UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGEM

NAYANA SILVA SANTOS ARAÚJO

EQUAÇÃO DO 1º GRAU: A COMPREENSÃO DA EQUIVALÊNCIA NOS ANOS INICIAIS

Ilhéus – Bahia
2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGEM

NAYANA SILVA SANTOS ARAÚJO

EQUAÇÃO DO 1º GRAU: A COMPREENSÃO DA EQUIVALÊNCIA NOS ANOS INICIAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM, da Universidade Estadual de Santa Cruz, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Vera Lucia Merlini

Ilhéus-BA
2020

A663 Araújo, Nayana Silva Santos.

Equação do 1º grau: a compreensão da equivalência nos anos iniciais / Nayana Silva Santos Araújo. – Ilhéus, BA: UESC, 2020.

116 f. : il.

Orientadora: Vera Lucia Merlini.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Inclui referências bibliográficas e apêndices.

1. Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Estudantes do ensino fundamental. 4. Professores e alunos. I. Título.

CDD 372.7

NAYANA SILVA SANTOS ARAÚJO

Equação do 1º grau: a compreensão da Equivalência nos Anos Iniciais

Dissertação submetida ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM, em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA
EM 31/01/2020

Vera Merlini

Profª. Drª. Vera Lúcia Merlini
Examinadora/Presidente da banca
(PPGECM/UESC)

Ana Virginia de Almeida Luna

Prof.ª Dr.ª Ana Virginia de Almeida Luna
Examinadora - (UEFS)

Prof. Aparecido dos Santos
Examinador – (UNINOVE-SP)

Ilhéus, Bahia, 31 de Janeiro de 2020.

DEDICATÓRIA

A toda minha família, em especial ao meu esposo e às minhas filhas pelo apoio, paciência e compreensão.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me permitiu vencer as batalhas dessa caminhada;
Aos meus pais, Edson e Núbia e meus irmãos, por sempre acreditar em mim, quando nem mesmo eu acreditava;
À minha sogra Norma, por ter sido uma mãe para mim e ter ajudado a suprir as minhas faltas em relação às minhas lindas filhas;
À Nelita, pela amizade e pelo apoio em cuidar, com carinho, das minhas filhas nos meus momentos de ausência;
À minha amiga Kátia, por ter me ajudado e incentivado a entrar no mestrado;
Ao meu esposo Fabrício, pelo apoio e paciência, porque me aturar nos meus momentos de stress não foi fácil;
Às minhas filhas Lara Beatriz, Ana Júlia e Ana Luiza, pelo amor, paciência e compreensão nos meus momentos de ausência, mesmo quando estava em casa, além do incentivo e orgulho que sempre demonstraram ter por mim;
Aos meus colegas de trabalho, em especial Ednalva, Ana Cardeal, Valquíria, Cileudy, Girlene, Rose, Joana e Heyder, pelo apoio e palavras de incentivo;
Aos meus colegas de turma, Lânia, Cláudio, Edmilson e Jonas pelos momentos de apoio e força, vocês foram essenciais nessa caminhada;
À professora Irene Cazorla, por sempre se mostrar solícita e pela importante colaboração nos testes estatísticos;
À professora Dra. Sandra Magina, por não ter me deixado desistir quando fraquejei;
Às amigas Patrícia, Samara, Simone e ao professor Ricardo por ter me auxiliado no período da coleta de dados;
Aos amigos do grupo de pesquisa RePARe;
Aos professores do PPGEM, por terem sido ótimos mestres nessa minha busca pelo conhecimento;
À professora Dra. Ana Virgínia e ao professor Dr. Aparecido pelo tempo dedicado em ler meu trabalho e pelas ricas contribuições durante a qualificação;
E por fim, à professora Dra. Vera Merlini, que me orientou de forma tão competente e generosa, dispensando a mim seu precioso tempo e sua admirável paciência, que me entendeu e me incentivou nas horas em que eu mais precisava. Obrigada professora, a senhora é um ser iluminado e muito especial!

