



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PROFÍSICA

ALEX MANNERS ECHEMENDIA

HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE 3ª ORDEM:
EXPANSÃO EM GRADIENTES E RELAÇÕES DE DISPERSÃO

ILHÉUS - BAHIA

2020

ALEX MANNERS ECHEMENDIA

HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE 3ª ORDEM:
EXPANSÃO EM GRADIENTES E RELAÇÕES DE DISPERSÃO

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Santa Cruz para obtenção do título de Mestre em Física.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos e Ótica Quântica

Orientador: Alex dos Santos Miranda

Ilhéus, BA, Brasil

2020

E18 Echemendia, Alex Manners.
Hidrodinâmica relativística de 3ª ordem: expansão
em gradientes e relações de dispersão / Alex Manners
Echemendia. – Ilhéus, BA: UESC, 2020.
94 f. : il.

Orientador: Alex dos Santos Miranda.
Dissertação (mestrado) –Universidade Estadual de
Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Física
(PROFÍSICA).

Inclui referências e apêndice.

1. Hidrodinâmica. 2. Relatividade (Física). 3. Fluidos.
I. Título.

CDD 532.5

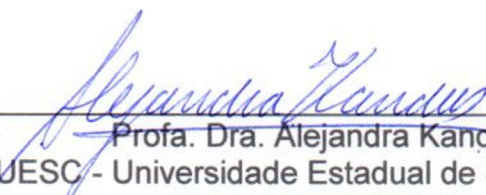
ALEX MANNERS ECHEMENDIA

HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE TERCEIRA ORDEM: EXPANSÃO EM GRADIENTES E RELAÇÕES DE DISPERSÃO

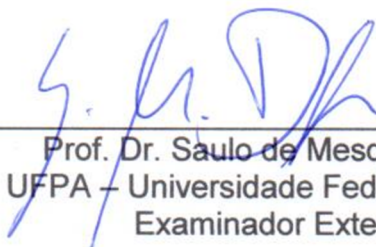
Ilhéus-BA, 02 de março de 2020.



Prof. Dr. Alex dos Santos Miranda
UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz
Orientador



Profa. Dra. Alejandra Kandus
UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz
Examinadora Interna



Prof. Dr. Saulo de Mesquita Diles
UFPA - Universidade Federal do Pará
Examinador Externo

Ilhéus-BA
2020

AGRADECIMENTOS

À Universidade Estadual de Santa Cruz por conceder a infraestrutura para o desenvolvimento da pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física - PROFÍSICA pela oportunidade de cursar o mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudo.

Ao meu pai, Claudio Manners Saunders, que dedicou grande parte de sua vida para que eu pudesse chegar até aqui.

À minha mãe, Edith Victoria Echemendia Machado, a quem devo minha vida e a quem devo todas as minhas modestas conquistas na vida.

Ao meu orientador, Alex Miranda, que durante estes anos, além de ter sido um grande orientador, também foi um grande amigo.

À professora Alejandra Kandus, por me apresentar as primeiras noções da área de meu trabalho de pesquisa.

Às secretárias dos colegiados do PROFÍSICA e do PROCIMM, Roberta Carvalho e Caroline Gresik, pelo excelente atendimento.

Ao professor Fermin de La Caridad Velasco, por ter me recebido e ajudado nos primeiros momentos após a minha chegada ao Brasil.

Aos meus amigos Oscar Ariel Martí e Diango Montalvan Oliveres, que me fizeram sentir em casa, apesar do afastamento do meu país natal.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Estadual de Santa Cruz

HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE 3ª ORDEM: EXPANSÃO EM GRADIENTES E RELAÇÕES DE DISPERSÃO

AUTOR: ALEX MANNERS ECHEMENDIA

ORIENTADOR: ALEX DOS SANTOS MIRANDA

Data e Local da Defesa: Ilhéus, 02 de março de 2020.

A hidrodinâmica relativística dissipativa pode ser formulada em termos da expansão em gradientes das variáveis hidrodinâmicas de interesse, descrevendo um fluido próximo do equilíbrio. O sistema descrito por essa hidrodinâmica será caracterizado pelo conhecimento do tensor de energia-momento e da corrente, cuja dependência com os gradientes é dada pela introdução de coeficientes de transporte. Para restaurar o princípio da causalidade, é necessário aumentar a ordem de expansão, introduzindo novos coeficientes de transporte. O objetivo do presente trabalho é a formulação da hidrodinâmica dissipativa de terceira ordem correspondente a um fluido carregado com carga genérica n como uma extensão dos trabalhos desenvolvidos por [2] e [8], onde foi formulada uma hidrodinâmica da mesma ordem para um fluido sem carga. A construção dessa hidrodinâmica será realizada escrevendo as equações de conservação referentes ao tensor de energia-momento e à corrente e , em seguida, propondo todas as estruturas dos gradientes compatíveis com essas equações de conservação para o caso de fluidos conformes e não-conformes. Finalmente, as relações de dispersão para ambos os casos (fluidos conformes e não-conformes) serão determinadas considerando perturbações lineares no espaço-tempo plano em relação ao sistema de referência de repouso do fluido.

Palavras-chave: Hidrodinâmica Dissipativa; Relatividade Geral; Expansão em Gradientes; Modos Hidrodinâmicos.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Física
Universidade Estadual de Santa Cruz

THIRD-ORDER RELATIVISTIC HYDRODYNAMICS: GRADIENT EXPANSION AND DISPERSION RELATIONS

AUTHOR: ALEX MANNERS ECHEMENDIA

ADVISER: ALEX DOS SANTOS MIRANDA

Local and Date: Ilhéus, march 02th, 2020.

Dissipative relativistic hydrodynamics can be formulated in terms of a gradient expansion of the hydrodynamic variables of interest, describing a fluid close to equilibrium. The system described by this hydrodynamics will be characterized by the knowledge of the energy-moment tensor and the current, whose dependence on the gradients is given by the introduction of transport coefficients. To restore the principle of causality, it is necessary to increase the order of the expansion, introducing new transport coefficients. The objective of the present work is the formulation of the third-order dissipative hydrodynamics of a fluid charged with generic charge n , as an extension of the works developed by [2] e [8], where a hydrodynamics of the same order was formulated for a fluid without charge. The construction of this hydrodynamics will be carried out by writing the conservation equations for the energy-momentum tensor and the current, and then proposing all gradient structures compatible with these conservation equations for the case of conformal and non-conformal fluids. Finally, the dispersion relations for both cases (conformal and non-conformal fluids) in a flat spacetime will be determined by considering linear disturbances in relation to the rest frame of the fluid.

Keywords: Dissipative Hydrodynamics; General Relativity; Gradient Expansion; Hydrodynamic Modes.

SUMÁRIO

1	NOÇÕES BÁSICAS SOBRE HIDRODINÂMICA	9
1.1	As descrições Euleriana e Lagrangiana	10
1.2	Forças de volume e superfície	10
1.3	Tensor de tensões	11
1.4	Gradiente de velocidades	13
1.5	Equação de movimento	16
1.6	Hipótese de equilíbrio termodinâmico local	17
1.7	Equação da energia	18
1.8	Sobre a determinação dos coeficientes de transporte	19
2	ELEMENTOS DE HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA	21
2.1	Fluidos não perfeitos	25
2.2	Escolha do <i>frame</i>	27
2.3	Construção de uma teoria causal	31
2.4	Equações para um fluido com carga	34
2.4.1	Equações de conservação do momento e da energia	36
2.4.2	Equações de movimento	37
3	A CONSTRUÇÃO DA EXPANSÃO EM GRADIENTES	38
3.1	Hidrodinâmica de primeira ordem	38
3.2	Hidrodinâmica de segunda ordem	41
3.3	Hidrodinâmica de terceira ordem	49
3.3.1	Estruturas escalares de 3 ^a ordem	50
3.3.2	Estruturas vetoriais de 3 ^a ordem	51
3.3.3	Estruturas tensoriais de 3 ^a ordem	52
3.3.4	Reunindo as estruturas independentes	54
3.4	Fluidos conformes	56
3.4.1	Construção da hidrodinâmica conforme	64
3.4.2	Hidrodinâmica conforme de terceira ordem	66
4	RELAÇÕES DE DISPERSÃO	69
4.1	Fluidos não-conformes	69
4.1.1	Relações de dispersão no sistema de referência do fluido	75

4.1.2	Caso limite: fluido sem carga	75
4.2	Fluidos conformes	76
4.2.1	Relações de dispersão no sistema de referência do fluido	82
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83

1 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE HIDRODINÂMICA

A hidrodinâmica é uma teoria efetiva que pode ser usada no estudo da evolução de sistemas compostos por um grande número de partículas (da ordem de 10^{23} partículas). É uma teoria efetiva no sentido de que não é preciso conhecer as leis da natureza (sub)atômica que governam o comportamento desta classe de partículas para a descrição do sistema do qual fazem parte. Sua descrição é claramente macroscópica.

Neste capítulo introdutório, começaremos expondo as noções básicas da hidrodinâmica não relativística, válidas para a hidrodinâmica em geral, cujo entendimento nos permitirá ter uma compreensão mais clara dos principais conceitos da hidrodinâmica relativística, os quais serão posteriormente introduzidos.

A descrição macroscópica na hidrodinâmica se baseia na hipótese do *continuum*. A mesma consiste em assumir que, em uma escala macroscópica, o sistema é dotado de uma estrutura perfeitamente contínua ou, mais especificamente, como se não tivesse estrutura alguma. A hipótese do *continuum* é válida para uma faixa do comprimento característico L em relação à qual as magnitudes de interesse (densidade, energia, momento, velocidade, etc) flutuam muito levemente, de modo que essas magnitudes sejam distribuídas uniformemente no elemento de volume $V(L)$ correspondente ao comprimento característico L . Semelhante faixa do comprimento característico tem como cota inferior valores da ordem de $L_{1-2} \simeq 10^{-5} - 10^{-6}cm$ [9]. Como as grandezas do fluido são distribuídas de maneira uniforme no elemento $V(L)$, elas não dependem do comprimento L ; portanto o elemento de volume $V(L)$ pode ser escolhido de maneira arbitrária. Desta forma, podemos passar a definir as magnitudes que caracterizam o fluido (entendendo como fluido a totalidade de partículas que compõem o sistema) em cada ponto do espaço ocupado por ele e em cada instante do tempo t , tomando o limite destas grandezas para um elemento de volume $V(L)$ infinitamente pequeno, ou seja, $V(L) \rightarrow 0$. Por exemplo, podemos definir a densidade em cada ponto do fluido da seguinte forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M(V)}{V}, \quad (1.1)$$

onde $M(V)$ representa a massa do fluido no elemento de volume V . Como a densidade é definida em cada ponto do espaço ocupado pelo fluido, a mesma define um campo escalar¹. De modo similar são definidos outros campos de natureza escalar, vetorial e tensorial.

¹Na hidrodinâmica relativística a densidade ρ representa a componente temporal da corrente J^a .

1.1 As descrições Euleriana e Lagrangiana

Tendo estabelecido a hipótese do *continuum*, é possível definir diretamente as derivadas temporais e espaciais das grandezas que caracterizam um fluido em cada ponto do espaço. Em relação às derivadas temporais, elas serão definidas de acordo com os dois tipos de descrições possíveis para o estudo do movimento de um fluido, a saber, as chamadas descrições Euleriana e Lagrangiana.

A descrição Euleriana consiste em associar cada grandeza a um ponto fixo no espaço, mais especificamente, cada grandeza será definida como uma função da posição \mathbf{x} e do tempo t , por exemplo, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, etc. O outro tipo de descrição, a Lagrangiana resulta mais intuitiva do ponto de vista físico e consiste em associar toda magnitude a um ponto material, ou seja, um objeto físico no qual faz sentido definir quantidades físicas como massa, carga, energia, etc.

Para ilustrar a diferença entre as descrições Lagrangiana e Euleriana, considere a velocidade \mathbf{u} . A variação da velocidade num ponto fixo do espaço com relação ao tempo é a derivada parcial $\partial\mathbf{u}/\partial t$, a qual não tem uma interpretação física simples [9]. No entanto, a variação da velocidade \mathbf{u} de um ponto material com relação ao tempo t representa a aceleração do fluido e se escreve como $d\mathbf{u}/dt$. A conexão entre ambas descrições resulta simples se d/dt representa o operador derivada total de qualquer quantidade física dependente do tempo t num ponto (x_p, y_p, z_p) , pois segundo a regra da cadeia

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx_p}{dt} \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{dy_p}{dt} \frac{\partial}{\partial y_p} + \frac{dz_p}{dt} \frac{\partial}{\partial z_p} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (1.2)$$

1.2 Forças de volume e superfície

Do ponto de vista dinâmico, um fluido pode ser submetido a dois tipos de forças, forças de volume e forças de superfície. As forças de volume são aqueles tipos de forças que não dependem da interação de um fluido em um elemento de volume V com o fluido circundante. Exemplos desse tipo de força são a força de Lorentz (no caso de um fluido carregado) e as forças gravitacionais e inerciais (ou fictícias) no caso de um fluido em um referencial não inercial. Por exemplo, as forças gravitacionais e inerciais podem ser escritas da seguinte forma geral:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{g} = \mathbf{g} \int \rho dV. \quad (1.3)$$

Em (1.3) o vetor \mathbf{g} inclui as acelerações da gravidade, linear e de Coriolis em um sistema de referência não inercial.

Por outro lado, as forças de superfície são aquelas que dependem da interação de um fluido em um elemento de volume com o fluido adjacente. A origem desta classe de forças pode ser o transporte de momento linear pela migração de moléculas através da superfície divisória entre dois elementos de volume ou forças intermoleculares entre esses elementos.

1.3 Tensor de tensões

Para a descrição dinâmica de um fluido, o conhecimento do tensor de tensões é essencial (a forma geral do tensor de tensões pode ser deduzida diretamente da hipótese do *continuum*), cujas componentes num sistema cartesiano são

$$\sigma_{ij} = \Sigma_i(\mathbf{e}_j), \quad i, j = x, y, z. \quad (1.4)$$

Em (1.4) Σ_i representa a força por unidade de superfície na direção i , e \mathbf{e}_j representa o j -ésimo vetor da base do sistema cartesiano. Então, se analisarmos a expressão (1.4), vemos que a componente σ_{ij} do tensor de tensões pode ser interpretada como a componente i da força por unidade de superfície exercida sobre uma superfície plana perpendicular ao eixo j . Ou seja, o tensor de tensões está intrinsecamente relacionado com as deformações sofridas por um elemento de fluido. Assim ao aplicarmos o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ sobre o vetor \mathbf{n} , o qual representa o vetor normal a um dado elemento de superfície, teremos as componentes da força por unidade de superfície associada a esse elemento de superfície, denotada como $\Sigma_i(\mathbf{n})$ [9] e definida segundo a expressão

$$\Sigma_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij}n_j. \quad (1.5)$$

Conhecendo as componentes σ_{ij} num sistema de coordenadas específico é possível determinar a força resultante (força de superfície) sobre um elemento de volume,

$$dF = dV (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (1.6)$$

Uma característica importante do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é seu caráter simétrico, ou seja, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, o qual é uma consequência direta da hipótese do *continuum* [9]. O fato de que o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ seja simétrico em qualquer sistema de coordenadas possibilita ter uma representação diagonal deste tensor em cada ponto do espaço ocupado pelo fluido. O sistema de eixos associados à representação diagonal do tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é chamado de sistema de eixos principais. No sistema de eixos principais, as componentes do vetor $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n})$ (tensão superficial) em um elemento de superfície de normal $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$ são $(\sigma_{xx}n_x, \sigma_{yy}n_y, \sigma_{zz}n_z)$. É fácil perceber

que os vetores \mathbf{n} e $\Sigma(\mathbf{n})$ serão paralelos somente no caso em que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$. Neste caso, as componentes σ_{ij} do tensor de tensões terão a forma

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij}, \quad (1.7)$$

onde os δ_{ij} (delta de Kronecker) representam as componentes do tensor identidade \mathbf{I} e A representa o módulo do vetor $\Sigma(\mathbf{n})$. Naturalmente, se o tensor de tensões tem originalmente a forma (1.7) então será diagonal em qualquer sistema de referência. Este é o caso de um tensor de tensões isotrópico,

$$\boldsymbol{\sigma} = A\mathbf{I}. \quad (1.8)$$

De modo geral, o tensor de tensões pode ser separado em duas contribuições, uma parte isotrópica e outra anisotrópica, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{isot}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{anis}}, \quad (1.9)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{isot}} = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\text{anis}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}. \quad (1.10)$$

É fácil perceber em (1.10) que a parte anisotrópica do tensor de tensões tem traço nulo e a parte isotrópica tem traço $\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_{\text{isot}}) = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = A$.

Para interpretar fisicamente as contribuições isotrópicas e anisotrópicas do tensor de tensões, é necessário analisar cada uma de forma independente. Assim, se imaginarmos um tensor de tensões isotrópico em um elemento de volume esférico, a tensão na superfície da esfera dado pelo vetor $\Sigma(\mathbf{n})$ será uniforme e, como consequência, a esfera só poderá ser comprimida ($T < 0$) ou expandida ($T > 0$) devido ao fluido circundante ($T \equiv \text{Tr} \boldsymbol{\sigma}$).

Se o tensor de tensões é intrinsecamente anisotrópico, ou seja, com um traço zero, seu efeito no elemento esférico do fluido será expandi-lo em alguns setores e comprimi-lo em outros e o efeito total tenderá a deformar o elemento de volume esférico sem alterar o seu volume (isso ocorre porque o traço da parte anisotrópica do tensor de tensões é nulo).

Em resumo, podemos concluir a partir da interpretação das partes isotrópica e anisotrópica do tensor de tensões que o efeito das forças de superfície sobre um elemento de volume é alterar tanto a forma quanto o volume do elemento.

Vale a pena analisar agora o caso de um fluido em repouso. Num fluido em repouso não existem deformações ($\boldsymbol{\sigma}_{\text{anis}} = 0$) nem movimentos relativos de um elemento de fluido em

relação a outro. Então o tensor de tensões é isotrópico e pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = -p \mathbf{I}, \quad (1.11)$$

com componentes dadas por

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} T \delta_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad (1.12)$$

onde temos definido a pressão p como a intensidade da força por unidade de superfície (ou, simplesmente, o valor médio do vetor $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n})$ em cada ponto se consideramos que suas direções são arbitrárias).

1.4 Gradiente de velocidades

A força exercida por uma porção de um fluido em outra porção adjacente depende da maneira pela qual o fluido está sendo deformado pelo movimento. É por isso que é relevante analisar o caráter do movimento em torno de um ponto.

Se $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ representa a velocidade num ponto P no tempo t e $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t)$ a velocidade num ponto P' no mesmo instante de tempo t , então podemos escrever a variação da velocidade $\delta\mathbf{u}$ entre os pontos P e P' como

$$\delta\mathbf{u} = (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (1.13)$$

e suas componentes num sistema de coordenadas cartesianas podem ser escritas como

$$\delta u_i = u_i(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{r}, t) = \delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1.14)$$

Dessa forma, o movimento em torno de um ponto pode ser caracterizado pelo tensor gradiente de velocidades $\nabla\mathbf{u}$. Da mesma maneira que foi feita com o tensor de tensões é conveniente decompor o gradiente de velocidades em duas contribuições independentes e analisar cada uma separadamente para decifrar o seu significado físico. Neste caso, as contribuições consistem em uma parte simétrica $\boldsymbol{\varepsilon}$ e uma parte antissimétrica $\boldsymbol{\xi}$,

$$\nabla\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi}. \quad (1.15)$$

Em termos das componentes do tensor $\nabla\mathbf{u}$, temos

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \xi_{ij}, \quad (1.16)$$

de onde podemos deduzir facilmente as expressões das componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\xi}$ em termos das componentes do gradiente de velocidades $\nabla \mathbf{u}$,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.17)$$

Assim, com ajuda de (1.17), as componentes de $\delta \mathbf{u}$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\delta u_i = \delta u_i^{(s)} + \delta u_i^{(a)}, \quad (1.18)$$

onde $\delta u_i^{(s)}$ e $\delta u_i^{(a)}$ são, respectivamente, as partes de δu_i correspondentes às contribuições simétrica e antissimétrica do gradiente de velocidades, ou seja,

$$\delta u_i^{(s)} = \delta x_j \varepsilon_{ij}, \quad \delta u_i^{(a)} = \delta x_j \xi_{ij}. \quad (1.19)$$

Analisando (1.19), podemos escrever $\delta u_i^{(a)}$ como as componentes de um produto vetorial:

$$\delta \mathbf{u}^{(a)} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{r}), \quad \text{sendo } \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.20)$$

A grandeza $\boldsymbol{\Omega}$ é chamada de vorticidade. Considerando o produto escalar $\delta \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{r})$ para um caso em que $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^{(a)}$, temos

$$\frac{d}{dt} \delta r^2 = \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}) = 2 \delta \mathbf{r} \cdot \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} = 2 \delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{u} = 2 \delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} = \delta \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{r}) = 0, \quad (1.21)$$

onde acima usamos o seguinte resultado:

$$\frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})}{dt} - \frac{d \mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{u}. \quad (1.22)$$

Da equação (1.21), concluímos de que a contribuição de $\boldsymbol{\xi}$ à $\delta \mathbf{u}$ deixa o módulo do vetor $\delta \mathbf{r}$ inalterado e, portanto, a variação de $\delta \mathbf{r}$ devido à $\boldsymbol{\xi}$ é uma rotação rígida em torno do ponto P com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}/2$.

Considerando agora a parte $\delta u_i^{(s)}$ de δu_i , a qual corresponde à contribuição simétrica ε_{ij} do gradiente de velocidades, podemos usar o caráter simétrico do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ em todo ponto P para achar a forma diagonal da matriz de suas componentes num sistema local de coordenadas (x, y, z) . Nesse sistema de coordenadas, as componentes de $\delta u_i^{(s)}$ são

$$\delta u_x^{(s)} = \delta x \varepsilon_{xx}, \quad \delta u_y^{(s)} = \delta y \varepsilon_{yy}, \quad \delta u_z^{(s)} = \delta z \varepsilon_{zz}, \quad (1.23)$$

onde os elementos diagonais ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} são

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta u_x^{(s)}}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\delta u_y^{(s)}}{\delta y} = \frac{1}{\delta y} \frac{d\delta y}{dt}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\delta u_z^{(s)}}{\delta z} = \frac{1}{\delta z} \frac{d\delta z}{dt}. \quad (1.24)$$

Os termos em (1.24) podem ser fisicamente interpretados como um alongamento ou encurtamento nas direções dos eixos principais do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Se somarmos os elementos diagonais de $\boldsymbol{\varepsilon}$, ou seja, o traço $Tr(\boldsymbol{\varepsilon})$, obteremos a variação relativa do volume $\delta V = \delta x \delta y \delta z$,

$$Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{1}{\delta z} \frac{d\delta z}{dt} = \frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt}, \quad (1.25)$$

onde consideramos o elemento de volume de um paralelepípedo cujos lados coincidem com os eixos principais de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Finalmente, podemos escrever $Tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ como

$$Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.26)$$

Assim, analisando (1.26), é fácil perceber que o elemento de volume δV vai se manter constante se a divergência do campo de velocidade se anular, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por outro lado, no caso particular em que $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$ os elementos δx , δy e δz variam na mesma proporção e, portanto, o elemento de fluido não muda de forma, porém seu volume varia. Esse tipo de deformação é conhecido na mecânica dos fluidos como deformações puras.

O exposto acima permite, de maneira análoga com o que foi feito com o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$, decompor o tensor simétrico $\boldsymbol{\varepsilon}$ como a soma de um tensor de traço nulo $\boldsymbol{\varepsilon}'$ (deformações puras) com um tensor isotrópico do tipo $\frac{Tr(\boldsymbol{\varepsilon})}{3} \mathbf{I}$ (expansões ou compressões puras) da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}' + \frac{1}{3} [Tr(\boldsymbol{\varepsilon})] \mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}' + \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}, \quad (1.27)$$

cujas componentes num sistema cartesiano são

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}. \quad (1.28)$$

Em resumo, podemos concluir que o movimento do fluido em torno de um ponto P , caracterizado pelo tensor gradiente de velocidades $\nabla \mathbf{u}$, é composto por uma rotação pura com velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}/2$ em torno de um eixo que passa pelo ponto P e de uma deformação que consiste numa combinação de uma compressão (ou expansão) isotrópica de

magnitude $\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ e uma deformação pura (sem variação do volume), caracterizada pelo tensor de traço nulo $\boldsymbol{\varepsilon}'$.

1.5 Equação de movimento

Conhecendo todas as forças que atuam em cada elemento de volume (infinitesimal) do fluido (forças de volume e de superfície) é possível deduzir a equação do movimento do fluido. A equação de movimento é facilmente deduzível da lei da conservação do momento linear (ou, simplesmente, da segunda lei de Newton) em um volume V de fluido.

O momento linear de um volume V é

$$\int_V \rho \mathbf{u} dV, \quad (1.29)$$

e sua derivada com respeito ao tempo é a seguinte:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) + \int_V \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV. \quad (1.30)$$

Por outro lado, (1.30) representa a força total aplicada sobre o elemento de volume V e, portanto, pode ser igualada às forças de volume e de superfície,

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV. \quad (1.31)$$

Em (1.31) utilizamos o teorema de Gauss para transformar o termo de integral de superfície numa integral de volume,

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (1.32)$$

Se consideramos um elemento de volume arbitrário em (1.31), podemos passar para a forma diferencial da segunda Lei de Newton para um fluido ou, simplesmente, para a equação de movimento

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.33)$$

1.6 Hipótese de equilíbrio termodinâmico local

Como vimos anteriormente, o tensor de tensões de um fluido em repouso (em equilíbrio termodinâmico) tem a seguinte forma diagonal:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}. \quad (1.34)$$

Então, conhecendo a equação de estado que relaciona a pressão com as outras variáveis termodinâmicas que caracterizam o estado do fluido, é possível realizar a descrição dinâmica dele. No caso de um fluido em movimento, não será mais possível definir variáveis termodinâmicas de maneira semelhante a de um fluido em repouso, pois neste caso não há equilíbrio termodinâmico e, conseqüentemente, a descrição dinâmica do movimento do fluido a partir do conhecimento de equações de estado não é possível. No entanto, se o fluido estiver ligeiramente afastado do equilíbrio termodinâmico (ou do estado de repouso), é possível definir as variáveis termodinâmicas em cada elemento de volume infinitesimal, ou seja, o equilíbrio termodinâmico é estabelecido localmente. Então, podemos definir o tensor de tensões como aquele correspondente a um fluido em repouso mais uma correção responsável pelos efeitos do movimento.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}. \quad (1.35)$$

Para o caso em que as forças dadas por $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}$ são desprezíveis em comparação às forças devidas ao gradiente de pressão, é possível ignorar o efeito de $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}$ em (1.35). Desta forma, o tensor de tensões pode ser aproximado ao de um fluido em repouso, ou seja, $\boldsymbol{\sigma} \approx -p\mathbf{I}$ e, portanto, a equação de movimento (1.33) se torna

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p. \quad (1.36)$$

A equação (1.36) é conhecida como a equação de Euler e representa a equação de movimento de um fluido quando os efeitos do movimento do fluido, dados pelo tensor $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}$, são desprezíveis. Este é o caso dos fluidos ideais. Quando o efeito do tensor $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}$ não é desprezível, faz-se necessário a utilização de relações constitutivas. Sob a hipótese de um fluido newtoniano, é possível estabelecer uma relação constitutiva entre o tensor $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}$ e as contribuições isotrópicas e anisotrópicas do tensor simétrico $\boldsymbol{\varepsilon}$ (tensor velocidade de deformação). As hipóteses são as seguintes [9]:

1. Uma rotação em torno de um ponto não contribui para o tensor de tensão naquele ponto,

o que equivale a dizer que a parte antissimétrica do tensor gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{u}$ não interfere na determinação de $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}$;

2. Existem relações lineares entre o tensor $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}$ e as contribuições do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$;
3. A parte anisotrópica e isotrópica do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ contribuem para o tensor $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}}$.

Em conclusão, teremos

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{mov}} = 2\eta\boldsymbol{\varepsilon}' + \zeta(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad (1.37)$$

e, finalmente, o tensor de tensão para um fluido newtoniano é

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \zeta\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\eta\boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (1.38)$$

Os coeficientes ζ e η são conhecidos na literatura como coeficientes de viscosidade [9] e têm unidades de massa/(comprimento \times tempo). Os mesmos estão relacionados com a transferência de momento linear entre elementos de volume do fluido.

Substituindo a expressão (1.38) na equação de movimento (1.33), obtemos a seguinte equação:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \zeta\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \eta\nabla^2\mathbf{u}, \quad (1.39)$$

conhecida como a equação de Navier-Stokes.

1.7 Equação da energia

Uma compreensão mais ampla das forças de superfície no movimento de um fluido pode ser adquirida considerando o balanço de energia em um volume de material δV limitado por uma superfície δS . Se E é a energia do elemento de volume material, P a potência devido às forças que atuam sobre ele e Q o fluxo de calor que entra no elemento, pode-se mostrar, a partir do primeiro princípio da termodinâmica [9]

$$\frac{dE}{dt} = P + \frac{dQ}{dt}, \quad (1.40)$$

que a expressão geral da variação temporal da densidade de energia e é a seguinte [9]:

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] \quad (1.41)$$

Substituindo as componentes do tensor de tensão σ_{ij} na expressão (1.41), temos que

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p\nabla \cdot \mathbf{u}}{\rho} + \frac{2\eta}{\rho} \left[\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right] + \frac{\zeta}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right]. \quad (1.42)$$

A equação (1.42) é chamada equação da energia. É útil interpretar fisicamente cada termo que aparece nesta equação. Por exemplo, o primeiro termo em (1.42) pode ser escrito considerando a expressão de $Tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ em (1.26) como

$$-\frac{p\nabla \cdot \mathbf{u}}{\rho} = -\frac{p}{\rho} \delta dV^{-1} \frac{d\delta V}{dt} = -\frac{p}{\delta M} \frac{d\delta V}{dt}, \quad (1.43)$$

onde $\delta M = \rho \delta V$ representa a massa de um elemento de volume de material. Fazendo um análise dimensional, a relação $-pd\delta V/\delta M dt$ em (1.43) pode ser interpretada como a potência por unidade de massa exercida pela pressão isotrópica (mudança reversível) na compressão do elemento de fluido.

O segundo termo em (1.42) pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\phi = \frac{2\eta}{\rho} \left[\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right] = \frac{2\eta}{\rho} \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \right)^2 = \frac{2\eta}{\rho} (\epsilon'_{ij})^2. \quad (1.44)$$

Então a contribuição ϕ ao depender da componentes de tensor de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}'$ pode ser interpretada como o teor de dissipação da energia mecânica como consequência da viscosidade e ao ser uma magnitude positivamente definida a mesma contribui ao aumento da energia.

Por outro lado, o último termo em (1.42) representa o calor ganho pelo fluido por unidade de tempo e de massa. Por fim, o termo proporcional à $\zeta (\nabla \cdot \mathbf{u})^2$ representa a contribuição à variação da energia relacionada com as expansões em compressões puras dos elementos infinitesimais de fluido e, por ser positivamente definido, contribui ao aumento de energia ($de/dt > 0$).

1.8 Sobre a determinação dos coeficientes de transporte

Os coeficientes introduzidos η e ζ sob a hipótese de um fluido newtoniano não podem ser entendidos nem determinados pela descrição oferecida pela hidrodinâmica até agora desenvolvida (hidrodinâmica não-relativística). É necessário ter uma descrição alternativa para o estudo de um sistema de muitas partículas que leve em conta a granularidade da matéria e que, de alguma forma, estabeleça um elo entre as quantidades desse tipo de descrição e aquelas que são apropriadas para a hidrodinâmica. Essa descrição é conhecida como Teoria Cinética

e sua abordagem é de natureza estatística. Portanto, a caracterização da evolução do sistema é feita através de funções de distribuição dependentes do tempo t , das coordenadas espaciais \mathbf{x} e das velocidades das partículas \mathbf{u} : $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$. Na teoria cinética, as funções de distribuição são determinadas a partir da solução da equação diferencial conhecida como equação de Boltzman [4]. Uma vez conhecida a função de distribuição que descreve o sistema, é possível conhecer as quantidades (macroscópicas) que tornam possível a descrição hidrodinâmica, as quais são definidas como médias das flutuações das quantidades microscópicas da descrição da Teoria Cinética no limite de um sistema grande, em que a hipótese do *continuum* é aplicável. Nessa ideia, é possível determinar as quantidades responsáveis pelos efeitos dissipativos na hidrodinâmica, como o tensor de tensão $\boldsymbol{\sigma}$, a energia interna e e o fluxo de calor \mathbf{q} e ir diretamente para a determinação dos coeficientes de transporte com ajuda das equações de conservação (de massa, momento e energia) obtidas nessa teoria e que podem ser deduzidas da descrição da Teoria Cinética a partir da equação de Boltzman [4].

