) Qual é a medida do lado de um pentágono regular sendo que seu perímetro mede 40 cm?

Resposta:

d) Existe um jeito de medir o perímetro de qualquer pentágono regular. Escreva qual é esse jeito.

Resposta: somando os lados

Extrato do protocolo do E08 da S2


8. O desenho abaixo representa uma mesa do restaurante **Boa Comida** com 4 lugares.

Chegaram no restaurante 6 pessoas para almoçar e o garçom colocou 2 mesas juntas. Veja o desenho das 2 mesas juntas.

a) Esse restaurante sempre deixa 5 mesas juntas. Qual o número máximo de pessoas que podem ocupar essas mesas?

Resposta: 12 Pessoas, completa o desenho acima e conta.

b) Um dia pediram para que esse restaurante juntasse 20 mesas porque vinha um grupo de pessoas almoçar lá e todos os lugares foram ocupados. Quantas pessoas vieram?

Resposta: 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60
60 Pessoas foram almoçar num restaurante.

c) Existe um jeito de escrever essa relação entre o número de mesas e o número de pessoas. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta: Somando a quantidade de Pessoas que cabem em cada mesa e somando esse resultado.

Extrato do protocolo do E02 da S8

Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que o estudante E08 escreve uma versão resumida da definição de perímetro em sua resposta ao último item da situação S2: "somando os lados". Vale notar, também, que o referido estudante, assim como os demais com respostas nessa categoria, utilizou a estratégia da adição de parcelas iguais para preencher o quadro do item (a). De todo modo, podemos inferir que como a resposta registrada no item (d) não traz medida específica, houve indícios de uma generalização aritmética aditiva.

Diferentemente do que ocorreu na situação S2, tivemos respostas com a estratégia de adição sem nenhum tipo de interferência do enunciado. Esse é o caso da situação S8 na qual o estudante E02 no seu extrato de protocolo escreveu "somando a quantidade de pessoas que cabem em cada mesa e somando esse resultado", no último item. Nesse caso, o referido estudante deixa explícito suas estratégias para resolução dos itens (a) e (b), porém considera a resposta do item (a) como as parcelas para calcular a reposta do item (b). Ele acerta o item (a) a partir da contagem (desenha e conta a quantidade de pessoas) e tenta replicar o raciocínio no item (b) com a estratégia da adição de parcelas repetidas. Para Carraher, Martinez e Schliemann (2008), o problema com mesas juntas é considerado mais difícil para as crianças, uma vez que não permite o uso da proporcionalidade direta.

O uso da operação de adição foi tão recorrente quanto o uso da operação de multiplicação, no que diz respeito à generalização. Esse fato, mais uma vez indica que as operações aritméticas podem ser uma boa ferramenta para desenvolver o raciocínio funcional dos estudantes.

3.2.2.3 Categoria Generalização Aritmética G2C3 Generalização por Recursividade

Como vimos no Capítulo I, acerca das conceitualizações das funções, podemos definir algumas funções algebricamente (quando o domínio são números naturais) de duas formas distintas: a partir de uma expressão fechada ou de uma expressão recursiva. Por exemplo, a situação S7 pode ser pensada, independentemente, pelas expressões:

$$(1) \quad f(x) = 2x + 1,\ \forall\, x \in \mathbb{N}^* \quad \text{(expressão fechada),}$$

$$(2) \quad \begin{cases} f(1) = 3 \\ f(n) = f(n-1) + 2 \end{cases},\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{(expressão recursiva).}$$

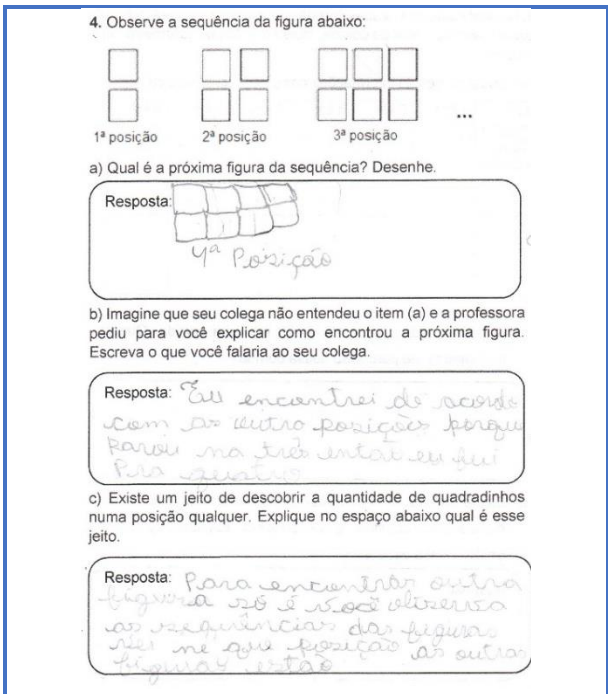
Na expressão (2), diferentemente da expressão (1), verifica-se a necessidade de uma condição inicial pela qual se obtém todos os demais termos. Para Merino, Cañadas e Molina (2013), bem como Vale e Pimentel (2011), encontrar um elemento a partir de outros já conhecidos, de forma que sejam possíveis obter novos casos particulares, conduzem à generalização, ou seja, a expressão de um termo geral. De acordo com Vale e Pimentel (2011, p.4), “o processo de generalização é condicionado por esse modo de ver, relacionando cada termo com o(s) anterior(es) ou com a ordem que ocupa na sequência”.

Note que para quantidades distantes da condição inicial na expressão recursiva (2), por exemplo $n = 50$, calcular $f(n)$ é exaustivo, pois o $f(50)$ precisa do $f(49)$ que por sua vez precisa do $f(48)$ e, assim, sucessivamente até o $f(2) = f(1) + 2 = 5$ onde se tem $f(1) = 3$. Nesse caso, forma-se a sequência (3, 5, 7, ..., 101, ...), no qual 101 ocupa a 50ª posição, ou seja, $f(50) = 101$. Porém, com a expressão fechada (1), para $x = 50$, tem-se imediatamente $f(50) = 2 \cdot 50 + 1 = 101$.

Na categoria G2C3 foram classificadas as respostas em que os estudantes apresentaram algum tipo de raciocínio recursivo no último item das situações, porém, mais uma vez, também consideramos o que foi respondido em itens anteriores. Vale ressaltar que, em consonância com Carraher, Martinez e Schliemann (2008), usamos o termo recursivo como um processo executado repetidamente, diferentemente do significado atrelado à lógica de programação, no qual usa-se uma condição de repetição para iniciar um algoritmo.

Para exemplificar essa categoria trouxemos recortes de protocolos de alguns estudantes. Para efeito, apresentamos inicialmente na, Figura 3.13, os protocolos relacionados as situações S4 e S7, as quais têm semelhanças quanto ao uso de ícones em seus enunciados.

Figura 3.13: Exemplos da categoria G2C3 relacionados às situações S4 e S57


4. Observe a sequência da figura abaixo:

1ª posição 2ª posição 3ª posição ...

a) Qual é a próxima figura da sequência? Desenhe.

Resposta: 4ª Posição

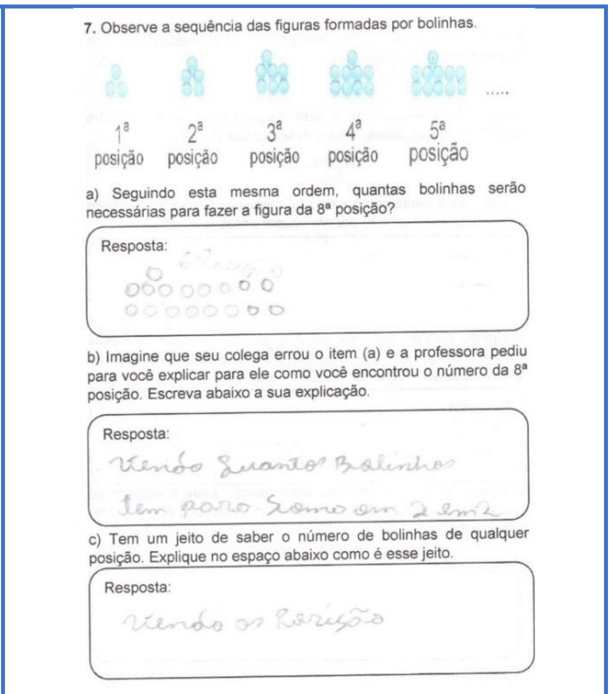
b) Imagine que seu colega não entendeu o item (a) e a professora pediu para você explicar como encontrou a próxima figura. Escreva o que você falaria ao seu colega.