EQUAÇÃO DO 1º GRAU: A COMPREENSÃO DA EQUIVALÊNCIA NOS ANOS INICIAIS

RESUMO

Este estudo tem como objetivo investigar o desempenho e as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental, na resolução de problemas envolvendo equação do 1º grau, no que diz respeito à Equivalência. Para tanto, foram apresentados, como aporte teórico, estudos referentes a *Early Algebra* de alguns pesquisadores, tais como Ponte, Canavarro, Kaput, Carraher e Schliemann, Lins e Gimenez. Trata-se de uma pesquisa diagnóstica, cujos dados foram coletados por meio de um questionário composto por nove questões, que abordam equação do 1º grau. Esse questionário foi respondido por 99 alunos do 5º ano de duas escolas públicas, da rede municipal de ensino de duas cidades do sul da Bahia. Os resultados apontam que apesar de ainda não terem o contato com a Álgebra formal, 30,2% dos alunos conseguiram resolver de forma correta as questões, além de explicitarem de formas variadas suas estratégias, que foram apresentadas em nove diferentes categorias de análise: Relacional, Operacional, Pensamento Aditivo, Pensamento Multiplicativo, Retórico, Sincopado, Simbólico, Pictórica e Somente Resposta. A maior parte dos alunos entende o sinal de igual apenas como operacional, como o resultado da operação; foi possível observar a presença dos três estágios do desenvolvimento da Álgebra a Retórica, a Sincopada e a Simbólica; os alunos lançaram mão de desenhos e ícones em suas respostas que poderiam ser mais explorados em sala de aula além dos símbolos matemáticos; o ícone da balança é importante para o entendimento e introdução do ensino de equação, mas é preciso trabalhar a transposição entre o ícone e a sentença matemática. Embora os alunos tenham alcançado um percentual relativamente baixo de média de acerto, conclui-seque é preciso explorar o significado relacional da igualdade, com o intuito de auxiliar o entendimento das propriedades simétrica, reflexiva e transitiva, próprias da relação de Equivalência. Finalmente, a partir das respostas dos alunos, quer seja nos registros escritos ou ainda na fala das entrevistas, que é possível sim, trabalhar com conceitos algébricos em conjunto com os conceitos aritméticos, assim como sugere a *Early Algebra.*

Palavras-chave: Aluno. Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Álgebra. Equação. Diagnóstico.

FIRST GRADE EQUATION: UNDERSTANDING THE EQUIVALENCE IN THE EARLY YEARS

ABSTRACT

This study aims to investigate the performance and resolution strategies used by 5th grade elementary school students in solving problems involving the 1st degree equation, with regard to Equivalence. To this end, studies referring to Early Algebra by some researchers, such as Ponte, Canavarro, Kaput, Carraher and Schliemann, Lins and Gimenez, were presented as theoretical support. It is a diagnostic research, whose data were collected through a questionnaire composed of nine questions, which address the 1st degree equation. This questionnaire was answered by 99 5th grade students from two public schools, from the municipal education network in two cities in southern Bahia. The results show that although they still do not have contact with formal algebra, 30.2% of the students managed to solve the questions correctly, in addition to explaining their strategies in different ways, which were presented in nine different categories of analysis: Relational , Operational, Additive Thinking, Multiplicative Thinking, Rhetorical, Syncopated, Symbolic, Pictorial and Response Only. Most students understand the equal sign only as operational, as the result of the operation; it was possible to observe the presence of the three stages of the development of Algebra: Rhetoric, Syncopada and Symbolic; students used drawings and icons in their answers that could be further explored in the classroom in addition to mathematical symbols; the scale icon is important for understanding and introducing equation teaching, but it is necessary to work on the transposition between the icon and the mathematical sentence. Although students have achieved a relatively low percentage of correct mean, it is concluded that it is necessary to explore the relational meaning of equality, in order to help understand the symmetric, reflective and transitive properties, typical of the Equivalence relationship. Finally, based on the students' responses, whether in the written records or in the interviews, it is possible to work with algebraic concepts in conjunction with arithmetic concepts, as suggested by Early Algebra.

Keywords: Student. Early Years of Elementary School. Algebra. Equation. Diagnosis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Sou professora da escola básica há 18 anos. Em minha experiência como professora de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de escola pública, no interior da Bahia, tenho observado que os alunos apresentam extrema dificuldade quando o assunto é Álgebra, em especial na resolução de equação. Muitos alunos reclamam da inserção das letras, se sentem desconfortáveis nesse universo matemático, até então desconhecido, com a nova linguagem que lhes é apresentada de forma tão brusca, como por exemplo, o dobro de um número, a diferença entre dois números, a terça parte de um número mais 4, questionam, que número é esse? Por que x + x é igual a 2x? De onde vem esse x? E esse x vale quanto mesmo? Atualmente leciono para turmas de 8º e 9º anos, e pude constatar que essa dificuldade permanece ao longo desses anos escolares, inclusive no Ensino Médio. Os alunos concluem os Anos Finais sem diferenciar sequer uma expressão algébrica de uma equação e com muitas dúvidas em como solucionar uma equação.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), o início formal com a linguagem algébrica, na qual inclui a variável e a incógnita, se dá no 7º ano. Devo admitir que passei alguns anos de minha carreira acreditando e ensinando, aos meus alunos, que a Álgebra é o ramo da Matemática que utilizamos letras para representar valores desconhecidos e que essas letras nas equações são chamadas de incógnitas, e de variáveis no caso de funções. Pude perceber, ao entrar em contato com textos de autores, como Lins e Gimenez (2006), que a atividade algébrica é mais que operar e manipular letras. “A Álgebra consiste em um conjunto de afirmações, para as quais é possível produzir significados em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade” (LINS e GIMENEZ, 2006, p.150). Desse modo, a Álgebra acrescenta significados para os sinais e números que são trabalhados na Aritmética, como por exemplo, o sinal da igualdade.