2 ELEMENTOS DE HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

Até agora, focamos na exposição da hidrodinâmica que não incorpora efeitos relativísticos em sua descrição. Isso equivale a dizer que desenvolvemos até aqui uma teoria que descreve sistemas de partículas com velocidades (relativas entre as partículas do fluido) muito pequenas em comparação com a velocidade da luz, ou que sua escala de energia é baixa em relação aos sistemas constituídos por partículas relativísticas. No entanto, é possível estabelecer uma teoria efetiva mais geral que a descrita até agora, que contemple a descrição de sistemas constituídos por partículas relativísticas. É o caso da hidrodinâmica relativística, cuja construção segue uma metodologia bastante semelhante àquela descrita no capítulo anterior. Conceitos fundamentais como a hipótese do *continuum* e o de ponto material são igualmente aplicáveis.

A maneira mais geral de formular a hidrodinâmica relativística é considerar todas as grandezas de interesse definidas em sistemas de referência localmente inerciais e, portanto, a Teoria Geral da Relatividade (TGR) deve ser considerada na descrição do movimento dos elementos de volume infinitesimais do fluido [1, 2, 18]. Agora, todas as informações relevantes sobre o fluido estarão contidas no tensor de energia-momento T^{ab} e na corrente J^a (de carga ou de massa). Dessa maneira, a descrição do movimento do fluido será realizada pelas leis de conservação com relação a estas quantidades, às quais são dadas por [4]:

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad \nabla_a J^a = 0. \quad (2.1)$$

É importante observar que o símbolo ∇ não se refere a um operador gradiente no sentido usual, mas representa a derivada covariante conforme definido na TGR por meio da conexão Γ_{ac}^b [16]. Por exemplo, a derivada covariante de um vetor V^a e o tensor de segundo ordem \mathcal{T}_{bc} são determinados segundo as relações:

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \Gamma_{ac}^b V^c, \quad \nabla_a \mathcal{T}_{bc} = \partial_a \mathcal{T}_{bc} - \Gamma_{ab}^d \mathcal{T}_{dc} - \Gamma_{ac}^d \mathcal{T}_{bd}. \quad (2.2)$$

Em (2.2) a conexão é determinada pela métrica g_{ab} de acordo com a relação [16]

$$\Gamma_{ac}^b = \frac{1}{2} g^{bd} (\partial_a g_{cd} + \partial_c g_{ad} - \partial_d g_{ac}). \quad (2.3)$$

O tensor de energia-momento T^{ab} representa o fluxo da componente do momento- a na direção b . O significado físico das componentes do tensor de energia-momento T^{ab} pode ser

ilustrado mais claramente da seguinte forma:

$$T^{00} : \text{Densidade de energia total}; \quad (2.4)$$

$$T^{0i} : \text{Fluxo de energia na direção } i; \quad (2.5)$$

$$T^{i0} : \text{Fluxo da componente } i \text{ do momento na direção } 0; \quad (2.6)$$

$$T^{ij} : \text{Fluxo da componente } i \text{ do momento na direção } j. \quad (2.7)$$

O caso mais simples a ser estudado em relação aos fluidos relativísticos é o que se refere à classe de fluidos conhecida como fluidos perfeitos ou ideais [4]. Nesta classe de fluidos, o fluxo de energia e de momento é nulo em todas as direções (no referencial de repouso local) e, portanto, o tensor de energia-momento T^{ab} deve ser diagonal. As componentes diagonais do tensor T^{ab} correspondem à densidade total de energia e à pressão isotrópica, ou seja,

$$\mathbf{T} = \text{diag}\{e, p, p, p\}. \quad (2.8)$$

Por outro lado, a corrente J^a para um fluido perfeito é dada pela expressão

$$J^a = \rho u^a, \quad (2.9)$$

onde ρ representa a densidade de massa ou a densidade de carga elétrica do fluido.

Para a manipulação algébrica do tensor de energia-momento T^{ab} , é conveniente escrevê-lo da seguinte forma:

$$T^{ab} = e u^a u^b + p \Delta^{ab}, \quad (2.10)$$

onde o tensor $\Delta^{ab} = u^a u^b + g^{ab}$ representa o projetor no espaço ortogonal ao quadrivetor velocidade u^a , ou seja

$$u_a \Delta^{ab} = 0. \quad (2.11)$$

Para definir o operador de projeção Δ , usamos a assinatura $(-, +, +, \dots, +)$ da métrica g_{ab} .

Desta forma, o nosso sistema estará caracterizado pelas expressões

$$J^a = \rho u^a, \quad (2.12)$$

$$T^{ab} = (e + p) u^a u^b + p g^{ab}. \quad (2.13)$$

Para a determinação da velocidade u^a podemos considerar que as medições estão sendo feitas num sistema que esta momentaneamente em repouso com relação ao fluido e, portanto, a

velocidade u^a pode ser escolhida como

$$u^a = (1, 0, 0, 0). \quad (2.14)$$

Projetando a lei de conservação $\nabla_a T^{ab} = 0$ no espaço ortogonal à velocidade \mathbf{u} , $\Delta^a_b \nabla_a T^{cb}$ e na direção da própria velocidade, $u_b \nabla_a T^{ab} = 0$, obteremos as equações de conservação do momento e da energia. Assim, realizando os procedimentos algébricos necessários, teremos as seguintes equações:

$$\Delta^a_b \nabla_a T^{cb} = \rho h D b^a + \Delta^a_b g^{bc} \nabla_c p = 0, \quad (2.15)$$

$$u_b \nabla_a T^{ab} = -D(e + p) - \rho h \Theta + Dp = De + \rho h \Theta = 0, \quad (2.16)$$

onde $D = u^a \nabla_a$ representa derivada longitudinal definida na direção da velocidade u^a . O termo $\Theta = \nabla_a u^a$ pode ser interpretado como a expansão e h representa a entalpia definida pela relação $\rho h = e + p$.

A equação (2.15) pode convenientemente escrita da seguinte forma

$$\rho h D u^a = -\Delta^{ac} \nabla_c p. \quad (2.17)$$

Esta equação é análoga à equação (1.36) (equação de Euler), pois relaciona a aceleração $a^b = D u^b$ à derivada covariante da pressão $\nabla_c p$ e, portanto, representa a equação de Euler relativística. A equação (2.16) representa a equação da energia e pode ser escrita da seguinte forma:

$$De - h D \rho = 0. \quad (2.18)$$

Em (2.18) usamos a equação de continuidade $\nabla_a J^a = 0$. Tomando ρ como a densidade de massa, podemos escrever a expansão Θ em função de $D \rho$ como

$$\Theta = -\frac{1}{\rho} D \rho. \quad (2.19)$$

Se agora consideramos a primeira lei da termodinâmica, escrita na forma [4]

$$de = h d\rho + \rho T ds, \quad (2.20)$$

segue da equação (2.18) que

$$De - hD\rho = \rho T Ds = 0 \quad \implies \quad Ds = 0. \quad (2.21)$$

A condição (2.21) significa que a entropia se conserva nas linhas de corrente do fluido (nas trajetórias tangentes ao campo de velocidade u^a). Portanto, nos fluidos perfeitos, o movimento ocorre de forma adiabática, o que reflete o fato de que não existem efeitos dissipativos nesta classe de fluidos. Mais especificamente, um fluido perfeito será isentrópico se a entropia s é conservada em todo o fluido,

$$\nabla_a s = 0. \quad (2.22)$$

A condição (2.22) é semelhante ao segundo princípio da termodinâmica, formulado para processos reversíveis na teoria de mesmo nome (termodinâmica). Formulado matematicamente como $\Delta s = 0$, no entanto, essa relação não é válida para qualquer fluido perfeito (os processos que ocorrem nesta classe de fluidos são reversíveis) e, conseqüentemente, não pode ser identificado com o segundo princípio. Do mesmo modo, acontece com a condição (2.21). O que podemos afirmar é que todos os fluidos perfeitos satisfazem a condição (2.22) ou a condição (2.21). Portanto, o segundo princípio deve ser formulado de forma compatível com as duas condições. Isto pode ser feito se definimos a grandeza corrente de entropia S^a como

$$S^a = s\rho u^a. \quad (2.23)$$

Da conservação da corrente $\nabla_a J^a = 0$, e considerando $J^a = \rho u^a$ e as condições (2.22) ou (2.21), é possível chegar na condição

$$\nabla_a S^a = 0. \quad (2.24)$$

A condição (2.24) pode ser interpretada como o segundo princípio da termodinâmica (para processos reversíveis), pois ela é satisfeita tanto para fluidos adiabáticos (2.21) como para fluidos isentrópicos (2.22).

A forma mais geral de enunciar matematicamente o segundo princípio da termodinâmica é a seguinte:

$$\nabla_a S^a \geq 0. \quad (2.25)$$

A desigualdade em (2.25) corresponde a processos irreversíveis (efeitos dissipativos no fluido).

2.1 Fluidos não perfeitos

Da mesma forma que na hidrodinâmica não-relativística, contempla-se na hidrodinâmica relativística a existência de fluidos em que os efeitos dissipativos e a viscosidade não são desprezíveis, ao contrário do caso dos fluidos perfeitos discutidos acima. Essa classe de fluidos é conhecida na literatura como fluidos não dissipativos [4] e, em contraste com os fluidos ideais (fluidos perfeitos), o tensor de energia-momento T^{ab} não terá a forma diagonal mostrada em (2.8), uma vez que os efeitos dissipativos e de viscosidade são o resultado do fluxo de energia e momento entre as diferentes partes do fluido e, conseqüentemente, as componentes não diagonais do tensor T^{ab} não podem ser negligenciadas. Outro fator que não é desprezível é a difusão de partículas (carregadas ou não) entre as diferentes partes do fluido, de modo que termos adicionais que refletem esse fato aparecerão na corrente.

A descrição por fluidos não-perfeitos se torna necessária no caso em que as escalas de tempo em que ocorrem os fenômenos macroscópicos (escalas termodinâmicas) são comparáveis às escalas de tempo dinâmicas (escalas de tempo microscópicas) e, conseqüentemente, a hipótese de equilíbrio local se torna inválida na perspectiva dos fluidos perfeitos [4]. Da mesma maneira que foi feita no caso de fluidos clássicos (fluidos não relativísticos), o equilíbrio local pode ser restabelecido se considerarmos os termos responsáveis pelos efeitos dissipativos e de viscosidade no tensor de energia-momento T^{ab} e na corrente J^a como correções nas correspondentes expressões de um fluido perfeito, ou seja, podemos fazer a seguinte separação [2, 4, 11, 12]:

$$T^{ab} = T_{\text{PF}}^{ab} + T_{\text{NPF}}^{ab}; \quad (2.26)$$

$$J^a = J_{\text{PF}}^a + J_{\text{NPF}}^a. \quad (2.27)$$

Em (2.26)-(2.27), T_{PF}^{ab} e J_{PF}^a representam as expressões correspondentes à (2.12)-(2.13). Naturalmente, T_{NPF}^{ab} e J_{NPF}^a são as contribuições do tensor de energia-momento T^{ab} e da corrente J^a responsáveis pelos efeitos dissipativos de viscosidade e difusão (de carga ou massa), e também podem ser entendidas como as correções do fluido perfeito mencionadas acima. Por sua vez, a contribuição T_{NPF}^{ab} pode ser separada em duas contribuições independentes, o tensor S^{ab} responsável pelos efeitos de viscosidade (o análogo do tensor tensão σ) e o tensor T_{flux}^{ab} , o qual representa a contribuição devido aos fluxos de energia. Em resumo, T_{NPF}^{ab} pode ser escrito como [4]

$$T_{\text{NPF}}^{ab} = S^{ab} + T_{\text{flux}}^{ab}. \quad (2.28)$$

De maneira análoga à decomposição do tensor σ numa parte anisotrópica de traço nulo e uma parte isotrópica, podemos escrever S^{ab} como

$$S^{ab} = t^{ab} + \Pi \Delta^{ab}, \quad (2.29)$$

onde t^{ab} representa o tensor anisotrópico de tensão com traço nulo $t^a_a = 0$ e o termo Π pode ser interpretado como a flutuação da pressão p (a pressão “fora do equilíbrio”). Por outro lado, o tensor $\Delta^{ab} = g^{ab} + u^a u^b$ representa o operador de projeção introduzido em (2.10). Devido à simetria do tensor T^{ab} , o tensor S^{ab} deve ser simétrico e, portanto, t^{ab} também. É fácil comprovar que o tensor Δ^{ab} é simétrico.

Do mesmo modo que na hidrodinâmica clássica, o movimento de um fluido relativístico em torno de um ponto material pode ser separado em rotações puras, expansões ou compressões puras e deformações puras. Cada uma dessas contribuições será caracterizada por um tensor antissimétrico Ω_{ab} (vorticidade), um tensor simétrico e de traço nulo σ_{ab} (tensor de deformação) e a expansão Θ , todos dependentes do gradiente de velocidade $\nabla_a u_b$, da seguinte forma:

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2} (\nabla_{\perp a} u_b + \nabla_{\perp b} u_a) - \frac{1}{3} \Theta \Delta^{ab}, \quad (2.30)$$

$$\Omega_{ab} = \nabla_{\perp a} u_b - \nabla_{\perp b} u_a, \quad (2.31)$$

$$\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla_a u^a. \quad (2.32)$$

Aqui o operador $\nabla_{\perp a}$ representa a derivada no espaço transversal à velocidade u^a , ou seja,

$$u_a \nabla_{\perp}^a = 0, \quad (2.33)$$

sendo

$$\nabla_{\perp}^a = \Delta^a_b \nabla^b. \quad (2.34)$$

Pode parecer plausível propor uma relação entre o tensor de tensão relativístico S_{ab} e as expressões (2.30) e (2.31), de forma análoga ao tensor de tensão σ definido em hidrodinâmica clássica para um fluido Newtoniano. Mais tarde, veremos que relações desse tipo conduzem a inconsistências com o princípio de causalidade.

O tensor T_{flux}^{ab} deve ser definido igualmente de forma simétrica em função do fluxo q^a ,

$$T_{\text{flux}}^{ab} = u^a q^b + u^b q^a. \quad (2.35)$$

Fazendo um análise dimensional da equação (2.35), podemos interpretar o vetor q^a como um fluxo de energia.

Finalmente, considerando (2.10), (2.29) e (2.35), o tensor de energia-momento T^{ab} para um fluido não perfeito é

$$T^{ab} = \varepsilon u^a u^b + \mathcal{P} \Delta^{ab} + u^a q^b + u^b q^a + t^{ab}, \quad (2.36)$$

onde $\mathcal{P} = p + \Pi$.

Em (2.36) o termo escalar ε inclui a densidade de energia e e sua flutuação δe de maneira similar ao termo escalar \mathcal{P} , ou seja, $\varepsilon = e + \delta e$.

2.2 Escolha do *frame*

Como vimos na seção anterior para um fluido perfeito, é possível considerar o fluido se movendo momentaneamente com a velocidade média do fluido (a velocidade média do fluido coincide com a velocidade do fluido em cada ponto). Isso significa que sempre é possível escolher um sistema de referência no qual o fluido esteja momentaneamente em repouso no caso de um fluido ideal. Com a presença de efeitos dissipativos e de viscosidade, a definição de um sistema de referência local em repouso se torna ambígua e não é possível definir a velocidade univocamente a cada momento [4].

Existem duas maneiras naturais de definir a velocidade, que são compatíveis com as equações de conservação (2.1). A primeira possibilidade é definir a velocidade como um vetor temporal \mathbf{u}_N sujeito à condição de normalidade $\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_N = -1$ e paralela ao vetor de corrente \mathbf{J} , ou seja, $J^a = \rho u_N^a$. A segunda possibilidade consiste em definir o vetor velocidade como um vetor tipo-tempo \mathbf{u}_E , que é um autovetor do tensor de energia-momento \mathbf{T} , $u_E^a = \kappa T^a_b u^b$ e sujeito à condição de normalidade $\mathbf{u}_E \cdot \mathbf{u}_E = -1$. Obviamente, \mathbf{u}_N e \mathbf{u}_E devem coincidir para o caso de um fluido perfeito.

A ambiguidade na escolha do vetor velocidade será resolvida com a imposição de restrições às contribuições dissipativa J_{NPF}^a e T_{NPF}^{ab} para o tensor de energia-momento T^{ab} e a corrente J^a . Estas restrições são conhecidas como escolha do *frame*. A primeira alternativa é escolher a velocidade $u^a = u_E^a$. O *frame* resultante é chamado de *frame* de Landau, ou da

energia, e representa o *frame* em que não existe fluxo de energia [17,19]. O mesmo é definido pelas condições

$$J_{\text{NPF}}^a (u_a)_E = J_{\text{NPF}}^a u_a = 0, \quad (2.37)$$

$$T_{\text{NPF}}^{ab} (u_a)_E = T_{\text{NPF}}^{ab} u_a = 0. \quad (2.38)$$

A segunda possibilidade é aquela oferecida por Eckart [10], que definiu a velocidade como $u^a = u_N^a$. O *frame* resultante leva o mesmo nome do autor ou, como também é conhecido, *frame* das partículas. No *frame* de Eckart, não existem contribuições dissipativas na corrente de massa de repouso nem na densidade de energia, ou seja,

$$J_{\text{NPF}}^a = 0, \quad (2.39)$$

$$T_{\text{NPF}}^{ab} (u_a)_N (u_b)_N = T_{\text{NPF}}^{ab} u_a u_b = 0. \quad (2.40)$$

De maneira similar ao que foi feito na sessão anterior para o caso de fluidos ideais, podemos deduzir as equações de conservação da energia e do momento, projetando a expressão da divergência do tensor energia-momento (2.36) no espaço perpendicular à velocidade, $\Delta_b^a \nabla_a T^{ab} = 0$ (conservação do momento), e na direção da velocidade \mathbf{u} , $u_b \nabla_a T^{ab} = 0$ (conservação da energia).

Na dedução das equações de conservação para um fluido não-perfeito, aparecerão termos que coincidem com aqueles das equações de conservação de um fluido ideal. Portanto, os outros termos correspondentes às contribuições dissipativas no tensor de energia-momento (2.36) podem ser considerados como correções $f(t^{ab}, \Pi, q^a)$ às equações de conservação (2.15)-(2.16) de um fluido perfeito. Sendo assim, para os propósitos que nos interessam, podemos escrever as equações de conservação para fluidos dissipativos como

$$(\epsilon + p)Du_a + \nabla_{\perp a} p + f(t^{ab}, \Pi, q^a) = 0, \quad (2.41)$$

$$u^b \nabla_b \epsilon + \Theta(\epsilon + p) + f(t^{ab}, \Pi, q^a) = 0. \quad (2.42)$$

Como consequência dos efeitos dissipativos e irreversíveis num fluido não perfeito, a entropia não se conserva na direção do movimento, ou seja, não satisfaz a condição (2.21) (não é possível definir um movimento adiabático para fluidos não ideais). Neste caso, o segundo princípio da termodinâmica precisa ser enunciado da forma (2.25), conforme dito na seção anterior. Na corrente de entropia $S^a = s\rho u^a$, deve aparecer um termo adicional R^a , responsável pelos

efeitos dissipativos, cuja divergência é tal que $\nabla_a R^a \neq 0$ para manter a desigualdade (2.25).

A corrente de entropia assume então a forma

$$S^a = s\rho u^a + \frac{R^a}{T}. \quad (2.43)$$

Naturalmente, o fator R^a terá que ser necessariamente função dos termos dissipativos no tensor de energia-momento T^{ab} , definidos em (2.36), a saber, Π , q^a e t^{ab} . Evidentemente, $R^a = 0$ para o caso de um fluido perfeito em que os termos dissipativos são nulos e a condição (2.24) é restabelecida, ou seja,

$$\Pi = 0, \quad q^a = 0, \quad t^{ab} = 0 \quad \iff \quad \nabla_a S^a = 0. \quad (2.44)$$

A relação constitutiva mais simples que pode ser imaginada entre o termo adicional R^a na corrente de entropia e os termos dissipativos mencionados acima é de tipo linear. As relações desse tipo (de primeira ordem em relação aos termos dissipativos Π , q^a e t^{ab}) pertencem ao tipo de formulação conhecida como CIT (Classical Irreversible Thermodynamics) [10], que representa a primeira tentativa de formulação covariante das equações de Fourier e Navier-Stokes iniciada por Eckart (1940). As teorias CIT são classificadas como teorias de primeira ordem no campo da hidrodinâmica relativística dissipativa.

Começemos então assumindo uma relação para o quadrivetor R^a do tipo

$$R^a = f_1 \Pi u^a + f_2 q^a, \quad (2.45)$$

onde f_1 e f_2 representam funções da concentração n , da densidade de energia e e da temperatura T . Os termos dissipativos Π e q^a em (2.45) podem ser considerados como graus de liberdade do sistema [4].

Se agora projetamos a corrente de entropia S^a na direção do quadrivetor velocidade, obteremos a densidade de entropia $-u_a S^a$ e, assim, considerando (2.43) e (2.45), temos o seguinte resultado:

$$-u_a S^a = s\rho + f_1 \Pi. \quad (2.46)$$

No equilíbrio termodinâmico (2.46) o termo Π deve maximizar a densidade de entropia (2.46), ou seja,

$$\frac{\partial(-u_a S^a)}{\partial \Pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 = 0. \quad (2.47)$$

Como consequência do fluxo de calor q^a , o termo q^a/T pode ser interpretado como a corrente

de entropia, o que permite fazer $f_2 = 1$ em (2.45). A corrente de entropia é então

$$S^a = s\rho u^a + \frac{q^a}{T}. \quad (2.48)$$

Usando a relação (2.21) e a equação de energia (2.42), vemos que o tensor de geração de entropia resulta em

$$T\nabla_a S^a = -\Pi\Theta - (\nabla_{\perp a} \ln T + Du_a) q^a - t^{ab} \sigma_{ab}. \quad (2.49)$$

O segundo princípio da termodinâmica, formulado em (2.24), exige que os termos dissipativos adotem a forma

$$\Pi = -\zeta\Theta, \quad (2.50)$$

$$q_a = -\kappa T (\nabla_{\perp a} \ln T + Du_a), \quad (2.51)$$

$$t^{ab} = -2\eta\sigma_{ab}. \quad (2.52)$$

Podemos então afirmar que as teorias CIT nos levam a fazer com que o tensor de tensão S_{ab} (relativístico) adote uma forma equivalente ao tensor de tensão clássico σ , sob a hipótese de um fluido newtoniano, isto é, constituído por uma parte anisotrópica e outra isotrópica,

$$S_{ab} = -2\eta\sigma_{ab} - \zeta\Theta\Delta_{ab}. \quad (2.53)$$

A forma de S_{ab} fornecida pelas relações (2.50)-(2.52) leva a inconsistências com o princípio da relatividade de Einstein, uma vez que acarreta na existência de sinais de propagação instantânea ou com velocidade infinita. Por exemplo, se analisarmos a relação (2.51) assumindo movimento dos elementos infinitesimais de fluido sobre uma geodésica, ou seja, com $Du_a = 0$, vemos que se o gradiente de temperatura é levado à zero, o fluxo de calor q^a se anula de maneira instantânea, ou seja, percebe-se instantaneamente a variação do gradiente de temperatura. Entretanto, de uma perspectiva relativística, deve transcorrer um tempo τ (tempo de relaxamento) para que o fluxo q^a perceba a variação do gradiente $\nabla_{\perp a} \ln T$.

A melhor maneira de ilustrar a existência de propagação instantânea de sinal é considerar perturbações lineares da energia $\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon$ e a velocidade $u^a = u_0^a + \delta u^a$ equação de conservação do momento. Mais adiante mostraremos que no *frame* de Landau a equação de

momento pode ser escrita na forma

$$\epsilon D u^a + \nabla^a \mathcal{P} + \mathcal{P} D u^a + \Delta^a_b \nabla_c t^{cb} = 0. \quad (2.54)$$

Agora se considerarmos em (2.54) somente perturbações no eixo x , $\delta u^a = (0, \delta u, 0, 0)$, e que a velocidade de equilíbrio é $u_0^a = (1, 0, 0, 0)$, obteremos uma equação do tipo parabólica para a perturbação na velocidade,

$$\partial_t \delta u = \frac{2\eta}{\epsilon_0 + p} \partial_x^2 \delta u, \quad (2.55)$$

onde

$$\Delta^a_b \nabla_c \delta t^{cb} = -2\eta \Delta^a_b \nabla_c \delta \sigma^{cb} = -\frac{\eta}{\epsilon_0 + p} \partial_x^2 \delta u, \quad D \delta u^a = \partial_t \delta u. \quad (2.56)$$

Considerando uma perturbação na velocidade δu do tipo [4]

$$\delta u \simeq \exp(\omega t - ikx), \quad (2.57)$$

obtemos a relação de dispersão

$$\omega = \frac{\eta}{\epsilon_0 + p} k^2, \quad (2.58)$$

de onde podemos determinar a velocidade de grupo v_g :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\eta}{\epsilon_0 + p_0} k. \quad (2.59)$$

Essa relação leva à violação do princípio da causalidade, porque o princípio da relatividade não restringe os valores do número da onda k . Assim, para valores de k suficientemente grandes, a velocidade de grupo v_g vai se tornar superluminal, ficando por fora do cone de luz. A violação do princípio de causalidade é uma consequência da natureza parabólica da equação (2.55) [11] que governa a evolução das perturbações lineares de velocidade δu . Para perturbações de outras variáveis hidrodinâmicas (como a pressão p ou a temperatura T), será obtida uma equação diferencial da mesma natureza que (2.55). Concluindo, o caráter parabólico das equações de conservação mostra que é impossível descrever fluidos dissipativos por teorias de primeira ordem (CIT).

2.3 Construção de uma teoria causal

A primeira tentativa de construir uma hidrodinâmica causal foi realizada por Cattaneo [4, 15] para fluidos clássicos, substituindo a equação de Fourier $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ por uma equação

do tipo

$$\tau_r \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\kappa \nabla T. \quad (2.60)$$

Vemos que, se o gradiente da temperatura $\nabla T = 0$ para $t \geq 0$ e o fluxo de calor em $t = 0$ é \mathbf{q}_0 , então o fluxo de calor \mathbf{q} não será levado instantaneamente a zero, mas terá um decaimento exponencial na escala de tempo τ_r segundo a lei

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right). \quad (2.61)$$

Podemos tomar a relação anterior como um guia para a construção de uma teoria causal, na qual cada termo dissipativo tem um tempo de relaxamento associado por meio de equações semelhantes à (2.60), mas escritas de forma covariante. As equações de conservação resultantes deduzidas dessa teoria devem ser hiperbólicas. Esses tipos de teorias são conhecidos como EIT (Extended Irreversible Thermodynamics) e, como as teorias do tipo CIT, os termos dissipativos serão considerados parâmetros que maximizam a densidade de entropia no equilíbrio. A diferença é que agora os coeficientes de transporte não serão introduzidos exclusivamente por meio de combinações lineares de termos dissipativos de primeira ordem, mas serão incluídos também coeficientes associados a termos de ordem superior [13, 18]. Por exemplo, uma teoria de segunda ordem ou formulação de Mueller-Stewart [20] é caracterizada por uma entropia

$$S^a = s\rho u^a + \frac{q^a}{T} - (\beta_0 \Pi^2 + \beta_1 q_b q^b + \beta_2 t_{bc} t^{bc}) \frac{u^a}{T} + \alpha_0 \frac{\Pi q^a}{T} + \alpha_1 \frac{t^{ab} q_b}{T}. \quad (2.62)$$

A densidade de entropia correspondente à (2.62) é

$$-S^a u_a = s\rho - \frac{1}{2T} (\beta_0 \Pi^2 + \beta_1 q_b q^b + \beta_2 t_{bc} t^{bc}). \quad (2.63)$$

O número de coeficientes na expressão da corrente de entropia pode ser reduzido, maximizando a entropia em relação aos termos dissipativos considerados como parâmetros, ou seja,

$$\frac{\partial(-S^a u_a)}{\partial \Pi} = \frac{\partial(-S^a u_a)}{\partial q^a} = \frac{\partial(-S^a u_a)}{\partial t^{ab}} = 0. \quad (2.64)$$

A obtenção da taxa de produção de entropia não será apresentada nesta dissertação, mas pode ser consultada em [4]. Aqui nos limitaremos a fazer alguns comentários. De acordo com o segundo princípio da termodinâmica, estabelecido na expressão (2.24), e por meio das leis de conservação do momento e da energia, juntamente com as identidades termodinâmicas

correspondentes, encontramos que os parâmetros dissipativos estão sujeitos às relações

$$\tau_0 D\Pi + \Pi = -\zeta\Theta, \quad (2.65)$$

$$\tau_1 \Delta^b{}_a Dq_b + q_a = -\kappa T (\nabla_{\perp a} \ln T + Du_a), \quad (2.66)$$

$$\tau_2 \Delta^c{}_a \Delta^d{}_b Dt_{cd} + t_{ab} = -2\eta\sigma_{ab}, \quad (2.67)$$

onde os tempos de relaxamento τ_0 , τ_1 e τ_2 estão relacionados com os coeficientes de transporte da seguinte forma [4]:

$$\tau_0 = \zeta\beta_0, \quad \tau_1 = \kappa T\beta_1, \quad \tau_2 = 2\eta\beta_2. \quad (2.68)$$

Do mesmo modo que na equação (2.60), as relações (2.65)-(2.67) levarão a equações de conservação hiperbólicas.

Outra maneira de construir uma teoria causal é por meio do que é conhecido como expansão em gradientes, como mostrado nos artigos [2, 8, 11, 12]. Nesse tipo de construção, as relações constitutivas para as contribuições dissipativas do tensor de energia-momento T^{ab} e da corrente J^a são escritas em termos de gradientes das variáveis hidrodinâmicas. Os diversos coeficientes de transporte aparecem como coeficientes dos termos lineares e não lineares nessa expansão em gradientes.

Da mesma forma que na hidrodinâmica não relativística, a determinação dos coeficientes de transporte está fora do escopo da descrição oferecida pela hidrodinâmica relativística, seja pela formulação de Müller-Stewart [13] ou pela expansão em gradientes. É necessário recorrer às teorias microscópicas, como a teoria cinética relativística [4] ou, de forma alternativa, à correspondência AdS/CFT [3, 8, 21], para determinar os coeficientes de transporte. O objetivo do presente trabalho é a construção de uma teoria estável e causal por meio da expansão em gradientes até terceira ordem, seguindo a metodologia apresentada em [2] e [8], de um fluido com carga genérica n . O trabalho será desenvolvido na seguinte sequência:

- Determinação das equações de conservação para um fluido com carga n (a qual será apresentada neste capítulo).
- Construção da hidrodinâmica relativística por meio da expansão em gradientes para fluidos não-conformes, de acordo com a metodologia de [2] (1ª parte do capítulo 3).
- Construção da hidrodinâmica relativística por meio da expansão em gradientes para fluidos conformes, seguindo a metodologia apresentada em [8] (2ª parte do capítulo 3).
- Determinação das relações de dispersão para fluidos com carga n conformes e não-

conformes (capítulo 4).

2.4 Equações para um fluido com carga

Como afirmado anteriormente, nosso trabalho é uma continuação daqueles desenvolvidos por [2] e [8], onde a presença de correntes não foi considerada. Isto é, na descrição dinâmica do fluido a equação de conservação da corrente $\nabla_a J^a = 0$ não foi levada em conta. Por outro lado, o presente trabalho tenta ser algo mais geral, considerando a presença de uma corrente J^a ou a presença de uma densidade de carga genérica $n \neq 0$. Daqui em diante, chamaremos um fluido de carregado se $n \neq 0$.