Resposta: Eu encontrei de acordo com as outras posições porque parou na três então eu fui pra quatro

c) Existe um jeito de descobrir a quantidade de quadradinhos numa posição qualquer. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta: Para encontrar outra figura só é você observar as sequências das figuras e ver que posição as outras figuras estão

Extrato do protocolo do E27 da S4


7. Observe a sequência das figuras formadas por bolinhas.

1ª posição 2ª posição 3ª posição 4ª posição 5ª posição .....

a) Seguindo esta mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer a figura da 8ª posição?

Resposta:

b) Imagine que seu colega errou o item (a) e a professora pediu para você explicar para ele como você encontrou o número da 8ª posição. Escreva abaixo a sua explicação.

Resposta: Vendo quantos bolinhas tem para somar em 2 em 2

c) Tem um jeito de saber o número de bolinhas de qualquer posição. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta: Vendo as posições

Extrato do protocolo do E04 da S7

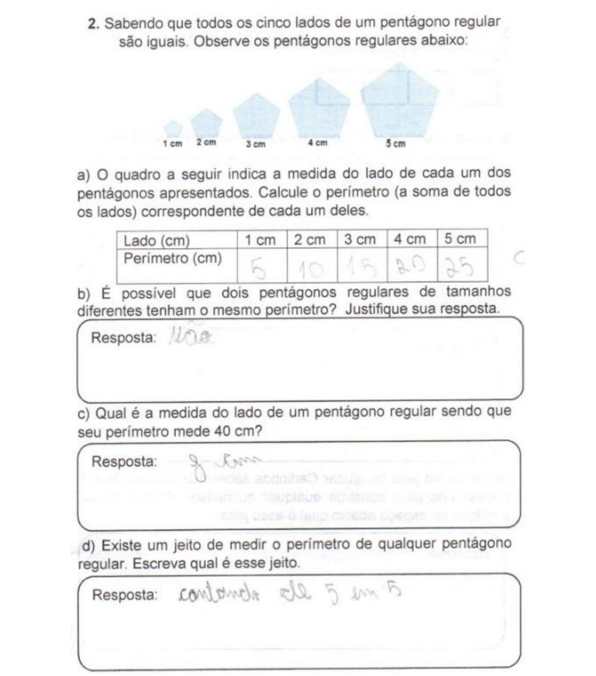
Fonte: Dados da pesquisa

Frente a situação S4, no extrato do protocolo do estudante E27 está registrado que "para encontrar outra figura só é você observar as s equências das figuras (as anteriores) e ver em que posição as outras figuras estão". Nessa proposta o estudante não deixa explícito o que deve fazer com a figura anterior, porém, observa que há essa relação de dependência. Este é um raciocínio recursivo de generalização, o qual não é eficiente quando se trata de quantidades grandes. Para Radford (2006), esse tipo de raciocínio está associado a generalização aritmética que, apesar de mais habitual, não permite descrever o que se passa com um termo de qualquer ordem.

O estudante E04 respondeu ao último item da situação S7: "vendo as posições". Diante de tal resposta, não é possível dizer se o mesmo consegue generalizar a situação. Todavia, ao analisar o item (b), notamos que ele utiliza o raciocínio recursivo de forma generalizada, pois, apesar da pergunta solicitar uma posição específica da sequência (a 8ª posição), o estudante traz uma conclusão não pontual, ao afirmar que vendo quantas bolinhas tem para somar em 2 em 2". Uma expressão algébrica para o que sugere o E04 no item (b), segue a expressão (2) apresentada no início dessa subseção, que é dado a condição inicial $f(1) = 3$ e, para quaisquer termos posteriores, basta adicionar 2 ao anterior, obtendo a expressão geral $f(n) = f(n-1) + 2$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

De acordo com Carraher, Martinez e Schliemann (2008), diferentes maneiras de visualizar um padrão são equivalentes a diferentes conceitualizações que podem gerar diferentes expressões algébricas. Como pode ser observado, até então nenhum estudante lançou mão da linguagem simbólica da álgebra, a qual, segundo Merino, Cañadas e Molina (2013) exige maior abstração. Ainda para estes autores, é comum o uso da representação verbal a partir da linguagem natural para se referir aos conceitos matemáticos e procedimentos. Isto pode, mais uma vez, ser observado nos extratos dos protocolos dos estudantes a seguir (vide Figura 3.14).

Figura 3.14: Exemplos da categoria G2C3 relacionados às situações S2 e S5



2. Sabendo que todos os cinco lados de um pentágono regular são iguais. Observe os pentágonos regulares abaixo:

1 cm 2 cm 3 cm 4 cm 5 cm

a) O quadro a seguir indica a medida do lado de cada um dos pentágonos apresentados. Calcule o perímetro (a soma de todos os lados) correspondente de cada um deles.

Lado (cm)	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
Perímetro (cm)	5	10	15	20	25

b) É possível que dois pentágonos regulares de tamanhos diferentes tenham o mesmo perímetro? Justifique sua resposta.

Resposta: Não

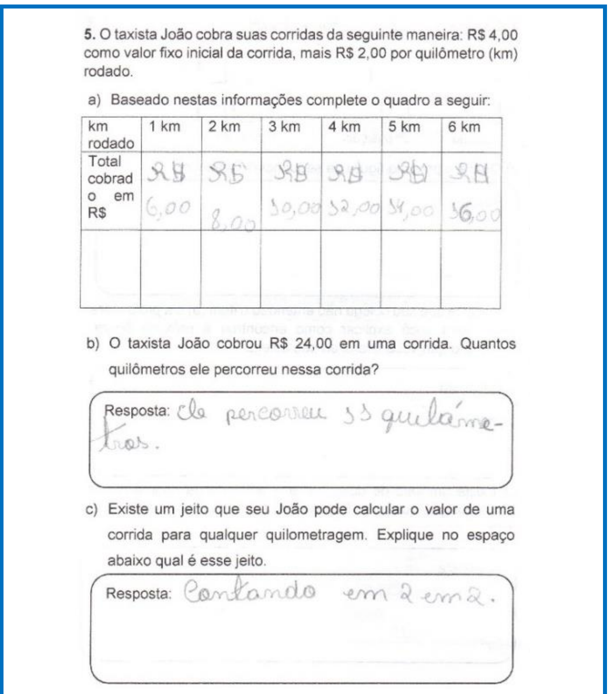
c) Qual é a medida do lado de um pentágono regular sendo que seu perímetro mede 40 cm?

Resposta: 8 cm

d) Existe um jeito de medir o perímetro de qualquer pentágono regular. Escreva qual é esse jeito.

Resposta: contando de 5 em 5

Extrato do protocolo do E17 da S2



5. O taxista João cobra suas corridas da seguinte maneira: R$ 4,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por quilômetro (km) rodado.

a) Baseado nestas informações complete o quadro a seguir:

km rodado	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km	6 km
Total cobrado em R$	R$ 6,00	R$ 8,00	R$ 10,00	R$ 12,00	R$ 14,00	R$ 16,00

b) O taxista João cobrou R$ 24,00 em uma corrida. Quantos quilômetros ele percorreu nessa corrida?

Resposta: ele percorreu 11 quilômetros.

c) Existe um jeito que seu João pode calcular o valor de uma corrida para qualquer quilometragem. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta: Contando em 2 em 2.

Extrato do protocolo do E37 da S5

Fonte: Dados da pesquisa

Para melhor visualização transcrevemos as respostas dos estudantes dadas ao último item de cada situação. Na situação S2, o estudante E17 escreveu: “contando de 5 em 5”. De forma análoga, na situação S5, o E37 respondeu: “contando em 2 em 2”.

Vale ressaltar que as situações apresentadas na Figura 3.14 não satisfazem as condições apresentadas no início dessa subseção para a expressão recursiva. No capítulo II detalhamos o domínio das funções associadas a estas situações e, portanto, não podemos tratá-las como sequências.

Ao contar de 5 em 5, como sugeriu o estudante E17, não generaliza a situação, contudo, ele apresenta um raciocínio de generalização a partir da disposição dos dados da tabela apresentados no item (a), em que só aparecem números naturais iniciando do número um e de forma consecutiva. De acordo com Carraher e Schliemann (2007) quando os estudantes resolvem situações nas quais os casos são consecutivos (o que acontece no quadro do item (a) da S2), eles tendem a analisar os dados recursivamente, focando sua atenção em cada uma das variáveis separadamente e têm maior dificuldade em identificar a relação entre elas. Inferimos que se os dados do quadro estivessem desordenados, de forma a não permitir o uso do raciocínio recursivo, é possível que teríamos respostas em outra categoria, e essa mais adequada à situação.