A fim de obter mais informações e enriquecer os meus estudos sobre a Álgebra, fui convidada, pela minha orientadora, a doutora Vera Merlini, a participar de um grupo de pesquisa intitulado RePARe[1] em EdMat, Refletir, Planejar, Agir, Refletir em Educação Matemática: Uma espiral dialética para formação e desenvolvimento de conceitos matemáticos. Esse grupo de pesquisa é liderado por Sandra Maria Pinto Magina e Vera Lucia Merlini, na Universidade Estadual de Santa Cruz. As reuniões acontecem às segundas-feiras, no turno da tarde, e se reúnem mestrandos, egressos e professoras do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática. O objetivo principal desse grupo de pesquisa é realizar leituras e discussões de textos relacionados ao ensino de Matemática, no intuito de produzir pesquisa, pensar em estratégias para a melhoria desse ensino.

Nesse momento, estava sendo desenvolvido um projeto denominado A *Early Algebra* no Ensino Fundamental: mapeamento e diagnóstico que eu passei a fazer parte. Desse modo, as reuniões do RePARe estavam tratando principalmente do tema *Early Algebra*[2], que se refere ao desenvolvimento do raciocínio algébrico. Cabe destacar que nas leituras realizadas para esse trabalho, pude perceber que alguns autores utilizam a expressão pensamento algébrico, e outros utilizam raciocínio algébrico, para expressar a mesma ideia. Sendo assim, foi decidido nas reuniões do RePARe, que será utilizado em trabalhos de pesquisa desse grupo, a expressão raciocínio algébrico, por entender que pensamento é algo vasto e o raciocínio está mais relacionado à aprendizagem. Assim, ao longo desse trabalho também utilizarei a expressão: raciocínio algébrico.

Novas leituras e discussões, propiciadas pelo e no grupo de pesquisa RePARe, foram me alertando que, de fato, minha crença estava muito ligada ao senso comum, qual seja, que a Álgebra está diretamente ligada ao uso de letras. Embora não tenha encontrado uma definição para a Álgebra, existem autores como Usiskin (1995), Lins e Gimenez (2006), que concebem o conceito da Álgebra tomando como base o que ela estuda e o denomina não como conceito, mas sim de concepção.

Para Usiskin (1995), quatro são as concepções elencadas para Álgebra: (i) Aritmética generalizada; (ii) meio de resolver certos problemas; (iii) estudo das relações; e (iv) Estrutura. Trago sucintamente uma discussão dessas concepções elencadas.

No que se refere à concepção (i) Aritmética generalizada, Usiskin (1995) aponta que é natural compreender as variáveis como generalizadoras de modelos. Como exemplo, o autor coloca os modelos $3 \times 5 = 15; 2 \times 5 = 10$ e os estende para a multiplicação de números negativos, $-3 \times 5 = -15$; $-2 \times 5 = -10$, generalizando para a propriedade $-x \times y = -xy$.

---

[1]O Grupo de Pesquisa RePARe é registrado no CNPq, a área predominante: Ciências Humanas; Educação. A instituição do grupo é a Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC).
[2]O termo *Early Algebra* será explorado no Capítulo 1.

Na concepção como meio de resolver certos problemas (equação) (ii), utilizamos as incógnitas e variáveis para nos ajudar a resolver os problemas, o autor ainda explicita que nessa concepção as palavras chave são simplificar e resolver, mas ele ressalta que esses dois nomes diferentes, muitas vezes têm a mesma ideia, por exemplo:

> Pedimos aos alunos para resolver $| x - 2 | = 5$ para obter a resposta $x = 7$ ou $x = -3$. Mas poderíamos pedir aos alunos: 'Reescreva $| x - 2 | = 5$ sem usar um valor absoluto'. Poderíamos então obter a resposta $(x - 2)^2 = 25$; que é uma sentença equivalente. (USISKIN, 1995, p. 15)

Considerando a Álgebra como estudo das relações entre grandezas (iii), Usiskin (1995) afirma que somente nessa concepção existem as noções de variáveis dependentes e independentes, sendo que nela as funções emergem naturalmente. A concepção da Álgebra como estrutura (iv) se dá ao estudo das propriedades das operações com os números reais e os polinômios. Para o autor, trata-se de uma visão da variável na Álgebra abstrata, a variável se torna um símbolo arbitrário e se prioriza a manipulação de termos algébricos.

Lins e Gimenez (2006) trazem algumas concepções do ensino aprendizagem de Álgebra, a letrista, que Álgebra é vista somente como o cálculo com letras, uma concepção extremamente forte no Brasil. Esses autores discutem algumas concepções, baseadas, por exemplo, na modelagem matemática segundo Bassanezi[3] e a Álgebra como Aritmética generalizada.

Em relação à modelagem matemática e investigações, afirmam que "a educação algébrica se dá na medida em que a produção do conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação, como uma ferramenta e não como um objeto primário" (LINS e GIMENEZ, 2006, p. 109); e a "álgebra como aritmética generalizada", ou seja, a Álgebra é tida como uma forma de estabelecer relações e generalizar expressões.

As concepções tidas como facilitadoras trazem a utilização do material concreto, com o intuito de facilitar o aprendizado, o que não ocorre segundo Lins e Gimenez (2006). Para os autores, uma das formas de "abordagem facilitadora", é a utilização do ícone da balança de dois pratos para demonstrar o equilíbrio presente na relação de igualdade das equações. Os autores citam pesquisas que mostram que os alunos não vêem relação entre a abordagem no concreto e a abordagem formal.