Denotaremos por $T_{(0)}^{ab}$ e $J_{(0)}^a$, respectivamente, as partes não dissipativas do tensor de energia-momento e da corrente. Então,

$$T^{ab} = T_{(0)}^{ab} + T_{\text{NPF}}^{ab} = \varepsilon u^a u^b + \mathcal{P} \Delta^{ab} + q^a u^b + q^b u^a + t^{ab}, \quad (2.69)$$

$$J^a = J_{(0)}^a + J_{\text{NPF}}^a = N u^a + j^a. \quad (2.70)$$

Com exceção da velocidade u^a e do tensor de projeção Δ^{ab} , todos os demais elementos podem ser expressos em termos do tensor de energia-momento T^{ab} e da corrente J^a , considerando a condição de transversalidade (2.11), ou seja,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= u_a u_b T^{ab}, & N &= u_a J^a, & \mathcal{P} &= \frac{1}{d} \Delta_{ab} T^{ab}, \\ q_a &= -\Delta_{ab} u_c T^{bc}, & j_a &= \Delta_{ab} J^b, \\ t_{ab} &= \frac{1}{2} (\Delta_{ac} \Delta_{bd} + \Delta_{bc} \Delta_{ad} - \frac{2}{d} \Delta_{ab} \Delta_{bc}) T^{bc}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Analisando as relações (2.71), podemos comprovar que a velocidade u^a é transversal aos termos dissipativos q^a , j^a e t^{ab} :

$$u_a q^a = 0, \quad u_a j^a = 0, \quad u_a t^{ab} = 0. \quad (2.72)$$

No caso de um fluido carregado num espaço curvo com uma métrica g_{ab} , o tensor de energia-momento é expresso em termos de campos escalares e vetoriais perto do equilíbrio local, a saber, o campo de velocidades $u^a(x)$, a temperatura T e o potencial químico μ . Conforme exposto anteriormente no caso de um fluido ideal, o fluido pode ser perfeitamente descrito no equilíbrio local. Neste caso, o tensor de energia momento $T_{(0)}^{ab}$ e a corrente $J_{(0)}^a$

têm a forma:

$$\begin{aligned} T_{(0)}^{ab} &= \epsilon u^a u^b + p \Delta^{ab}, \\ J_{(0)}^a &= n u^a. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Nestas expressões $\epsilon = \epsilon(x)$ representa a energia local, $p = p(x)$ representa a pressão local e $n = n(x)$ representa a densidade de carga. O caso de um fluido ideal é conhecido como a hidrodinâmica de ordem zero.

Os fluidos não ideais, por sua vez, são descritos por uma hidrodinâmica fora do equilíbrio local. Isso significa que as variáveis hidrodinâmicas não podem ser univocamente definidas. De fato, não é possível ter uma noção das variáveis hidrodinâmicas fora do equilíbrio [1], mas podemos definir as variáveis hidrodinâmicas T , μ e u^a em função do seus gradientes, de forma geral, da seguinte maneira [2]:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T' = T + f_{(1),T}(\partial T, \partial\mu, \partial u) + f_{(2),T}(\partial^2 T, \partial T \partial u, \partial T \partial\mu, \partial\mu \partial u, \partial^2\mu, \partial^2 u) + \dots; \\ \mu &\rightarrow \mu' = \mu + f_{(1),\mu}(\partial T, \partial\mu, \partial u) + f_{(2),\mu}(\partial^2 T, \partial T \partial u, \partial T \partial\mu, \partial\mu \partial u, \partial^2\mu, \partial^2 u) + \dots; \\ u &\rightarrow u' = u + f_{(1),u}(\partial T, \partial\mu, \partial u) + f_{(2),u}(\partial^2 T, \partial T \partial u, \partial T \partial\mu, \partial\mu \partial u, \partial^2\mu, \partial^2 u) + \dots \end{aligned} \quad (2.74)$$

Com esta definição, a parte dissipativa do tensor de energia-momento T^{ab} e a corrente J^a vão depender dos gradientes das variáveis hidrodinâmicas e podem ser escritos em termos de uma expansão em gradientes como

$$\begin{aligned} T_{\text{NPF}}^{ab} &= T_{(1)}^{ab}(\partial T, \partial\mu, \partial u) + \dots + T_{(n)}^{ab}(\partial^n T, \dots, \partial^n \mu, \partial^n u), \\ J_{\text{NPF}}^a &= J_{(1)}^a(\partial T, \partial\mu, \partial u) + \dots + J_{(n)}^a(\partial^n T, \dots, \partial^n \mu, \partial^n u). \end{aligned} \quad (2.75)$$

A forma da dependência das variáveis hidrodinâmicas com seus gradientes vai depender da definição das variáveis hidrodinâmicas T , μ e u^a de forma local [1, 2]. Em hidrodinâmica tal definição se conhece como escolha do *frame* e em seções anteriores analisamos o caso da escolha da velocidade com relação ao *frame* de Landau e de Eckart. Mais tarde veremos que não será necessário conhecer a dependência específica das variáveis termodinâmicas T e μ com seus gradientes ao construir a hidrodinâmica dissipativa por expansão em gradientes. Portanto, só será relevante conhecer, por enquanto, o *frame* em que pode ser definida de forma unívoca a velocidade. Neste trabalho, adotaremos o *frame* de Landau,

$$u_a T_{\text{NPF}}^{ab} = 0, \quad u_a J_{\text{NPF}}^a = 0. \quad (2.76)$$

Fazendo uso das expressões (2.69)-(2.70), temos que

$$\begin{aligned} u_a T^{ab} &= u_a T_{(0)}^{ab} = -\varepsilon u^b - q^b, \\ u_a J^a &= -N. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Nesta última expressão, usamos a ortogonalidade dos coeficientes q^a , J^a e o tensor t_{ab} em (2.70) com respeito ao campo de velocidades u^a e a condição de normalidade do mesmo,

$$u_a q^a = 0, \quad u_a t^{ab} = 0, \quad u_a J^a = 0, \quad u_a u^a = -1. \quad (2.78)$$

Comparando com as expressões (2.69)-(2.70), vemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(0)} &= \epsilon, & \varepsilon_{(1)} &= 0, \dots, \varepsilon_{(n)} = 0 \\ q_{(0)} &= 0, & q_{(1)} &= 0, \dots, q_{(n)} = 0, \\ N_{(0)} &= n, & N_{(1)} &= 0, \dots, N_{(n)} = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Então, as expressões (2.70) assumem a forma

$$T^{ab} = \epsilon u^a u^b + \mathcal{P} \Delta^{ab} + t^{ab}, \quad (2.80)$$

$$J^a = n u^a + j^a. \quad (2.81)$$

2.4.1 Equações de conservação do momento e da energia

Nas seções anteriores, vimos que as equações de conservação para qualquer fluido (ideal ou dissipativo) são determinadas projetando o gradiente do tensor de energia-momento $\nabla_a T^{ab}$ na direção longitudinal e no espaço perpendicular à velocidade u^a , ou seja, $u_a \nabla_b T^{ab} = 0$ e $\Delta^a_b \nabla_c T^{cb} = 0$. Especialmente para um fluido carregado, temos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} u_b \nabla_a T^{ab} &= -\epsilon \Theta + \epsilon u_b D u^b - D \epsilon + u_b \Delta^{ab} \nabla_a \mathcal{P} - \mathcal{P} \Theta + u_b \nabla t^{ab} \\ &= -(\epsilon + p) \Theta - D \epsilon - \Pi \Theta + u_b \nabla t^{ab}; \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \Delta^a_b \nabla_c T^{cb} &= \epsilon u^b \Delta^a_b D u^b + \Delta^a_b \Delta^{cb} \nabla_c \mathcal{P} + \Delta^a_b \mathcal{P} \nabla_c \Delta^{cb} + \Delta^a_b \nabla_c t^{cb} \\ &= \epsilon D u^a + \nabla^a_{\perp} \mathcal{P} + \mathcal{P} D u^a + \Delta^a_b \nabla_c t^{cb} \\ &= (\epsilon + p) D u^a + \nabla^a_{\perp} p + \nabla^a_{\perp} \Pi + \Pi D u^a + \Delta^a_b \nabla_c t^{cb}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

As equações de conservação acima (equivalentes às equações de Navier-Stokes para um fluido clássico) podem ser escritas da seguinte forma compacta:

$$\begin{aligned} u_b \nabla_a T^{ab} &= -D\epsilon - (\epsilon + p)\nabla \cdot \mathbf{u} + \text{termos de ordem superior}, \\ \Delta_b^a \nabla_c T^{cb} &= (\epsilon + p)Du^a + \nabla_{\perp}^a p + \text{termos de ordem superior}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Aqui podemos considerar os termos de ordem superior (os que contêm os termos dissipativos Π e t^{ab} em (2.84)) como uma correção às equações de conservação da hidrodinâmica de ordem zero (equações de conservação para um fluido carregado ideal).

Também podemos usar as relações termodinâmicas $w = \epsilon + p = Ts + \mu n$ e $\delta p = c_s^2 \delta \epsilon$ para reescrever as equações (2.84) em termos da velocidade u^a e da entalpia w :

$$D \ln w = -(1 + c_s^2)\nabla \cdot \mathbf{u} + \text{termos de ordem superior}; \quad (2.85)$$

$$Du^a = -\frac{c_s^2}{(1 + c_s^2)}\nabla_{\perp}^a \ln w + \text{termos de ordem superior}. \quad (2.86)$$

Resulta importante considerar o caso particular em que $n = 0$. Neste caso, $w = Ts$ e as equações (2.85)-(2.86) podem ser expressas em termos da velocidade u^a e da entropia s da seguinte forma:

$$D \ln s = -\nabla \cdot \mathbf{u} + \text{termos de ordem superior}; \quad (2.87)$$

$$Du^a = -c_s^2 \nabla_{\perp}^a \ln s + \text{termos de ordem superior}. \quad (2.88)$$

Essas equações representam as equações de conservação para um fluido sem carga empregadas no artigo [2]. Portanto, as equações (2.85) e (2.86) devem reproduzir os resultados compatíveis com (2.87) e (2.88) tomando $n = 0$.

2.4.2 Equações de movimento

Em conclusão, as equações de movimento para um fluido carregado são as seguintes:

$$D \ln w = -(1 + c_s^2)\nabla \cdot \mathbf{u} + \text{termos de ordem superior}; \quad (2.89)$$

$$Du^a = -\frac{c_s^2}{(1 + c_s^2)}\nabla_{\perp}^a \ln w + \text{termos de ordem superior}, \quad (2.90)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = D \ln n + \text{termos de ordem superior}. \quad (2.91)$$

A última expressão (2.91) foi deduzida a partir da conservação da corrente $\nabla_a J^a = 0$.

3 A CONSTRUÇÃO DA EXPANSÃO EM GRADIENTES

A construção da hidrodinâmica de qualquer ordem maior que zero pela expansão em gradientes, como realizado nos trabalhos [2, 8, 11, 12], consiste em propor uma dependência da parte dissipativa do tensor de energia-momento T^{ab} e da corrente J^a com os gradientes das variáveis hidrodinâmicas T , μ e u . É possível demonstrar, a partir das equações (2.89)-(2.91), que os gradientes de $\ln w$ e u^a podem ser expressos em termos de suas derivadas transversais [2], de modo que a expansão em gradientes possa ser escrita somente em termos das derivadas transversais dessas variáveis. Os elementos escalares, tensoriais e vetoriais da expansão estão sujeitos às restrições advindas das decomposições de T^{ab} e J^a , equações (2.69) e (2.70).

3.1 Hidrodinâmica de primeira ordem

Os ingredientes para a construção da hidrodinâmica de primeira ordem são

$$I^{(1)} = \{\nabla_{\perp a} u_b, \nabla_{\perp a} \ln w\}. \quad (3.1)$$

Conforme mencionado acima, é necessário formar estruturas escalares, vetoriais e tensoriais a partir dos ingredientes acima para que se possa construir a expansão em gradientes de primeira ordem das partes dissipativas do tensor de energia-momento T^{ab} e da corrente J^a . A maneira de fazer isso é contrair as estruturas em (3.1) com os ingredientes de ordem zero,

$$I^{(0)} = \{u_a, g_{ab}\}. \quad (3.2)$$

Se a_1 e a_2 representam os números de ingredientes do tipo u_a e g_{ab} numa dada estrutura, então o número de índices independentes relacionados aos elementos de $I^{(0)}$ será $a_1 + 2a_2$. Portanto, o número de índices independentes numa estrutura de primeiro ordem, depois dos ingredientes de $I^{(1)}$ serem contraídos com os elementos de (3.2), será $a_1 + 2a_2 - 2$ no caso do ingrediente tensorial ($\nabla_{\perp a} u_b$) e $a_1 + 2a_2 - 1$ no caso do ingrediente vetorial ($\nabla_{\perp a} \ln w$). Todas as contrações possíveis podem ser determinadas resolvendo o conjunto de equações

$$\sum_{n=1}^2 a_n [I_n^{(0)}] - [I_m^{(1)}] = \pm N, \quad (3.3)$$

onde $[I_n^{(0)}]$ é o número de índices não contraídos em $I^{(0)}$ e $[I_m^{(1)}]$ representa o número de índices não contraídos em $I^{(1)}$. O sub-índice m em (3.3) tem a função de enumerar as estruturas em $I^{(1)}$. Para o caso das estruturas de primeira ordem apresentadas em (3.1), m assumirá os valores $m = 1, 2$. Por outro lado, N pode assumir os valores $N = \{0, 1, 2\}$, os quais correspondem, respectivamente, aos termos escalares em \mathcal{P} , aos termos vetoriais em j^a e aos termos tensoriais em t^{ab} .

O sinal negativo em (3.3) aparece pelo fato de que os elementos em (3.1) são contraídos com elementos covariantes e contravariantes em (3.2). As equações (3.3) podem ser escritas para cada valor de m como

$$\begin{aligned} m = 1 &\longrightarrow a_1 + 2a_2 - 2 = \pm N, \\ m = 2 &\longrightarrow a_1 + 2a_2 - 1 = \pm N. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para $N = 0$, as soluções de (3.4) são

$$\begin{aligned} m = 1 &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(2, 0), (0, 1)\}, \\ m = 2 &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(0, 1)\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, os possíveis escalares para a expansão de \mathcal{P} virão dos tensores

$$J_0^{(1)} = \{u_a u_b \nabla_{\perp c} u_d, g_{ab} \nabla_{\perp c} u_d, u_a \nabla_{\perp b} \ln w\}. \tag{3.6}$$

Para $N = 1$, as soluções de (3.4) são

$$\begin{aligned} m = 1 &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(3, 0), (1, 1), (1, 0)\}, \\ m = 2 &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(2, 0), (0, 1), (0, 0)\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim, as estruturas vetoriais possíveis serão obtidas dos tensores

$$J_1^{(1)} = \{u_a u_b u_c \nabla_{\perp d} u_e, u_a g_{bc} \nabla_{\perp d} u_e, u_a \nabla_{\perp b} u_c, u_a u_b \nabla_{\perp c} \ln w, g_{ab} \nabla_{\perp c} \ln w, \nabla_{\perp a} \ln w\}. \tag{3.8}$$

Por último, as soluções de (3.4) para $N = 2$ são

$$\begin{aligned} m = 1 &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(4, 0), (2, 1), (0, 2), (0, 0)\}, \\ m = 2 &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(3, 0), (1, 1)\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Então, as possíveis estruturas para a expansão de t^{ab} virão dos tensores

$$\begin{aligned} J_2^{(1)} = \{ & u_a u_b u_c u_d \nabla_{\perp e} u_f, u_a u_b g_{cd} \nabla_{\perp e} u_f, g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} u_f, \nabla_{\perp a} u_b, u_a u_b u_c \nabla_{\perp d} \ln w, \\ & u_a g_{ab} \nabla_{\perp d} \ln w \}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para fazer a escolha dos elementos escalares, vetoriais e tensoriais da expansão em gradientes, podemos fazer uso da condição de normalização $u_a u^a = -1$ e da propriedade da derivada transversal $u_a \nabla_{\perp b} u^a = 0$ para eliminar os elementos duplicados. É importante levar em consideração que o tensor t^{ab} é transversal e simétrico com traço nulo, $t^a_a = 0$; portanto, os elementos escolhidos em (3.10) são aqueles que satisfazem esse critérios e permanecem não-nulos após a seguinte operação:

$$A^{(ab)} = \frac{1}{2} \Delta^{ac} \Delta^{bd} (A_{dc} + A_{cd}) - \frac{1}{d-1} \Delta^{ab} \Delta^{cd} A_{cd}. \quad (3.11)$$

As estruturas tensoriais da forma (3.11) são chamados de TST (Symmetric Traceless Tensors).

Finalmente, os elementos de primeira ordem para a expansão em gradientes são os seguintes:

$$\begin{aligned} J_0^{(1)} &\rightarrow \{g_{ab} \nabla_{\perp c} u_d\} \rightarrow \{\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}\}, \\ J_1^{(1)} &\rightarrow \{g_{ab} \nabla_{\perp c} \ln w, \nabla_{\perp a} \ln w\} \rightarrow \{\nabla_{\perp a} \ln w\}, \\ J_2^{(1)} &\rightarrow \{g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} u_f, \nabla_{\perp a} u_b\} \rightarrow \{\nabla_{\perp a} u_b\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Combinando com os coeficientes de transporte, temos os seguintes termos de 1ª ordem:

$$\mathcal{P}_{(1)} = -\zeta \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u} = -\zeta \Theta, \quad (3.13)$$

$$j_{(1)}^a = \gamma \nabla_{\perp a} \ln w, \quad (3.14)$$

$$t_{(1)}^{ab} = -\eta \sigma^{ab}. \quad (3.15)$$

Como em (3.13) e (3.15) os termos dissipativos $\mathcal{P}_{(1)}$ e $t_{(1)}^{ab}$ dependem linearmente da expansão Θ e do tensor de cisalhamento σ^{ab} , os coeficientes de transporte ζ e η podem ser interpretados como coeficientes de viscosidade (como foi demonstrado no capítulo anterior para a hidrodinâmica de primeira ordem para fluidos newtonianos) similares aos coeficientes que aparecem no tensor de tensões (1.38). Por outro lado, o coeficiente γ pode ser interpretado como um coeficiente que reflete os efeitos de difusão no fluido, pois os fenômenos de difusão são aqueles não-reversíveis (ou de caráter dissipativo) representados, neste caso, na corrente $j_{(1)}^a$. A

interpretação dos coeficientes de transporte para uma hidrodinâmica de ordem superior (2ª ordem ou mais) não serão tão evidentes como no presente caso, pois a interpretação física das estruturas de ordem superior não resulta simples [2].

Como consequência do exposto acima, o tensor energia-momento T^{ab} e a corrente J^a na hidrodinâmica de primeira ordem são

$$T^{ab} = \epsilon u^a u^b - \zeta \nabla_{\perp} \cdot u \Delta^{ab} - \eta \sigma^{ab}, \quad (3.16)$$

$$J^a = n u^a + \gamma \nabla_{\perp}^a \ln w. \quad (3.17)$$

3.2 Hidrodinâmica de segunda ordem

Para a construção das teorias hidrodinâmicas de segunda e de terceira ordem, segue-se o mesmo procedimento da seção anterior. Em outras palavras, faz-se uma proposta dos ingredientes, nesses casos $I^{(2)}$ e $I^{(3)}$, e são determinadas todas as possíveis contrações com a estrutura $I^{(0)}$ para obter os candidatos a tensores, vetores e escalares com as restrições já especificadas.

Os ingredientes para a hidrodinâmica de segunda ordem são

$$I^{(2)} = \{ \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} u_c, \nabla_{\perp a} u_b \nabla_{\perp c} u_d, \nabla_{\perp a} u_b \nabla_{\perp c} \ln w, \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} \ln w, \nabla_{\perp a} \ln w \nabla_{\perp b} \ln w, R_{abcd} \}. \quad (3.18)$$

Além de ter como ingredientes as derivadas transversais de primeira e segunda ordem para u^a e $\ln w$, o tensor de curvatura R_{abcd} também aparece em (3.18). O tensor de curvatura de Riemann, definido pela relação $[\nabla_a, \nabla_b]u^c = R^c_{bad}u^d$, é introduzido como um ingrediente na hidrodinâmica de segunda ordem, no lugar das estruturas que resultam da permutação de índices das derivadas covariantes ∇ em estruturas do tipo $\nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} u_c$ [8].

Das equações de movimento (2.89)-(2.91), é possível demonstrar que os gradientes de u^a e $\ln w$ podem ser expressos em termos de derivadas transversais mais gradientes de ordem superior,

$$\nabla_b u_a = \nabla_{\perp b} u_a + \frac{c_s^2}{1 + c_s^2} u_b \nabla_{\perp a} \ln w + \text{derivadas de ordem superior}, \quad (3.19)$$

$$\nabla_b \ln w = \nabla_{\perp b} \ln w + (1 + c_s^2) u_b \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u} + \text{derivadas de ordem superior}. \quad (3.20)$$

Por meio da relação (3.19) é possível chegar na seguinte expressão [2]:

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_{\perp b} u_a &= -u_c \Delta_b^e R_{faed} u^d u^f + f(\nabla_{\perp c} \nabla_{\perp b} u_a, \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp b} \ln w) \\ &+ \text{derivadas de ordem superior.} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Desta maneira, provamos que o gradiente da derivada transversal de u^a pode ser expresso em termos do tensor de curvatura e em função de derivadas transversais de segunda ordem de u^a e $\ln w$, além de correções de ordem superior que, na construção da hidrodinâmica de segunda ordem, podem ser ignorados [2]. Porém, isto demonstra que as derivadas transversais de u^a e $\ln w$, assim como o tensor de Riemann R_{abcd} , são os graus de liberdade da hidrodinâmica relativística de qualquer ordem [2, 8].

Para a determinação das estruturas escalares, vetoriais e tensoriais, utilizaremos o mesmo procedimento da seção anterior. O número de estruturas possíveis após a contração dos ingredientes $I^{(2)}$ com as estruturas $I^{(0)}$ é determinado pela equação

$$\sum_{n=1}^2 a_n [I_n^{(0)}] - [I_m^{(2)}] = \pm N. \quad (3.22)$$

As equações para cada valor de m em (3.22) são dadas por:

$$\begin{aligned} m = 1, \quad m = 3 &\longrightarrow a_1 + 2a_2 - 3 = \pm N; \\ m = 2, \quad m = 6 &\longrightarrow a_1 + 2a_2 - 4 = \pm N; \\ m = 4, \quad m = 5 &\longrightarrow a_1 + 2a_2 - 2 = \pm N. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Após resolver as equações (3.23) para cada valor de N e construir todas as estruturas possíveis, temos finalmente os candidatos a estruturas tensoriais de 2ª ordem independentes. O conjunto de soluções possíveis para os coeficientes a_1, a_2 para os elementos escalares ($N = 0$) são

$$\begin{aligned} m = 1, \quad m = 3, &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(3, 0), (1, 1)\}, \\ m = 2, \quad m = 6, &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(4, 0), (2, 1), (0, 2)\}, \\ m = 4, \quad m = 5, &\longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(2, 0), (0, 1)\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Desta forma, os candidatos para $N = 0$ são

$$\begin{aligned} g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} u_f \nabla_{\perp g} u_h, & \quad g_{ab} \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp d} \ln w, & \quad g_{ab} \nabla_{\perp c} \ln w \nabla_{\perp d} \ln w, \\ u_a u_b u_c u_d R_{efgh}, & \quad u_a u_b g_{cd} R_{efgh}, & \quad g_{ab} g_{cd} R_{efgh}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Os elementos independentes para $N = 0$ são, então,

$$\begin{aligned} g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp_e}u_f\nabla_{\perp_g}u_h &\longrightarrow (\nabla_{\perp_a}u^a\nabla_{\perp_b}u^b \rightarrow \Theta^2, \\ &\nabla_{\perp_a}u^b\nabla_{\perp_b}u^a \rightarrow \sigma^{ab}\sigma_{ab}, \\ &\nabla_{\perp_a}u^b\nabla_{\perp_b}u^a \rightarrow \Omega^{ab}\Omega_{ab}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$g_{ab}\nabla_{\perp_c}\nabla_{\perp_d}\ln w \longrightarrow \nabla_{\perp_a}\nabla_{\perp_a}\ln w \rightarrow D\Theta, \quad (3.27)$$

$$g_{ab}\nabla_{\perp_c}\ln w\nabla_{\perp_d}\ln w \longrightarrow \nabla_{\perp_a}\ln w\nabla_{\perp_a}\ln w, \quad (3.28)$$

$$u_a u_b u_c u_d R_{efgh} \longrightarrow u^a u^b u^c u^d R_{abcd} = 0, \quad (3.29)$$

$$u_a u_b g_{cd} R_{efgh} \longrightarrow u_a u_b R^{ca b} = u_a u_b R^{ab}, \quad (3.30)$$

$$g_{ab}g_{cd}R_{efgh} \longrightarrow R^{ab}{}_{ab} = R. \quad (3.31)$$

Agora, considerando os tensores

$$\sigma^{ab} = \nabla_{\perp_a}u^b + \nabla_{\perp_b}u^a - \frac{1}{d-1}\Delta^{ab}\nabla_{\perp_c}u^c, \quad (3.32)$$

$$\Omega^{ab} = \nabla_{\perp_a}u^b - \nabla_{\perp_b}u^a, \quad (3.33)$$

o gradiente $\nabla_{\perp_a}u^b$ pode ser escrito em termos de σ^{ab} , Ω^{ab} e Θ da seguinte forma:

$$\nabla_{\perp_a}u^b = \frac{1}{2}\sigma_a{}^b + \Omega_a{}^b + \frac{1}{d-1}\Delta_a{}^b\Theta. \quad (3.34)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp_a}u^b\nabla_{\perp_b}u^a &= \frac{1}{4}\sigma^{ab}\sigma_{ab} + \Omega^{ab}\Omega_{ab} + \frac{1}{(d-1)^2}\Delta^{ab}\Delta_{ab}\Theta^2 \\ &= \frac{1}{4}\sigma^{ab}\sigma_{ab} + \Omega^{ab}\Omega_{ab} + \frac{\Theta^2}{d-1}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

justificando as operações realizadas em (3.26).

Nas equações acima, usamos o caráter antissimétrico do tensor Ω^{ab} e o caráter simétrico dos tensores σ^{ab} e Δ^{ab} para anular os termos

$$\sigma^{ab}\Omega_{ab} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta^{ab}\Omega_{ab} = 0, \quad (3.36)$$

e obter a expressão

$$\Delta^{ab}\Delta_{ab} = d - 1. \quad (3.37)$$

Usando a equação de movimento (2.90), é possível escrever o elemento $\nabla_{\perp a} \nabla_{\perp}^a \ln w$ em termos de $D\Theta$:

$$D\Theta = \nabla_{\perp a} D u^a = -\frac{c_s^2}{1+c_s^2} \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp}^a \ln w + \text{termos de ordem superior.} \quad (3.38)$$

Por fim, o elemento $u^a u^b u^c u^d R_{abcd}$ em (3.31) se anula pelo caráter simétrico de qualquer par $u^a u^b$ e pelo caráter antissimétrico do tensor de curvatura R_{abcd} com relação à troca dos primeiros pares de índices (esta propriedade também é válida com respeito à troca dos últimos pares de índices) $R_{abcd} = -R_{bacd}$ ($R_{abcd} = -R_{abdc}$).

Para $N = 1$, temos o seguinte conjunto de soluções:

$$m = 1, m = 3, \quad \longrightarrow \quad \{(a_1, a_2)\} = \{(4, 0), (2, 1), (0, 2), (2, 0), (0, 1)\} \quad (3.39)$$

$$m = 2, m = 6, \quad \longrightarrow \quad \{(a_1, a_2)\} = \{(5, 0), (3, 1), (1, 2), (3, 0), (1, 1)\} \quad (3.40)$$

$$m = 4, m = 5, \quad \longrightarrow \quad \{(a_1, a_2)\} = \{(3, 0), (1, 1), (1, 0)\} \quad (3.41)$$

o que leva aos candidatos

$$\begin{aligned} &g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} \nabla_{\perp f} u_g, \quad g_{ab} \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp d} u_e, \quad g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} u_f \nabla_{\perp g} \ln w, \quad g_{ab} \nabla_{\perp c} u_d \nabla_{\perp e} \ln w, \\ &u_a u_b u_c u_d u_e R_{fghi}, \quad u_a u_b u_c g_{de} R_{fghi}, \quad u_a g_{bc} g_{de} R_{fghi}, \quad u_a u_b u_c R_{defg}, \quad u_a g_{bc} R_{defg}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora, para construir os elementos vetoriais independentes, devemos levar em conta que eles precisam ser vetores transversais com relação ao campo de velocidades u^a . Ou seja, se $\mathcal{V}_{i(1)}^a$ com $i = 1, 2, 3, \dots$ é um elemento vetorial, ele deve satisfazer a condição

$$u_a \mathcal{V}_{i(2)}^a = 0. \quad (3.43)$$

Por exemplo, a partir do elemento $g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} \nabla_{\perp f} u_g$ poderão ser construídas as seguintes estruturas vetoriais:

$$g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} \nabla_{\perp f} u_g \rightarrow \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^b u^a \quad \text{e} \quad \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp b} u^b. \quad (3.44)$$

Se fazemos uso de (3.32) e (3.33), os elementos vetoriais em (3.44) poderão ser trocados pelos elementos $\nabla_{\perp b} \sigma^{ba}$ e $\nabla_{\perp b} \Omega^{ba}$. Agora, conforme observado acima, devemos verificar se estes elementos são efetivamente transversais com relação ao campo de velocidades u^a . Começamos

inspecionando o vetor $\nabla_{\perp b}\sigma^{ba}$:

$$u_a \nabla_{\perp b} \sigma^{ba} = u_a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^a u^b + u_a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^b u^a - \frac{1}{d-1} u_a \nabla_{\perp b} (\Delta^{ab} \nabla_{\perp c} u^c). \quad (3.45)$$

Da condição de normalização $u_a u^a = -1$ e transversalidade $u_a \nabla_{\perp}^a = 0$, obtemos os seguintes resultados:

$$\nabla_{\perp b} (u_a \nabla_{\perp}^b u^a) = u_a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^b u^a + \nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^b u^a = 0 \Rightarrow u_a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^a u^b = -\nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^b u^a, \quad (3.46)$$

$$\nabla_{\perp b} (u_a \nabla_{\perp}^a u^b) = u_a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^a u^b + \nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^a u^b = 0 \Rightarrow u_a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^a u^b = -\nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^a u^b. \quad (3.47)$$

Para o último termo em (3.45), temos

$$\begin{aligned} u_a \nabla_{\perp b} (\Delta^{ab} \nabla_{\perp c} u^c) &= u^b \nabla_{\perp b} u^a (\nabla \cdot u) + u^a \nabla_{\perp b} u^b (\nabla \cdot u) + \nabla_{\perp}^a (\nabla \cdot u) \\ &= u^a (\nabla \cdot u)^2 + \nabla_{\perp}^a (\nabla \cdot u) \\ &= u^a \Theta^2 + \nabla_{\perp}^a \Theta. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Desta forma, considerando as expressões (3.46)-(3.48) e (3.35), o escalar $u_a \nabla_{\perp b} \sigma^{ba}$ se reduz à

$$\begin{aligned} u_a \nabla_{\perp b} \sigma^{ba} &= -\nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^b u^a - \nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^a u^b - \frac{2u_a u^a}{d-1} \Theta^2 - \frac{2u_a}{d-1} \nabla_{\perp}^a \Theta \\ &= -\frac{1}{4} \sigma^{ab} \sigma_{ab} - \Omega^{ab} \Omega_{ab} + \frac{2\Theta^2}{d-1} - \frac{1}{4} \sigma^{ab} \sigma_{ab} + \Omega^{ab} \Omega_{ab} - \frac{2\Theta^2}{d-1} \\ &= -\frac{1}{2} \sigma^{ab} \sigma_{ab} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Observa-se de (3.49) que o elemento $\nabla_{\perp b} \sigma^{ba}$ não é um vetor transversal, mas é possível construir um vetor transversal usando o resultado (3.49) da seguinte forma:

$$\mathcal{V}_{1(1)}^a = \nabla_{\perp b} \sigma^{ba} - \frac{1}{2} u^a \sigma^{bc} \sigma_{bc}. \quad (3.50)$$

De maneira similar para $u_a \nabla_{\perp b} \Omega^{ba}$, usando (3.46) e (3.47), encontramos

$$\begin{aligned} u_a \nabla_{\perp b} \Omega^{ba} &= -\frac{1}{2} \nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^b u^a + \frac{1}{2} \nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^a u^b = \nabla_{\perp b} u_a \left[\frac{1}{2} (\nabla_{\perp}^a u^b - \nabla_{\perp}^b u^a) \right] \\ &= \nabla_{\perp b} u_a \Omega^{ab} = -\Omega_{ab} \Omega^{ab} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

De novo vemos em (3.51) que o elemento $\nabla_{\perp b} \Omega^{ba}$ não é um vetor transversal, mas de maneira

análoga à (3.50) é possível construir um vetor transversal utilizando o elemento $\nabla_{\perp b}\Omega^{ba}$:

$$\mathcal{V}_{2(1)}^a = \nabla_{\perp b}\Omega^{ba} - u^a\Omega_{bc}\Omega^{bc}. \quad (3.52)$$