Nesse caso, o estudante E17 não leva em consideração as grandezas envolvidas, uma vez que as medidas dos lados dos pentágonos podem ser representadas por números reais, em especial as frações e decimais. Portanto, o raciocínio recursivo, para essa situação, não o levou a generalização considerando o domínio dos números reais, uma vez que números consecutivos são exclusivos dos conjuntos dos números inteiros. Portanto, não é possível falar de número consecutivo no conjunto dos números reais.

O mesmo ocorreu com o estudante E37. Verificamos que ele generaliza os dados apresentados no quadro ao responder "contando de 2 em 2" e isso configura que o estudante considera apenas números naturais para a quantidade de quilômetros percorridos. Desse modo, o estudante generaliza a situação.

Essa categoria, Generalização Aritmética por Recursividade, foi a mais recorrente dentro do grupo de Generalização, 79 do total. Embora a apresentação de duas situações de nosso instrumento terem levado a esse tipo de generalização, somente seis estudantes responderam desse modo. A recursividade pode ser um bom início, contudo é uma forma não tão eficiente se estamos lidando com quantidades maiores daquelas já conhecidas. Esse tipo de generalização demanda cálculos exaustivos, o que pode incorrer ao erro.

Passamos a discorrer, na subseção a seguir, sobre a última categoria do nosso estudo a qual trata desse quesito.

3.2.2.4 Categoria Generalização Algébrica G2C4

Nessa categoria encontram-se todas as respostas dos estudantes em que foi possível identificar o raciocínio funcional na compreensão da relação entre as grandezas envolvidas nas respectivas situações, quer seja na linguagem natural ou simbólica. Para Blanton *et al*. (2015), o pensamento funcional – descrito como uma das cinco grandes ideias de generalização pelos autores – envolve generalizar relações entre quantidades covariáveis, bem como representar e raciocinar com essas relações por meio da linguagem natural ou notação algébrica (simbólica).

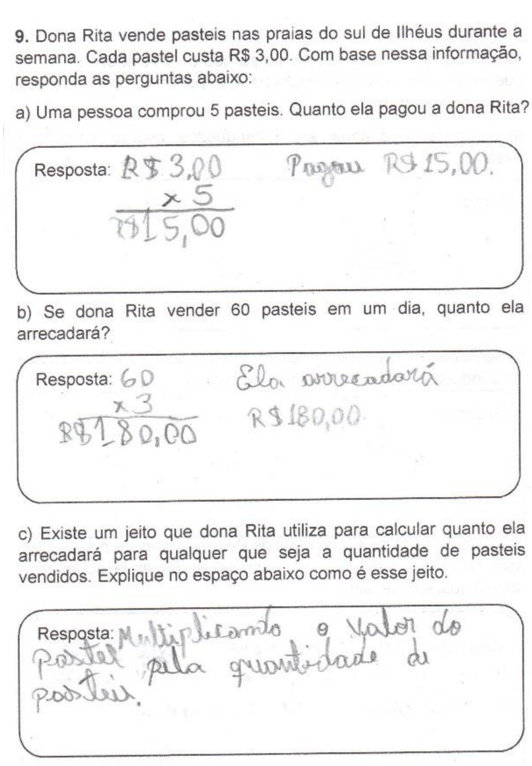
Vale lembrar que entendemos por raciocínio funcional a capacidade dos estudantes em estabelecer a relação de dependência entre duas ou mais grandezas a partir das generalizações de padrões numéricos. De acordo com Kieran (1995, 2004), esta é uma das muitas formas do pensamento algébrico.

Pelos dados da Tabela 3.4, classificamos 34 respostas na categoria G2C4, sendo estas, presentes em cinco das oito situações, a saber, a S5, S8, S9 e S10. Destas, as duas últimas apresentaram maior quantidades (29 respostas, sendo 14 da S9 e 15 da S10). Vale notar que ambas as situações (S9 e S10) tratam-se de funções lineares, as quais propiciam o uso do raciocínio proporcional e, consequentemente, o raciocínio funcional (VERGNAUD, 2009).

Vale ressaltar que todos os estudantes com respostas na categoria G2C4 fizeram uso da linguagem natural para expressar a generalização da respectiva situação. Além disso, pelos itens anteriores, foi observado o uso da estrutura multiplicativa e/ou aditiva como estratégia para resolução de casos específicos. Diante disso, nossos resultados estão de acordo com Vergnaud (2009) quando afirma que as noções de função, bem como as noções de relação e proporção podem (e devem) ser trabalhadas desde ensino elementar, permitindo sua expansão por meio de um conjunto de situações que deem significado ao conceito.

Para exemplificar o que acabamos de afirmar, trouxemos os extratos dos protocolos dos estudantes a seguir, expostos na Figura 3.15.

Figura 3.15: Exemplos da Categoria G2C4



9. Dona Rita vende pasteis nas praias do sul de Ilhéus durante a semana. Cada pastel custa R$ 3,00. Com base nessa informação, responda as perguntas abaixo:

a) Uma pessoa comprou 5 pasteis. Quanto ela pagou a dona Rita?

Resposta: R$ 3,00 x 5 R$15,00 Pagou R$ 15,00.

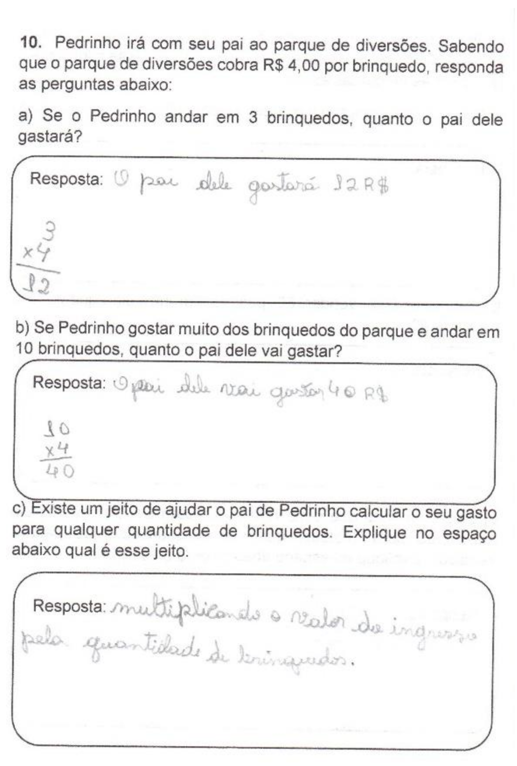
b) Se dona Rita vender 60 pasteis em um dia, quanto ela arrecadará?

Resposta: 60 x 3 R$180,00 Ela arrecadará R$180,00

c) Existe um jeito que dona Rita utiliza para calcular quanto ela arrecadará para qualquer que seja a quantidade de pasteis vendidos. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta: Multiplicando o valor do pastel pela quantidade de pasteis.

Extrato do protocolo do E48 da S9



10. Pedrinho irá com seu pai ao parque de diversões. Sabendo que o parque de diversões cobra R$ 4,00 por brinquedo, responda as perguntas abaixo:

a) Se o Pedrinho andar em 3 brinquedos, quanto o pai dele gastará?

Resposta: O pai dele gastará 12 R$ 3 x4 12

b) Se Pedrinho gostar muito dos brinquedos do parque e andar em 10 brinquedos, quanto o pai dele vai gastar?

Resposta: O pai dele vai gastar 40 R$ 10 x4 40

c) Existe um jeito de ajudar o pai de Pedrinho calcular o seu gasto para qualquer quantidade de brinquedos. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta: multiplicando o valor do ingresso pela quantidade de brinquedos.

Extrato do protocolo do E39 da S10

Fonte: Dados da pesquisa

Assim como nas demais categorias, transcrevemos as respostas dadas ao último item de cada situação para analisarmos. O estudante E48 respondeu: “Multiplicando o valor do pastel pela quantidade de pastéis”. Já o E39 escreveu como resposta: “multiplicando o valor do ingresso pela quantidade de brinquedos”.

Note que o estudante E48 consegue expressar a relação de dependência entre a quantidade de pastéis e seu respectivo valor ao afirmar que basta multiplicar uma grandeza com a outra para obter uma solução geral. É possível observar nas respostas dos itens anteriores, o domínio do raciocínio proporcional a partir de estruturas multiplicativas, nesse caso com o uso do algoritmo de multiplicação. Apesar de os estudantes com respostas nessa categoria utilizarem, majoritariamente, a estrutura multiplicativa, alguns fizeram uso de estruturas aditivas, levando-o, do mesmo modo, a generalizar a situação.