No contexto escolar, o ensino formal de Álgebra se dá no 7º ano, introduzindo a linguagem algébrica de maneira artificial, passando da linguagem materna para a linguagem

---

[3]A Modelagem Matemática é entendida, segundo Bassanezi (2010, p. 24) como a "arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".

simbólica, na expectativa de se apresentar um sentido para a utilização das letras. É possível que esse seja o marco do início da Álgebra com a ruptura da Aritmética, o que provavelmente não seja positivo para a compreensão dos alunos. Lins e Gimenez (2006) discordam que deva haver uma ruptura entre a Aritmética e a Álgebra, e afirmam que "é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra." (LINS e GIMENEZ, 2006, p. 10).

Logo após a apresentação da linguagem simbólica, normalmente é feita a abordagem do conceito de equação, momento de inserção da Álgebra. Isso acontece na minha prática didática, inicio por esse conceito tomando por base os livros didáticos que já utilizei nesses anos durante minha atuação como professora.

É muito comum, ao abordar o conceito de equação, verificar que os alunos tentam adivinhar o valor da incógnita e se opõem a resolvê-la utilizando o Princípio de Equivalência da Igualdade[4], passando de uma equação para outra equivalente (LESSA, FALCÃO, 2005). Os alunos argumentam que o procedimento relativo ao Princípio de Equivalência da Igualdade é desnecessário, questionando, para que perder tempo com isso se eles podem simplesmente adivinhar qual é o número que torna a sentença verdadeira?

Essa estratégia de resolução, adivinhar o valor da incógnita, corresponde, de certo modo, à mesma estratégia utilizada na história que é o método da falsa posição, e me parece até positiva, pois é sinal que eles estão entendendo o que está sendo proposto, descobrir o valor da incógnita para que a igualdade seja verdadeira. Contudo, pode ser ilusório e pontual, pois à medida que a solução da equação não pertence mais aos números naturais essa estratégia se torna exaustiva. Um exemplo poderia ser a equação 2x + 15 = 6, cuja solução é $-\frac{9}{2}$; ou seja, é necessário dar um salto qualitativo para determinar o valor da incógnita, utilizando o Princípio de Equivalência da Igualdade.

Entretanto, outro quadro se forma ao resolver as equações, agora utilizando os Princípios de Equivalência da Igualdade, é muito comum ouvir dos alunos a seguinte frase: passa para o outro lado com o sinal trocado, e o que aparenta ser uma facilidade, se torna um empecilho, um obstáculo difícil de transpor. Apesar dessa frase não estar coerente com o que está ocorrendo algebricamente, uma vez que os números e incógnitas não passam para lá e para cá, ela poderia dar conta de resolver equações que apresentarem características como a equação$x + 5 = 15$, mas o mesmo não acontece com a equação $2x = 15$, já que x não será igual a 15 – 2, ou ainda $\frac{15}{-2}$. Pela minha experiência, percebo que essa dificuldade em lidar

[4]O Princípio de Equivalência será discutido no Capítulo 1.

com equações perpassa pelo 8º e 9º ano, no entanto, o ensino da Álgebra avança abordando a resolução de sistema de equações do 1º grau (8º ano) e a resolução de equação do 2º grau (9º ano) e os equívocos perduram.

Schliemann, Carraher, Brizuela (2007) afirmam que as dificuldades que os alunos encontram são acentuadas por conta da separação que é colocada entre a Aritmética e a Álgebra. Além disso, não basta facilitar essa transição, mas que desde o início e sempre que possível, elas possam estar interligadas. Esses pesquisadores chamam a atenção a respeito das notações utilizadas na Aritmética que na Álgebra são apresentadas e utilizadas de outras formas, como por exemplo, o sinal de igual (=). Eles argumentam que na Aritmética tradicional o sinal de igual é tido como uma notação unidirecional que produz um resultado, ao passo que na Álgebra a igualdade está relacionada a uma afirmação bidirecional. O sinal de adição (+) enquanto na Aritmética tradicional ele se restringe à ideia de juntar ou aumentar quantidades, seu uso na Álgebra não necessariamente ocorre da mesma forma. Desse modo, Schliemann, Carraher, Brizuela (2007) apontam que essas notações, esses operadores podem ser explorados ainda no contexto aritmético de maneira mais ampla.

Essas pesquisas estão fundamentadas em estudos realizados no final do século passado, como os de Kaput[5] (1999, p.2, tradução nossa), que expressam que "a Álgebra escolar é tradicionalmente ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desconectados de outros conhecimentos matemáticos e do mundo real dos alunos".

De fato, trazendo um pouco de minha experiência como professora dos Anos Finais do Ensino Fundamental e fazendo uma reflexão a respeito do ensino de Álgebra, começo a perceber que esse ensino, está centrado demasiadamente em regras procedimentais, para simplesmente chegar ao valor da incógnita (em geral o x). Essa falta de significado é sentida ao propor aos alunos, por exemplo, um sistema de equações com duas ou três incógnitas. Ao resolver na lousa e encontrar o valor da primeira das três incógnitas, por exemplo, não é raro um aluno me perguntar se o problema já está resolvido.