Seguindo a mesma metodologia, os outros elementos independentes são facilmente obtidos:

$$g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}u_f\nabla_{\perp g}\ln w \longrightarrow \{\nabla_{\perp}^b u^a\nabla_{\perp b}\ln w, \quad \Theta\nabla_{\perp}^a\ln w, \quad \nabla_{\perp}^a u^b\nabla_{\perp b}\ln w\}; \quad (3.53)$$

$$\longrightarrow \{\sigma^{ab}\nabla_{\perp b}\ln w, \quad \Omega^{ab}\nabla_{\perp b}\ln w, \quad \Theta\nabla_{\perp}^a\ln w\}; \quad (3.54)$$

$$u_a u_b u_c u_d u_e R_{fghi} \longrightarrow u^a u^b u^c u^d u^e R_{bcde} = 0; \quad (3.55)$$

$$u_a u_b u_c g_{de} R_{fghi} \longrightarrow \{u^a u^c u^d R_{bcd}^a = 0, \quad u^a u^b u^c R_{bc} \rightarrow \Delta^{ab} u_b u_c u^d R_{cd} = 0\}; \quad (3.56)$$

$$u_a g_{bc} g_{de} R_{fghi} \longrightarrow \{u^a R, \quad u^b R_b^a \rightarrow \{\Delta^{ab} u_b R = 0, \quad \Delta^{ab} u^c R_{bc}\}\}. \quad (3.57)$$

Em (3.54), expressamos os elementos de (3.53) em termos dos quantidades $\{\sigma^{ab}, \Omega^{ab}, \nabla_{\perp b}\ln w\}$, de modo que é fácil perceber que os elementos em (3.54) constituem vetores transversais. Por outro lado, vemos em (3.56) e (3.57) que precisamos introduzir o tensor de projeção Δ^{ab} para obter vetores transversais a partir dos elementos originais. Em (3.55) foi usada a propriedade de simetria do tensor de curvatura: $R_{abcd} = -R_{bacd}$. Acima, não foram analisadas todas as estruturas de (3.42), pois elas não produzem novos elementos vetoriais independentes aos já obtidos. Entre estas estruturas, temos

$$g_{ab}\nabla_{\perp c}\nabla_{\perp d}u_e \quad \text{e} \quad g_{ab}\nabla_{\perp c}u_d\nabla_{\perp e}\ln w. \quad (3.58)$$

As soluções de (3.23) para $N = 2$ são

$$m = 1, m = 3, \quad \longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(5, 0), (3, 1), (1, 2), (1, 0)\}, \quad (3.59)$$

$$m = 4, m = 5, \quad \longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(4, 0), (2, 1), (0, 2), (0, 0)\}, \quad (3.60)$$

$$m = 2, m = 6, \quad \longrightarrow \{(a_1, a_2)\} = \{(6, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3), (2, 0), (0, 1)\}, \quad (3.61)$$

levando aos seguintes candidatos:

$$\begin{aligned} &g_{ab}g_{cd}g_{ef}\nabla_{\perp g}u_h\nabla_{\perp i}u_j, & g_{ab}\nabla_{\perp c}u_d\nabla_{\perp e}u_f, & g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}\ln w, \\ &\nabla_{\perp a}\nabla_{\perp b}\ln w, & g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\ln w\nabla_{\perp f}\ln w, & \nabla_{\perp a}\ln w\nabla_{\perp b}\ln w, \\ &u_a u_b u_c u_d u_e u_f R_{ghij}, & u_a u_b u_c u_d g_{ef} R_{ghij}, & u_a u_b g_{cd} g_{ef} R_{ghij}, \\ &g_{ab}g_{cd}g_{ef} R_{ghij}, & u_a u_b R_{cdef}, & g_{ab} R_{cdef}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Precisamos agora construir elementos tensoriais TST (Traceless Symmetric Tensors) a partir destes candidatos, aplicando aos elementos independentes, produzidos a partir deles, a expressão (3.11) apresentada no início deste capítulo. Todo elemento independente que não seja nulo após aplicarmos a operação (3.11) é considerado um tensor do tipo TST. Dessa forma, podemos passar diretamente à obtenção dos elementos independentes que resultam após aplicarmos a operação mencionada:

$$g_{ab}g_{cd}g_{ef}\nabla_{\perp g}u_h\nabla_{\perp i}u_j \longrightarrow \{g^{(ab)}\Theta^2, \quad g^{(ab)}\nabla_{\perp}^c u_d\nabla_{\perp}^d u_c, \quad g^{(ab)}\nabla_{\perp}^c u^d\nabla_{\perp c}u_d\}, \quad (3.63)$$

$$g_{ab}\nabla_{\perp c}u_d\nabla_{\perp e}u_f \longrightarrow \{\Theta\nabla_{\perp}^{(a}u^{b)}, \quad \nabla_{\perp}^c u^{(a}\nabla_{\perp c}u^{b)}, \quad \nabla_{\perp}^c u^{(a}\nabla_{\perp}^{b)}u_c, \quad \nabla_{\perp}^{(a}u^c\nabla_{\perp}^{b)}u_c\}, \quad (3.64)$$

$$g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}\ln w \longrightarrow \{g^{(ab)}\nabla_{\perp}^c\nabla_{\perp c}\ln w = 0, \quad \nabla_{\perp}^a\nabla_{\perp}^b\ln w \rightarrow \nabla_{\perp}^{(a}\nabla_{\perp}^{b)}\ln w\}, \quad (3.65)$$

$$g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\ln w\nabla_{\perp f}\ln w \longrightarrow \{g^{(ab)}\nabla_{\perp}^c\ln w\nabla_{\perp c}\ln w = 0, \\ \nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp}^b\ln w \rightarrow \nabla_{\perp}^{(a}\ln w\nabla_{\perp}^{b)}\ln w\}, \quad (3.66)$$

$$u_a u_b u_c u_d u_e u_f R_{ghij} \longrightarrow u^{(a}u^{b)}u^c u^d u^e u^f R_{cdef} = 0 \quad (3.67)$$

$$u_a u_b u_c u_d g_{ef} R_{ghij} \longrightarrow \{u^{(a}u^{b)}u^c u^d R_{cd} = 0, \quad g^{(ab)}u^c u^d u^e u^f R_{cdef} = 0\}, \quad (3.68)$$

$$u_a u_b g_{cd} g_{ef} R_{ghij} \longrightarrow u_c R^{c(ab)d} u_d, \quad (3.69)$$

$$g_{ab} g_{cd} g_{ef} R_{ghij} \longrightarrow g^{(ab)} R = 0, \quad (3.70)$$

$$g_{ab} R_{cdef} \longrightarrow R^{(ab)}. \quad (3.71)$$

Em (3.63) todos os elementos construídos são nulos, pois no processo de transformar o tensor métrico g^{ab} em um tensor TST com a aplicação de (3.11), obtemos

$$g^{(ab)} = \frac{1}{2}\Delta^{ac}\Delta^{bd}(g_{dc} + g_{cd}) - \frac{1}{d-1}\Delta^{ab}\Delta^{cd}g_{cd} \\ = \Delta^{ac}\Delta^{bd}g_{cd} - \frac{1}{d-1}\Delta^{ab}\Delta^c_c = \Delta^{ab} - \Delta^{ab} = 0. \quad (3.72)$$

Usando a equação de movimento (2.90), é possível expressar o último elemento em (3.66), $\nabla_{\perp}^{(a}\nabla_{\perp}^{b)}\ln w$, em termos do tensor $D\sigma^{ab}$:

$$D\sigma^{ab} = D(\nabla_{\perp}^{(a}u^{b)}) = \nabla_{\perp}^{(a}D u^{b)} = -\frac{c_s^2}{1+c_s^2}\nabla_{\perp}^{(a}\nabla_{\perp}^{b)}\ln w + \text{termos de ordem superior}. \quad (3.73)$$

Por outro lado, as estruturas tensoriais em (3.64) podem ser expressas em termos dos elementos

$$\sigma^{ab}\Theta, \quad \sigma^{(a}{}_c\sigma^{b)c}, \quad \sigma^{(a}{}_c\Omega^{b)c} \quad \text{e} \quad \Omega^{(a}{}_c\Omega^{b)c}. \quad (3.74)$$

Por exemplo, o elemento $\Theta \nabla_{\perp}^a u^b$ pode ser facilmente trocado pelo elemento $2\Theta \nabla_{\perp}^{(a} u^{b)} = \sigma^{ab} \Theta$ após a aplicação de (3.11). A dependência dos demais tensores em (3.64) com os elementos (3.74) se torna evidente ao analisarmos o seguinte produto:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^c u^a \nabla_{\perp c} u^b &= \left[\frac{1}{2} \sigma^{ca} + \Omega^{ca} + \frac{1}{d-1} \Delta^{ca} \Theta \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \sigma_c^b + \Omega_c^b + \frac{1}{d-1} \Delta_c^b \Theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \sigma^{ca} \sigma_c^b + \sigma^{ca} \Omega_c^b + \Omega^{ca} \Omega_c^b + \sigma^{ab} \frac{\Theta}{d-1} + \Delta^{ab} \frac{\Theta^2}{(d-1)^2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Finalmente, ao transformar esta expressão em um tensor TST, temos

$$\nabla_{\perp}^c u^{(a} \nabla_{\perp c} u^{b)} = \frac{1}{4} \sigma^{c(a} \sigma_c^{b)} + \sigma^{c(a} \Omega_c^{b)} + \Omega^{c(a} \Omega_c^{b)} + \sigma^{ab} \frac{\Theta}{d-1}, \quad (3.76)$$

onde o termo $\Delta^{(ab)} = 0$ seguindo o mesmo procedimento de (3.72). Para compatibilizar os nossos resultados com as abordagens mais tradicionais da hidrodinâmica de 2ª ordem, podemos formar um novo elemento independente a partir dos elementos $\sigma^{ab} \Theta$ e $D\sigma^{ab}$:

$$\mathcal{T}_1^{ab} = D\sigma^{ab} + \frac{1}{d-1} \sigma^{ab} \Theta \quad (3.77)$$

Do mesmo modo, podemos formar um novo elemento combinando $R^{(ab)}$ com $u_c R^{c(ab)d} u_d$ da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_2^{ab} = R^{(ab)} - (d-2) u_c R^{c(ab)d} u_d. \quad (3.78)$$

Finalizamos esta seção, apresentando abaixo o conjunto completo de estruturas de segunda ordem independentes:

- Escalares ($N = 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^{(2)} &= D\Theta, & \mathcal{S}_2^{(2)} &= \sigma^{ab} \sigma_{ab}, & \mathcal{S}_3^{(2)} &= \Theta^2, & \mathcal{S}_4^{(2)} &= \Omega^{ab} \Omega_{ab}, \\ \mathcal{S}_5^{(2)} &= \nabla_{\perp a} \ln w \nabla_{\perp}^a \ln w, & \mathcal{S}_6^{(2)} &= R, & \mathcal{S}_7^{(2)} &= u_a u_b R^{ab}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

- Vetoriais ($N = 1$):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1^{a(2)} &= \nabla_{\perp b} \sigma^{ba} - \frac{1}{2} u^a \sigma^{bc} \sigma_{bc}, & \mathcal{V}_2^{a(2)} &= \nabla_{\perp b} \Omega^{ab} - u^a \Omega^{bc} \Omega_{bc}, \\ \mathcal{V}_3^{a(2)} &= \sigma^{ba} \nabla_{\perp b} \ln w, & \mathcal{V}_4^{a(2)} &= \Theta \nabla_{\perp}^a \ln w, & \mathcal{V}_5^{a(2)} &= \Delta^{ab} u^c R_{bc}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

• Tensoriais ($N = 2$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1^{ab(2)} &= D\sigma^{ab} + \frac{1}{d-1}\sigma^{ab}\Theta, & \mathcal{T}_2^{ab(2)} &= R^{(ab)} - (d-2)u_c u_d R^{c(ab)d}, \\
\mathcal{T}_3^{ab(2)} &= \frac{1}{d-1}\sigma^{ab}\Theta, & \mathcal{T}_4^{ab(2)} &= u_c R^{c(ab)d} u_d, & \mathcal{T}_5^{ab(2)} &= \sigma_c^{(a}\sigma^{b)c}, \\
\mathcal{T}_6^{ab(2)} &= \sigma_c^{(a}\Omega^{b)c}, & \mathcal{T}_7^{ab(2)} &= \Omega_c^{(a}\Omega^{b)c}, & \mathcal{T}_8^{ab(2)} &= \nabla_{\perp}^{(a}\ln w \nabla_{\perp}^{b)}\ln w.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Dessa forma, poderemos escrever \mathcal{P} , j^a e t^{ab} como uma combinação linear destes elementos:

$$\mathcal{P}_{(2)} = \zeta\tau_{\pi}D\Theta + \xi_1\sigma^{ab}\sigma_{ab} + \xi_2\Theta^2 + \xi_3\Omega^{ab}\Omega_{ab} + \xi_4R + \xi_5\nabla_{\perp a}\ln w \nabla_{\perp}^a\ln w + \xi_6u_a u_b R^{ab}, \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
j_{(2)}^a &= v_1^{(2,1)} \left(\nabla_{\perp b}\sigma^{ba} - \frac{1}{2}u^a\sigma^{bc}\sigma_{bc} \right) + v_2^{(2,1)} \left(\nabla_{\perp b}\Omega^{ab} - u^a\Omega^{bc}\Omega_{bc} \right) + v_3^{(2,1)}\sigma^{ba}\nabla_{\perp b}\ln w \\
&+ v_4^{(2,1)}u^b\nabla_{\perp}^a\ln w + v_5^{(2,1)}\Delta^{ab}u^c R_{bc},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}
t_{(2)}^{ab} &= \eta\tau_{\Pi} \left(D\sigma^{ab} + \frac{1}{d-1}\sigma^{ab}\Theta \right) + \kappa \left(R^{(ab)} - (d-2)u_c u_d R^{c(ab)d} \right) + \frac{1}{d-1}\eta\tau_{\Pi}^*\sigma^{ab}\Theta \\
&+ 2\kappa^*u_c R^{c(ab)d}u_d + \lambda_1\sigma_c^{(a}\sigma^{b)c} + \lambda_2\sigma_c^{(a}\Omega^{b)c} + \lambda_3\sigma_c^{(a}\Omega^{b)c} + \lambda_4\nabla_{\perp}^{(a}\ln w \nabla_{\perp}^{b)}\ln w.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

3.3 Hidrodinâmica de terceira ordem

Os ingredientes para construir a hidrodinâmica de terceira ordem são os seguintes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^{(3)} &= \{ \nabla_{\perp a}\nabla_{\perp b}\nabla_{\perp c}u_d, \nabla_{\perp a}\nabla_{\perp b}u_c\nabla_{\perp d}u_c, \nabla_{\perp a}u_b\nabla_{\perp c}u_d\nabla_{\perp e}u_f, \\
&\nabla_{\perp a}\nabla_{\perp b}u_c\nabla_{\perp d}\ln w, \nabla_{\perp a}u_b\nabla_{\perp c}\nabla_{\perp d}\ln w, \nabla_{\perp a}\nabla_{\perp b}\nabla_{\perp c}\ln w, \\
&\nabla_{\perp a}u_b\nabla_{\perp c}\ln w\nabla_{\perp d}\ln w, \nabla_{\perp a}\nabla_{\perp b}\nabla_{\perp c}\ln w, \nabla_{\perp a}\ln w\nabla_{\perp b}\ln w\nabla_{\perp c}\ln w, \\
&\nabla_{\perp a}u_b\nabla_{\perp c}u_d\nabla_{\perp e}\ln w, \nabla_{\perp a}u_b R_{cdef}, \nabla_{\perp a}\ln w R_{bcde}, \nabla_a R_{bcde} \}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

O número de estruturas possíveis, que podem ser construídas a partir da contração dos ingredientes de $\mathbb{I}^{(3)}$ com aqueles de $\mathbb{I}^{(0)}$, é obtido resolvendo as equações

$$\sum_{n=1}^2 a_n [\mathbb{I}_n^{(0)}] - [\mathbb{I}_m^{(3)}] = \pm N. \tag{3.86}$$

Todas as equações resumidas em (3.86) são apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned}
m = 1, m = 4, m = 5, m = 12, & \longrightarrow a_1 + 2a_2 - 4 = \pm N; \\
m = 2, m = 10, m = 11, m = 13, & \longrightarrow a_1 + 2a_2 - 5 = \pm N;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 3, m = 9, & \longrightarrow a_1 + 2a_2 - 6 = \pm N; \\
m = 6, m = 7, m = 8, & \longrightarrow a_1 + 2a_2 - 3 = \pm N.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

3.3.1 Estruturas escalares de 3ª ordem

Resolvendo o sistema de equações (3.86) para cada valor de N ($N = \{0, 1, 2\}$) e após a construção de todas as estruturas independentes possíveis, obteremos os elementos escalares, vetoriais e tensoriais para a construção de hidrodinâmica de terceira ordem. Assim, para $N = 0$, o conjunto de soluções de (3.87) é dado por:

$$\begin{aligned}
m = 1, m = 12, & \{a_1, a_2\} = \{(4, 0), (2, 1), (0, 2)\}; \\
m = 3, & \{a_1, a_2\} = \{(0, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3)\}; \\
m = 4, m = 5, & \{a_1, a_2\} = \{(4, 0), (2, 1), (0, 2)\}; \\
m = 6, m = 7, m = 8, & \{a_1, a_2\} = \{(3, 0), (1, 1)\}; \\
m = 9, & \{a_1, a_2\} = \{(6, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3)\}; \\
m = 10, m = 11, m = 13; & \{a_1, a_2\} = \{(5, 0), (3, 1), (2, 2), (0, 3)\}.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Os candidatos para a construção das estruturas independentes associadas a este conjunto de soluções são os seguintes:

$$\begin{aligned}
& g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}\nabla_{\perp g}u_h, \quad g_{ab}g_{cd}g_{ef}\nabla_{\perp g}u_h\nabla_{\perp i}u_j\nabla_{\perp l}u_m, \quad g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}u_g\nabla_{\perp h}\ln w, \\
& \nabla_{\perp c}u_d\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}\ln w, \quad u_a u_b u_c u_d u_e u_f R_{ijklm}\nabla_{\perp g}u_h, \quad u_a u_b u_c u_d g_{ef} R_{ijklm}\nabla_{\perp g}u_h, \\
& g_{ab}g_{cd}R_{ijklm}\nabla_{\perp g}u_h, \quad g_{ab}g_{cd}g_{ef}R_{ijklm}\nabla_{\perp g}u_h, \quad u_a u_b u_c u_d u_e R_{ijklm}\nabla_{\perp f}\ln w, \\
& u_a u_b u_c g_{de}R_{ijklm}\nabla_{\perp f}\ln w, \quad u_a g_{bc}g_{de}R_{ijklm}\nabla_{\perp f}\ln w, \quad u_a u_b u_c u_d u_e \nabla_{\perp f}R_{ghij}, \\
& u_a u_b u_c g_{de}\nabla_{\perp f}R_{ghij}, \quad u_a g_{bc}g_{de}\nabla_{\perp f}R_{ghij}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

No que segue são mostradas todas as estruturas independentes possíveis, construídas a partir destes candidatos:

$$\begin{aligned}
& g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}\nabla_{\perp g}u_h \longrightarrow \{\nabla_{\perp b}\nabla_{\perp}^b\nabla_{\perp a}u^a, \nabla_{\perp b}\nabla_{\perp a}\nabla_{\perp}^b u^a, \nabla_{\perp a}\nabla_{\perp b}\nabla_{\perp}^b u^a\} \\
& \longrightarrow \{\nabla_{\perp}^2\Theta, \nabla_{\perp b}\nabla_{\perp a}\sigma^{ba}, \nabla_{\perp b}\nabla_{\perp a}\Omega^{ba}\}; \\
& g_{ab}g_{cd}g_{ef}\nabla_{\perp g}u_h\nabla_{\perp i}u_j\nabla_{\perp l}u_m \longrightarrow \{\nabla_{\perp a}u^a\nabla_{\perp b}u^b\nabla_{\perp c}u^c, \nabla_{\perp a}u^a\nabla_{\perp c}u_b\nabla_{\perp}^c u^b, \\
& \nabla_{\perp a}u^a\nabla_{\perp b}u_c\nabla_{\perp}^c u^b, \nabla_{\perp b}u^a\nabla_{\perp a}\nabla_{\perp c}u_b, \nabla_{\perp}^b u^a\nabla_{\perp a}u_c\nabla_{\perp}^c u_b\} \\
& \longrightarrow \{\Theta^3, \Theta\sigma_{cb}\sigma^{cb}, \Theta\Omega_{cb}\Omega^{cb}, \Theta\sigma_{cb}\Omega^{cb} = 0, \sigma_b^a\sigma_a^c\sigma_{cb}, \Omega_b^a\Omega_a^c\sigma_{cb}, \Omega_b^a\Omega_a^c\Omega_{cb} = 0\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}u_g\nabla_{\perp h}\ln w &\longrightarrow \{\nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp b}\nabla_{\perp}^b u_a, \nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp a}\nabla_{\perp}^b u_b\} \\
&\longrightarrow \{\nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp a}\Theta, \nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp b}\sigma^b{}_a, \nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp b}\Omega^b{}_a\}; \\
g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}u_g\nabla_{\perp h}\ln w &\longrightarrow \{\nabla_{\perp a}u^a\nabla_{\perp b}\nabla_{\perp}^b\ln w \rightarrow \Theta\nabla_{\perp}^2\ln w\}; \\
u_a u_b u_c u_d u_e u_f R_{ijklm}\nabla_{\perp g}u_h &\longrightarrow \{R\nabla_{\perp}^a u_a, R_{ab}\nabla_{\perp}^b u^a, u^a u^b R_{ab}\nabla_{\perp c}u^c\} \\
&\longrightarrow \{\Theta R, R_{ab}\sigma^{ab}, u^a u^b R_{ab}\Theta\}; \\
u^a u^b \nabla_{\perp}^d u^c R_{abcd} &\longrightarrow \{u^a u^b \sigma^{cd} R_{abcd}, u^a u^b \Omega^{cd} R_{abcd}\}; \\
u_a u_b u_c u_d u_e R_{ijklm}\nabla_{\perp f}\ln w &\longrightarrow u^a R_{ab}\nabla_{\perp}^b\ln w; \\
u_a u_b u_c u_d u_e \nabla_f R_{ghij} &\longrightarrow \{u^a u^b D R_{ab}, D R\}; \\
g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}u_f\nabla_{\perp g}\ln w\nabla_{\perp h}\ln w &\longrightarrow \{\nabla_{\perp a}\ln w\nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp b}u^b, \nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp}^b\ln w\nabla_{\perp b}u_a\} \\
&\longrightarrow \{\Theta(\nabla_{\perp}\ln w)^2, \sigma_{ab}\nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp}^b\ln w, \Omega_{ab}\nabla_{\perp}^a\ln w\nabla_{\perp}^b\ln w = 0\}. \tag{3.90}
\end{aligned}$$

3.3.2 Estruturas vetoriais de 3ª ordem

Para $N = 1$ temos que o conjunto de soluções das equações (3.87) é dado por:

$$\begin{aligned}
m = 1, m = 4, m = 5, m = 12, &\rightarrow \{a_1, a_2\} = \{(5, 0), (3, 1), (1, 2), (3, 0), (1, 1)\}; \\
m = 2, m = 10, m = 11, m = 13, &\rightarrow \{a_1, a_2\} = \{(6, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3), (4, 0), (2, 1), (0, 2)\}; \\
m = 3, m = 9, &\rightarrow \{a_1, a_2\} = \{(7, 0), (5, 1), (3, 2), (1, 3), (5, 0), (3, 1), (1, 2)\}; \\
m = 6, m = 7, m = 8, &\rightarrow \{a_1, a_2\} = \{(4, 0), (2, 1), (0, 2), (2, 0), (0, 1)\}. \tag{3.91}
\end{aligned}$$

Os candidatos para a construção da estruturas vetoriais independentes são listados abaixo:

$$\begin{array}{ll}
g_{ab}g_{cd}g_{ef}\nabla_{\perp g}\nabla_{\perp h}u_i\nabla_{\perp j}u_l, & g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}u_g\nabla_{\perp h}u_i, \\
g_{ab}\nabla_{\perp c}\nabla_{\perp d}\nabla_{\perp e}\ln w & g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}\nabla_{\perp g}\ln w, \\
g_{ab}g_{cd}\nabla_{\perp e}\nabla_{\perp f}\ln w\nabla_{\perp g}\ln w, & g_{ab}\nabla_{\perp c}\nabla_{\perp d}\ln w\nabla_{\perp e}\ln w, \\
u_a g_{bc}g_{de}g_{fg}\nabla_{\perp h}u_i R_{jlmn}, & u_a u_b u_c u_d u_e \nabla_{\perp f}u_i R_{hijl}, \\
u_a u_b u_c g_{de}\nabla_{\perp f}u_i R_{hijl}, & u_a u_b u_c u_d u_e u_f (\nabla_{\perp g}\ln w) R_{hijl}, \\
u_a u_b u_c u_d g_{ef}(\nabla_{\perp g}\ln w) R_{hijl}, & u_a u_b g_{cd}g_{ef}(\nabla_{\perp g}\ln w) R_{hijl}, \\
g_{ab}g_{cd}g_{ef}(\nabla_{\perp g}\ln w) R_{hijl}, & u_a u_b u_c u_d (\nabla_{\perp e}\ln w) R_{fghi}, \\
u_a u_b g_{cd}(\nabla_{\perp g}\ln w) R_{hijl}, & g_{ab}g_{cd}(\nabla_{\perp g}\ln w) R_{hijl},
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& u_a u_b u_c u_d u_e u_f \nabla_g R_{hijl}, & u_a u_b u_c u_d g_{ef} \nabla_g R_{hijl}, \\
& u_a u_b g_{cd} g_{ef} \nabla_g R_{hijl}, & g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_g R_{hijl}, \\
& u_a u_b u_c u_d \nabla_e R_{fghi}, & u_a u_b g_{cd} \nabla_e R_{fghi}, \\
& g_{ab} g_{cd} \nabla_e R_{fghi}, & u_a u_b u_c g_{de} g_{fg} \nabla_{\perp h} u_i R_{jlmn}, \\
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp e} \ln w \nabla_{\perp f} \ln w \nabla_{\perp g} \ln w, & g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} \ln w \nabla_{\perp f} \ln w \nabla_{\perp g} \ln w.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Assim, a partir de (3.92), encontramos os seguintes elementos independentes:

$$\begin{aligned}
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp g} \nabla_{\perp h} u_i \nabla_{\perp j} u_l \longrightarrow \{ \Theta \nabla_{\perp}^a \Theta, \sigma^{cb} \nabla_{\perp}^a \sigma_{cb}, \Omega^{cb} \nabla_{\perp}^a \Omega_{cb}, \sigma^{ba} \nabla_{\perp b} \Theta, \\
& \quad \Omega^{ba} \nabla_{\perp b} \Theta, \sigma^{ba} \nabla_{\perp c} \sigma_b^c, \sigma^{ba} \nabla_{\perp c} \Omega_b^c, \Omega^{ba} \nabla_{\perp c} \Omega_b^c, \Omega^{ba} \nabla_{\perp c} \sigma_b^c, \sigma^{ba} \nabla_{\perp c} \sigma_b^c, \\
& \quad \sigma^{ba} \nabla_{\perp c} \sigma_b^c, \sigma^{ba} \nabla_{\perp c} \Omega_b^c, \Omega^{ba} \nabla_{\perp c} \Omega_b^c, \Omega^{ba} \nabla_{\perp c} \sigma_b^c, \sigma^{ab} \nabla_{\perp b} \Theta, \Omega^{ab} \nabla_{\perp b} \Theta \}; \\
& g_{ab} \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp d} \nabla_{\perp e} \ln w \longrightarrow \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp}^2 \ln w; \\
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp g} u_h \nabla_{\perp i} u_j \nabla_{\perp l} \ln w \longrightarrow \{ \Theta^2 \nabla_{\perp}^a \ln w, \Omega_b^a \Theta \nabla_{\perp}^b \ln w, \sigma_b^a \Theta \nabla_{\perp}^b \ln w, \sigma_{cb} \sigma^{cb} \nabla_{\perp}^a \ln w, \\
& \quad \Omega_{cb} \Omega^{cb} \nabla_{\perp}^a \ln w, \Omega^{ca} \Omega_{cb} \nabla_{\perp}^b \ln w, \Omega^{ca} \sigma_{cb} \nabla_{\perp}^b \ln w, \sigma^{ca} \sigma_{cb} \nabla_{\perp}^b \ln w, \sigma^{ca} \Omega_{cb} \nabla_{\perp}^b \ln w \}; \\
& \nabla_{\perp e} \nabla_{\perp f} \ln w \nabla_{\perp g} \ln w \longrightarrow \{ \nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp}^2 \ln w, \nabla_{\perp}^b \ln w \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp b} \ln w \}; \\
& g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} \ln w \nabla_{\perp f} \ln w \nabla_{\perp g} \ln w \longrightarrow \nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp b} \ln w \nabla_{\perp}^b \ln w; \\
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} u_a u_b u_c u_d u_e u_f \nabla_g R_{hijl} \longrightarrow \{ \Delta^a_e u^b u^c \nabla_d R_{bc}^e, u^b u^c \nabla_{\perp}^a R_{bc}, \nabla_{\perp}^a R \}.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