Simbolicamente, a resposta do E48 na situação S9 pode ser descrita pela função $f(x) = 3x$, sendo x a quantidade de pastéis e 3 o valor de cada pastel. Tal resposta está ligeiramente relacionada a terceira ideia poderosa de Carraher e Schliemann (2016b) ao afirmarem que um dos papéis da função é a união entre aritmética e álgebra (além da geometria), visto que a natureza abstrata desse conceito exige que este seja representado de diversas formas, sendo a linguagem natural uma delas.

O mesmo podemos conferir nas respostas da situação S10, classificadas na categoria G2C4, conforme protocolo do estudante E39 (ver Figura 3.15). Nesse caso, os estudantes, assim como o E39, conseguiram identificar a relação de dependência entre as grandezas envolvidas na situação S10. Ao afirmar que basta multiplicar o valor do ingresso (valor cobrado por cada brinquedo, nesse caso, R$ 4,00) pela quantidade de brinquedos usados (quantidade variável), é possível inferirmos que, nessa situação, o estudante demostra ter domínio do raciocínio funcional. Sua resposta, em notação algébrica, pode ser dada pela função $f(x) = 4x$, onde x representa a quantidade variável de brinquedos.

Em síntese, temos alguns pontos relevantes a respeito dessa categoria. O primeiro deles é que os estudantes que conseguiram expressar o que denominamos por Generalização Algébrica, fizeram a partir da linguagem natural. Outro ponto é que ela foi encontrada, majoritariamente, em situações que diziam respeito à função linear (29 respostas), e somente cinco respostas em situações de função afim, a saber quatro na S5 e uma na S8. Isso nos leva a confirmar que situações de proporcionalidade são providas de potencial para o início do desenvolvimento do raciocínio algébrico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa seção apresentamos nossas conclusões e considerações acerca dos resultados encontrados nesse estudo. Inicialmente, relembramos o nosso objetivo principal, a saber, **investigar o desempenho e a competência de generalização que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional**.

A partir do objetivo supracitado tivemos como interesse responder à seguinte questão de pesquisa:

Qual desempenho e a competência de generalização que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional?

Para melhor organização das nossas considerações finais e conclusões, dividimos essa seção em quatro partes: (1) a trajetória percorrida; (2) uma síntese dos resultados encontrados; (3) nossas respostas à questão de pesquisa; (4) e nossas sugestões de trabalhos futuros acerca do tema.

TRAJETÓRIA PERCORRIDA

Para atingir o objetivo dessa dissertação e responder à questão de pesquisa percorri uma longa trajetória que descrevo a seguir.

Na introdução, foi apresentada nossa motivação para o desenvolvimento do tema, sobre a qual destaco a importância do Grupo de Pesquisa RePARe por permitir maior contato com pesquisadores que tratam da *Early Algebra*. Nesse momento, foi apresentado a problemática, objetivo e minha questão de pesquisa.

Em seguida, no Capítulo I, abordamos o conceito de Função e raciocínio funcional, sob alguns aspectos. Dessa forma, um dos aspectos descritos foi sobre o conceito de função na Matemática. Nesse caso, trouxemos um breve histórico desse objeto matemático, seguido de definições atuais, em particular para função afim e linear. Como segundo aspecto, para entender como este conteúdo é abordado nos anos iniciais no atual sistema de ensino brasileiro, decidimos por discutir sobre dois documentos norteadores da educação básica: os PCN (BRASIL, 1997, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2017). Por fim, abordamos sobre o raciocínio funcional sob o ponto de vista da Educação Matemática. Nesse momento, apresentamos nosso aporte teórico iniciado com a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, no que tange aos estudos sobre a Estrutura Multiplicativa e seguido da *Early Algebra*, tendo como principais teóricos Blanton, Kaput, Radfor, Carraher e Schliemann.

Com base em nossos aportes teóricos, e não esquecendo nossos objetivos, definimos a metodologia do estudo, o qual se configurou como um estudo diagnóstico a partir de uma pesquisa descritiva, a qual Prodanov e Freitas (2013, p. 52) define como aquela em que "o pesquisador apenas registra e descreve os fatos observados sem interferir neles". Para tanto, elaboramos e aplicamos um teste em três turmas de 6º ano de uma escola municipal do sul da Bahia. Todos os detalhes sobre esses procedimentos metodológicos foram descritos no Capítulo II.

De posse dos dados coletados a partir do instrumento diagnóstico, passamos às etapas de análises descritas no Capítulo III. Inicialmente foram realizadas análises com foco quantitativo, ou seja, sobre os desempenhos dos estudantes frente às situações do teste. Em seguida foram criadas categorias para análises com foco qualitativo, de forma a investigar a competência de generalização dos estudantes.

Diante dos resultados encontrados a partir da nossa análise, a qual foi relevante para fomentar respostas a nossa questão de pesquisa, apresentamos, a seguir, uma síntese dos principais resultados descritos no capítulo III.

SÍNTESE DOS RESULTADOS

Como dito anteriormente, no capítulo III, foram descritos os resultados obtidos a partir da análise dos dados sob duas perspectivas, quais sejam, o desempenho e a competência de generalização dos estudantes. A princípio, fazemos uma síntese dos resultados que se referem ao desempenho dos estudantes.

No que tange ao desempenho geral, consideramos razoável se olharmos para a média de acerto de 54,9%. Contudo, tal desempenho não foi homogêneo, tendo em vista que tivemos itens que variaram de 18,5% a 88,9%, uma diferença significativa. Para entender melhor essa diferença, distribuímos os itens das situações em quatro grupos e passamos a analisar comparativamente o desempenho intra e inter grupos.

A partir da análise dos dados do grupo composto pelas situações envolvendo funções lineares (FL) destacamos que os estudantes dominam situações de "um para muitos", em especial quando lhes é solicitado valores próximos. Embora seu desempenho seja menor quando os valores aumentam, ainda assim eles chegam a patamares acima de 63%.

No que se refere ao grupo que envolvem as funções afins (FA), inferimos que, apesar de apresentar níveis de baixo desempenho, variando de 18,5% a 50% em quatro dos cinco itens do grupo, é possível admitir que esse resultado é relevante. Essa nossa afirmação levou em conta que esses estudantes ainda não passaram pelo ensino formal de função afim e, é possível, que situações desse tipo ainda não são trabalhadas nesse ano escolar.

Ao compararmos o desempenho nesses dois grupos (FL e FA), constatamos que, para os estudantes, as situações que dizem respeito à função afim apresentam nível de maior complexidade do que as do grupo FL. Ressaltamos que esse resultado foi encontrado somente em situações que envolviam a proporção simples da classe de “um para muitos”. Destacamos ainda que a situação de proporção simples da classe de “muitos para muitos” se iguala no nível de dificuldade com as situações do grupo FA. Tal destaque se deve ao fato de que, quando se trata de problemas de proporção simples, de acordo com Souza (2015, p. 89) os professores tendem a priorizar a classe “um para muitos”.

Quanto aos dois últimos grupos, um envolvia as situações icônicas (IC) e o outro as situações que não apresentavam ícones (NI). Nesse caso, interessa-nos apresentar o resultado de que o ícone não se portou como um facilitador para a resolução dos estudantes, uma vez que eles tiveram melhor desempenho, estatisticamente comprovado, nas situações não icônicas. Esse resultado se manteve, ainda, no comparativo de IC com NI considerando tanto as situações do grupo FL quanto as do grupo FA.

Para investigar a competência de generalização dos estudantes, criamos dois grandes grupos de categorias de análise, o “G1 Não Generaliza” e o “G2 Generaliza”. Convém mencionar que das 432 respostas possíveis para os itens de generalização, algumas não se enquadraram nesses grupos, a saber, as que foram classificadas em branco e as incompreensíveis, no total de 139. No que concerne a competência investigada, consideramos este resultado inicial positivo, uma vez que, de alguma forma, os estudantes, majoritariamente, tentaram expressar algo a respeito da generalização.

O grupo G1 foi composto por três categorias distintas, a saber, a categoria G1C1 Não Sei; G1C2 Por Contagem; e G1C3 Por Aritmética. No tocante a G1C1, a baixa incidência dessa categoria (2,4%) traduz um resultado relevante, uma vez que entendemos que os estudantes se empenharam para responder, em especial, ao último item da situação, relativo à generalização. A categoria G1C2 se mostrou recorrente nas situações que envolvem função afim com ícones em seus enunciados. Embora não tenha levado à generalização, a contagem se mostrou um bom ponto de partida para desenvolver o raciocínio algébrico, em especial quando é possível a continuação do desenho para resolver um caso particular. Entretanto, quando se trata de quantidades distantes de uma quantidade dada, o processo de contagem se torna exaustivo e, portanto, inadequado para obter a generalização.