Essa minha afirmação se justifica pelo que tenho presenciado após abordar a resolução de equação do 2º grau utilizando a fórmula de Bháskara. Após essa abordagem, há uma tendência por parte de alguns alunos de resolver qualquer equação, inclusive a do 1º grau, a partir da referida fórmula. Em certa aula, pedi que meus alunos do 9º ano resolvessem um problema matemático que recaía numa equação do 1º grau com uma incógnita, e alguns deles, apesar da dificuldade, conseguiram montar a equação, e resolveram utilizando a fórmula de

[5]School algebra has traditionally been taught and learned as a set of procedures disconnected both from other mathematical knowledge and from students' real worlds.

Bháskara. Eu os questionei que tipo de equação era aquela e o que os tinha levado a resolver daquela forma, e uma das alunas, percebendo ser desnecessária a utilização dessa fórmula, logo respondeu: "*ah professora eu já sei, essa é aquela conta em que tudo que tem letra vai pra um lado e o que não tem pra outro...*". Diante desse e de outros fatos ocorridos em sala de aula, começo a compreender um dos possíveis motivos que levam meus alunos, em especial do 9º ano,a apresentar, ainda, tanta dificuldade em resolver equações do 1º grau, sendo que já estão estudando as mesmas há mais de dois anos. Mas isso, ainda, de certa forma, me incomoda, pois fica o questionamento: seria possível saber manipular os números e as incógnitas de uma equação não compreendendo o Princípio de Equivalência da Igualdade?

Ainda me direcionando ao contexto escolar, no que se refere aos documentos oficiais, atualmente o que está em vigor é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), e os documentos que a antecederam foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998). Os PCN (1998) trazem orientações pedagógicas em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. O ensino de Álgebra se encontra no bloco Números e Operações, afirmando que:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1997, p. 35)

Dessa forma, os PCN (BRASIL, 1997) sugerem que é possível o desenvolvimento de "alguns aspectos da Álgebra" nos Anos Iniciais, no entanto, não os especifica, e completa afirmando que as noções algébricas e o ensino efetivo da Álgebra só serão desenvolvidos nos Anos Finais do Ensino Fundamental, ou seja, somente no 3º e 4º ciclos, atualmente denominados por Anos Finais. Além disso, os PCN (BRASIL, 1998) trazem cinco concepções da Álgebra: (a) Aritmética generalizada (generalizar padrões aritméticos); (b) Funcional (estabelecer relação entre duas grandezas); (c) Modelagem (modelizar); (d) Equações; e (e) Estrutural (compreenderá a sintaxe).

Luna e Souza (2013), em seus estudos a respeito dos documentos curriculares, afirmam que a prática de ensino de Matemática possa oportunizar ao aluno o desenvolvimento do raciocínio algébrico, desde os Anos Iniciais. Enfatizam, ainda, que é necessário que pesquisas sejam realizadas com foco na prática do ensino de Álgebra a ser desenvolvido com os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A BNCC (BRASIL, 2017) estabelece as competências da Educação Infantil até os Anos Finais do Ensino Fundamental e organizou o Ensino Fundamental em cinco áreas de conhecimento: (i) Área das Linguagens; (ii) Área da Matemática; (iii) Área das Ciências da Natureza; e (iv) Área das Ciências Humanas. Área da Matemática que possui como componente curricular a própria Matemática.

A Matemática, como componente curricular, é dividida em cinco unidades temáticas: (i) Números; (ii) Álgebra; (iii) Geometria; (iv) Grandezas e Medidas; (v) e Probabilidade e Estatística. Destacaremos a unidade temática Álgebra, pois é o que se refere a nossa pesquisa.

A BNCC (BRASIL, 2017) afirma que a unidade temática Álgebra deve desenvolver o raciocínio algébrico, fundamental para a utilização de modelos matemáticos para que se possa compreender, representar e analisar relações entre grandezas, utilizando letras e outros símbolos.

> Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2017, p. 268)

A BNCC (BRASIL, 2017) também traz as quatro das concepções anunciadas pelos PCN (BRASIL, 1998), (a) Aritmética generalizada; (b) Relação funcional; (c) equações; (d) modelagem. No entanto, vale ressaltar que, diferentemente dos PCN (BRASIL, 1998), a BNCC (BRASIL, 2017) apresenta a Unidade Temática Álgebra desde os Anos Iniciais, enfatizando que é indispensável trabalhar com conceitos algébricos “nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade.” (BRASIL, 2017, p. 268)

Diante do exposto, resolvi averiguar se a dificuldade em resolução de problemas algébricos era somente dos meus alunos, e, para tanto, fui buscar os resultados das macroavaliações e pesquisas que tratavam desse tema.

Iniciei essa busca trazendo para discussão os relatórios do Sistema de Avaliação de Educação Básica (SAEB). O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) realiza, periodicamente, avaliação em larga escala. Essa avaliação é realizada por meio de testes e questionários que refletem os níveis de aprendizagem do conjunto de alunos avaliados. Esses níveis de aprendizagem, por sua vez, são organizados em Escalas de

Proficiência tanto de Língua Portuguesa quanto de Matemática, sendo que a interpretação realizada pelo SAEB está apoiada nessas Escalas de Proficiência[6].