3.3.3 Estruturas tensoriais de 3ª ordem

O conjunto de soluções, para $N = 2$, das equações (3.87) é o seguinte:

$$\begin{aligned}
& m = 1, m = 4, m = 5, m = 12, \rightarrow \{a_1, a_2\} = \{(6, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3), (2, 0), (1, 0)\}, \\
& m = 2, m = 10, m = 11, m = 13, \rightarrow \{a_1, a_2\} = \{(7, 0), (5, 1), (3, 2), (1, 3), (3, 0), (1, 1)\}, \\
& m = 3, m = 9, \rightarrow \{a_1, a_2\} = \{(8, 0), (6, 1), (4, 2), (2, 3), (0, 4), (4, 0), \\
& \quad (2, 1), (0, 2)\}, \\
& m = 6, m = 7, m = 8, \rightarrow \{a_1, a_2\} = \{(5, 0), (3, 1), (1, 2), (1, 0)\}.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Dessa forma, as estruturas tensoriais possíveis são dadas por:

$$\begin{aligned}
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp g} \nabla_{\perp h} \nabla_{\perp i} u_j, & g_{ab} \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp d} \nabla_{\perp e} u_f, \\
& g_{ab} \nabla_{\perp c} u_d \nabla_{\perp e} u_f \nabla_{\perp g} u_h, & g_{ab} g_{cd} g_{ef} g_{gh} \nabla_{\perp i} u_j \nabla_{\perp l} u_m \nabla_{\perp n} u_o, \\
& g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} u_f \nabla_{\perp g} u_h \nabla_{\perp i} u_j, & g_{ab} g_{cd} g_{ef} g_{gh} \nabla_{\perp i} u_j R_{lmno},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_a u_b u_c u_d g_{ef} g_{gh} \nabla_{\perp i} u_j R_{lmno}, & u_a u_b g_{cd} g_{ef} g_{gh} \nabla_{\perp i} u_j R_{lmno}, \\
& u_a u_b g_{cd} \nabla_{\perp e} u_f R_{ghij}, & u_a u_b u_c u_d \nabla_{\perp e} u_f R_{ghij}, \\
& g_{ab} g_{cd} \nabla_{\perp e} u_f R_{ghij}, & u_a u_b u_c \nabla_{\perp d} \ln w R_{efgh}, \\
& u_a u_b u_c u_d u_e u_f u_g \nabla_{\perp h} \ln w R_{ijklm}, & u_a g_{bc} \nabla_{\perp d} \ln w R_{efgh}, \\
& u_a g_{bc} g_{de} g_{fg} \nabla_{\perp h} \ln w R_{ijklm}, & u_a u_b u_c u_d u_e g_{fg} \nabla_h R_{ijklm}, \\
& u_a u_b u_c \nabla_d R_{efgh}, & u_a u_b u_c u_d u_e u_f u_g \nabla_h R_{ijklm}, \\
& u_a u_b u_c g_{de} g_{fg} \nabla_h R_{ijklm}, & u_a g_{bc} g_{de} g_{fg} \nabla_h R_{ijklm}, \\
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp g} u_h \nabla_{\perp i} \nabla_{\perp j} \ln w, & g_{ab} \nabla_{\perp c} u_d \nabla_{\perp e} \nabla_{\perp f} \ln w, \\
& u_a u_b u_c g_{de} g_{fg} \nabla_{\perp h} \ln w R_{ijklm}, & u_a u_b u_c u_d u_e u_f u_g u_h \nabla_{\perp i} u_j R_{lmno}, \\
& u_a u_b u_c u_d u_e u_f g_{gh} \nabla_{\perp i} u_j R_{lmno}, & u_a g_{bc} \nabla_d R_{efgh}.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Agora, apresentamos os elementos TST independentes construídos com a utilização de (3.95):

$$\begin{aligned}
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp g} \nabla_{\perp h} \nabla_{\perp i} u_j \longrightarrow \{ \nabla_{\perp}^2 \sigma^{ab}, \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^{(a} \sigma^{b)c}, \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^{(a} \Omega^{b)c} \}; \\
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} g_{gh} \nabla_{\perp i} u_j \nabla_{\perp l} u_m \nabla_{\perp n} u_o \longrightarrow \{ \Theta^2 \sigma^{ab}, \Theta \sigma^{c(a} \sigma^{b)}, \Theta \sigma^{c(a} \Omega^{b)}, \Theta \Omega^{c(a} \Omega^{b)}, \\
& \quad \sigma^{ab} \sigma_{dc} \sigma^{dc}, \sigma^{ab} \sigma_{dc} \Omega^{dc} = 0, \sigma^{ab} \Omega_{dc} \Omega^{dc}, \sigma^{c(a} \sigma^{b)} \sigma_{cd}, \sigma^{c(a} \sigma^{b)} \Omega_{cd}, \\
& \quad \sigma^{c(a} \Omega^{b)} \Omega_{cd}, \Omega^{c(a} \Omega^{b)} \Omega_{cd}, \Omega^{c(a} \sigma^{b)} \Omega_{cd}, \Omega^{c(a} \sigma^{b)} \sigma_{cd} \}; \\
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp g} u_h \nabla_{\perp i} \ln w \nabla_{\perp j} \ln w \longrightarrow \{ \Theta \nabla_{\perp}^{(a} \ln w \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, \nabla_{\perp}^c \ln w (\nabla_{\perp}^{(a} \ln w) \sigma_a^{b)}, \\
& \quad \nabla_{\perp}^c \ln w (\nabla_{\perp}^{(a} \ln w) \Omega_a^{b)}, (\nabla_{\perp c} \ln w \nabla_{\perp}^c \ln w) \sigma^{ab} \}; \\
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp g} u_h \nabla_{\perp i} \nabla_{\perp j} \ln w \longrightarrow \{ \Theta \nabla_{\perp}^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, \sigma^{c(a} \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, \\
& \quad \Omega^{c(a} \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, (\nabla_{\perp}^2 \ln w) \sigma^{ab} \}; \\
& g_{ab} g_{cd} g_{ef} \nabla_{\perp g} \nabla_{\perp h} u_i \nabla_{\perp j} \ln w \longrightarrow \{ \nabla_{\perp}^c \ln w \nabla_{\perp}^{(a} \sigma^{b)}_c, \nabla_{\perp}^c \ln w \nabla_{\perp}^{(a} \Omega^{b)}_c, \nabla_{\perp}^c \ln w \nabla_{\perp c} \sigma^{ab}, \\
& \quad \nabla_{\perp}^{(a} \ln w \nabla_{\perp c} \sigma^{b)c}, \nabla_{\perp}^{(a} \ln w \nabla_{\perp c} \Omega^{b)c} \}; \\
& u_a u_b u_c u_d u_e u_f u_g u_h \nabla_{\perp i} u_j R_{lmno} \longrightarrow \{ R \sigma^{ab}, R^a_c \sigma^{cb}, R^a_c \Omega^{cb}, \Theta R^{(ab)}, \sigma^{dc} R^a_d{}^b{}_c, \\
& \quad \Omega^{dc} R^a_d{}^b{}_c, u^c u^d R_{cd} \sigma^{ab} = 0, u^c u^d \sigma^{e(a} R^b)_{cde}, u^c u^d \Omega^{e(a} R^b)_{cde}, \Theta u^c u^d R^a_d{}^b{}_c \}; \\
& u_a g_{bc} g_{de} g_{fg} \nabla_{\perp h} \ln w R_{ijklm} \longrightarrow \{ u^c R^a_c \nabla_{\perp}^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, u^c (\nabla_{\perp}^d \ln w) R^a_d{}^b{}_c \}; \\
& u_a g_{bc} g_{de} g_{fg} \nabla_h R_{ijklm} \longrightarrow \{ u^c \nabla_d R^a_b{}^d{}_c, u^c \nabla_c R^{(ab)}, u^c \nabla^{(a} R^b)_{c}, u^c u^d u^e u^c R^a_d{}^b{}_c \}.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Em (3.96) só foram analisadas as estruturas de (3.95) proporcionais ao fator $g_{ab} g_{cd} g_{ef}$, pois os demais candidatos, que são estruturas do mesmo tipo de (3.96), proporcionais a combinações do campo de velocidades u^a e do tensor métrico g_{ab} , não produzem novos elementos

independentes daqueles apresentados acima, tal como ocorre com as estruturas escalares e vetoriais.

3.3.4 Reunindo as estruturas independentes

Após a obtenção das estruturas independentes, passamos agora diretamente a escrevê-las em termos das quantidades σ^{ab} , Ω^{ab} , Θ . No processo de construção das estruturas, obtivemos sempre produtos dos elementos $\nabla_{\perp a} u^b$ e $\nabla_{\perp}^a u^b$ que, como foi demonstrado na seção anterior, podem sempre ser expressas em termos das quantidades supracitadas.

Reunimos abaixo o conjunto completo de estruturas independentes de terceira ordem:

- Escalares ($N = 0$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1^{(3)} &= \nabla_{\perp}^2 \Theta, & \mathcal{S}_2^{(3)} &= \Theta \nabla_{\perp}^2 \ln w, & \mathcal{S}_3^{(3)} &= \sigma^{ab} \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} \ln w, \\
\mathcal{S}_4^{(3)} &= \sigma^{ab} \nabla_{\perp a} \ln w \nabla_{\perp b} \ln w, & \mathcal{S}_5^{(3)} &= \nabla_{\perp a} \ln w \nabla_{\perp b} \sigma^{ab}, & \mathcal{S}_6^{(3)} &= \nabla_{\perp}^a \Theta \nabla_{\perp a} \ln w, \\
\mathcal{S}_7^{(3)} &= \Theta (\nabla_{\perp} \ln w)^2, & \mathcal{S}_8^{(3)} &= \Theta^3, & \mathcal{S}_9^{(3)} &= \Theta \Omega^2, \\
\mathcal{S}_{10}^{(3)} &= \Theta \sigma^2, & \mathcal{S}_{11}^{(3)} &= \sigma_{ab} \sigma^{ac} \sigma_c^b, & \mathcal{S}_{12}^{(3)} &= \sigma_{ab} \Omega^{ac} \Omega_c^b, \\
\mathcal{S}_{13}^{(3)} &= DR, & \mathcal{S}_{14}^{(3)} &= u^a u^b DR_{ab}, & \mathcal{S}_{15}^{(3)} &= u^a R_{ab} \nabla_{\perp}^b \ln w, \\
\mathcal{S}_{16}^{(3)} &= \Theta R, & \mathcal{S}_{17}^{(3)} &= R_{ab} \sigma^{ab}, & \mathcal{S}_{18}^{(3)} &= \Theta u^a u^b R_{ab}, \\
\mathcal{S}_{19}^{(3)} &= u^a u^b \sigma^{cd} R_{adbc}.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

- Vetores ($N = 1$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_1^{a(3)} &= \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^b \ln w, & \mathcal{V}_2^{a(3)} &= \nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^b \ln w, \\
\mathcal{V}_3^{a(3)} &= \nabla_{\perp b} \ln w \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp}^b \ln w, & \mathcal{V}_4^{a(3)} &= \Theta \nabla_{\perp}^a \Theta, \\
\mathcal{V}_5^{a(3)} &= \sigma^{ab} \nabla_{\perp b} \Theta, & \mathcal{V}_6^{a(3)} &= \sigma^{cb} \nabla_{\perp}^a \sigma_{cb}, \\
\mathcal{V}_7^{a(3)} &= \Omega^{cb} \nabla_{\perp}^a \Omega_{cb}, & \mathcal{V}_8^{a(3)} &= \sigma^{ba} \nabla_{\perp c} \sigma_c^b, \\
\mathcal{V}_9^{a(3)} &= \Omega^{ab} \nabla_{\perp b} \Theta, & \mathcal{V}_{10}^{a(3)} &= \sigma^{ab} \nabla_{\perp c} \Omega_c^b, \\
\mathcal{V}_{11}^{a(3)} &= \Omega^{ba} \nabla_{\perp c} \Omega_c^b, & \mathcal{V}_{12}^{a(3)} &= \Omega^{ab} \nabla_{\perp c} \sigma_c^b, \\
\mathcal{V}_{13}^{a(3)} &= \nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp}^b \ln w \nabla_{\perp b} \ln w, & \mathcal{V}_{14}^{a(3)} &= \Theta \sigma_b^a \nabla_{\perp}^b \ln w, \\
\mathcal{V}_{15}^{a(3)} &= \Theta^2 \nabla_{\perp}^a \ln w, & \mathcal{V}_{16}^{a(3)} &= \Theta \Omega_b^a \nabla_{\perp}^b \ln w, \\
\mathcal{V}_{17}^{a(3)} &= \sigma_{cb} \sigma^{cb} \nabla_{\perp}^a \ln w, & \mathcal{V}_{18}^{a(3)} &= \sigma^{ac} \sigma_{cb} \nabla_{\perp}^b \ln w, \\
\mathcal{V}_{19}^{a(3)} &= \Omega_{cb} \sigma^{cb} \nabla_{\perp}^a \ln w, & \mathcal{V}_{20}^{a(3)} &= \sigma^{ac} \Omega_{cb} \nabla_{\perp}^b \ln w,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{21}^{a(3)} &= \Omega^{ac} \Omega_{cb} \nabla_{\perp}^b \ln w, & \mathcal{V}_{22}^{a(3)} &= \Omega^{ca} \sigma_{cb} \nabla_{\perp}^b \ln w, \\
\mathcal{V}_{23}^{a(3)} &= \Delta^a_e u^b u^c \nabla_d R^e_{bc}{}^d, & \mathcal{V}_{24}^{a(3)} &= u^b u^c \nabla_{\perp}^a R_{bc}, \\
\mathcal{V}_{25}^{a(3)} &= \nabla_{\perp}^a R, & \mathcal{V}_{26}^{a(3)} &= R \nabla_{\perp}^a \ln w, \\
\mathcal{V}_{27}^{a(3)} &= u^b u^c R_{bc} \nabla_{\perp}^a \ln w, & \mathcal{V}_{28}^{a(3)} &= u^b u^c R^a_{bcd} \nabla_{\perp}^d \ln w, \\
\mathcal{V}_{29}^{a(3)} &= \Delta^{ab} R_{bc} \nabla_{\perp}^c \ln w, & \mathcal{V}_{30}^{a(3)} &= u_b R_{bc} \sigma^{ca}, \\
\mathcal{V}_{31}^{a(3)} &= u^b R_{bc} \Omega^{ca}, & \mathcal{V}_{32}^{a(3)} &= u^b \Omega^{dc} R^a_{bcd}, \\
\mathcal{V}_{33}^{a(3)} &= \Delta^{ab} u^c R_{bc} \Theta, & \mathcal{V}_{34}^{a(3)} &= \Delta^a_e u^c \Omega^{bd} R^e_{bcd}. \tag{3.98}
\end{aligned}$$

• Tensores ($N = 2$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1^{ab(3)} &= \Omega^2 \sigma^{ab}, & \mathcal{T}_2^{ab(3)} &= \sigma^2 \sigma^{ab}, \\
\mathcal{T}_3^{ab(3)} &= \Theta^2 \sigma^{ab}, & \mathcal{T}_4^{ab(3)} &= D\Theta \sigma^{ab}, \\
\mathcal{T}_5^{ab(3)} &= (\nabla_{\perp} \ln w)^2 \sigma^{ab}, & \mathcal{T}_6^{ab(3)} &= \Theta \sigma_c^{(a} \sigma^{b)c}, \\
\mathcal{T}_7^{ab(3)} &= \Theta \sigma_c^{(a} \Omega^{b)c}, & \mathcal{T}_8^{ab(3)} &= \Theta \Omega_c^{(a} \Omega^{b)c}, \\
\mathcal{T}_9^{ab(3)} &= \sigma_c^{(a} \sigma^{b)d} \sigma_d^c, & \mathcal{T}_{10}^{ab(3)} &= \Omega_c^{(a} \Omega^{b)d} \sigma_d^c, \\
\mathcal{T}_{11}^{ab(3)} &= \sigma_c^{(a} \Omega^{b)d} \Omega_d^c, & \mathcal{T}_{12}^{ab(3)} &= \Omega_c^{(a} \Omega^{b)d} \Omega_d^c, \\
\mathcal{T}_{13}^{ab(3)} &= \nabla_{\perp}^2 \sigma^{ab}, & \mathcal{T}_{14}^{ab(3)} &= \nabla_{\perp}^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \Theta, \\
\mathcal{T}_{15}^{ab(3)} &= \Theta \nabla_{\perp}^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, & \mathcal{T}_{16}^{ab(3)} &= \Theta \nabla_{\perp}^{(a} \ln w \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, \\
\mathcal{T}_{17}^{ab(3)} &= \sigma_c^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \nabla_{\perp}^c \ln w, & \mathcal{T}_{18}^{ab(3)} &= \Omega_c^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \nabla_{\perp}^c \ln w, \\
\mathcal{T}_{19}^{ab(3)} &= \sigma_c^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w \nabla_{\perp}^c \ln w, & \mathcal{T}_{20}^{ab(3)} &= \Omega_c^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w \nabla_{\perp}^c \ln w, \\
\mathcal{T}_{21}^{ab(3)} &= \nabla_{\perp}^c \sigma^{ab} \nabla_{\perp c} \ln w, & \mathcal{T}_{22}^{ab(3)} &= \nabla_{\perp}^c \Omega^{ab} \nabla_{\perp c} \ln w, \\
\mathcal{T}_{23}^{ab(3)} &= \nabla_{\perp}^{(a} \Theta \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, & \mathcal{T}_{24}^{ab(3)} &= \nabla_{\perp}^c \sigma_c^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, \\
\mathcal{T}_{25}^{ab(3)} &= R \sigma^{ab}, & \mathcal{T}_{26}^{ab(3)} &= u^c u^d R_{cd} \sigma^{ab}, \\
\mathcal{T}_{27}^{ab(3)} &= u^c \nabla^d R_c{}^{ab}{}_d, & \mathcal{T}_{28}^{ab(3)} &= u^c u^d D R_c{}^{ab}{}_d, \\
\mathcal{T}_{29}^{ab(3)} &= D R^{ab}, & \mathcal{T}_{30}^{ab(3)} &= u^c \nabla^{(a} R^{b)c}, \\
\mathcal{T}_{31}^{ab(3)} &= u^c \nabla_{\perp}^d \ln w R_c{}^{ab}{}_d, & \mathcal{T}_{32}^{ab(3)} &= \sigma^{cd} R_c{}^{ab}{}_d, \\
\mathcal{T}_{33}^{ab(3)} &= u^c u^d \sigma^e{}^{(a} R^{b)c}{}_{cde}, & \mathcal{T}_{34}^{ab(3)} &= u^c u^d \Omega^e{}^{(a} R^{b)c}{}_{cde}, \\
\mathcal{T}_{35}^{ab(3)} &= \Theta u^c u^d R_c{}^{ab}{}_d, & \mathcal{T}_{36}^{ab(3)} &= u^c R_c^{(a} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w, \\
\mathcal{T}_{37}^{ab(3)} &= \Theta R^{ab}, & \mathcal{T}_{38}^{ab(3)} &= \sigma_c^{(a} R^{b)c}, \\
\mathcal{T}_{39}^{ab(3)} &= \Omega_c^{(a} R^{b)c}. & & \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Denotando por $v^{(3,N)}$ os coeficientes de transporte da expansão de terceira ordem associados às estruturas escalares ($N = 0$), vetoriais ($N = 1$) e tensoriais ($N = 2$), as quantidades $\mathcal{P}_{(3)}$, $j_{(3)}^a$ e $t_{(3)}^{ab}$ são escritas da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_{(3)} = \sum_{i=1}^{19} v_i^{(3,0)} \mathcal{S}_i^{(3)}, \quad j_{(3)}^a = \sum_{i=1}^{34} v_i^{(3,1)} \mathcal{V}_i^{a(3)}, \quad t_{(3)}^{ab} = \sum_{i=1}^{39} v_i^{(3,2)} \mathcal{T}_i^{ab(3)}. \quad (3.100)$$

Na construção dos escalares apresentados em (3.90), as estruturas do tipo $\nabla_{\perp a} \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp b} u^b$, $\nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^a u^b$ e $\nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} u^b$ são redundantes, conforme mostrado em [8], ou seja, não são independentes de outras estruturas já obtidas e, portanto, podem ser eliminados das estruturas da expansão em gradientes. O mesmo acontece com a estrutura TST, presente em (3.96), $\nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^c \nabla_{\perp}^{\langle a} u^{b \rangle}$. No Apêndice B, são demonstradas as redundâncias associadas a esses elementos.

Na construção da hidrodinâmica até terceira ordem realizada neste capítulo, o papel da segunda lei da termodinâmica na expansão em gradientes não foi discutido. No entanto, este assunto é objeto de discussão no Apêndice C dessa dissertação.

3.4 Fluidos conformes

Os fluidos conformes são aqueles conhecidos por apresentar a simetria de Weyl, que consiste em manter as quantidades físicas invariantes frente a transformações (locais) do tipo

$$g_{ab} \rightarrow e^{2\phi(x)} g_{ab}, \quad (3.101)$$

conhecidas como transformações de Weyl [11,12]. Como consequência desta simetria, o tensor energia-momento possui traço nulo, ou seja, $T^a_a = 0$ [7]. Do ponto de vista físico, os fluidos conformes são aqueles constituídos por partículas sem massa [8], cuja pressão p é determinada pela equação de estado [6]

$$p = \frac{\epsilon}{d-1}. \quad (3.102)$$

Na seção anterior, construímos a expansão em gradientes de um fluido que, em geral, não satisfaz a simetria de Weyl. Para levar em conta a simetria conforme do fluido, é preciso reconstruir a hidrodinâmica relativística a partir de ingredientes tensoriais, vetoriais e escalares fundamentais que respeitem essa simetria em cada ordem da expansão em gradientes. Por exemplo, na construção da hidrodinâmica conforme, devemos considerar novamente os ingredientes de primeira ordem $\{\nabla_{\perp a} u_b, \nabla_{\perp a} \ln w\}$ e, depois de ter construído todas as

estruturas possíveis seguindo a metodologia apresentada no capítulo anterior, passar a escrever o tensor energia-momento e a corrente em termos das estruturas de primeira ordem $\{\Theta, \Omega^{ab}, \sigma^{ab}, \nabla_{\perp}^a \ln w\}$, introduzindo os respectivos coeficientes de transporte. Agora, temos o trabalho adicional de verificar quais desses elementos são invariantes de Weyl. Aqueles elementos que não possuem essa simetria não podem aparecer explicitamente na expansão em gradientes. Um campo \mathbf{C} (escalar, vetorial ou tensorial) é dito conformemente covariante se ele muda de forma análoga ao tensor métrico g_{ab} frente a transformações de Weyl, ou seja,

$$\mathbf{C} = e^{-w\phi} \tilde{\mathbf{C}}, \quad (3.103)$$

onde w é o peso conforme associado ao campo \mathbf{C} .

Antes de conhecer o comportamento dos ingredientes de primeira ordem frente às transformações de Weyl, é preciso saber como se transformam o campo de velocidades u^a , os símbolos de Christoffel Γ^b_{ac} e as componentes do tensor de projeção Δ . Da condição de normalização da velocidade, $u^a u_a = -1$, é possível deduzir facilmente o comportamento da velocidade u^a frente às transformações conformes,

$$g_{ab} u^a u^b = \tilde{g}_{ab} \tilde{u}^a \tilde{u}^b = -1 \quad \implies \quad u^a = e^{-\phi} \tilde{u}^a, \quad (3.104)$$

onde o til indica a quantidade transformada. Com esta relação é possível obter a transformação conforme das componentes do tensor de projeção Δ :

$$\Delta^{ab} = e^{-2\phi} \tilde{\Delta}^{ab}. \quad (3.105)$$

Os símbolos de Christoffel, por sua vez, se transformam como

$$\begin{aligned} \Gamma^a_{bc} &= \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_c g_{ab} + \partial_b g_{dc} - \partial_d g_{bc}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\phi} \tilde{g}^{ad} [\partial_c (e^{-2\phi} \tilde{g}_{ab}) + \partial_b (e^{-2\phi} \tilde{g}_{dc}) - \partial_d (e^{-2\phi} \tilde{g}_{bc})] \\ &= \tilde{\Gamma}^a_{bc} + \delta_b^a \partial_c \phi + \delta_c^a \partial_b \phi - \tilde{g}_{bc} \tilde{g}^{ad} \partial_d \phi \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\implies \quad \nabla_a u^b = \partial_a u^b + \Gamma^b_{ac} u^c = e^{-\phi} [\tilde{\nabla}_a \tilde{u}^b + \delta_a^b \tilde{u}^c \partial_c \phi - \tilde{g}_{ac} \tilde{u}^c \tilde{g}^{bd} \partial_d \phi]. \quad (3.107)$$

Agora podemos passar a escrever a forma dos ingredientes de primeira ordem frente às trans-

formações de Weyl. Assim, com base em (3.107), os diversos ingredientes assumem a forma

$$\Theta = \nabla_a u^a = e^{-\phi} \left[\tilde{\nabla}_a \tilde{u}^a + (d-1) \tilde{u}^a \partial_a \phi \right], \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{ab} &= \nabla_{\perp}^a u^b + \nabla_{\perp}^b u^a + \frac{1}{d-1} \Delta^{ab} \Theta \\ &= e^{-3\phi} \left(\tilde{\nabla}_{\perp}^a \tilde{u}^b + \tilde{\nabla}_{\perp}^b \tilde{u}^a + 2\tilde{\Delta}^{ab} \tilde{u}^e \partial_e \phi - \frac{2}{d-1} \tilde{\Delta}^{ab} \Theta - 2\tilde{\Delta}^{ab} \tilde{u}^e \partial_e \phi \right) \\ &= e^{-3\phi} \tilde{\sigma}^{ab}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{ab} &= \frac{1}{2} (\nabla_{\perp}^a u^b - \nabla_{\perp}^b u^a) \\ &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\nabla}_{\perp}^a \tilde{u}^b + \tilde{\nabla}_{\perp}^b \tilde{u}^a + 2\tilde{\Delta}^{ab} \tilde{u}^e \partial_e \phi - 2\tilde{\Delta}^{ab} \tilde{u}^e \partial_e \phi \right) \\ &= e^{-3\phi} \tilde{\Omega}^{ab}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} D \ln w &= - (1 + c_s^2) \Theta = - (1 + c_s^2) e^{-\phi} \left(\tilde{\nabla}_a \tilde{u}^a + (d-1) \tilde{u}^a \partial_a \phi \right) \\ (1 + c_s^2) \tilde{\Theta} &= - \tilde{u}^a \partial_a \left[\ln w + (1 + c_s^2) (d-1) \phi \right] \\ &= \tilde{u}^a \partial_a \left[\ln (w e^{(1+c_s^2)(d-1)\phi}) \right] \quad \therefore \tilde{w} = w e^{(1+c_s^2)(d-1)\phi}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Finalmente,

$$\nabla_{\perp}^a \ln w = \nabla_{\perp}^a \ln \tilde{w} - (d-1)(1 + c_s^2) \nabla_{\perp}^a \phi. \quad (3.112)$$

A partir de (3.111), podemos encontrar o peso conforme w associado à entalpia w . Se consideramos a relação (3.102) e a definição da velocidade do som $c_s^2 = \delta p / \delta \epsilon$, temos que a velocidade do som c_s para um fluido conforme satisfaz a relação

$$c_s^2 = \frac{1}{d-1}. \quad (3.113)$$

No entanto, temos em (3.111) que

$$\tilde{w} = w e^{(1+c_s^2)(d-1)\phi} = e^{d\phi} w, \quad (3.114)$$

ou seja, $w = d$ é o peso conforme da entalpia.

Agora, devemos garantir que o tensor energia-momento T^{ab} (3.16) e a corrente J^a (3.17) correspondentes à hidrodinâmica de primeira ordem sejam invariantes de Weyl. Neste caso, temos uma hidrodinâmica conforme se as constantes γ e ζ em (3.16) e (3.17) são nulas.

Ou seja, a hidrodinâmica conforme de primeira ordem é caracterizada pelas expressões

$$T^{ab} = \epsilon u^a u^b + p \Delta^{ab} - \eta \sigma^{ab}, \quad (3.115)$$

$$J^a = 0. \quad (3.116)$$

É fácil mostrar que, para qualquer ordem (não-nula) na expansão em gradientes do tensor energia-momento T^{ab} , não haverão elementos correspondentes à correção de pressão \mathcal{P} , e isso acontece pela condição de traço nulo $T_a^a = 0$, como se pode demonstrar na sequência, considerando (3.102):

$$\begin{aligned} T_a^a &= \epsilon u^a u_a + \mathcal{P} \Delta_a^a + t_a^a = -\epsilon + (d-1)p + \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_{(k)}(d-1) = 0 \\ \Rightarrow (d-1) \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_{(k)} &= 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Na equação anterior, cada elemento do somatório $\sum_{k=1}^n \mathcal{P}_{(k)}$ representa uma combinação linear de elementos independentes não-nulos, ou seja, toda constante associada a cada elemento escalar deve ser nula para garantir sua independência linear com os demais elementos:

$$\mathcal{P}_{(k)} = \sum_i \lambda_i \mathcal{S}_i^{(k)} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i. \quad (3.118)$$

Embora tenha resultado muito simples a construção da hidrodinâmica conforme resumida nas expressões (3.115) e (3.116), torna-se mais instrutivo usar uma metodologia que permita compreender o processo de construção da hidrodinâmica conforme ou, simplesmente, a eliminação de inhomogeneidades resultantes dos diversos ingredientes após a aplicação da transformação de Weyl para ordens superiores.

Sejam $\mathcal{T}_{(i)}$, $\mathcal{T}_{(i)}^a$ e $\mathcal{T}_{(i)}^{ab}$ os elementos escalares, vetoriais e tensoriais da expansão em gradientes. Frente a uma transformação de Weyl,

$$g^{ab} = e^{-2\phi} \tilde{g}^{ab}, \quad (3.119)$$

estes elementos assumem, em geral, a forma

$$\mathcal{T} = e^{w_s \phi} \tilde{\mathcal{T}} + f(\phi, D\phi, \partial^2 \phi, \dots, D^n \phi, \partial^{2n} \phi), \quad (3.120)$$

$$\mathcal{T}^a = e^{w_v \phi} \tilde{\mathcal{T}}^a + g(\phi, \partial_\perp^a \phi, \partial_\perp^a \partial^2 \phi, \dots, \partial_\perp^a \partial^{2n} \phi), \quad (3.121)$$

$$\mathcal{T}^{ab} = e^{w_t \phi} \tilde{\mathcal{T}}^{ab} + h(\phi, \partial_\perp^a \partial_\perp^b \phi, \partial_\perp^a \phi \partial_\perp^b \phi, \dots, \partial_\perp^a \partial_\perp^b \partial^{2n} \phi, \partial_\perp^a \phi \partial_\perp^b \partial^{2n} \phi, \partial_\perp^a \partial^{2n} \phi \partial_\perp^b \phi), \quad (3.122)$$

onde

$$\mathcal{T} \equiv \sum_i^n \lambda_i \mathcal{T}_{(i)}, \quad \mathcal{T}^a \equiv \sum_i^n \lambda_i \mathcal{T}_{(i)}^a, \quad \mathcal{T}^{ab} \equiv \sum_i^n \lambda_i \mathcal{T}_{(i)}^{ab}, \quad (3.123)$$

$$\tilde{\mathcal{T}} \equiv \sum_i^n \lambda_i \tilde{\mathcal{T}}_{(i)}, \quad \tilde{\mathcal{T}}^a \equiv \sum_i^n \lambda_i \tilde{\mathcal{T}}_{(i)}^a, \quad \tilde{\mathcal{T}}^{ab} \equiv \sum_i^n \lambda_i \tilde{\mathcal{T}}_{(i)}^{ab}. \quad (3.124)$$

As constantes λ_i devem ser encontradas de tal forma que os elementos $\mathcal{T}_{(i)}$, $\mathcal{T}_{(i)}^a$ e $\mathcal{T}_{(i)}^{ab}$ se transformem de maneira homogênea frente às transformações (3.119), ou seja,

$$\mathcal{T} = e^{w_s \phi} \tilde{\mathcal{T}}, \quad \mathcal{T}^a = e^{w_v \phi} \tilde{\mathcal{T}}^a, \quad \mathcal{T}^{ab} = e^{w_t \phi} \tilde{\mathcal{T}}^{ab}. \quad (3.125)$$

Com isso,

$$f(\phi, D\phi, \partial^2\phi, \dots, D^n\phi, \partial^{2n}\phi) = 0, \quad (3.126)$$

$$g(\phi, \partial_\perp^a \phi, \partial_\perp^a \partial^2\phi, \dots, \partial_\perp^a \partial^{2n}\phi) = 0, \quad (3.127)$$

$$h(\phi, \partial_\perp^a \partial_\perp^b \phi, \partial_\perp^a \phi \partial_\perp^b \phi, \dots, \partial_\perp^a \partial_\perp^b \partial^{2n}\phi, \partial_\perp^a \phi \partial_\perp^b \partial^{2n}\phi, \partial_\perp^a \partial^{2n}\phi \partial_\perp^b \phi) = 0. \quad (3.128)$$

As relações (3.126)-(3.128) dependem linearmente dos seus argumentos por meio dos coeficientes λ_i , os quais devem satisfazer as equações

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{s_1} &= 0, \\ \lambda_{s_2} + \lambda_{s_3} + \dots + \lambda_{s_k} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{s_m} + \lambda_{s_{m+1}} + \dots + \lambda_{s_{m+p-1}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.129)$$

que seguem diretamente das condições (3.126)-(3.128), sendo $m > p - 1$ com $p = 0, 1, 2, \dots$. O número de equações para λ_i vai depender da ordem da expansão em gradientes.

Agora, podemos aplicar esta metodologia para a construção da hidrodinâmica de primeira ordem. Neste caso, temos para os elementos vetoriais que

$$f(\partial_\perp^a \phi) = \gamma(d-1)(1+c_s^2)\partial_\perp^a \phi = 0 \quad \implies \quad \gamma = 0 \quad (3.130)$$

A constante ζ será nula, como já vimos pela condição $T_a^a = 0$,

$$T_a^a = 0 \quad \implies \quad (d-1)\zeta\Theta = 0 \quad \implies \quad \zeta = 0. \quad (3.131)$$

Desta forma, obtemos (3.115) e (3.116) pela metodologia descrita anteriormente.