Quanto a terceira e última categoria de G1, a G1C3, foi possível inferir que os estudantes compreenderam as situações pelo fato de resolver utilizando operações aritméticas de forma coerente, apesar de não conseguiram obter a generalização. Dessa forma, a compreensão das operações aritméticas como funções são indicadas como o início do desenvolvimento do raciocínio funcional.

No que corresponde ao grupo G2, foram criadas duas categorias, a saber: a Generalização Aritmética e a Generalização Algébrica. A primeira contemplou três subcategorias: G2C1 Generalização por Multiplicação; (G2C2) Generalização por Adição; e (G2C3) Generalização por Recursividade.

Ao analisarmos as três situações de função afim presentes na G2C1, podemos destacar que os estudantes conseguem fazer a relação entre as variáveis e, de maneira ainda equivocada, são capazes de fazer generalização a partir da multiplicação. Esse resultado sugere que situações de proporcionalidade, de fato, podem ser uma boa alavanca para o desenvolvimento do raciocínio funcional dos estudantes.

Quanto a G2C2, notamos que o uso da operação de adição foi tão recorrente quanto o uso da operação de multiplicação, no que diz respeito à generalização. Esse fato, mais uma vez indica que as operações aritméticas podem ser uma boa ferramenta para desenvolver o raciocínio funcional dos estudantes.

Em relação a subcategoria G2C3, notamos que foi a mais recorrente dentro de G2, contemplando 79 respostas do total. Diante disso, afirmamos que a recursividade pode ser um bom início para a generalização algébrica, contudo é uma forma não tão eficiente, se lidarmos com quantidades maiores daquelas já conhecidas. Esse tipo de generalização demanda cálculos exaustivos, o que pode incorrer ao erro.

Por fim, na categoria Generalização Algébrica G2C4 temos alguns pontos relevantes. O primeiro deles é que os estudantes que conseguiram expressar o que denominamos por Generalização Algébrica, fizeram a partir da linguagem natural. Outro ponto é que ela foi encontrada, majoritariamente, em situações que diziam respeito à função linear (29 respostas), e somente cinco respostas em situações de função afim. Isso nos leva a confirmar que situações de proporcionalidade são providas de potencial para o início do desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Com base nesta síntese, podemos nos dedicar a responder à questão de pesquisa proposta pelo estudo.

RESPOSTAS À QUESTÃO DE PESQUISA

Esta seção é dedicada a responder as duas partes da questão de pesquisa desse estudo, a saber:

I. **Qual desempenho que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional?**

II. **Qual a competência de generalização que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional?**

Com base na análise dos dados discutidos no capítulo anterior e sintetizado acima, no que concerne à parte I da questão de pesquisa desse estudo, notamos que o desempenho dos estudantes foi não homogêneo em relação aos itens das situações. Convém mencionar que o desempenho dos estudantes não foi analisado em todos os itens das situações, visto que alguns se tratavam de questões abertas, as quais não permitiam quantificar em certo ou errado.

Diante disso, notamos que os estudantes tiveram desempenho satisfatório em situações que envolviam função linear, com exceção da situação de proporção simples de classe “muitos para muitos”. Quando se trata de situações de função afim, os resultados apontaram baixo desempenho, com exceção de uma das cinco situações, a saber a S6 que superou a média geral de acertos de 54,9%. No que se refere as situações que apresentam ou não ícones, notamos que o ícone não se portou como um facilitador para a resolução dos estudantes.

Apontamos tais resultados como relevantes, uma vez que o presente estudo teve caráter diagnóstico, sem nenhum tipo de intervenção. Cabe destacar ainda que não temos a pretensão de estender nossas conclusões para além da nossa amostra, uma vez que se tratou de um grupo pequeno de estudantes de uma única escola. Porém, os resultados apontados podem auxiliar em pesquisas com maior número de participantes e de instituições.

No que tange a parte II da questão de pesquisa, notamos que a maioria das respostas dos estudantes apresentaram algum tipo de generalização (293 do total de 432 respostas possíveis). Vale ressaltar que duas das 10 situações não permitiam investigar a competência de generalização dos estudantes e, por isso, ficaram de fora da análise. Além disso, algumas respostas foram categorizadas como em branco e incompreensíveis (139 do total) e, também, não permitiram tal investigação. Entretanto, constatamos como resultado relevante, na medida que, de alguma forma, em quase três quartos das respostas, os estudantes tentaram expressar algo a respeito da generalização.

Constatamos que o olhar para as operações aritméticas como funções é essencial para o desenvolvimento do raciocínio funcional, uma vez que estas foram frequentemente utilizadas para resolver as situações. Embora o domínio da aritmética não tenha levado os estudantes à generalização em todos os casos, constatamos um número expressivo de generalização nesse campo da Matemática, em especial por recursividade. Em suma, a generalização aritmética se mostrou importante para o desenvolvimento do raciocínio funcional.

Por fim, constatamos que boa parte dos estudantes conseguiram generalizar as situações algebricamente, ainda que em linguagem natural, sem uso de notações. Cabe destacar que este resultado é mais significativo quando se trata de situações de função linear, quando comparado as de função afim. Isso nos leva a confirmar que situações de função linear são providas de potencial para o início do desenvolvimento do raciocínio funcional.

Respondido nossa questão de pesquisa, indicamos a seguir algumas sugestões para trabalhos futuros, os quais podem ser auxiliados com os nossos resultados.

SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Nossa pesquisa buscou investigar o desempenho e a competência de generalização que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional. Apesar de atingir este objetivo, nosso estudo apresentou algumas limitações e, por isso, sugerimos as pesquisas futuras a seguir.

Como o nosso estudo teve um público alvo restrito aos estudantes do 6º ano, a primeira sugestão de trabalho futuro seria estender este mesmo estudo para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Dessa forma, a pretensão é ratificar os resultados ora obtidos para estes estudantes, levando em conta os trabalhos existentes relacionados com nossa temática que são favoráveis a antecipação do ensino da álgebra para os Anos Iniciais.

Propomos como segunda sugestão, a elaboração de um estudo intervencionista, para investigar a introdução do raciocínio funcional em turmas dos Anos Iniciais (1º ao 5º) juntamente com o 6º ano, uma vez que estudantes desses anos ainda não tiveram um encontro formal com a Álgebra. Cabe destacar que essa intervenção pode acontecer com auxílio de softwares educativos tais como GeoGebra.

Por fim, outro caminho que também poderia contribuir muito, seria estender esse estudo intervencionista para o Ensino Infantil. Dessa forma, nossa terceira sugestão seria investigar a introdução do raciocínio funcional em turmas do Ensino Infantil, a partir de uma intervenção utilizando materiais manipulativos.

REFERÊNCIAS

AYALA-ALTAMIRANO, C.; MOLINA, M. **Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de Primaria**. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII, p. 183-192, 2019.

ARAÚJO, N. S. S. **Equação do 1º grau: a compreensão da equivalência nos anos iniciais**. Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2020.

BASTOS, L. S. ***Early Algebra*****: as estratégias de resolução de estudantes do 4º e 5º ano frente a problemas que aludem à álgebra**. Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2019.

BITENCOURT, D. V. ***Early Álgebra* na perspectiva do livro didático**. 126 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus/BA, 2018.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, 36(5), p. 412-446, 2005.

BLANTON, M.; STEPHENS, A.; KNUTH, E.; GARDINER, A. M.; ISLER, I.; KIM, J.-S. **The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade**. Journal for Research in Mathematics Education, v.46, n.1, p. 39-87, 2015.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, C.B. *História da Matemática.* Elza F. Gromide, tradução. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB. 9394/1996

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. MEC, 2017 Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/BNCCpublicacao.pdf>. Acesso em: 14 de julho de 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança: explorando notações**. (Maria Adriana Veríssimo Veronese, trad.). Porto Alegre: Artmed, p. 136, 2006.z

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Maria Adriana Veríssimo Veronese, tradução. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CANAVARRO, A. P. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**. Quadrante, v. XVI, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. **Early Algebra and matematical generalization**. ZDM Mathematics Education, v. 40, p. 3-22, 2008.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. **Early algebra, early arithmetic: treating operations as functions**. In: Plenary address at the 22nd meeting of the psychology of mathematics education. October, 2000.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 2, p. 669-705, 2007.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; MARTINEZ, M. **Early algebra and mathematical generalization**. In: The international journal on mathematics education. January, 2008.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. O lugar da álgebra no Ensino Fundamental. In: MARTINS, E.; LAUTERT, S. (ORG) **Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores: Contribuições da Psicologia da Educação Matemática**. Editora Autografia. Rio de Janeiro, RJ. 2016a.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Powerful Ideas in **Elementary School Mathematics**. In: Handbook of International Research in Mathematics Education. Routledge. New York. 2016b.