Quanto aos resultados alcançados, segundo os relatórios do INEP, pelos alunos brasileiros foi de 255,76 e, em particular, os baianos, do 9º ano do Ensino Fundamental, a média total das escolas, estaduais e municipais atingiu, segundo os relatórios, 239,97 e 234,54, respectivamente. A média atingida na Bahia rendeu aos baianos o Nível 2 na Escala de Proficiência de Matemática, do 9º ano, do Ensino Fundamental, enquanto que a média brasileira demonstra que em média os alunos brasileiros se encontram no nível 3 na mesma escala. A meu ver, esses índices são baixos, aliás, abaixo da média, uma vez que o maior nível é 9. Além disso, no que se refere à resolução de equação, essa se encontra no Nível 4, tendo a seguinte redação: Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau envolvendo números naturais, em situação-problema.

Esses resultados apontam que os alunos chegaram ao 9º ano, depois de, teoricamente, terem estudado durante três anos (7º, 8º e 9º anos) os conceitos algébricos, sem ter compreensão do que é uma expressão algébrica e como se resolve uma equação do primeiro grau. Ainda de acordo com os esses relatórios, pude verificar que na escola onde leciono apenas 5,65% dos alunos do 9º ano se encontram no nível 4, e não ultrapassam esse nível, pois o percentual de 94,35% restante se encontra nos níveis 3, 2 e também no nível 1.

Diante disso, pude constatar que a situação dos meus alunos não difere dos outros alunos brasileiros, e que essa situação não é confortável no que diz respeito aos conceitos da Álgebra, e esse fato me impulsionou a buscar ainda mais o que dizem as pesquisas a esse respeito. Os estudos realizados por Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2016) consideram que os alunos dos Anos Iniciais demonstram ter habilidades de raciocinar algebricamente e que, portanto, para esses pesquisadores, as aulas dos Anos Iniciais podem e devem desenvolver o raciocínio algébrico.

Noto, a partir das leituras feitas, que obedecer as regras e manipular corretamente os elementos de uma equação, talvez não garanta que o aluno compreenda o Princípio de Equivalência da Igualdade. Acrescido a isso, não é raro observar que os alunos pensam no sinal de igualdade (=) apenas como um sinal operatório, ou seja, propõe um resultado numérico e único de uma expressão, seja ela aritmética ou algébrica (BOOTH, 1995). Ao perguntar aos meus alunos quanto é 2 + 5, a resposta 7 é unânime, nenhum deles responde 1 + 6, por exemplo. É possível que essa forma de pensar a igualdade seja um dos motivos que

---

[6]http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/resultados-finais-das-escolas-no-saeb-2017-ja-estao-disponiveis-no-portal-do-inep/21206

leva os alunos a não admitir 2x + 5 como resposta final de uma expressão algébrica e, muitas vezes, escrevem 7x, ou seja, faz a adição dos números (2 e 5) menosprezando e não levando em consideração a representação da variável x.

Booth (1995) mostra que as dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra são: a) a dificuldade em generalizar, pois para os alunos soa estranho, por exemplo, ter como resposta 11x, tendem a achar estranha essa resposta, já que até o momento as respostas eram só numéricas; b) em interpretar o sinal operatório, já que tendem a somar 2a + 7b e dar como resultado 9ab; c) o significado das letras e das variáveis, pois eles se questionam a todo o tempo qual o valor desses x, Como esse x pode ser 2 e agora já é 10?; d) tipos de relações e métodos, utilizados em Aritmética, muitas "dificuldades" apresentadas pelos alunos em Álgebra, são provenientes do não aprendizado da Aritmética, por exemplo, o não saber utilizar os parênteses, não saber as propriedades distributiva, comutativa, associativa, elemento neutro.

Além disso, percebe-se a preocupação de pesquisadores em tentar reverter essa situação, e uma possibilidade para que essa reversão ocorra, é que ao longo da Escola Básica o aluno possa desenvolver o raciocínio algébrico, como sugere Lins e Gimenez (2006, p.157) destacando "que começar a educação algébrica o quanto antes é fundamental, para que mais tarde não nos queixemos de como os alunos não conseguem 'largar a aritmética'".

O RePARe, no momento em que estava iniciando a minha pesquisa, desenvolvia o Projeto "A *Early Algebra* no Ensino Fundamental: mapeamento e diagnóstico", no qual fui inserida, que tem como objetivo mapear as pesquisas nacionais que investigaram sobre o ensino ou a aprendizagem da introdução da *Early Algebra*. Até aquela época foram concluídas cinco dissertações de mestrado, são elas: Oliveira (2018); Bitencourt (2018); Porto (2018); Bastos (2019). Além dessas, têm duas em andamento, de Souza e de Ribeiro.

Inicio com o de Oliveira (2018) cujo objetivo foi *Investigar a(s) possível(eis) contribuição(ções) que um modelo de formação híbrida, pautado em situações-problema e com feedback construtivista imediato, pode trazer para a apropriação dos conceitos da Early Algebra por discentes de um curso de mestrado em Educação*, em seu trabalho, Oliveira concluiu que "uma formação pautada no ensino híbrido contribuiu para o ensino de conceitos algébricos (símbolos, padrão em sequência, Equivalência em equação e noção funcional), os quais proporcionam o desenvolvimento do raciocínio algébrico de alunos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental" (OLIVEIRA, 2018, p. 174).