Ainda que este procedimento seja relativamente simples para a hidrodinâmica de primeira ordem, os cálculos se tornam mais complicados para ordens maiores por conta da regra de Leibniz (regra do produto das derivadas) aplicada sobre os ingredientes, o que incrementa o número de elementos da expansão de forma significativa. Uma forma efetiva de resolver este problema é a redefinição dos gradientes por meio de uma derivada que seja compatível com os elementos covariantes frente à (3.119). Isto pode ser feito da seguinte forma [3]:

$$Q_{b\dots}^{a\dots} = e^{-w\phi} \tilde{Q}_{b\dots}^{a\dots}, \quad \text{então} \quad \mathcal{D}_c Q_{b\dots}^{a\dots} = e^{-w\phi} \tilde{\mathcal{D}}_c \tilde{Q}_{b\dots}^{a\dots}, \quad (3.132)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_c \tilde{Q}_{b\dots}^{a\dots} \equiv & \nabla_c Q_{b\dots}^{a\dots} + w \mathcal{A}_c Q_{b\dots}^{a\dots} + [g_{cd} A^a - \delta_c^a \mathcal{A}_d - \delta_d^a \mathcal{A}_c] Q_{b\dots}^{d\dots} + \dots \\ & - [g_{cb} \mathcal{A}^d - \delta_c^d \mathcal{A}_b - \delta_b^d \mathcal{A}_c] Q_{d\dots}^{a\dots} - \dots, \end{aligned} \quad (3.133)$$

sendo \mathcal{A} um campo vetorial que se transforma frente à (3.119) como

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + \partial\phi. \quad (3.134)$$

No caso da hidrodinâmica conforme, é fácil mostrar que um campo vetorial \mathcal{A} , que adota a forma (3.134) ao ser aplicada a transformação (3.119), pode ser construído usando os ingredientes fundamentais Θ e $\nabla_{\perp a} \ln w$ da seguinte forma [3]:

$$\mathcal{A}_a = -\frac{1}{d-1} \left(\frac{\nabla_{\perp a} \ln w}{1+c_s^2} + \Theta u_a \right). \quad (3.135)$$

Assim, ao aplicar (3.119) em (3.135) e considerando as relações (3.108), (3.112) e (3.156), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a &= -\frac{1}{d-1} \left(\frac{\nabla_{\perp a} \ln \tilde{w}}{1+c_s^2} - (d-1) \nabla_{\perp a} \phi + \tilde{\Theta} \tilde{u}_a + (d-1) u_a D\phi \right) \\ &= -\frac{1}{d-1} \left(\frac{\nabla_{\perp a} \ln \tilde{w}}{1+c_s^2} + \tilde{\Theta} \tilde{u}_a \right) + \frac{d-1}{d-1} \left(\nabla_{\perp a} \phi - u_a D\phi \right) \\ &= \tilde{A}_a + \nabla_a \phi = \tilde{A}_a + \partial_a \phi. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Pela natureza covariante da relação (3.133) é impossível definir uma derivada covariante nos ingredientes Θ e $\nabla_{\perp a} \ln w$ que, de acordo com (3.108) e (3.112), não são invariantes de Weyl; no entanto, eles constituem ingredientes fundamentais da hidrodinâmica conforme,

pois estão presentes na derivada covariante por meio das componentes do campo vetorial \mathcal{A} . Este fato, por outro lado, poderia tornar, por questões práticas, o campo vetorial \mathcal{A} um ingrediente na construção da hidrodinâmica conforme. Porém, o campo vetorial definido por (3.135) apresenta um problema: ele também não é covariante de Weyl.

Entretanto, é possível construir a partir das componentes do campo vetorial (3.135) um tensor de segunda ordem \mathcal{F} covariante frente à (3.119), cujas componentes serão

$$\mathcal{F}_{ab} = \partial_a \mathcal{A}_b - \partial_b \mathcal{A}_a. \quad (3.137)$$

Resulta interessante notar que o fato de que (3.126) é covariante frente às transformações de calibre do tipo (3.134) leva diretamente à covariância de Weyl,

$$\mathcal{A}_a \rightarrow \mathcal{A}_a + \partial_a \phi \quad \implies \quad \mathcal{F}_{ab} = \partial_a \mathcal{A}_b - \partial_b \mathcal{A}_a = \partial_a \tilde{\mathcal{A}}_b - \partial_b \tilde{\mathcal{A}}_a + \partial_a \partial_b \phi - \partial_b \partial_a \phi = \tilde{\mathcal{F}}_{ab}. \quad (3.138)$$

Dessa forma, construímos um ingrediente de segunda ordem para a hidrodinâmica conforme. Como já foi demonstrado em (3.109) e (3.110) os ingredientes de primeira ordem σ^{ab} e Ω^{ab} são covariantes de Weyl com $w = 3$ e, por conta disso, também serão ingredientes de primeira ordem da hidrodinâmica conforme.

Para cálculos futuros, é conveniente escrever as componentes do campo vetorial \mathcal{A} , definidas em (3.135), da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_b = a_b - \frac{\Theta}{d-1} u_b. \quad (3.139)$$

Para obter esta relação foi usada a equação de movimento (2.90), de onde obtemos a expressão

$$a_b = Du_b = -\frac{c_s^2}{1+c_s^2} \nabla_{\perp b} \ln w, \quad (3.140)$$

além de ter considerado a relação (3.102).

Usando a definição de derivada covariante, equações (3.133) e (3.139), podemos escrever

os ingredientes de primeira ordem σ^{ab} e Ω^{ab} em termos da derivada covariante da velocidade,

$$\begin{aligned}
D_a u^b &= \nabla_a u^b + \mathcal{A}_a u^b + [g_{ac} \mathcal{A}^b - \delta_a^b \mathcal{A}_c - \delta_c^b] u^c \\
&= \nabla_a u^b + \mathcal{A}_a u^b - u^b \mathcal{A}_a + u_a \mathcal{A}^b - \delta_a^b u^c \mathcal{A}_c \\
&= \nabla_a u^b + u_a \left[a^b - \frac{\Theta}{d-1} u^b \right] - \delta_a^b \left[u^c a_c - \frac{\Theta}{d-1} u^c u_c \right] \\
&= \nabla_a u^b + u_a a^b - \frac{\Theta}{d-1} \Delta_a^b \\
&= e^{-\phi} \tilde{D}_a \tilde{u}^b.
\end{aligned} \tag{3.141}$$

Dessa forma, usando as expressões de σ_a^b e Ω_a^b , temos

$$\begin{aligned}
\sigma_a^b + \Omega_a^b &= \nabla_{\perp a} u^b - \frac{\Theta}{d-1} \Delta_a^b \\
&= u_a u^c \nabla_c u^b + \delta_a^c \nabla_c u^b - \frac{\Theta}{d-1} \Delta_a^b \\
&= \nabla_a u^b + u_a a^b - \frac{\Theta}{d-1} \Delta_a^b \\
&= D_a u^b.
\end{aligned} \tag{3.142}$$

Finalmente, usando a simetria de σ^{ab} e a anti-simetria de Ω^{ab} , obtemos

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{D}^a u^b + \mathcal{D}^b u^a \right) = e^{-3\phi} \tilde{\sigma}^{ab}, \tag{3.143}$$

$$\Omega^{ab} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{D}^a u^b - \mathcal{D}^b u^a \right) = e^{-3\phi} \tilde{\Omega}^{ab}. \tag{3.144}$$

Da teoria da Relatividade Geral, sabemos que o tensor de curvatura $R^c{}_{dab} V^d$ está associado ao comutador das derivadas covariantes, como $[\nabla_a, \nabla_b] V^c = R^c{}_{dab} V^d$. Porém, como esse comutador não é covariante de Weyl, o tensor de curvatura, assim definido, não pode ser utilizado como um dos ingredientes na construção da hidrodinâmica conforme. No entanto, é possível redefinir o tensor de curvatura para incorporar a simetria conforme. A maneira natural de se fazer isso é considerar a ação do comutador de duas derivadas covariantes de Weyl $[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b]$ sobre um campo vetorial com simetria conforme $V_a = e^{-\phi} \tilde{V}_a$, como mostrado em [3]. Desta forma, agrupando os termos de forma conveniente em $[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] V_c$, obtemos a seguinte expressão:

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] V_c = -\mathcal{F}_{ab} V_c + \mathcal{R}_{abc}{}^d V_d, \tag{3.145}$$

onde $\mathcal{R}_{abc}{}^d$ pode ser interpretado como o tensor de curvatura conforme, cujas componentes

são dadas por

$$\mathcal{R}_{abc}{}^d \equiv R_{abc}{}^d + \nabla_a h_{bc}{}^d - \nabla_b h_{ac}{}^d + h_{bc}{}^d h_{ae}{}^d - h_{ac}{}^d h_{be}{}^d = \tilde{R}_{abc}{}^d, \quad (3.146)$$

e, por simplicidade, introduzimos em (3.146) o tensor

$$h_{ac}{}^d \equiv g_{ac} A^d - \delta_a^d A_c - \delta_c^d A_a. \quad (3.147)$$

Com isso, obtivemos todos os ingredientes fundamentais da hidrodinâmica conforme, a saber, $\{\sigma^{ab}, \Omega^{ab}, \mathcal{F}^{ab}, \mathcal{R}_{abcd}\}$. Esses elementos estão sujeitos às seguintes simetrias [3]:

$$\sigma^{ab} = \sigma^{ba}, \quad \Omega^{ab} = -\Omega^{ba}, \quad \mathcal{F}^{ab} = -\mathcal{F}^{ba}, \quad (3.148)$$

$$\mathcal{R}_{abc}{}^d + \mathcal{R}_{c[ab]}{}^d = 0, \quad \mathcal{R}_{[ab]} = \mathcal{R}_{abd}{}^d = -(d\mathcal{F})_{ab}, \quad (3.149)$$

$$\mathcal{D}_c \mathcal{R}_{abd}{}^e + \mathcal{D}_{[a} \mathcal{R}_{b]cd}{}^e = 0, \quad \mathcal{D}_{[a} \mathcal{R}_{b]c} + \mathcal{D}_d \mathcal{R}_{abc}{}^d = 0. \quad (3.150)$$

Na próxima seção, construiremos a hidrodinâmica conforme para cada ordem da expansão em gradientes, com o uso dos ingredientes conformes fundamentais apresentados acima.

3.4.1 Construção da hidrodinâmica conforme

A hidrodinâmica conforme é construída simplesmente combinando os ingredientes de ordem zero $\{u_a, g_{ab}\}$ com os ingredientes conformes apresentados na seção anterior. Assim, para a hidrodinâmica de primeira ordem, os candidatos são simplesmente os ingredientes de primeira ordem $\{\sigma^{ab}, \Omega^{ab}\}$, os quais já incluem as estruturas de ordem zero mencionadas. Dentre estes elementos o único escolhido é σ^{ab} , já que o elemento Ω^{ab} não pode ser incluído no tensor energia-momento por ser antissimétrico e a única combinação possível para que ele apareça na corrente é nula, $u_a \Omega^{ab}$, por se tratar de um tensor transversal. Sendo assim, obtemos as seguintes expressões para o tensor energia-momento T^{ab} e a corrente J^a :

$$t_{(1)}^{ab} = \varepsilon u^a u^b - \frac{\varepsilon}{d-1} \Delta^{ab} - \eta \sigma^{ab}, \quad (3.151)$$

$$j_{(1)}^a = \rho u^a. \quad (3.152)$$

Para a expansão em segunda ordem, temos as seguintes combinações dos elementos

tensoriais, formadas com os ingredientes conformes e com os ingredientes de ordem zero:

$$\sigma_c^{(a}\sigma^{b)c}, \quad \sigma_c^{(a}\Omega^{b)c}, \quad u^c\mathcal{D}_c\sigma^{(ab)} \quad u^c\mathcal{D}_c\Omega^{(ab)}, \quad u^c u^d \mathcal{R}_c^{(ab)}{}_d, \quad \mathcal{R}^{(ab)}. \quad (3.153)$$

A partir da relação (3.146) pode ser mostrado que

$$\mathcal{R}_{abcd} = R_{abcd} + \delta^e_{[a}g_{b][c}\delta^f_{d]}\left(\nabla_e A_f + A_e A_f - \frac{A^2}{2}g_{ef}\right) - \mathcal{F}_{ab}g_{cd}. \quad (3.154)$$

A contração dessa expressão com o tensor $u^c u^d$ produz

$$u^c u^d \mathcal{R}_{abcd} = u^c u^d R_{abcd} + u^c u^d \delta^e_{[a}g_{b][c}\delta^f_{d]}\left(\nabla_e A_f + A_e A_f - \frac{A^2}{2}g_{ef}\right) - \mathcal{F}_{ab}u^c u^d g_{cd} = \mathcal{F}_{ab}, \quad (3.155)$$

uma vez que

$$u^c u^d R_{abcd} = 0, \quad u^c u^d \delta^e_{[a}g_{b][c}\delta^f_{d]} = 0, \quad u^c u^d g_{cd} = -1. \quad (3.156)$$

Na primeira expressão acima, usamos a propriedade de antisimetria do tensor de Riemann

$$R_{abcd} = -R_{abdc}. \quad (3.157)$$

Além disso, das identidades de Bianchi para o tensor de curvatura conforme [3],

$$\mathcal{R}_{abcd} + \mathcal{R}_{c[ab]d} = 0, \quad \mathcal{R}_{[ab]} + d\mathcal{F}_{ab} = 0, \quad (3.158)$$

encontramos

$$u^c u^d \mathcal{R}_{abcd} = -u^c u^d \mathcal{R}_{c[ab]d} = -\frac{\mathcal{R}_{[ab]}}{d} \implies u^c u^d \mathcal{R}_{cabd} = \frac{\mathcal{R}_{ab}}{d}. \quad (3.159)$$

Finalmente, utilizando uma versão TST da última expressão em (3.159), temos que o elemento $u^c u^d \mathcal{R}_c^{(ab)}{}_d$ pode ser expresso em termos do tensor $\mathcal{R}^{(ab)}$ da seguinte forma:

$$u^c u^d \mathcal{R}_c^{(ab)}{}_d = \frac{\mathcal{R}^{(ab)}}{d}. \quad (3.160)$$

Por outro lado, como o tensor de vorticidade Ω^{ab} frente ao processo de simetrização, temos

$$u^c \mathcal{D}_c \Omega^{(ab)} = 0. \quad (3.161)$$

Agora, considerando as relações (3.160) e (3.161), podemos escrever os tensores de segunda

ordem (TST) independentes como

$$\mathfrak{T}_1^{ab(2)} = \sigma_c^{(a}\sigma^{b)c}, \quad \mathfrak{T}_2^{ab(2)} = \sigma_c^{(a}\Omega^{b)c}, \quad \mathfrak{T}_3^{ab(2)} = u^c \mathcal{D}_c \sigma^{(ab)}, \quad \mathfrak{T}_4^{ab(2)} = \Omega_c^{(a}\Omega^{b)c}, \quad \mathfrak{T}_5^{ab(2)} = \mathcal{R}^{(ab)}. \quad (3.162)$$

Para obter os elementos vetoriais transversais, basta simplesmente considerar a divergência dos ingredientes de primeira ordem $\{\sigma^{ab}, \Omega^{ab}\}$ e depois projetar ao longo das direções transversais ao movimento do fluido. Além disso, temos dois elementos adicionais que são obtidos ao se contrair o campo de velocidades u_a com o tensor \mathcal{F}^{ab} e projetar o elemento $u_c \mathcal{R}^{ac}$ ao longo das direções transversais ao fluido,

$$\mathfrak{V}_1^{a(2)} = u_b \mathcal{F}^{ab}, \quad \mathfrak{V}_2^{a(2)} = \Delta^a_b \mathcal{D}_c \sigma^{bc}, \quad \mathfrak{V}_3^{a(2)} = \Delta^a_b u_c \mathcal{R}^{bc}, \quad \mathfrak{V}_4^{a(2)} = \Delta^a_b \mathcal{D}_c \Omega^{bc}. \quad (3.163)$$

3.4.2 Hidrodinâmica conforme de terceira ordem

Levando em conta os elementos TST de segunda ordem na construção das estruturas tensoriais da hidrodinâmica conforme de terceira ordem, obtemos as seguintes combinações:

$$\begin{aligned} \sigma^{ab} \longrightarrow & \{\Omega_{cd} \Omega^{cd} \sigma^{ab}, \sigma_{cd} \sigma^{cd} \sigma^{ab}, \sigma_{cd} \sigma^{c(a} \sigma^{b)d}, \sigma_{cd} \Omega^{c(a} \Omega^{b)d}, \\ & \mathcal{F}_c^{(a} \sigma^{b)c}, \mathcal{R} \sigma^{ab}, \mathcal{R}_c^{(a} \sigma^{b)c}, \sigma^{cd} \mathcal{R}_c^{(ab)}{}_d\}; \end{aligned} \quad (3.164)$$

$$\Omega^{ab} \longrightarrow \{\Omega_{cd} \sigma^{c(a} \Omega^{b)d}, \mathcal{F}_c^{(a} \Omega^{b)c}, \mathcal{R}_c^{(a} \Omega^{b)c}, \Omega^{cd} \mathcal{R}_c^{(ab)}{}_d\}; \quad (3.165)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \longrightarrow & \{\mathcal{D}_c \mathcal{D}^{(a} \sigma^{b)c}, \mathcal{D}_c \mathcal{D}^{(a} \Omega^{b)c}, \Delta^{cd} \mathcal{D}_c \mathcal{D}_d \sigma^{(ab)}, u^c \mathcal{D}_c \sigma^{d(a} \sigma^{b)}, \\ & u_c \mathcal{D}^{(a} \mathcal{F}^{b)c}, u_c \mathcal{D}^c \Omega^{d(a} \sigma^{b)}, u_c \mathcal{D}^c \Omega^{d(a} \Omega^{b)}, u^c \mathcal{D}^{(a} \mathcal{R}^{b)}{}_c, \\ & u^c \mathcal{D}^d \mathcal{R}_c^{(ab)}{}_d, u_c \mathcal{D}_d (\sigma^{d(a} \sigma^{b)c}), u_c \mathcal{D}_d (\Omega^{d(a} \Omega^{b)c})\}. \end{aligned} \quad (3.166)$$

Nas equações acima, apresentamos todas as combinações possíveis envolvendo os ingredientes de primeira ordem $\{\sigma^{ab}, \Omega^{ab}\}$ e a derivada covariante de Weyl \mathcal{D} . Tal construção conduz aos elementos que dão origem às estruturas independentes da hidrodinâmica de terceira ordem. Agora, usando as identidades (5.16) e (5.17) do Apêndice A,

$$u^b \mathcal{D}_c \sigma_{ba} = -\sigma_{ba} \mathcal{D}_c u^b = -\sigma_{ab} \sigma_c^b - \sigma_{ab} \Omega_c^b, \quad (3.167)$$

$$u^b \mathcal{D}_c \Omega_{ba} = -\Omega_{ba} \mathcal{D}_c u^b = -\Omega_{ab} \sigma_c^b - \Omega_{ab} \Omega_c^b, \quad (3.168)$$

obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
u_c \mathcal{D}_d (\sigma^{d<a} \sigma^{b>c}) &= \frac{1}{2} \left[u_c \sigma^{ac} \mathcal{D}_d \sigma^{db} + u_c \sigma^{bc} \mathcal{D}_d \sigma^{da} + u_c \sigma^{da} \mathcal{D}_d \sigma^{bc} + u_c \sigma^{db} \mathcal{D}_d \sigma^{ac} \right] \\
&\quad - \frac{1}{d-1} \left(u_c \sigma_d^c \sigma^{ed} \mathcal{D}_e \Delta^{ab} + u_c \sigma_d^c \Delta^{ab} \mathcal{D}_e \sigma^{ed} + \Delta^{ab} \sigma^{ed} u_c \mathcal{D}_e \sigma_d^c \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[-\sigma^{ca} \sigma_{dc} \sigma^{bd} - \sigma^{cb} \sigma_{cd} \sigma^{ad} - \sigma^{ca} \Omega_{dc} \sigma^{bd} - \sigma^{cb} \Omega_{cd} \sigma^{ad} \right] \\
&\quad + \frac{\Delta^{ab}}{d-1} \left(\sigma^{cd} \sigma_{ce} \sigma_d^e + \sigma^{cd} \Omega_{ce} \sigma_d^e \right) \\
&= -\sigma_{cd} \left[\frac{1}{2} \left(\sigma^{ca} \sigma^{bd} + \sigma^{cb} \sigma^{ad} \right) - \frac{\Delta^{ab}}{d-1} \sigma^{ce} \sigma_d^e \right] \\
&= -\sigma_{cd} \sigma^{c<a} \sigma^{b>d}.
\end{aligned} \tag{3.169}$$

Na dedução da identidade acima, usamos o caráter antissimétrico do tensor $\Omega^{\mu\nu}$ para anular os seguintes termos

$$\sigma^{cd} \Omega_{ce} \sigma_d^e = 0, \quad -\sigma^{ca} \Omega_{dc} \sigma^{bd} - \sigma^{cb} \Omega_{cd} \sigma^{ad} = -\sigma^{ca} \Omega_{dc} \sigma^{bd} + \sigma^{ca} \Omega_{dc} \sigma^{bd} = 0. \tag{3.170}$$

Seguindo o mesmo caminho que em (3.169), pode ser mostrado que

$$u_d \mathcal{D}_c (\Omega^{d<a} \Omega^{b>c}) = -\Omega_{cd} \Omega^{d<a} \Omega^{b>c} = 0, \tag{3.171}$$

e este cancelamento ocorre precisamente pelo caráter antissimétrico do tensor Ω_{cd} . Assim, temos finalmente as seguintes estruturas tensoriais independentes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_1^{ab(3)} &= \Omega_{cd} \Omega^{cd} \sigma^{ab}, & \mathfrak{T}_2^{ab(3)} &= \sigma_{cd} \sigma^{cd} \sigma^{ab}, & \mathfrak{T}_3^{ab(3)} &= \sigma_{cd} \sigma^{c<a} \sigma^{b>d}, \\
\mathfrak{T}_4^{ab(3)} &= \Omega^{cd} \mathcal{R}_c^{<ab>d}, & \mathfrak{T}_5^{ab(3)} &= \mathcal{F}_c^{<a} \sigma^{b>c}, & \mathfrak{T}_6^{ab(3)} &= \mathcal{R} \sigma^{ab} \\
\mathfrak{T}_7^{ab(3)} &= \Omega_{cd} \sigma^{c<a} \Omega^{b>d}, & \mathfrak{T}_8^{ab(3)} &= \mathcal{F}_c^{<a} \Omega^{b>c}, & \mathfrak{T}_9^{ab(3)} &= \mathcal{R}_c^{<a} \Omega^{b>c}, \\
\mathfrak{T}_{10}^{ab(3)} &= \mathcal{D}_c \mathcal{D}^{<a} \sigma^{b>c}, & \mathfrak{T}_{11}^{ab(3)} &= \Delta^{cd} \mathcal{D}_c \mathcal{D}_d \sigma^{<ab>}, & \mathfrak{T}_{12}^{ab(3)} &= u^c \mathcal{D}_c \sigma^{d<a} \sigma^{b>d}, \\
\mathfrak{T}_{13}^{ab(3)} &= u_c \mathcal{D}^{<a} \mathcal{F}^{b>c}, & \mathfrak{T}_{14}^{ab(3)} &= u_c \mathcal{D}^c \Omega^{d<\mu} \sigma^{\nu>d}, & \mathfrak{T}_{15}^{ab(3)} &= u_c \mathcal{D}^c \Omega^{d<a} \Omega^{b>d}, \\
\mathfrak{T}_{16}^{ab(3)} &= u^c \mathcal{D}^{<a} \mathcal{R}^{b>c}, & \mathfrak{T}_{17}^{ab(3)} &= u^c \mathcal{D}^d \mathcal{R}_c^{<ab>d}, & \mathfrak{T}_{18}^{ab(3)} &= \mathcal{R}_c^{<a} \sigma^{b>c}, \\
\mathfrak{T}_{19}^{ab(3)} &= \sigma^{cd} \mathcal{R}_c^{<ab>d}.
\end{aligned} \tag{3.172}$$

Para achar os elementos vetoriais de terceira ordem, projetamos as estruturas de terceira ordem e a derivada covariante das estruturas de segunda ordem nas direções transversais ao movimento do fluido, de modo similar ao realizado na seção anterior. Com isso, obtemos

os seguintes vetores independentes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{V}_1^{a(3)} &= \Delta^a_b \mathcal{D}^b \sigma^{cd} \sigma_{cd}, & \mathfrak{V}_2^{a(3)} &= \Delta^a_b \mathcal{D}^b \Omega^{cd} \Omega_{cd}, & \mathfrak{V}_3^{a(3)} &= \Delta^a_b \mathcal{D}^c (\sigma_d^b \sigma_c^d), \\
\mathfrak{V}_4^{a(3)} &= \Delta^a_b \mathcal{D}^c (\sigma_d^b \Omega_c^d), & \mathfrak{V}_5^{a(3)} &= \Delta^a_b \mathcal{D}^c (\Omega_d^b \Omega_c^d), & \mathfrak{V}_6^{a(3)} &= \Delta^a_b \mathcal{D}_c \mathcal{R}^{bc}, \\
\mathfrak{V}_7^{a(3)} &= u_c \mathcal{R}^{cd} \Delta^a_b \sigma^b_d, & \mathfrak{V}_8^{a(3)} &= u_c \mathcal{R}^{cd} \Delta^a_b \Omega^b_d, & \mathfrak{V}_9^{a(3)} &= u^c \mathcal{R}_{decf} \Delta^{ad} \Omega^{ef}, \\
\mathfrak{V}_{10}^{a(3)} &= u^c \mathcal{R}_{decf} \Delta^{ad} \sigma^{ef}, & \mathfrak{V}_{11}^{a(3)} &= \Delta^{ab} u^c u^d \mathcal{D}_e \mathcal{R}^e_{cbd}.
\end{aligned} \tag{3.173}$$

4 RELAÇÕES DE DISPERSÃO

4.1 Fluidos não-conformes

Uma vez construída a hidrodinâmica para diferentes ordens, o próximo passo da investigação é a determinação das relações de dispersão correspondentes à hidrodinâmica de terceira ordem, para as quais será útil conhecer as relações de dispersão de ordens inferiores.

Determinar as relações de dispersão hidrodinâmicas significa encontrar a dependência $\omega(k)$, depois de ter submetido o sistema a uma perturbação harmônica do tipo $e^{-i\omega t + ikx}$. As variáveis perturbadas são o campo de velocidades u^a e a entalpia w ,

$$\ln w = \ln w_0 + \delta \ln w(x, t), \quad u^a = u_0^a + \delta u^a. \quad (4.1)$$

Nas expressões (4.1), w_0 e u_0^a representam, respectivamente, a entalpia e o campo de velocidades do fluido no estado de equilíbrio. Para determinar as relações de dispersão, é conveniente escrever as flutuações $\delta \ln w$ e δu^a no espaço dos momentos. Isso pode ser feito tomando as transformadas de Fourier destas flutuações:

$$\delta u^a(x) = \int d^d x e^{-ik_b x^b} \delta u^a(k), \quad \delta \ln w(x) = \int d^d x e^{-ik_b x^b} \delta \ln w(k). \quad (4.2)$$

Para obter as relações de dispersão, levamos em conta as transformadas (4.2) e substituímos as perturbações (4.1) nas equações de movimento (2.89)-(2.91) para o caso do espaço-tempo plano de Minkowsky, ou seja, consideramos que $g_{ab} = \eta_{ab}$. As estruturas não-lineares podem ser ignoradas na expansão em gradientes do tensor energia-momento T^{ab} e da corrente conservada J^a , pois estamos considerando flutuações δu^a e $\delta \ln w$ de pequenas amplitudes [11, 12], resultando nas seguintes estruturas lineares (1ª ordem nas amplitudes):

$$\Pi^{ab} \simeq \Pi_{\text{lin}}^{ab} = T_{(1),\text{lin}}^{ab} + T_{(2),\text{lin}}^{ab} + T_{(3),\text{lin}}^{ab}, \quad (4.3)$$

$$J_{\text{NPF}}^a \simeq J_{\text{NPF,lin}}^a = J_{(1),\text{lin}}^a + J_{(2),\text{lin}}^a + J_{(3),\text{lin}}^a, \quad (4.4)$$

sendo

$$T_{(1),\text{lin}}^{ab} = -\eta \sigma^{ab} - \zeta \nabla_{\perp} \cdot u \Delta^{ab}, \quad (4.5)$$

$$T_{(2),\text{lin}}^{ab} = \eta \tau_{\Pi}^{\leq} D \sigma^{ab} + \zeta \tau_{\pi} D(\nabla \cdot u) \Delta^{ab}, \quad (4.6)$$

$$T_{(3),\text{lin}}^{ab} = v^{(3,0)} \mathcal{S}_1 \Delta^{ab} + v_1^{(3,2)} \mathcal{T}_1^{ab} + v_2^{(3,2)} \mathcal{T}_2^{ab}, \quad (4.7)$$

$$J_{(1),\text{lin}}^a = v_1^{(1,1)} \nabla_{\perp}^a \ln w, \quad (4.8)$$

$$J_{(2),\text{lin}}^a = v_1^{(2,1)} \nabla_{\perp b} \sigma^{ba} + v_2^{(2,2)} \nabla_{\perp b} \Omega^{ba}, \quad (4.9)$$

$$J_{(3),\text{lin}}^a = v^{(3,1)} \mathcal{V}_1^a = v^{(3,1)} \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^b \ln w. \quad (4.10)$$

As equações hidrodinâmicas (2.89)-(2.91) correspondentes às perturbações são dadas por:

$$D\delta \ln w + (1 + c_s^2) \nabla_{\perp} \cdot \delta u + (\nabla_a \delta u_b) \delta \Pi^{ab} = 0, \quad (4.11)$$

$$D\delta u^a + \frac{c_s^2}{1 + c_s^2} \nabla_{\perp}^a \delta \ln w + \frac{1}{w} \Delta_b^a \nabla_c \delta \Pi^{cb} = 0, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \cdot \delta u + D\delta \ln n + \frac{v_1^{(1,1)}}{n} \nabla_a \nabla_{\perp}^a \delta \ln w + \frac{v_1^{(2,1)}}{n} \nabla_a \nabla_{\perp b} \delta \sigma^{ba} \\ + \frac{v_2^{(2,1)}}{n} \nabla_a \nabla_{\perp b} \delta \Omega^{ba} + \frac{v_1^{(3,1)}}{n} \nabla_a \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^b \delta \ln w = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

O sistema de equações diferenciais (4.11)-(4.13) será transformado num sistema de equações algébricas depois que as derivadas transversais e longitudinais forem aplicadas sobre as perturbações (4.2). A aplicação da derivada longitudinal D sobre $\delta \ln w$ e δu^a resulta em

$$\begin{aligned} D\delta \ln w &= u^a \nabla_a \delta \ln w = u^a \partial_a \delta \ln w = i u^a k_a \delta \ln w = i k_{\parallel} \delta \ln w, \\ D\delta u^a &= u^b \nabla_b \delta u^a = u^b \partial_b \delta u^a = i u^b k_b \delta u^a = i k_{\parallel} \delta u^a, \end{aligned} \quad (4.14)$$

sendo $k_{\parallel} = u^b k_b$. Por sua vez, a aplicação da derivada transversal ∇_{\perp}^a sobre $\delta \ln w$ e δu^a produz

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^a \delta \ln w &= \partial_{\perp}^a \delta \ln w = i \Delta^{ab} k_b \delta \ln w = i k_{\perp}^a \delta \ln w, \\ \nabla_{\perp} \cdot \delta u &= \nabla_{\perp b} \delta u^b = \partial_{\perp b} \delta u^b = i k_{\perp b} \delta u^b, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde $\partial_{\perp}^a = \Delta^{ab} \partial_b$ e $k_{\perp}^a = \Delta^{ab} k_b$. Nas equações acima, k_{\parallel} representa a projeção do vetor de onda k^a na direção da velocidade u^a e k_{\perp} representa a projeção do vetor de onda k^a no espaço transversal à velocidade do fluido.