CHAVANTE, E. R. Convergências: Matemática, 9º ano. 1º ed. – São Paulo: Edições SM, 2015.

DANTE, L. R.; **Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

EVES, H. Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3ª Ed.rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. Curso de Estatística. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2011.

JERÔNIMO, A. C. **Um estudo comparativo entre os desempenhos dos alunos do ensino fundamental que já estudaram álgebra (9º ano) e os que ainda irão estudá-la formalmente (6º ano).** Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2019.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra**. In FENNEMA, E. ROMBERG, T.A. (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

KIERAN, C. **Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?** *The Mathematics Educator*, Vol. 8, No.1, 139 – 15, 2004.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. COXFORDF, A.F. SHUTLE, A.P. **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, p. 104-110, 1995.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio** - Volume 1. 10 ed. Rio de Janeiro: SBM. p. 271, 2012.

LIMA, E. L. Curso de análise, Volume 1. **Projeto Euclides, IMPA,** décima primeira edição, 2004.

MAGINA et al. **Repensando adição, subtração:** contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos; MERLINI, V. L. **O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas Multiplicativas**. Ciência & Educação, Bauru, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MAGINA, S.; MERLINI, V.; SANTOS, A. dos. **A estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem.** In Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3., 2012, Fortaleza, Brasil. Anais... Fortaleza: Brasil, p. 1-12, 2012.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos da metodologia científica**. 5. Ed – São Paulo – SP: Atlas, 2003.

MASON, J.; GRAHAM, A.; JOHNSTON-WILDER, S. *Devoloping Thinking in Algebra*. London: Paul Chapman Publishing, 325 p., 2005.

MERINO, E.; CAÑADAS, M. C.; MOLINA, M. **Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización**. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, p. 24-40, 2013.

MERLINI, V. L.; MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos. **Estrutura multiplicativa: um estudo comparativo entre o que a professora elabora e o desempenho dos estudantes**. In Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 8, 2013, Montevideo, Uruguai, 2013. p. 2708 – 2715.

Oliveira, C. F. S. **Formação continuada de professores e a Early Algebra: uma intervenção híbrida.** Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

PONTE, J. P; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: ME – DGIDC, 2009.

PORTO, R. S. O. **Early álgebra: prelúdio da álgebra por estudantes do 3° e 5º anos do ensino fundamental**. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. **A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra.** In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). As idéias da álgebra. (Hygino H. Domingues, trad.). São Paulo: Atual, 1995. p. 89 – 103.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho acadêmico** – 2. Ed. – Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

Radford, Luis. **Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective**. PME-NA, 2006 Proceedings.

SANTOS, A. dos; MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L. **O campo conceitual das estruturas multiplicativas: análise comparativa entre o prognóstico dos professores e o desempenho dos estudantes.** In Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 8, 2013, Montevideo, Uruguai, 2013. p. 2756 – 2763.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação** – Programa de Pós-Graduação em Educação - UFSCAR, São Carlos, SP, v. 6, n. 1, mai. 2015.

SOUZA, A. A. **O ensino híbrido na formação continuada e a recontextualização pedagógica dos textos produzidos por professores dos anos iniciais em *early algebra*: um enfoque na relação funcional**. 192f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus/BA, 2020.

SOUZA, E. I. R. **Estruturas multiplicativas: concepção de professor do ensino Fundamental.** 107f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus/BA.

STACEY, K. **Finding and using patterns in linear generalising problems.** Educational Studies in Mathematics, 147-164, 1989.

TABACH, M.; NACHLIELI, T. **Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p. 163-187. 2015.

TEIXEIRA, A. C. N. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental: uma proposta de intervenção**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Ilhéus, BA: UESC, 2016.

VALE, I.; BARBOSA, A. **Padrões: múltiplas perspectivas e contextos em educação matemáticas.** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões. Dezembro, 2009.

Vale, I.; Pimentel, T. **Padrões e conexões matemáticas no ensino básico**. *Educação Matemática*, v. 110, 33-38, 2011.

Vale, I.; Pimentel, T. **O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores**. *Da Investigação às Práticas*, 98–124, 2013.

VERGNAUD, Gerard (1983) *Multiplicative structures*. IEm R. Lesh 8 M. Landau (Eds.). **Acquisitions of mathematics concepts and procédures.** New York: Academic Press, 1983, p.127-174.

_______. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escolar elementar**. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

______. **La Théorie dês champs conceptuals. Recherches em Didactique dês Mathématiques, Grenoble**, 1990.

______. *Multiplicative conceptual field: what and why*? In. Guershon, H. e Confrey, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, p. 41-59, 1994.

______. *Multiplicative structures*. In. HIEBERT, H. and BEHR, M. (Ed.). **Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, p.141-161, 1988.

______. **Teoria dos campos conceituais**. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, p. 1-26, 1993.

VIIRMAN, O. **The function concept and university mathematics teaching**. Dissertation. Karlstad University, Faculty of Health, Science and Technology, Department of Mathematics and Computer Science. 2014.

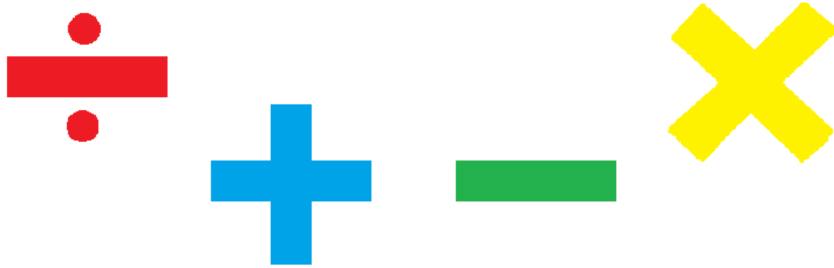
YAMANAKA, O.; MAGINA, S. Um estudo da “early algebra” sob a luz da teoria dos campos Conceituais de Gerard Vergnaud. **Anais do IX Encontro Paulista de Educação Matemática: IX EPEM**. Bauru: SBEM/SBEM-SP, p. 1-15, 2008. (ISBN 978-85-98092-07-2).

APÊNDICES

A. **CADERNINHO 1**
B. **CADERNINHO 2**
C. **TALE**
D. **TCLE**

Atividade de matemática:

Caderninho I

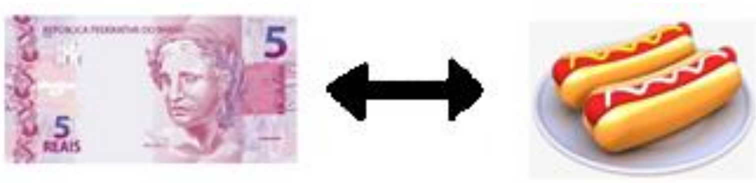


Nome completo:

Idade:

Ano e turma:

1. Numa lanchonete, dois cachorros-quentes custam R$ 5,00 como mostra a figura a baixo:



Paulo gastou R$ 20,00 na compra dos cachorros-quentes. Quantos ele comprou?

Resposta:

5. O taxista João cobra suas corridas da seguinte maneira: R$ 4,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por quilômetro (km) rodado.

a) Baseado nestas informações complete o quadro a seguir:

km rodado	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km	6 km
Total cobrado em R$						

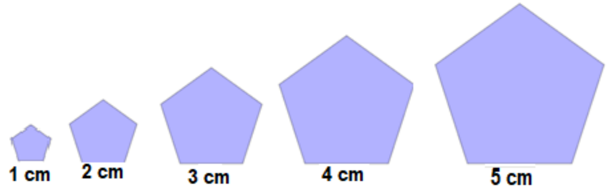
b) O taxista João cobrou R$ 24,00 em uma corrida. Quantos quilômetros ele percorreu nessa corrida?

Resposta:

c) Existe um jeito que seu João pode calcular o valor de uma corrida para qualquer quilometragem. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

2. Sabendo que todos os cinco lados de um pentágono regular são iguais. Observe os pentágonos regulares abaixo:



a) O quadro a seguir indica a medida do lado de cada um dos pentágonos apresentados. Calcule o perímetro (a soma de todos os lados) correspondente de cada um deles.