A pesquisa desenvolvida por Bitencourt (2018) teve por objetivo *analisar como os livros didáticos têm abordado o raciocínio algébrico, considerando os pontos de vista do* *padrão de sequência, da Equivalência e da relação funcional*, os resultados de sua pesquisa indicam que os livros didáticos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental trazem atividades de sequência, Equivalência e relação funcional. Em relação à sequência, as atividades encontradas, em sua maioria, eram numéricas e crescentes. No que diz respeito a Equivalência, as atividades apresentavam, em sua maioria, o ícone da balança e, no que tange à relação funcional, as atividades são apresentadas em forma de situações problemas.

Porto (2018) trabalhou com alunos do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental. O objetivo de sua pesquisa foi c*omparar as competências e os esquemas de ação que os alunos do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, utilizam ao lidarem com situações-problema, envolvendo os conceitos da Álgebra Elementar e, ainda, identificar seus níveis de raciocínio algébrico usados para resolver tais situações.* E os resultados da sua pesquisa sinalizaram que tanto alunos do 3º ano, quanto os do 5º ano do Ensino Fundamental, demonstraram estar habilitados para dar início ao aprendizado dos conceitos algébricos elementares. A pesquisadora afirmou, em seu trabalho, que não foi possível levantar generalizações a respeito dos desempenhos e estratégias presentes no universo de todo Ensino Fundamental. Diante das limitações do seu estudo, Porto (2018) sugere a elaboração de futuras pesquisas na mesma perspectiva da *Early Algebra* e, ainda, dando foco aos mesmos anos escolares que trabalhou.

Bastos (2019) teve como objetivo *investigar as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 4º e do 5º ano, do Ensino Fundamental, ao lidarem com situações que envolvem sequências, Equivalência e relação funcional.* Em sua pesquisa, concluiu que alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental conseguem identificar padrões e regularidades, generalizam situações em certa medida, compreendem a Equivalência e usam algumas propriedades, como também resolvem problemas relacionados às funções. A pesquisadora sugere que sejam realizadas pesquisas com caráter diagnóstico, para cada vertente da *Early Algebra* de modo que atingisse alunos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Pois, segundo Bastos (2019), seria possível compreender como os alunos de cada ano encaram problemas de sequências, Equivalência e relação funcional.

Diante do exposto, de alguns resultados de pesquisas e dentre elas aquelas realizadas pelo Grupo RePARe, e dos atuais documentos oficiais que trazem a necessidade de inserir a Álgebra ao longo de todo o Ensino Fundamental, desde os Anos Iniciais, lanço o objetivo e a questão dessa pesquisa.

OBJETIVO E QUESTÃO DE PESQUISA

Objetivo geral:

Investigar o desempenho e as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental, na resolução de problemas envolvendo equação do 1º grau, no que diz respeito à Equivalência.

Tendo em vista que no instrumento diagnóstico haverá questões icônicas e questões numéricas, elenco os seguintes objetivos específicos:

- Investigar se há diferença no desempenho dos alunos, no que se refere às questões icônicas e numéricas.
- Identificar e categorizar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões.

Com o objetivo geral e os específicos explícitos, busco responder a seguinte questão de pesquisa:

Qual é o desempenho e quais são as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental, na resolução de problemas envolvendo a equação do 1º grau, no que diz respeito à Equivalência?

Com o intuito de atingir o objetivo e responder a questão de pesquisa, delinearei a dissertação da seguinte forma[7]:

O primeiro capítulo contemplará a Álgebra, seu desenvolvimento histórico e o surgimento das equações. Apresentaremos a importância da *Early Algebra* no desenvolvimento do raciocínio algébrico, bem como a sua presença nos documentos oficiais (PCN e BNCC) e nos livros didáticos. Traremos também o conceito matemático que é a equação, com foco ao Princípio de Equivalência da Igualdade, dando uma ênfase também à ideia de que interpretar o sinal da igualdade como relacional ajuda na passagem da Aritmética para a Álgebra, além de pesquisas correlatas.

O segundo capítulo contemplará os procedimentos metodológicos adotados para a realização dessa pesquisa. Apresentaremos o universo da pesquisa, o instrumento diagnóstico e os procedimentos de análise dos dados.

[7]A partir desse momento, na apresentação dos capítulos vindouros, passarei a escrever utilizando a primeira pessoa do plural.

No terceiro capítulo, apresentaremos a análise e discussão dos dados coletados sob os dois aspectos, o quantitativo e o qualitativo.

Finalmente, traremos a conclusão dessa pesquisa apresentando os principais resultados encontrados e reflexões baseados nas análises dos dados coletados.

CAPÍTULO 1

A ÁLGEBRA EM DIFERENTES PONTOS DE VISTA

Neste capítulo, inicialmente trazemos a Álgebra por meio da *Early Algebra* e, sua importância para o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, no desenvolvimento do raciocínio algébrico, e em seguida apresentamos a Álgebra sob três pontos de vista que julgamos relevantes para este estudo: no seu desenvolvimento histórico (História da Álgebra e a evolução do estudo das equações); nos documentos oficiais (A *Early Algebra* na Escola); e no conceito de equação (A equação como conceito Matemático).