Conhecendo as derivadas transversais e longitudinais das perturbações (4.2) é possível expressar $\delta \Pi^{cb}$ em termos destas quantidades:

$$\begin{aligned} \delta \Pi^{cb} &= -\eta \delta \sigma^{cb} + \eta \tau_{\pi}^{\leq} D \delta \sigma^{cb>} + \frac{v_1^{(3,2)}}{2} \nabla_{\perp d} \nabla_{\perp}^d \delta \sigma^{cb} + v_2^{(3,2)} \nabla_{\perp}^{\leq c} \nabla_{\perp}^{b>} \nabla_{\perp d} \delta u^d \\ &+ \left[-\zeta (\nabla_{\perp} \cdot \delta u) + \zeta \tau_{\pi} D (\nabla_{\perp} \cdot \delta u) + v^{(3,0)} \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp}^a (\nabla_{\perp} \cdot \delta u) \right] \Delta^{cb}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando (4.14) e o fato que $\delta\sigma^{cb} = 2\nabla_{\perp}^{\langle c}\delta u^{b\rangle} = i\left(k_{\perp}^c\delta u^b + k_{\perp}^b\delta u^c - \frac{2}{d-1}\Delta^{cb}k_{\perp d}\delta u^d\right)$, temos:

$$\begin{aligned} \langle D\delta\sigma^{cb}\rangle &= ik_{\parallel}\delta\sigma^{cb}, & \nabla_{\perp d}\nabla_{\perp}^d\delta\sigma^{cb} &= -\frac{k_{\perp}^2}{2}\delta\sigma^{cb}, \\ \nabla_{\perp}^{\langle c}\nabla_{\perp}^{b\rangle}k_{\perp d}\delta u^d &= -i\left[k_{\perp}^ck_{\perp}^b - \frac{k_{\perp}^2}{d-1}\Delta^{cb}\right]k_{\perp d}\delta u^d, \\ \nabla_{\perp a}\nabla_{\perp}^a(\nabla_{\perp}\cdot\delta u) &= -ik_{\perp}^2k_{\perp b}\delta u^b, & D(\nabla_{\perp}\cdot\delta u) &= -k_{\parallel}k_{\perp b}\delta u^b. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Então, considerando as expressões (4.15) e (4.17), vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}\Delta^a{}_b\nabla_c\delta\Pi^{cb} &= \left(\eta + i\eta\tau_{\pi}k_{\parallel} + i\frac{1}{2}v_1^{(3,2)}\right)\frac{k_{\perp}^2\delta u^a}{w} - (1 - i\tau_{\pi}k_{\parallel})\Gamma^*k_{\perp}^ak_{\perp b}\delta u^b \\ &+ \left\{v^{(3,0)} + \frac{1}{2}v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)}\left(\frac{d-2}{d-1}\right)\right\}\frac{k_{\perp}^2k_{\perp}^ak_{\perp b}\delta u^b}{w}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde

$$\Gamma^* = \frac{(3-d)\eta - (d-1)\zeta}{w(d-1)}. \quad (4.19)$$

Na obtenção das equações acima, além de ter assumido que a perturbação na densidade de carga n seja nula, usamos também os seguintes resultados:

$$\nabla_a\nabla_{\perp b}\delta\Omega^{ba} = 0, \quad \nabla_a\nabla_{\perp b}\delta\sigma^{ba} = -2i\left(\frac{d-2}{d-1}\right)k_{\perp}^2k_{\perp b}\delta u^b, \quad (4.20)$$

onde $\delta\Omega^{ba}$ é um tensor anti-simétrico da forma

$$\delta\Omega^{ba} = ik_{\perp}^{[b}\delta u^{a]}. \quad (4.21)$$

Levando em conta (4.14)-(4.18), o sistema de equações diferenciais (4.11)-(4.13) será transformado num sistema de equações algébricas para a variável k_{\parallel} :

$$k_{\parallel}\delta\ln w + (1 + c_s^2)k_{\perp b}\delta u^b = 0, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} k_{\parallel}\delta u^a + \frac{c_s^2}{1 + c_s^2}k_{\perp}^a\delta\ln w - k_{\parallel}\left(i\eta + \eta\tau_{\pi}k_{\parallel} + \frac{1}{2}v_1^{(3,2)}\right)\frac{k_{\perp}^2\delta u^a}{w} + ik_{\parallel}(1 - i\tau_{\pi}k_{\parallel})\Gamma^*k_{\perp}^ak_{\perp b}\delta u^b \\ - ik_{\parallel}\left\{v^{(3,0)} + \frac{1}{2}v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)}\left(\frac{d-2}{d-1}\right)\right\}\frac{k_{\perp}^2k_{\perp}^ak_{\perp b}\delta u^b}{w} = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$-ik_{\perp b}\delta u^b + \frac{v_1^{(1,1)}}{n}k_{\perp}^2\delta\ln w + 2i\frac{v_1^{(2,1)}}{n}\left(\frac{d-2}{d-1}\right)k_{\perp}^2k_{\perp b}\delta u^b - \frac{v_1^{(3,1)}}{n}k_{\perp}^4\delta\ln w = 0, \quad (4.24)$$

sendo que o termo $(k_a\delta u_b)\delta\Pi^{ab}$ foi desprezado em (4.22) pois envolve elementos não-lineares.

A partir das relações (4.22) e (4.24), é possível determinar $\delta \ln w$,

$$\delta \ln w = -\frac{(1 + c_s^2)k_{\perp b}\delta u^b}{k_{\parallel}} = i\left(v_1^{(1,1)}k_{\perp}^2\left[1 - \frac{v_1^{(3,1)}}{v_1^{(1,1)}}k_{\perp}^2\right]^{-1}\left[n - 2k_{\perp}^2\frac{(d-2)}{d-1}v_1^{(2,1)}\right]\right)k_{\perp b}\delta u^b. \quad (4.25)$$

Substituindo a primeira igualdade em (4.25) na equação (4.23) e multiplicando por k_{\parallel} , obtemos a seguinte equação de segundo grau:

$$\begin{aligned} & \left\{\left(1 - \frac{\eta\tau_{\pi}}{w}k_{\perp}^2\right)k_{\parallel} - i\frac{\eta}{w}k_{\perp}^2 - i\frac{1}{2}v_1^{(3,2)}\frac{k_{\perp}^4}{w}\right\}k_{\parallel}\delta u^a - i\left\{(1 - i\tau_{\pi}k_{\parallel})\Gamma^* \right. \\ & \left. + \left[v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)}\left(\frac{d-2}{d-1}\right)\right]\frac{k_{\perp}^2}{w}k_{\parallel} - c_s^2\right\}k_{\perp}^a k_{\perp b}\delta u^b = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Determinar as relações de dispersão a partir de (4.26) consiste em encontrar primeiro as relações entre k_{\parallel} e k_{\perp} , ou seja, $k_{\parallel}(k_{\perp})$. Considerando $u^a = \gamma(1, \mathbf{v})$ com $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$, onde \mathbf{v} representa a velocidade do fluido, as quantidades k_{\parallel} e k_{\perp} estão relacionados com a frequência ω e o vetor de onda \mathbf{k} por meio das seguintes relações [8]:

$$k_{\parallel} = \gamma(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega), \quad k_{\perp}^2 = -\omega^2 + \mathbf{k}^2 + \gamma^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)^2. \quad (4.27)$$

Neste trabalho serão consideradas apenas as relações de dispersão com relação ao referencial em que o fluido encontra-se em repouso, ou seja, adota-se $\mathbf{v} = 0$.

Para obter as relações de dispersão, vamos simplesmente projetar a equação (4.26) sobre as componentes longitudinal e transversal ao vetor de onda k_{\perp}^a . Nesse sentido, definimos as componentes δu_L^a e δu_T^a da perturbação do campo de velocidades da seguinte forma:

$$\delta u^a = \delta u_L^a + \delta u_T^a, \quad (4.28)$$

sendo

$$\delta u_L^a = \frac{k_{\perp}^a k_{\perp b}\delta u^b}{k_{\perp}^2}, \quad \delta u_T^a = \left(\Delta_b^a - \frac{k_{\perp}^a k_{\perp b}}{k_{\perp}^2}\right)\delta u^b. \quad (4.29)$$

Projetando (4.26) na direção transversal à k_{\perp}^a , temos a seguinte equação:

$$\left[\left(1 - \frac{\eta\tau_{\pi}}{w}k_{\perp}^2\right)k_{\parallel} - i\frac{\eta}{w}k_{\perp}^2 - i\frac{1}{2}v_1^{(3,2)}\frac{k_{\perp}^4}{w}\right]k_{\parallel}\delta u^a = 0, \quad (4.30)$$

ou, simplesmente,

$$\left(1 - \frac{\eta\tau_{\pi}}{w}k_{\perp}^2\right)k_{\parallel} - i\frac{\eta}{w}k_{\perp}^2 - i\frac{1}{2}v_1^{(3,2)}\frac{k_{\perp}^4}{w} = 0, \quad (4.31)$$

uma vez que $k_{\parallel}\delta u^a \neq 0$. A quantidade k_{\parallel} pode então ser facilmente determinada a partir

desta equação,

$$k_{\parallel} = \left(1 - \frac{\eta\tau_{\pi}}{w} k_{\perp}^2\right)^{-1} \left[i \frac{\eta}{w} k_{\perp}^2 + i \frac{1}{2} v_1^{(3,2)} \frac{k_{\perp}^4}{w} \right]. \quad (4.32)$$

Como aqui estamos considerando valores pequenos de k_{\perp} (comprimento de onda grande), podemos utilizar a seguinte aproximação:

$$\left(1 - \frac{\eta\tau_{\pi}}{w} k_{\perp}^2\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{\eta\tau_{\pi}}{w} k_{\perp}^2. \quad (4.33)$$

Com isso, a expressão para k_{\parallel} associada ao setor transversal se reduz à

$$k_{\parallel T} = i \frac{\eta}{w} k_{\perp}^2 + i \left(\frac{\tau_{\pi}\eta^2}{w^2} + \frac{1}{2w} v_1^{(3,2)} \right) k_{\perp}^4 + O(k_{\perp}^5). \quad (4.34)$$

Para achar o valor de k_{\parallel} associado ao setor longitudinal, projetamos a equação (4.26) na direção do vetor k_{\perp}^a :

$$\left\{ [1 - 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2] k_{\parallel}^2 - i \left[2\Gamma_d k_{\perp}^2 + \left(v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right) \frac{k_{\perp}^4}{w} \right] k_{\parallel} - c_s^2 k_{\perp}^2 \right\} k_{\perp b} u^b = 0, \quad (4.35)$$

onde

$$2\Gamma_d = \frac{\eta}{w} - \Gamma^* \quad \text{e} \quad 2\Gamma_d^1 = \frac{\eta\tau_{\pi}}{w} - \tau_{\pi}\Gamma^*. \quad (4.36)$$

Sendo $k_{\perp b} u^b \neq 0$ o termo entre chaves em (4.35) é nulo, ou seja,

$$[1 - 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2] k_{\parallel}^2 - i \left[2\Gamma_d k_{\perp}^2 + \left(v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right) \frac{k_{\perp}^4}{w} \right] k_{\parallel} - c_s^2 k_{\perp}^2 = 0. \quad (4.37)$$

Esta última expressão é simplesmente uma equação quadrática com coeficientes

$$A = 1 - 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2, \quad (4.38)$$

$$B = -i \left[2\Gamma_d k_{\perp}^2 + \left(v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right) \frac{k_{\perp}^4}{w} \right], \quad (4.39)$$

$$C = -c_s^2 k_{\perp}^2. \quad (4.40)$$

Podemos dividir (4.37) por $1 - 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2$ e utilizar a aproximação

$$(1 - 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2)^{-1} \simeq 1 + 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2, \quad (4.41)$$

usando o fato de que a perturbação é pequena em relação ao número de onda k_{\perp}^2 . Com isso,

obtemos finalmente a seguinte equação:

$$k_{\parallel}^2 - i \left[2\Gamma_d k_{\perp}^2 + \left(v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right) \frac{k_{\perp}^4}{w} + 4\Gamma_d \Gamma_d^1 k_{\perp}^4 \right] k_{\parallel} - c_s^2 k_{\perp}^2 (1 + 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2) = 0. \quad (4.42)$$

Temos agora uma equação mais fácil de ser resolvida, em que os novos coeficientes são

$$a = 1, \quad (4.43)$$

$$b = -i \left[2\Gamma_d k_{\perp}^2 + \left(v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right) \frac{k_{\perp}^4}{w} + 4\Gamma_d \Gamma_d^1 k_{\perp}^4 \right], \quad (4.44)$$

$$c = -c_s^2 k_{\perp}^2 (1 + 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2). \quad (4.45)$$

Assim, o discriminante da equação (4.42) é dado por

$$\begin{aligned} D &= - (2\Gamma_d k_{\perp}^2 + B^* k_{\perp}^4)^2 + 4c_s^2 k_{\perp}^2 [1 + 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2] \\ &= k_{\perp}^2 \{ -k_{\perp}^2 (2\Gamma_d + B^* k_{\perp}^2)^2 + 4c_s^2 [1 + 2\Gamma_d^1 k_{\perp}^2] \} \\ &\simeq 4c_s^2 k_{\perp}^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\Gamma_d}{c_s^2} [\Gamma_d + B^* k_{\perp}^2] - 2\Gamma_d^1 \right) k_{\perp}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde fizemos $B^* = \left(v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)} \left[\frac{d-2}{d-1} \right] \right) \frac{k_{\perp}^4}{w} + 4\Gamma_d \Gamma_d^1$, por simplicidade, e o termo $(B^*)^2 k_{\perp}^6$ foi desprezado, pois na hidrodinâmica de terceira ordem só se considera termos até a potência quarta de k_{\perp} . Extraíndo a raiz quadrada do discriminante D , vem

$$\sqrt{D} = 2c_s k_{\perp} \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma_d}{c_s^2} [\Gamma_d + B^* k_{\perp}^2] - 2\Gamma_d^1 \right) k_{\perp}^2} \simeq 2c_s k_{\perp} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_d}{c_s^2} - 2\Gamma_d^1 \right) k_{\perp}^2 \right], \quad (4.47)$$

sendo que, acima, usamos o fato de que k_{\perp} é pequeno para fazer o desenvolvimento dessa expressão até a segunda ordem, apenas. Finalmente, a solução da equação (4.37) para k_{\parallel} associada ao setor longitudinal é dada por

$$\begin{aligned} k_{\parallel L_1} &= \pm c_s^2 k_{\perp} + i\Gamma_d^2 k_{\perp}^2 \mp \frac{1}{2c_s^2} \left[\Gamma_d^2 - 2c_s^2 \Gamma_d^1 \right] k_{\perp}^3 \\ &\quad + i \left\{ 2\Gamma_d \Gamma_d^1 + \frac{1}{w} \left[v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + v_2^{(3,2)} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right] \right\} k_{\perp}^4 + \mathcal{O}(k_{\perp}^5). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Agora, da condição (4.25) pode ser obtida outra solução para k_{\parallel} , a saber,

$$k_{\parallel} = i v_1^{(1,1)} k_{\perp}^2 \left(1 - \frac{v_1^{(3,1)} k_{\perp}^2}{v_1^{(1,1)}} \right) n^{-1} \left(1 - \frac{2k_{\perp}^2}{n} \left[\frac{d-2}{d-1} \right] v_1^{(2,1)} \right)^{-1}. \quad (4.49)$$

A solução (4.49) representa um modo longitudinal, pois os termos da equação (4.25) de onde foi obtida são proporcionais ao fator $k_{\perp a} \delta u^a$, ou seja, proporcionais à δu_L . Esse modo longitudinal é denotado aqui por $k_{\parallel L_2}$.

Considerando valores de k_{\perp} pequenos (comprimentos de onda longos), a expressão (4.49) pode ser aproximada por

$$k_{\parallel L_2} \simeq \frac{i}{n} \left(v_1^{(1,1)} k_{\perp}^2 - v_1^{(3,1)} k_{\perp}^4 \right) \left[1 + \frac{2k_{\perp}^2}{n} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) v_1^{(2,1)} \right], \quad (4.50)$$

a qual pode ser reescrita como

$$k_{\parallel L_2} = \frac{i v^{(1,1)} k_{\perp}^2}{n} - i \left[\frac{v_2^{(3,1)}}{n} - \frac{2}{n^2} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) v_1^{(2,1)} v_1^{(3,1)} \right] k_{\perp}^4 + \mathcal{O}(k_{\perp}^5). \quad (4.51)$$

4.1.1 Relações de dispersão no sistema de referência do fluido

Para um observador que se movimenta junto com o fluido o campo de velocidades é dado simplesmente por

$$u^a = (1, 0, \dots, 0). \quad (4.52)$$

Dessa forma,

$$k_{\parallel} = u^0 k_0 = -\omega \quad \text{e} \quad k_{\perp}^2 = k^i k_i \equiv k^2. \quad (4.53)$$

Assim, considerando (4.53) as relações de dispersão $\omega(k)$ se reduzem à

$$\omega_T = -i \frac{\eta}{w} k^2 - i \left(\frac{\tau_{\pi} \eta^2}{w^2} + \frac{1}{2} \frac{v^{(3,2)}}{w} \right) k^4 + \mathcal{O}(k^6), \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \omega_{L_1} = & \pm c_s k - i \Gamma_d^2 k^2 \mp \frac{1}{2c_s^2} \left[\Gamma_d^2 - 2c_s^2 \Gamma_d^1 \right] k^3 \\ & - i \left\{ 2\Gamma_d \Gamma_d^1 + \left[v^{(3,0)} + v_1^{(3,2)} + \frac{v_2^{(3,2)}}{w} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right] \right\} k^4 + \mathcal{O}(k^5), \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\omega_{L_2} = -\frac{i v^{(1,1)} k^2}{n} + i \left[\frac{v_2^{(3,1)}}{n} - \frac{2}{n^2} \left[\frac{d-2}{d-1} \right] v_1^{(2,1)} v_1^{(3,1)} \right] k^4 + \mathcal{O}(k^5). \quad (4.56)$$

Em resumo, nas equações (4.54)-(4.56), temos dois modos longitudinais, $\omega_{L_1}(k)$ e $\omega_{L_2}(k)$, além de um modo transversal $\omega_T(k)$.

4.1.2 Caso limite: fluido sem carga

Como comentamos na introdução deste trabalho, o caso limite da hidrodinâmica construída aqui representa o caso de um fluido sem carga, $n = 0$, já descrita em diversos trabalhos,

tais como [11, 12], onde foi desenvolvida a hidrodinâmica até segunda ordem e, mais recentemente, em [2, 8], onde foi desenvolvida a hidrodinâmica até terceira ordem. As equações de conservação para um fluido não carregado são representadas pelas relações (2.87) e (2.88):

$$D \ln s = -\nabla \cdot \mathbf{u} + \text{termos de ordem superior},$$

$$Du^a = -c_s^2 \nabla_{\perp}^a \ln s + \text{termos de ordem superior}.$$

As relações de dispersão correspondentes a essas equações de conservação são dadas pelo modo transversal ω_T e pelo modo longitudinal ω_{L_1} , porém o modo longitudinal ω_{L_2} deve se anular para $n = 0$. Conseqüentemente, as constantes na relação de dispersão (4.56) devem ser nulas, $v^{(1,1)} = v_2^{(3,1)} = v_1^{(2,1)} = v_1^{(3,1)} = 0$. Particularmente, para eliminar a singularidade da relação (4.56) com relação à carga n , esses coeficientes são escolhidos da seguinte forma:

$$v^{(1,1)} = v^{(1,1)*} n^2, \quad v_2^{(3,1)} = v_2^{(3,1)*} n^2, \quad v_1^{(2,1)} = v_1^{(2,1)*} n, \quad v_1^{(3,1)} = v_1^{(3,1)*} n^2, \quad (4.57)$$

onde foram introduzidos os novos coeficientes de transporte $(v^{(1,1)*}, v_2^{(3,1)*}, v_1^{(2,1)*}, v_1^{(3,1)*})$. Com isso, a relação de dispersão $\omega_{L_2}(k)$ adquire a forma

$$\omega_{L_2} = n \left\{ -i v^{(1,1)*} k^2 + i \left[v_2^{(3,1)*} - 2 \left(\frac{d-2}{d-1} \right) v_1^{(2,1)*} v_1^{(3,1)*} \right] k^4 + \mathcal{O}(k^5) \right\}. \quad (4.58)$$

Analisando (4.58) é fácil perceber que, se $n = 0$, temos $\omega_{L_2} = 0$.

4.2 Fluidos conformes

Para o caso de um fluido conforme, as partes dissipativas do tensor energia-momento T^{ab} e da corrente J^a , correspondentes aos termos lineares das estruturas obtidas no capítulo anterior, são as seguintes:

$$\Pi^{ab} = -\eta \sigma^{ab} + v^{(3,1)} u^c \mathcal{D}_c \sigma^{ab} + v_1^{(3,3)} \mathcal{D}_c \mathcal{D}^{(a} \sigma^{b)c} + v_2^{(3,3)} \Delta^{cd} \mathcal{D}_c \mathcal{D}_d \sigma^{ab}, \quad (4.59)$$

$$J_{\text{NPF}}^a = v_1^{(2,1)} u_b \mathcal{F}^{ab} + v_2^{(2,1)} \Delta^a_c \mathcal{D}_d \sigma^{cd} + v_3^{(2,1)} \Delta^a_c \mathcal{D}_d \Omega^{cd}. \quad (4.60)$$

Agora, para determinar as perturbações lineares $\delta\Pi^{ab}$ e δJ_{NPF}^a , devemos levar em consideração a definição de derivada covariante de Weyl, equação (3.133), para uma perturbação $\tilde{\mathcal{D}}_c\tilde{Q}_{b\dots}^a$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_c\tilde{Q}_{b\dots}^a &\equiv \nabla_c\delta Q_{b\dots}^a + w\delta\mathcal{A}_c\delta Q_{b\dots}^a + [g_{cd}\delta A^a - \delta_c^a\delta\mathcal{A}_d - \delta_d^a\delta\mathcal{A}_c]\delta Q_{b\dots}^d + \dots - \\ &- [g_{cb}\delta\mathcal{A}^d - \delta_c^d\delta\mathcal{A}_b - \delta_b^d\delta\mathcal{A}_c]\delta Q_{d\dots}^a - \dots \end{aligned} \quad (4.61)$$

Na equação anterior, escrevemos a derivada covariante de Weyl $\tilde{\mathcal{D}}_c\tilde{Q}_{b\dots}^a$ em termos do campo vetorial perturbado δA^a . Isto é possível, pois esse campo é novamente invariante de gauge, uma vez que estamos considerando somente perturbações lineares,

$$\delta\mathcal{A}_a = -\frac{1}{d-1} \left(\frac{ik_{\perp a}\delta\ln w}{1+c_s^2} + iu_a k_{\perp b}\delta u^b \right). \quad (4.62)$$

Com isso, podemos utilizar a seguinte aproximação:

$$\tilde{\mathcal{D}}_c\tilde{Q}_{b\dots}^a \simeq \nabla_c\delta Q_{b\dots}^a, \quad (4.63)$$

pois os demais elementos em (4.61) são produtos do tipo $\delta\mathcal{A}\delta Q$ que, evidentemente, não são lineares.

Podemos agora facilmente escrever as perturbações (lineares) das partes dissipativas do tensor energia-momento e da corrente, Π^{ab} e J_{NPF}^a , para um fluido conforme. No caso de Π^{ab} , temos a seguinte expressão:

$$\delta\Pi^{ab} = -\eta\delta\sigma^{ab} + ik_{\parallel}v^{(3,1)}\delta\sigma^{ab} - v_{\perp}^{(3,3)}k_{\perp}^2\delta\sigma^{ab} + ik_c v_2^{(3,3)}\nabla^{(a}\delta\sigma^{b)c}. \quad (4.64)$$

Em (4.64) utilizamos os resultados deduzidos a partir de (4.63):

$$u^c\mathcal{D}_c\delta\sigma^{ab} = u^c\nabla_c\delta\sigma^{ab} = iu^ck_c\delta\sigma^{ab} = ik_{\parallel}\delta\sigma^{ab}, \quad (4.65)$$

$$\Delta^{cd}\mathcal{D}_c\mathcal{D}_d\delta\sigma^{ab} = \Delta^{cd}\nabla_c\nabla_d\delta\sigma^{ab} = -k_{\perp}^2\delta\sigma^{ab}, \quad (4.66)$$

$$\mathcal{D}_c\mathcal{D}^{(a}\delta\sigma^{b)c} = \nabla_c\nabla^{(a}\delta\sigma^{b)c} = ik_c\nabla^{(a}\delta\sigma^{b)c}. \quad (4.67)$$

De modo similar ao que fizemos para o caso de um fluido não-conforme, as relações de dispersão são encontradas ao resolvermos a seguinte equação:

$$k_{\parallel}^2\delta u^a - c_s^2k_{\perp}^ak_{\perp c}\delta u^c - \frac{ik_{\parallel}}{w}\Delta^a_b\nabla_c\delta\Pi^{cb} = 0, \quad (4.68)$$

pois as equações (4.11) e (4.12) têm a mesma forma para um fluido conforme devido à (4.63). O último termo na equação (4.68) pode ser determinado, considerando as seguintes relações:

$$\Delta^a{}_b \nabla_c \left(i k_d \nabla^{(c} \delta \sigma^{b)d} \right) = \frac{i^2}{2} k_\perp^4 \delta u^a + \left[\frac{d-3}{d-1} + 4 \left(\frac{d-2}{d-1} \right)^2 \right] k_\perp^a k_{\perp d} \delta u^d, \quad (4.69)$$

$$\Delta^a{}_b \nabla_c \delta \sigma^{cb} = i^2 \left[k_\perp^2 \delta u^a + \left(\frac{d-3}{d-1} \right) k_\perp^a k_{\perp c} \delta u^c \right]. \quad (4.70)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \Delta^a{}_b \nabla_c \delta \Pi^{cb} &= i^2 \left(\eta + i k_{\parallel} v^{(2,1)} - k_\perp^2 v^{(3,2)} \right) \left[\frac{k_\perp^2}{w} \delta u^a + \left(\frac{d-3}{d-1} \right) k_\perp^a k_{\perp c} \delta u^c \right] \\ &+ \frac{i^2}{2} k_\perp^4 \delta u^a + C(d) k_\perp^a k_{\perp c} \delta u^c, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde $C(d)$ é dado pela expressão

$$C(d) = \frac{d-3}{d-1} + 4 \left[\frac{d-2}{d-1} \right]^2. \quad (4.72)$$

Agora, levando em conta (4.71) podemos escrever a equação (4.68) em termos de k_{\parallel} e k_\perp^a da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\left\{ k_{\parallel}^2 + k_{\parallel} i^2 \left(i \eta + k_{\parallel} v^{(3,1)} + i k_\perp^2 v_2^{(3,3)} \right) \left[\frac{k_\perp^2}{w} + \frac{i k_\perp^4}{2w} v_1^{(3,3)} \right] \right\} \delta u^a \\ &+ \left\{ i^2 \left(i \eta + k_{\parallel} v^{(3,1)} + i k_\perp^2 v_2^{(3,3)} \right) \left[\frac{d-3}{d-1} \right] \frac{k_{\parallel}}{w} - i v_1^{(3,3)} C(d) \frac{k_{\parallel}}{w} - c_s^2 \right\} k_\perp^a k_{\perp e} \delta u^e = 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

É fácil perceber que a equação (4.73) pode ser escrita de forma mais compacta e ilustrativa como

$$f(k_\perp, k_{\parallel}) \delta u^a + h(k_\perp, k_{\parallel}) k_\perp^a k_{\perp e} \delta u^e = 0. \quad (4.74)$$

Contraindo a equação (4.74) com a velocidade u^a e levando em conta que $u_a k_\perp^a = 0$, percebe-se que a seguinte condição precisa ser satisfeita:

$$f(k_\perp, k_{\parallel}) = k_{\parallel}^2 + k_{\parallel} i^2 \left(i \eta + k_{\parallel} v^{(3,1)} + i k_\perp^2 v_2^{(3,3)} \right) \frac{k_\perp^2}{w} + \frac{i k_\perp^4 k_{\parallel}}{2w} v_1^{(3,3)} = 0. \quad (4.75)$$

Dividindo esta equação por k_{\parallel} e agrupando os termos de forma conveniente, obtemos

$$k_{\parallel} \left(1 - \frac{k_\perp^2 v^{(3,1)}}{w} \right) - \frac{i \eta k_\perp^2}{w} - \frac{i k_\perp^4 v_2^{(3,3)}}{w} - \frac{i k_\perp^4 v_1^{(3,3)}}{2w} = 0. \quad (4.76)$$

Desta última equação é possível determinar $k_{\parallel}(k_{\perp})$,

$$k_{\parallel x} = \left(1 - \frac{k_{\perp}^2 v^{(3,1)}}{w}\right)^{-1} \left[\frac{i\eta k_{\perp}^2}{w} + \frac{ik_{\perp}^4 v_2^{(3,3)}}{w} + \frac{ik_{\perp}^4 v_1^{(3,3)}}{2w} \right] \quad (4.77)$$

$$\simeq \frac{i\eta k_{\perp}^2}{w} + \left(\frac{i\eta v^{(3,1)}}{w^2} + \frac{iv_2^{(3,3)}}{w} + \frac{iv_1^{(3,3)}}{2w} \right) k_{\perp}^4, \quad (4.78)$$

sendo que, acima, usamos a seguinte aproximação

$$\left(1 - \frac{k_{\perp}^2 v^{(3,1)}}{w}\right)^{-1} \simeq \left(1 + \frac{k_{\perp}^2 v^{(3,1)}}{w}\right). \quad (4.79)$$

A solução (4.78) não é a única possível para a equação (4.73). De forma similar ao que foi feito na seção anterior, projetamos a equação (4.74) na direção de k_{\perp}^a e encontramos a equação quadrática

$$k_{\parallel}^2 \left(1 - 2 \left[\frac{d-2}{d-1} \right] \frac{v^{(3,1)} k_{\perp}^2}{w}\right) - ik_{\parallel} \left[2 \left(\eta + k_{\perp}^2 v_2^{(3,3)} \right) \left[\frac{d-2}{d-1} \right] \frac{k_{\perp}^2}{w} + \left(\frac{1}{2} + C(d) \right) \frac{v_1^{(3,3)} k_{\perp}^4}{w} \right] - c_s^2 k_{\perp}^2 = 0. \quad (4.80)$$

Multiplicando pelo fator $\left(1 - 2 \left[\frac{d-2}{d-1} \right] \frac{v^{(3,1)} k_{\perp}^2}{w}\right)^{-1}$, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$k_{\parallel}^2 - ik_{\parallel} [1 + Av^{(3,1)} k_{\perp}^2] [A\eta k_{\perp}^2 + (Av_2^{(3,3)} + Bv_1^{(3,3)}) k_{\perp}^4] - c_s^2 [1 + Av^{(2,1)} k_{\perp}^2] k_{\perp}^2 = 0, \quad (4.81)$$

sendo que, acima, usamos a aproximação (4.79) e introduzimos as constantes

$$A = 2 \left[\frac{d-2}{d-1} \right] \frac{1}{w}, \quad B = \left(\frac{1}{2} + C(d) \right) \frac{1}{w}. \quad (4.82)$$

A equação (4.81) pode ser colocada numa forma ainda mais compacta,

$$k_{\parallel}^2 - ik_{\parallel} [1 + A^* k_{\perp}^2] [B^* k_{\perp}^2 + C^* k_{\perp}^4] - c_s^2 [1 + A^* k_{\perp}^2] k_{\perp}^2 = 0, \quad (4.83)$$

ou, considerando potências de k_{\perp} somente até quarta ordem, vem

$$k_{\parallel}^2 - ik_{\parallel} [B^* k_{\perp}^2 + (A^* B^* + C^*) k_{\perp}^4] - c_s^2 [1 + A^* k_{\perp}^2] k_{\perp}^2 = 0. \quad (4.84)$$

O discriminante desta equação quadrática é dado por

$$\begin{aligned} D &= 4c_s^2[1 + A^*k_\perp^2]k_\perp^2 - k_\perp^4(B^* + (A^*B^* + C^*)k_\perp^2)^2 \\ &\simeq 4c_s^2k_\perp^2\left(1 + \frac{1}{4c_s^2}[A^* - (B^*)^2]k_\perp^2\right). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Em (4.85) desprezamos as potências de k_\perp maiores do que 4. Então, a raiz do discriminante \sqrt{D} é dada pela expressão

$$\sqrt{D} = 2c_s k_\perp \sqrt{1 + \frac{1}{4c_s^2}[A^* - (B^*)^2]k_\perp^2} \simeq 2c_s k_\perp \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4c_s^2}[A^* - (B^*)^2]k_\perp^2\right). \quad (4.86)$$

Assim, a solução de (4.81) é

$$\begin{aligned} k_{\parallel L_1} &= \pm c_s k_\perp + i\eta \left(\frac{d-2}{d-1}\right) \frac{k_\perp^2}{w} \pm \frac{1}{2c_s} \left[\left(\frac{d-2}{d-1}\right) \frac{v^{(3,1)}}{w} + 2 \left(\frac{d-2}{d-1}\right)^2 \frac{\eta^2}{w^2} \right] k_\perp^3 + \\ &+ \frac{i}{2} \left[2 \left(\frac{d-2}{d-1}\right) v_2^{(3,3)} + \left(\frac{1}{2} + C(d)\right) v_1^{(3,3)} \right] \frac{k_\perp^4}{w} + \mathcal{O}(k_\perp^5). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Seguindo a mesma metodologia é possível determinar as relações de dispersão correspondentes a perturbação linear δJ_{NPF}^a . A corrente total do nosso sistema é dada pela expressão

$$J^a = J_0^a + j_{\text{NPF}}^a = nu^a + v_1^{(2,1)} u_b \mathcal{F}^{ba} + v_2^{(2,1)} \Delta^a_b \mathcal{D}_c \sigma^{bc} + v_3^{(2,1)} \Delta^a_b \mathcal{D}_c \Omega^{bc}. \quad (4.88)$$

Ao perturbar a corrente, encontramos

$$\delta J^a = n\delta u^a + v_1^{(2,1)} u_b \delta \mathcal{F}^{ba} + v_2^{(2,1)} ik_c \Delta^a_b \delta \sigma^{bc} + v_3^{(2,1)} ik_c \Delta^a_b \delta \Omega^{bc}. \quad (4.89)$$

A perturbação da corrente deve satisfazer a equação de conservação $\nabla_a J^a = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla_a \delta J^a &= ink_{\perp a} \delta u^a + iv_1^{(2,1)} \left\{ \frac{k_{\parallel}}{d-1} \left[\frac{k_\perp^2 \delta \ln w}{1 + c_s^2} + k_{\parallel} k_{\perp a} \delta u^a \right] + \frac{k_\perp^2 k_{\perp a} \delta u^a}{d-1} \right\} \\ &- v_2^{(2,1)} k_{\perp b} k_c \delta \sigma^{bc} - v_3^{(2,1)} k_{\perp b} k_c \delta \Omega^{bc} = 0. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Usando as relações abaixo

$$k_{\perp b} k_c \delta \sigma^{bc} = 2i \left(\frac{d-2}{d-1}\right) k_\perp^2 k_{\perp a} \delta u^a \quad \text{e} \quad k_{\perp b} k_c \delta \Omega^{bc} = 0, \quad (4.91)$$

a divergência da corrente assume a forma

$$\begin{aligned} \nabla_a \delta J^a &= in k_{\perp a} \delta u^a + i v_1^{(2,1)} \left\{ \frac{k_{\parallel}}{d-1} \left[\frac{k_{\perp}^2 \delta \ln w}{1+c_s^2} + k_{\parallel} k_{\perp a} \delta u^a \right] + \frac{k_{\perp}^2 k_{\perp a} \delta u^a}{d-1} \right\} \\ &\quad - 2i v_2^{(2,1)} \left[\frac{d-2}{d-1} \right] k_{\perp}^2 k_{\perp a} \delta u^a = 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Das equações (4.11)-(4.12) foi deduzida na seção anterior a relação

$$\delta \ln w = - \frac{(1+c_s^2) k_{\perp a} \delta u^a}{k_{\parallel}} \quad (4.93)$$

que, ao ser substituída em (4.92), produz

$$-n - v_1^{(2,1)} \frac{k_{\parallel}^2}{d-1} + 2v_2^{(2,1)} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) k_{\perp}^2 = 0, \quad (4.94)$$

de onde segue diretamente

$$k_{\parallel}^2 = i^2 \frac{n(d-1)}{v_1^{(2,1)}} \left[1 - \frac{2v_2^{(2,1)}}{n} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) k_{\perp}^2 \right] \quad (4.95)$$

e, finalmente, temos

$$k_{\parallel} = i \sqrt{\frac{n(d-1)}{v_1^{(2,1)}}} \sqrt{1 - \frac{2v_2^{(2,1)}}{n} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) k_{\perp}^2}. \quad (4.96)$$

Usando o desenvolvimento da expressão $\sqrt{1-ax^2}$ até quarta ordem

$$\sqrt{1-ax^2} = 1 - \frac{ax^2}{2} - \frac{a^2x^4}{8} + \mathcal{O}(x^5), \quad (4.97)$$

encontramos que k_{\parallel} , para k_{\perp} pequeno (comprimento de onda longo), é dado por

$$k_{\parallel L_2} = i \sqrt{\frac{n(d-1)}{v_1^{(2,1)}}} \left\{ 1 - \frac{v_2^{(2,1)}}{n} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) k_{\perp}^2 - \frac{1}{8} \left[\frac{2v_2^{(2,1)}}{n} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right]^2 k_{\perp}^4 \right\} + \mathcal{O}(k_{\perp}^6). \quad (4.98)$$

Em (4.98), $k_{\parallel L_2}$ representa um modo longitudinal, já que a divergência da corrente $\nabla_a \delta J^a$, de onde foi obtido, é proporcional à $k_{\perp a} \delta u^a$, ou seja, é proporcional à δu_L .