Lado (cm)	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
Perímetro (cm)					

b) É possível que dois pentágonos regulares de tamanhos diferentes tenham o mesmo perímetro? Justifique sua resposta.

Resposta:

c) Qual é a medida do lado de um pentágono regular sendo que seu perímetro mede 40 cm?

Resposta:

d) Existe um jeito de medir o perímetro de qualquer pentágono regular. Escreva qual é esse jeito.

Resposta:

3. Carlinhos está construindo quadrados com palitos de picolé, como mostra a figura a seguir:

a) Quantos palitos são necessários para montar 6 quadrados?

Resposta:

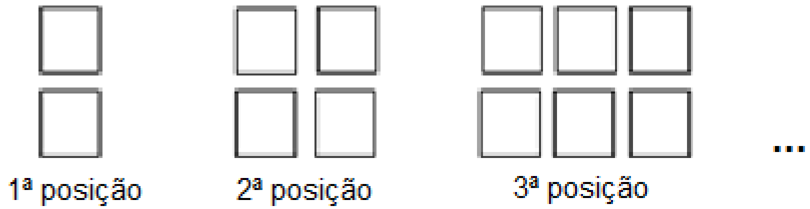
b) Quantos palitos são necessários para montar 20 quadrados?

Resposta:

d) Existe um jeito de ajudar Carlinhos saber quantos palitos são necessários para construir qualquer quantidade de quadrados. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

4. Observe a sequência da figura abaixo:



a) Qual é a próxima figura da sequência? Desenhe.

Resposta:

b) Imagine que seu colega não entendeu o item (a) e a professora pediu para você explicar como encontrou a próxima figura. Escreva o que você falaria ao seu colega.

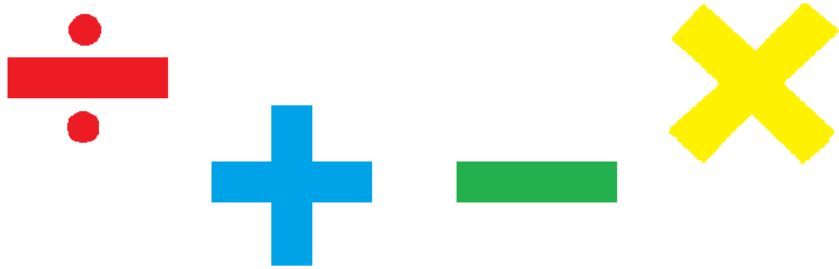
Resposta:

c) Existe um jeito de descobrir a quantidade de quadradinhos numa posição qualquer. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

Atividade de matemática:

Caderninho II



Nome completo:

Idade:

Ano e turma:

6. Seu José conserta TV. Ele cobra R$ 20,00 pela visita (para descobrir o defeito da TV) e depois cobra R$ 10,00 por hora de trabalho para fazer o conserto. Ontem ele foi consertar a minha TV. Ele descobriu o defeito e gastou 3 horas consertando minha TV. Quanto eu tenho que pagar para ele?

Resposta:________________

10. Pedrinho irá com seu pai ao parque de diversões. Sabendo que o parque de diversões cobra R$ 4,00 por brinquedo, responda as perguntas abaixo:

a) Se o Pedrinho andar em 3 brinquedos, quanto o pai dele gastará?

Resposta:

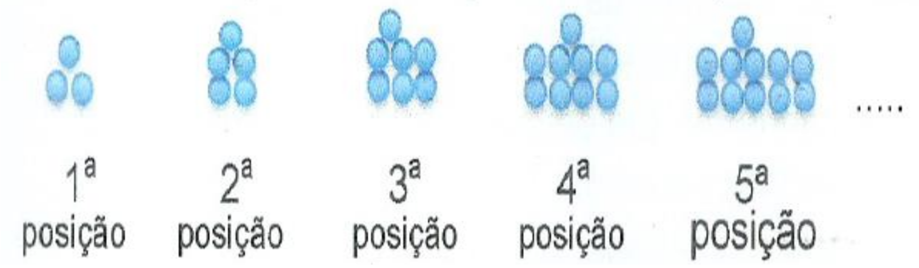
b) Se Pedrinho gostar muito dos brinquedos do parque e andar em 10 brinquedos, quanto o pai dele vai gastar?

Resposta:

c) Existe um jeito de ajudar o pai de Pedrinho calcular o seu gasto para qualquer quantidade de brinquedos. Explique no espaço abaixo qual é esse jeito.

Resposta:

7. Observe a sequência das figuras formadas por bolinhas.



a) Seguindo esta mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer a figura da 8ª posição?

Resposta:

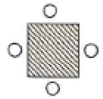
b) Imagine que seu colega errou o item (a) e a professora pediu para você explicar para ele como você encontrou o número da 8ª posição. Escreva abaixo a sua explicação.

Resposta:

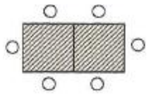
c) Tem um jeito de saber o número de bolinhas de qualquer posição. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta:

8. O desenho abaixo representa uma mesa do restaurante **Boa Comida** com 4 lugares.



Chegaram no restaurante 6 pessoas para almoçar e o garçom



colocou 2 mesas juntas. Veja o desenho das 2 mesas juntas.

a) Esse restaurante sempre deixa 5 mesas juntas. Qual o número máximo de pessoas que podem ocupar essas mesas?

Resposta:

b) Um dia pediram para que esse restaurante juntasse 20 mesas porque vinha um grupo de pessoas almoçar lá e todos os lugares foram ocupados. Quantas pessoas vieram?

Resposta:

c) Existe um jeito de escrever essa relação entre o número de mesas e o número de pessoas. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta:

9. Dona Rita vende pasteis nas praias do sul de Ilhéus durante a semana. Cada pastel custa R$ 3,00. Com base nessa informação, responda as perguntas abaixo:

a) Uma pessoa comprou 5 pasteis. Quanto ela pagou a dona Rita?

Resposta:

b) Se dona Rita vender 60 pasteis em um dia, quanto ela arrecadará?

Resposta:

c) Existe um jeito que dona Rita utiliza para calcular quanto ela arrecadará para qualquer que seja a quantidade de pasteis vendidos. Explique no espaço abaixo como é esse jeito.

Resposta:

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) Aluno (a)

Eu, Luana Lemos Ribeiro, estudante do curso de Pós-Graduação Em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), venho por meio deste convidar a participar, como voluntário, da pesquisa intitulada **"Uma Investigação do Raciocínio Funcional no 6º Ano do Ensino Fundamental".**

Esse estudo tem como objetivo diagnosticar as competências e estratégias que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional. Desse modo, as implicações dessa pesquisa estão em investigar como os estudantes resolvem problemas envolvendo o raciocínio funcional.

O raciocínio funcional a partir de situações de proporção simples pode trazer muitos benefícios ao processo de ensino e aprendizagem, uma vez que situações como essas são trabalhadas desde o 4º ano do ensino fundamental.

Caso concorde, você participará da pesquisa respondendo a um questionário que terá 12 questões. Esse questionário será respondido durante duas aulas de 50 minutos do professor de matemática da classe. Durante a execução do teste, leremos em voz alta cada uma das questões para todos os estudantes. Em seguida, recolheremos os testes e levaremos para a correção e análise dos dados. A partir daí, selecionaremos alguns questionários para a entrevista que servirá para entender/esclarecer dúvidas nossas sobre algumas estratégias utilizadas nas suas respostas. Essa entrevista deverá ser feita individualmente com o você e seu respectivo questionário com horário oposto à sua aula. Além disso, esta será gravada em áudio para facilitar na análise das informações.

Pode acontecer de você se sentir cansado (a) durante a aplicação do instrumento diagnóstico, além da ansiedade por medo que tal atividade valha para nota. Para minimizar esses constrangimentos pretendemos ter uma conversa bastante amigável e franca com a turma, explicando que, ao aceitarem participar de nosso estudo vocês estarão nos ajudando a entender como os estudantes do 6º ano pensam sobre problemas de matemática e isso possivelmente ajudará a melhorar as futuras aulas. Vale ressaltar que seus dados, seja o nome, entrevista em áudio e suas respostas são totalmente sigilosos, nos comprometemos a jamais identificar e relacionar qualquer resposta do teste a qualquer um deles e que é certo que ninguém da escola terá acesso a saber que respostas cada um deu. Enfim, buscaremos criar um clima amigável e solidário para que se sintam confiantes e confortáveis em fazer parte de nosso estudo.

Apesar dos riscos supracitados juntamente com a forma de amenizá-los, essa pesquisa poderá também contribuir para a sua aprendizagem no momento em que você estiver participando. Dessa forma, o questionário constituir-se-á de situações que poderão auxiliar no desenvolvimento do raciocínio funcional. Por mais que o questionário não seja constituído de situações de um conteúdo específico da matemática, as situações que você responderá o (a) ajudará em outras situações que envolve o raciocínio funcional.

Devemos deixar claro que você poderá pedir maiores esclarecimentos sobre a condução desta pesquisa a qualquer momento. Além disso, você tem o direito de desistir desse compromisso a qualquer momento. Para isso basta avisar à pesquisadora para que este termo seja devolvido e, assim cancelado o acordo estabelecido por ele. Também é importante informar que não será penalizado pelo fim do compromisso caso ele venha a acontecer.

Garantimos que esta pesquisa não lhe trará nenhum gasto. E caso isso venha acontecer faremos o ressarcimento destes. Além disso, garantimos o direito à indenização que esta pesquisa pode ocasionar com a sua participação nela. Garantimos também, total sigilo das informações e o seu anonimato.

Esta pesquisa teve os aspectos relativos à Ética da Pesquisa envolvendo Seres Humanos analisados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Santa Cruz. Em caso de dúvidas sobre a ética desta pesquisa ou denúncias de abuso, procure o CEP, que fica no Campus Soane Nazaré de Andrade, Rodovia Jorge Amado, KM16, Bairro Salobrinho, Torre Administrativa, 3º andar, CEP 45552-900, Ilhéus, Bahia. Fone (73) 3680-5319. Email: cep_uesc@uesc.br. Horário de funcionamento: segunda a quinta-feira, de 8h às 12h e de 13h30 às 16h.

Caso sinta a necessidade de mais informações você poderá procurar a pesquisadora. Este documento foi impresso em duas vias iguais e onde o participante ficará com uma das vias.

_______________________________ Pesquisadora: Luana Lemos Ribeiro

_______________________________ Prof. Dra. Vera Lúcia Merlini

Eu, ____ , entendi, compreendi e aceito participar da pesquisa que foi explicado acima após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do estudante

Ilhéus,____/____/_____

Esta pesquisa teve os aspectos relativos à Ética da Pesquisa envolvendo Seres Humanos analisados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Santa Cruz. Em caso de dúvidas sobre a ética desta pesquisa ou denúncias de abuso, procure o CEP, que fica no Campus Soane Nazaré de Andrade, Rodovia Jorge Amado, KM16, Bairro Salobrinho, Torre Administrativa, 3º andar, CEP 45552-900, Ilhéus, Bahia. Fone (73) 3680-5319. Email: cep_uesc@uesc.br. Horário de funcionamento: segunda a quinta-feira, de 8h às 12h e de 13h30 às 16h.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) Senhor (a)

Eu, Luana Lemos Ribeiro, estudante do curso de Pós-Graduação Em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), venho por meio deste pedir a sua autorização para que seu (sua) Filho (a) possa participar, como voluntário, da pesquisa intitulada **“Uma Investigação do Raciocínio Funcional no 6º Ano do Ensino Fundamental”.**

Esse estudo tem como objetivo diagnosticar as competências e estratégias que estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental apresentam ao lidarem com problemas que envolvem o raciocínio funcional. Desse modo, as implicações dessa pesquisa estão em investigar como os estudantes resolvem problemas envolvendo o raciocínio funcional.

O raciocínio funcional a partir de situações de proporção simples pode trazer muitos benefícios ao processo de ensino e aprendizagem, uma vez que situações como essas são trabalhadas desde o 4º ano do ensino fundamental.

Além disso, quanto mais cedo esse aluno ter contato com o raciocínio funcional, possivelmente ele terá mais facilidade em compreender o conteúdo de função afim no período de escolaridade regular.

Caso o senhor (a) concorde com a participação do seu (sua) filho (a), ele participará da pesquisa respondendo a um questionário que terá 12 questões. Esse questionário será respondido durante duas aulas de 50 minutos do professor de matemática da classe. Durante a execução do teste, leremos em voz alta cada uma das questões para os estudantes. Em seguida, recolheremos os testes e levaremos para a correção e análise dos dados. A partir daí, selecionaremos alguns questionários para a entrevista que servirá para entender/esclarecer dúvidas nossas sobre algumas estratégias utilizadas nas respostas dos estudantes. Essa entrevista deverá ser feita individualmente com o estudante e seu respectivo questionário com horário oposto à sua aula. Além disso, esta será gravada em áudio para facilitar na análise das informações.

Pode acontecer de seu (sua) filho (a) se sentir cansado (a) durante a aplicação do instrumento diagnóstico, além da ansiedade por medo que tal atividade valha para nota. Para minimizar esses constrangimentos pretendemos ter uma conversa bastante amigável e franca com os estudantes, explicando que, ao aceitarem participar de nosso estudo eles estarão nos ajudando a entender como os estudantes do 6º ano pensam sobre problemas de matemática e que isso possivelmente ajudará a melhorar as aulas de matemática no futuro. Explicaremos que eles estarão fazendo um grande favor a nós e a ciência com a participação deles no estudo.

Explicaremos por fim que os dados deles, seja o nome, entrevista em áudio e suas respostas são totalmente sigilosos, que nos comprometemos a jamais identificar e relacionar qualquer resposta do teste a qualquer um deles e que é certo que ninguém da escola terá acesso a saber que respostas cada um deles deu. Enfim, buscaremos criar um clima amigável e solidário para que os estudantes se sintam confiantes e confortáveis em fazer parte de nosso estudo.

Apesar dos riscos supracitados juntamente com a forma de amenizá-los, essa pesquisa poderá também contribuir para a aprendizagem do seu (sua) filho (a) no momento em que ele estiver participando. Dessa forma, o questionário que ele (a) responderá constituir-se-á de situações que poderão auxiliar no desenvolvimento do raciocínio funcional. Por mais que o questionário não seja constituído de situações de um conteúdo específico da matemática, as situações que seu (sua) filho (a) responderá o (a) ajudará em outras situações que envolve o raciocínio funcional.

Esta pesquisa teve os aspectos relativos à Ética da Pesquisa envolvendo Seres Humanos analisados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Santa Cruz. Em caso de dúvidas sobre a ética desta pesquisa ou denúncias de abuso, procure o CEP, que fica no Campus Soane Nazaré de Andrade, Rodovia Jorge Amado, KM16, Bairro Salobrinho, Torre Administrativa, 3º andar, CEP 45552-900, Ilhéus, Bahia, Fone (73) 3680-5319, Email: cep_uesc@uesc.br, Horário de

Devemos deixar claro que o (a) senhor (a) poderá pedir maiores esclarecimentos sobre a condução desta pesquisa a qualquer momento. Além disso, o senhor (a) tem o direito de desistir desse compromisso a qualquer momento. Para isso basta avisar à pesquisadora para que este termo seja devolvido e, assim cancelado o acordo estabelecido por ele. Também é importante informar que não será penalizado pelo fim do compromisso caso ele venha a acontecer.

Garantimos ao (à) senhor (a) que esta pesquisa não lhe trará nenhum gasto. E caso isso venha acontecer faremos o ressarcimento destes gastos. Além disso, garantimos o direito à indenização que esta pesquisa pode ocasionar com a participação do seu (sua) filho (a) como voluntário nela. Garantimos também, total sigilo das informações e o anonimato do seu (sua) filho (a).

Caso sinta a necessidade de mais informações o (a) senhor (a) poderá procurar a pesquisadora. Este documento foi impresso em duas vias iguais e onde o participante ficará com uma das vias.

_______________________________ _______________________________

Pesquisadora: Luana Lemos Ribeiro Prof. Dra. Vera Lúcia Merlini

Eu, ____________________________________, entendi, compreendi e aceito que o (a) jovem por quem sou responsável participe da pesquisa que foi explicado acima após ter sido devidamente esclarecido.

Impressão Datiloscópica

____

Assinatura da mãe, pai ou responsável

Ilhéus,____/____/_____

__________________ __________________

Testemunha Testemunha

Esta pesquisa teve os aspectos relativos à Ética da Pesquisa envolvendo Seres Humanos analisados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Santa Cruz. Em caso de dúvidas sobre a ética desta pesquisa ou denúncias de abuso, procure o CEP, que fica no Campus Soane Nazaré de Andrade, Rodovia Jorge Amado, KM16, Bairro Salobrinho, Torre Administrativa, 3º andar, CEP 45552-900, Ilhéus, Bahia. Fone (73) 3680-5319. Email: cep_uesc@uesc.br. Horário de