4.2.1 Relações de dispersão no sistema de referência do fluido

De forma similar ao da seção anterior, temos que, num sistema de referência que se move junto com o fluido,

$$k_{\parallel} = -\omega \quad \text{e} \quad k_{\perp}^2 = k^2. \quad (4.99)$$

Sendo assim, as relações de dispersão assumem a forma

$$\omega_T = -\frac{i\eta k^2}{w} - \left(\frac{i\eta v^{(3,1)}}{w^2} + \frac{iv_2^{(3,3)}}{w} + \frac{iv_1^{(3,3)}}{2w} \right) k^4 + \mathcal{O}(k^6), \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \omega_{L_1} = & \pm c_s k - i\eta \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \frac{k^2}{w} \pm \frac{1}{2c_s} \left[\left(\frac{d-2}{d-1} \right) \frac{v^{(3,1)}}{w} + 2 \left(\frac{d-2}{d-1} \right)^2 \frac{\eta^2}{w^2} \right] k^3 \\ & - \frac{i}{2} \left[2 \left(\frac{d-2}{d-1} \right) v_2^{(3,3)} + \left(\frac{1}{2} + C(d) \right) v_1^{(3,3)} \right] \frac{k^4}{w} + \mathcal{O}(k^5), \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\omega_{L_2} = -i \sqrt{\frac{n(d-1)}{v_1^{(2,1)}}} \left\{ 1 - \frac{v_2^{(2,1)}}{n} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) k_{\perp}^2 - \frac{1}{8} \left[\frac{2v_2^{(2,1)}}{n} \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \right]^2 k_{\perp}^4 \right\} + \mathcal{O}(k^6). \quad (4.102)$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando as relações de dispersão encontradas nos casos conforme e não-conforme, vemos que elas são compatíveis com o que é esperado para um fluido dissipativo, uma vez que os coeficientes de transporte aparecem associados a componentes complexas que refletem o amortecimento ou amplificação da resposta às perturbações harmônicas para as quais o fluido foi submetido. Neste caso, temos um modo transversal ω_T associado aos efeitos da viscosidade do fluido, causados pela contribuição simétrica t^{ab} no tensor energia-momento, e dois modos longitudinais ω_{L_1} e ω_{L_2} , um deles associado à atenuação das ondas sonoras no fluido (ω_{L_1}) e o outro associado aos efeitos da difusão de carga na direção do campo de velocidades do fluido (ω_{L_2}). Uma vez que todos os efeitos dissipativos sejam desprezados, vemos que a relação de dispersão adequada a um fluido perfeito é obtida, a saber, $\omega_{L_1} = \pm c_s k$, onde c_s representa a velocidade do som.

Resta esclarecer a determinação dos coeficientes de transporte, que aparecem nas relações de dispersão, para um caso específico. A proposta para pesquisas futuras é usar a correspondência AdS/CFT na determinação dos coeficientes de transporte de um fluido conforme em três dimensões espaço-temporais. A correspondência AdS/CFT consiste, basicamente, no mapeamento entre duas teorias de campo: uma teoria gravitacional definida num espaço-tempo Anti-de Sitter (AdS), cuja métrica é uma solução das equações de Einstein com constante cosmológica negativa, e uma Teoria de Campos com simetria conforme (CFT). No caso que nos interessa, existe uma dualidade entre perturbações métricas num espaço-tempo assintoticamente AdS e as flutuações do tensor energia-momento na CFT. Na faixa de grandes comprimentos de onda, a teoria de campos conforme se encontra num regime em que os componentes do sistema manifestam o comportamento coletivo típico de um meio contínuo [5, 6, 21], isto é, no regime descrito pela hidrodinâmica conforme construída até terceira ordem ao longo desta dissertação.

Em vários trabalhos, como em [22, 23], mostra-se que as equações de Einstein podem ser escritas como equações diferenciais de segunda ordem (equações de onda) para as perturbações gravitacionais. De acordo com a literatura, tais perturbações são classificadas como escalares, vetoriais ou tensoriais, e as variáveis que governam a evolução destas perturbações são conhecidas como variáveis mestres de Regge-Wheeler-Zerilli (RWZ) [23]. Quando as perturbações gravitacionais são consideradas no limite hidrodinâmico [8], as perturbações escalares (Φ_S) são interpretadas, no contexto da correspondência AdS/CFT, como duais ao modo de onda sonora, enquanto as vetoriais (Φ_V) correspondem ao modo de cisalhamento.

A partir das soluções das equações diferenciais de segunda ordem para as variáveis Φ_s e Φ_v , é possível chegar nas relações de dispersão (4.100) e (4.101), conforme mostrado em [8] para um espaço-tempo assintoticamente AdS₄, cuja métrica é dada por:

$$ds^2 = \alpha^2 r^2 [-f(r)dt^2 + dx^2 + dy^2] + \frac{dr^2}{\alpha^2 r^2 f(r)}, \quad (5.1)$$

onde α está relacionado à constante cosmológica e a função $f(r)$ é definida pela expressão

$$f(r) = 1 - \frac{r_h^3}{r^3}, \quad (5.2)$$

a qual é conhecida como função horizonte. A métrica (5.1) representa a geometria de um buraco negro Schwarzschild-AdS planar (brana negra), cujo horizonte de eventos está localizado em $r = r_h$, isto é, na superfície em que a função horizonte se anula, $f(r) = 0$. Por outro lado, na fronteira AdS ($r \rightarrow \infty$), temos $f(r) \rightarrow 1$.

As equações que governam as perturbações gravitacionais duais às flutuações hidrodinâmicas de um fluido sem carga podem ser escritas como [8]

$$[f\partial_u(f\partial_u) + \mathfrak{w}^2 - V_{v,s}] \Phi_{v,s} = 0, \quad (5.3)$$

onde

$$\mathfrak{q} = \frac{3k}{4\pi\mathcal{T}}, \quad \mathfrak{w} = \frac{3\omega}{4\pi\mathcal{T}}, \quad u = \frac{r_h}{r}, \quad (5.4)$$

e os potenciais efetivos $V_{v,s}$ são dados por

$$V_v(u) = f(\mathfrak{q}^2 - 3u), \quad V_s(u) = \frac{f}{\mathfrak{q}^2 + 3u} \left[\mathfrak{q}^4 + \frac{9(2 + \mathfrak{q}^2 u^2 + u^3)}{\mathfrak{q}^4 + 3u} \right]. \quad (5.5)$$

As equações (5.3) foram deduzidas a partir das equações de Einstein, considerando perturbações na métrica (5.1). Em (5.4) \mathcal{T} representa a temperatura Hawking do buraco negro, a qual está relacionada ao raio do horizonte de eventos por meio da seguinte expressão:

$$\mathcal{T} = \frac{3\alpha^2 r_h}{4\pi}. \quad (5.6)$$

Encontrando as soluções de (5.3) é possível conhecer as relações de dispersão correspondentes

ao setores escalar e vetorial [8]:

$$\begin{aligned} \omega_s = & \pm \frac{1}{\sqrt{2}}k - \frac{i}{8\pi\mathcal{T}}k^2 + \frac{(15 + \sqrt{3}\pi - 9 \ln 3)}{192\sqrt{2}\pi^2\mathcal{T}^2}k^3 \\ & + i \frac{[144 + 4\sqrt{3}\pi + 3\pi^2 - 6(6 + \sqrt{3}\pi) \ln 3 + 27 \ln^2 3 - 12\psi^{(1)}(2/3)]}{6144\pi^3\mathcal{T}^3} + \mathcal{O}(k^5), \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\omega_v = -\frac{ik^2}{4\pi\mathcal{T}^3} - i \frac{9 + 4\sqrt{3}\pi - 9 \ln 3}{38\pi^3\mathcal{T}^3}k^4 + \mathcal{O}(k^6). \quad (5.8)$$

Os coeficientes de transporte nas relações de dispersão (4.100) e (4.101) com $n = 0$ são determinados por meio da comparação com as relações de dispersão (5.7) e (5.8).

No caso de um fluido carregado ($n \neq 0$), devemos considerar as perturbações gravitacionais e eletromagnéticas acopladas de um buraco negro Reissner-Nordström-AdS planar (brana negra com carga). Neste caso, surgirão três relações de dispersão no limite hidrodinâmico das equações de perturbação, o que nos permitirá determinar também os coeficientes de transporte que aparecem na relação de dispersão (4.102).

Apêndice A

Usando a definição de derivada covariante de Weyl (3.133), podemos escrever a derivada do tensor σ^{ab} como

$$\mathcal{D}_c \sigma_{ab} = \nabla_c \sigma_{ab} + \mathcal{A}_c \sigma_{ab} + \mathcal{A}_a \sigma_{cb} - g_{ac} \mathcal{A}^d \sigma_{db} - g_{bc} \mathcal{A}^d \sigma_{ad} = e^\phi \tilde{\mathcal{D}}_c \tilde{\sigma}_{ab}. \quad (5.9)$$

Se agora contraímos esta expressão com o campo de velocidades u^a , obtemos o seguinte resultado:

$$u^a \mathcal{D}_c \sigma_{ab} = u^a \nabla_c \sigma_{ab} + u^a \mathcal{A}_a \sigma_{cb} - u_c \mathcal{A}^d \sigma_{db} \quad (5.10)$$

$$= u^a \nabla_c \sigma_{ab} + \frac{\Theta}{d-1} \sigma_{cb} - u_c a^d \sigma_{db}. \quad (5.11)$$

Da condição $\nabla_c (u^a \sigma_{ab}) = 0$ segue que

$$u^a \nabla_c \sigma_{ab} = -\sigma_{ab} \nabla_c u^a. \quad (5.12)$$

Dessa forma, a relação (5.11) pode ser reescrita como

$$u^a \mathcal{D}_c \sigma_{ab} = -\sigma_{ab} \nabla_c u^a + \frac{\Theta}{d-1} \sigma_{cb} - u_c a^d \sigma_{db}. \quad (5.13)$$

No entanto, sabemos que

$$\mathcal{D}_c u^a = \nabla_c u^a + u_c a^a - \frac{\Theta}{d-1} P_c^a = \sigma_c^a + \Omega_c^a. \quad (5.14)$$

Agora, se contraímos (5.14) com σ_{ab} , obtemos

$$\sigma_{ab} \mathcal{D}_c u^a = \sigma_{ab} \nabla_c u^a + u_c a^a \sigma_{ab} - \frac{\Theta}{d-1} P_c^a \sigma_{ab}. \quad (5.15)$$

Assim, comparando (5.13) e (5.15), temos finalmente que

$$u^a \mathcal{D}_c \sigma_{ab} = -\sigma_{ab} \mathcal{D}_c u^a = -\sigma_{ab} \sigma_c^a - \sigma_{ab} \Omega_c^a. \quad (5.16)$$

Com o mesmo procedimento utilizado para obter a expressão (5.16), podemos chegar

a um resultado similar no caso da derivada covariante de Weyl de Ω_{ab} :

$$u^a \mathcal{D}_c \Omega_{ab} = -\Omega_{ab} \mathcal{D}_c u^a = -\Omega_{ab} \sigma_c^a - \Omega_{ab} \Omega_c^a. \quad (5.17)$$

Apêndice B

Na construção das estruturas escalares de terceira ordem, apresentadas ao longo deste trabalho, surgiram estruturas que não são completamente independentes, tais como

$$\begin{aligned} & \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp b} u^b, \quad \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^a u^b, \quad \nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} u^b, \\ & \nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp a} u^b, \quad u^a \nabla_b R_a^b, \quad u^a \nabla_a R. \end{aligned} \quad (5.18)$$

As redundâncias presentes nestas estruturas podem ser esclarecidas se consideramos o comutador $[\nabla_{\perp a}, \nabla_{\perp b}]$, dado pela expressão

$$[\nabla_{\perp a}, \nabla_{\perp b}] = 2u_{[b} \nabla_{\perp a]} u^d \nabla_d + 2\nabla_{\perp [a} u_{b]} D + \Delta_a^c \Delta_b^d [\nabla_c, \nabla_d], \quad (5.19)$$

além da equação de conservação do momento

$$Du^a = -\frac{c_s^2}{1+c_s^2} \nabla_{\perp}^a \ln w + \text{termos de ordem superior} \quad (5.20)$$

e da definição do tensor de curvatura R_{abcd} ,

$$[\nabla_d, \nabla_c] V_b = R^a{}_{bcd} V_a. \quad (5.21)$$

Com isso, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^a \ln w [\nabla_{\perp a}, \nabla_{\perp b}] u^b &= \nabla_{\perp}^a \ln w (\nabla_{\perp [a} u_{b]} Du^b + \Delta_a^c \Delta_b^d [\nabla_c, \nabla_d] u^b) \\ &= -\frac{c_s^2}{1+c_s^2} \nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp [a} u_{b]} \nabla_{\perp}^b \ln w - \nabla_{\perp}^a \ln w R_{ab} u^b \\ &= -\nabla_{\perp}^a \ln w R_{ab} u^b; \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp a} [\nabla_{\perp}^a, \nabla_{\perp b}] u^b &= -\frac{c_s^2}{1+c_s^2} \left(\nabla_{\perp a} u^a \nabla_{\perp b} u_d \nabla_{\perp}^{[b} u^{d]} + \nabla_{\perp b} \ln w \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp}^{[b} u^{a]} - \nabla_{\perp a} u^a \nabla_{\perp b} u_d \nabla_{\perp}^d u^b \right. \\ &\quad \left. + R_{ab} \nabla_{\perp}^a u^b + DR + u^a u^b DR_{ab} + u^a u^b R_{ab} \nabla_{\perp d} u^d \right); \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} [\nabla_{\perp a}, \nabla_{\perp b}] \nabla_{\perp}^a u^b &= -\nabla_{\perp b} u_a \nabla_{\perp}^a u^b \nabla_{\perp d} u^d + \frac{c_s^2}{1+c_s^2} \nabla_{\perp c} u^c \nabla_{\perp}^a u^b \nabla_{\perp [a} u_{b]} + R_{ab} \nabla_{\perp}^a u^b \\ &\quad + u^c u^b \nabla_{\perp}^a u^d R_{abcd}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

No caso das estruturas tensoriais, devemos investigar quais das estruturas $\nabla_c \nabla_\perp^c \nabla_\perp^{(a} u^b)$ e $\nabla_c \nabla_\perp^{(a} \nabla_\perp^c u^b)$ são independentes. Isso pode ser esclarecido se analisarmos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp c} [\nabla_{\perp}^c, \nabla_{\perp}^a] u^b &= \nabla_{\perp c} u^a \nabla_{\perp}^c u^d \nabla_{\perp d} u^b + \nabla_{\perp}^c u^a \nabla_{\perp c} D u^b + \nabla_{\perp c} u^a \nabla_{\perp}^c u^d \nabla_{\perp d} u^b \\ &\quad - \nabla_{\perp c} u^c \nabla_{\perp}^a u^d \nabla_{\perp d} u^b - \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^a u^c D u^b + u^c u^d R_{c d}^{a b} \nabla_{\perp e} u^e \\ &\quad + u^c \nabla_{\perp}^d R_{d c}^{a b} + R_{c d}^{a b} \nabla_{\perp}^c u^d. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Desta expressão podemos escrever a estrutura TST equivalente, a qual é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^c \nabla_{\perp}^{(a} u^b) - \nabla_c \nabla_{\perp}^{(a} \nabla_{\perp}^c u^b) &= \frac{c_s^2}{1 + c_s^2} \left(\nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^{(a} u^c \nabla_{\perp}^{b)} \ln w - \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^c u^{(a} \nabla^{b)} \ln w \right. \\ &\quad \left. - \nabla_{\perp}^c u^{(a} \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^{b)} \ln w \right) + \nabla_{\perp}^c u^d \nabla_{\perp c} u^{(a} \nabla_{\perp d} u^b) \\ &\quad - \nabla_{\perp c} u^c \nabla_{\perp}^d u^{(a} \nabla_{\perp d} u^b) - u^c u^d \nabla_{\perp e} u^e R_c^{(ab)}{}_d - u^c \nabla^d R_d^{(ab)}{}_c \\ &\quad - u^c u^d D R_c^{(ab)}{}_d - \nabla_{\perp}^c u^d R_c^{(ab)}{}_d. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Uma análise minuciosa das estruturas do lado direito de cada uma das relações (5.22)-(5.26) nos permite afirmar que elas formam parte das estruturas escalares e tensoriais TST de terceira ordem construídas para a expansão em gradientes. Sendo assim, por meio dessas relações, podemos reduzir o número de estruturas escalares e tensoriais, eliminando os elementos

$$\nabla_{\perp}^a \ln w \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} u^b, \quad \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp}^a \nabla_{\perp b} u^b, \quad \nabla_{\perp a} \nabla_{\perp b} \nabla_{\perp}^a u^b, \quad \nabla_{\perp c} \nabla_{\perp}^c \nabla_{\perp}^{(a} u^b). \quad (5.27)$$

Apêndice C

Hidrodinâmica de primeira ordem

Após a construção da hidrodinâmica de primeira ordem, torna-se importante garantir que esta teoria seja compatível com o segundo princípio da termodinâmica,

$$\nabla_a s^a \geq 0, \quad (5.28)$$

onde s^a é a corrente de entropia, definida no capítulo introdutório como

$$s^a = s u^a. \quad (5.29)$$

A equação da energia (2.82) pode ser reescrita da seguinte forma [12]:

$$D\epsilon + (\epsilon + p)\nabla_a u^a = \Pi^{ab}\nabla_{(a}u_{b)}. \quad (5.30)$$

Agora, fazendo uso das relações termodinâmicas $w = \epsilon + p = Ts + \mu n$ e da primeira lei da termodinâmica $d\epsilon = Tds + \mu dn$, a equação (5.30) se transforma em

$$TDs + \mu Dn + (Ts + \mu n)\nabla_a u^a = \Pi^{ab}\nabla_{(a}u_{b)}. \quad (5.31)$$

Esta expressão pode ser escrita de maneira conveniente como

$$T\nabla_a s^a + \mu\nabla_a(nu^a) = \Pi^{ab}\nabla_{(a}u_{b)}. \quad (5.32)$$

Dessa forma, fazendo uso da conservação da corrente $\nabla_a J^a = \nabla_a(nu^a + j^a) = 0$, vem

$$\nabla_a s^a = \frac{\Pi^{ab}\nabla_{(a}u_{b)}}{T} + \frac{\mu}{T}\nabla_a j^a \geq 0. \quad (5.33)$$

Em [12] foi demonstrada a desigualdade

$$\frac{\Pi^{ab}\nabla_{(a}u_{b)}}{T} \geq 0, \quad (5.34)$$

o que significa que os coeficientes de transporte em (3.16) são positivos, $\eta \geq 0$ e $\zeta \geq 0$. Por outro lado, a segunda lei da termodinâmica é satisfeita se o segundo termo em (5.33) é

positivo, ou seja,

$$\frac{\mu}{T} \nabla_a j^a \geq 0. \quad (5.35)$$

Esta expressão é positiva se estabelecemos a relação

$$\nabla_a j^a = \beta \frac{\mu}{T}, \quad (5.36)$$

sendo β uma constante positiva ($\beta \geq 0$).

Hidrodinâmica de segunda e terceira ordem

Como já foi dito no capítulo introdutório, o papel principal de uma hidrodinâmica de ordem superior é o de restaurar o princípio de causalidade. Segundo a formulação de Müller-Israel-Stewart, para uma hidrodinâmica de segunda ordem, a causalidade é restaurada por meio da introdução, na corrente de entropia $s^a = su^a$, de correções de segunda ordem em relação aos termos dissipativos π^{ab} , Π , q^a e j^a do tensor energia momento T^{ab} e da corrente J^a . Desta maneira, a densidade de entropia de um fluido sem carga no *frame* de Landau pode ser escrita como [12]

$$s^a = su^a - \frac{\beta_0}{2T} u^a \Pi^2 - \frac{\beta_2}{2T} u^a \pi_{bc} \pi^{bc} + \mathcal{O}(\Pi^3). \quad (5.37)$$

Da mesma forma que na hidrodinâmica de primeira ordem, a corrente de entropia s^a deve estar sujeita à segunda lei da termodinâmica ($\nabla_a s^a \geq 0$). Assim, considerando a expressão (5.32) para $n = 0$, o gradiente da densidade de entropia pode ser colocado na

$$\begin{aligned} \nabla_a s^a = & \frac{\pi^{ab}}{2T} \left(\nabla_{\langle a} u_{b \rangle} - \pi_{ab} T D \left(\frac{\beta_2}{T} \right) - 2\beta_2 D \pi_{ab} - \beta_2 \pi_{ab} \nabla_c u^c \right) \\ & + \frac{\Pi}{T} \left(\nabla_a u^a - \frac{1}{2} \Pi T D \left(\frac{\beta_0}{T} \right) - \beta_0 D \Pi - \frac{1}{2} \beta_0 \nabla_a u^a \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

A desigualdade é garantida se

$$\pi_{ab} = \eta \left(\nabla_{\langle a} u_{b \rangle} - \pi_{ab} T D \left(\frac{\beta_2}{T} \right) - 2\beta_2 D \pi_{ab} - \beta_2 \pi_{ab} \nabla_c u^c \right), \quad (5.39)$$

$$\Pi = \zeta \left(\nabla_a u^a - \frac{1}{2} \Pi T D \left(\frac{\beta_0}{T} \right) - \beta_0 D \Pi - \frac{1}{2} \beta_0 \nabla_c u^c \right), \quad (5.40)$$

onde η e ζ são constantes positivas ($\eta \geq 0$, $\zeta \geq 0$). Comparando as relações (5.39) e (5.40) com a lei de Maxwell-Cattaneo do tipo (2.60) é possível escrever as constantes β_0 e β_2 em termos das coeficientes de transporte η e ζ , além dos tempos de relaxamento τ_Π e τ_π [12],

$$\beta_2 = \frac{\tau_\pi}{2\eta}, \quad \beta_0 = \frac{\tau_\Pi}{\zeta}. \quad (5.41)$$

No caso de um fluido carregado, deve-se acrescentar na densidade de entropia outra correção proveniente da parte dissipativa da corrente j^a . Seguindo a metodologia de Müller-Israel-Stewart, é conveniente introduzir o seguinte *ansatz*:

$$s^a = su^a - \frac{\beta_0}{2T} u^a \Pi^2 - \frac{\beta_2}{2T} u^a \pi_{bc} \pi^{bc} - \frac{\beta_3}{2T} u^a (\nabla_b j^b)^2 - \frac{\beta_4}{2T} u^a \Pi \nabla_b j^b + \mathcal{O}(\Pi^3, (\nabla_b j^b)^3). \quad (5.42)$$

Novamente, considerando a expressão (5.32), temos

$$\begin{aligned} \nabla_a s^a = & \frac{\pi^{ab}}{2T} \left(\nabla_{\langle a} u_{b\rangle} - \pi_{ab} T D \left(\frac{\beta_2}{T} \right) - 2\beta_2 D \pi_{ab} - \beta_2 \pi_{ab} \nabla_c u^c \right) \\ & + \frac{\Pi}{T} \left(\nabla_a u^a - \frac{1}{2} \Pi T D \left(\frac{\beta_0}{T} \right) - \beta_0 D \Pi - \frac{1}{2} \beta_0 \nabla_a u^a - \frac{1}{2} \beta_4 \nabla_a j^a \nabla_b u^b - \frac{1}{2} \beta_4 D \nabla_a j^a \right) \\ & + \nabla_a j^a \left(\frac{\mu}{T} - \frac{\beta_3}{2T} \nabla_b u^b \nabla_c j^c - D \left(\frac{\beta_3}{2T} \right) \nabla_b j^b - \frac{\beta_3}{2T} D (\nabla_b j^b) - \frac{\beta_4}{2T} D \Pi \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Agora, o gradiente da densidade de entropia é positivo se, além da generalização das relações (5.39) e (5.40),

$$\pi_{ab} = \eta \left(\nabla_{\langle a} u_{b\rangle} - \pi_{ab} T D \left(\frac{\beta_2}{T} \right) - 2\beta_2 D \pi_{ab} - \beta_2 \pi_{ab} \nabla_c u^c \right), \quad (5.44)$$

$$\Pi = \zeta \left(\nabla_a u^a - \frac{1}{2} \Pi T D \left(\frac{\beta_0}{T} \right) - \beta_0 D \Pi - \frac{1}{2} \beta_0 \nabla_a u^a - \frac{1}{2} \beta_4 \nabla_a j^a \nabla_b u^b - \frac{1}{2} \beta_4 D \nabla_a j^a \right), \quad (5.45)$$

temos a seguinte expressão para $\nabla_a j^a$:

$$\nabla_a j^a = \beta \left(\frac{\mu}{T} - \frac{\beta_3}{2T} \nabla_a u^a \nabla_b j^b - D \left(\frac{\beta_3}{2T} \right) \nabla_a j^a - \frac{\beta_3}{2T} D (\nabla_a j^a) - \frac{\beta_4}{2T} D \Pi \right), \quad (5.46)$$

onde $\eta \geq 0$, $\zeta \geq 0$. Aqui, de novo, os coeficientes β_3 e β_4 podem ser expressos em termos de coeficientes de transporte e tempos de relaxamento de maneira similar a (5.41).

Para finalizar este apêndice, vale ressaltar que, no caso de fluidos não-conformes, a análise é semelhante a que foi realizada aqui, exceto que nas correções de segunda ordem na densidade de entropia, (5.37) e (5.42), o termo escalar não aparece.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Kovtun, *Lectures on hydrodynamic fluctuations in relativistic theories*, J. Phys. A 45, 473001 (2012) [arXiv:1205.5040 [hep-th]].
- [2] Grozdanov, S. and Kaplis, N., *Constructing higher-order hydrodynamics: The third order*, Phys. Rev. D 93, 066012 (2016) [arXiv:1507.02461 [hep-th]].
- [3] Loganayagam, R., *Entropy Current in Conformal Hydrodynamics*, JHEP 05, 087 (2008) [arXiv:0801.3701 [hep-th]].
- [4] L. Rezolla and O. Zanotti. 2013 *Relativistic Hydrodynamics*, (Oxford University).
- [5] M. Ammon, J. Erdmenger 2015. *Gauge/Gravity Duality*, ISBN 978-1-107-01034-5 (Cambridge University).
- [6] Hubeny, Veronika E., Rangamani, Mukund *A Holographic view on physics out of equilibrium*, Adv. High Energy Phys., 297916 (2010) [arXiv:1006.3675 [hep-th]].
- [7] Jarvis, Peter D., van Holten, J. W. *Conformal fluid dynamics*, Nucl. Phys. B **734**, 272-286 (2006) [arXiv:0501237 [hep-th]].
- [8] Diles, Saulo M. and Mamani, Luis A. H. and Miranda, Alex S. and Zanchin, Vilson T. *Third-order relativistic hydrodynamics: dispersion relations and transport coefficients of a dual plasma*, JHEP 05, 019 (2020) [arXiv:1909.05199 [hep-th]].
- [9] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1980.
- [10] Eckart, C. *The Thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid*, Phys Rev. 58, 919-924 (1940).
- [11] Romatschke, P. *Relativistic Viscous Fluid Dynamics and Non-Equilibrium Entropy*, Class. Quant. Grav. 27, 025006, (2010) [arXiv:0906.4787 [hep-th]].
- [12] Romatschke, P. *New Developments in Relativistic Viscous Hydrodynamics*, Int. J. Mod. Phys. E19, 1-53, (2010) [arXIV:0902.3663[hep-th]].
- [13] W. Israel and J. M. Stewart, *On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. II*, Proc. R. Soc. Lond. A, 365, 43–52 (1979).
- [14] Werner, Israel, *Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory*, Annals Phys., 100, 310-331 (1976).

- [15] T. Hayat, M. Farooq, A. Alsaedi, and Falleh Al-Solamy, *Impact of Cattaneo-Christov heat flux in the flow over a stretching sheet with variable thickness*, AIP ADVANCES 5, 087159 (2015).
- [16] Carroll, Sean, *Space Time and Geometry: An Introduction to General Relativity*, ISBN: 0-8053-8732-3. Addison Wesley.
- [17] S. Z. Belenkij and L. D. Landau, Nuovo Cim. Suppl. 3S10, 15 (1956) [Usp. Fiz. Nauk 56, 309 (1955)].
- [18] Timothy, S. Olson, *Stability and Causality in the Israel-Stewart Energy Frame Theory*, Annals Phys. 199, 18-36 (1990)
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1959.
- [20] W. Israel, J.M Stewart, *Transient Relativistic Thermodynamics and Kinetic Theory*, Annals Phys., 118, 341-372 (1979).
- [21] Hubeny, V., Minwalla, S. and Rangamani, M., *The fluid/gravity correspondence*, 348-383, (2012) [arXiv:1107.5780[hep-th]].
- [22] X. H. Ge, K. Jo and S. J., *Hydrodynamics of RN AdS₄ black hole and Holographic Optics*, JHEP 1103, 104 (2011)[arXiv: 1012.2515 [hep-th]].
- [23] Hideo Kodama, Akihiro Ishibashi, *A master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions*, Prog.Theor.Phys. 110, 701-722 (2003) [arXiv:0305147 [hep-th]].