No primeiro ponto de vista, fizemos um breve histórico de como foi sua evolução ao longo do desenvolvimento na Matemática, com ênfase no conceito de equação.

Quanto ao segundo ponto de vista, discutimos a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) (BRASIL, 2017) no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio algébrico, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. No terceiro ponto de vista trouxemos o conceito matemático da equação dando ênfase ao entendimento da Equivalência: seus Princípios, suas propriedades e aos vários significados do sinal de igual. Cabe ressaltar que permeamos, ao longo desse capítulo, os resultados de pesquisas correlatas à nossa.

1.1 A *Early Algebra e o desenvolvimento do Raciocínio Algébrico*

O termo *Early Algebra*, surgiu em 1998, no início da implantação de um projeto que especulava a possibilidade de se inserir o ensino da Álgebra nos Anos Iniciais do sistema educacional norte americano (KAPUT, 1999), no entanto, foi selado e ganhou repercussão mundial, em novembro de 2006, numa conferência nos Estados Unidos, a *Conferência Algebra Gateway to Technological Future*[8]*,* que reuniu representantes do ensino de Matemática para pesquisar a respeito do ensino longitudinal de Álgebra, e identificar princípios comuns que poderiam servir como modelos de melhoria da qualidade de ensino.

[8]Disponível em:<http://www2.research.uky.edu/pimser/p12mso/pub/2009-10%20Archives/Everyone%20Passes%20Algebra%202009/Algebra-Gateway-Tech-Future.pdf>. Acesso em: 20 agosto 2019.

Aproximadamente 50 participantes convidados foram divididos em cinco grupos de trabalho, correspondentes a cinco níveis diferentes de ensino de Álgebra: (1) *Early Algebra* (Pré Álgebra), (2) *Introductory Algebra* (Álgebra Introdutória), (3) *Intermediate Algebra* (Álgebra Intermediária), (4) *Algebra for Teachers* (Álgebra para Professores em Perspectiva), e (5) *College Algebra* (Álgebra Universitária). O grupo de trabalho *Early Algebra,* que surge nessa conferência, inicia seus trabalhos com o intuito de compreender como ocorre o desenvolvimento do raciocínio algébrico em crianças que ainda não tiveram o contato com a Álgebra formal (KATZ, 2007).

A tradução literal do termo *Early Algebra* não expressa seu significado, uma vez que nos leva a acreditar que deveríamos ensinar Álgebra formal desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, deve-se salientar que os pesquisadores dessa área não pretendem desenvolver a Álgebra formal para alunos dos Anos Iniciais, e sim desenvolver o raciocínio algébrico ao longo de todo o Ensino Fundamental. Sendo assim, (CARRAHER; SCHLIEMANN, SCHWARTZ, 2008, p. 236) afirmam que "*Early Algebra* difere da álgebra, como comumente encontrada no ensino médio e além. Ela se baseia fortemente em contextos de fundo de problemas, apenas introduz gradualmente a notação formal.[9]"

De fato, House (1995, p. 2) afirma que "os alunos continuam sendo treinados para armazenar informações e para desenvolver a competência no desempenho de manipulações algorítmicas", ou seja, o ensino da Álgebra na sala de aula dos Anos Finais do Ensino Fundamental, bem como do Ensino Médio é baseada em manipulações e procedimentos.

Nessa mesma direção, para Blanton e Kaput (2005, p.413) o raciocínio algébrico é o "processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto de instâncias particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso da argumentação e as expressam de maneiras cada vez mais formais e adequadas à idade"[10]. Além disso, o raciocínio algébrico pode

> assumir várias formas, incluindo (a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); (c) modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações; e (d)

---

[9]Tradução nossa para: Early algebra differs from algebra as commonly encountered in high school and beyond. It builds heavily on background contexts of problems. It only gradually introduces formal notation.

[10]Tradução nossa para: We take algebraic reasoning to be a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways.

> generalização sobre sistemas matemáticos abstraídos de computações e relações.(BLANTON, KAPUT, 2005, p. 413)[11]

Dessa forma, entendemos o raciocínio algébrico em termos de generalização de ideias matemáticas, que não dependem de uma linguagem estritamente simbólico-formal para se manifestar, além de ganhar mais força, à medida que o aluno aos poucos vai desenvolvendo uma linguagem mais apropriada.

As formas que o raciocínio algébrico pode assumir, segundo Blanton e Kaput(2005), se assemelham às concepções de Usiskin (1995) para a Álgebra como: (i) Aritmética generalizada; (ii) um estudo de procedimentos para resolver certos problemas; (iii) estudo das relações; e (iv) Estrutura. Para a primeira concepção, Usiskin (1995) afirma que as duas principais instruções são traduzir e generalizar, e que essas técnicas são importantes tanto para a Álgebra quanto para a Aritmética. Adverte que, historicamente em 1564, com a invenção da notação algébrica por Viète, houve um rápido avanço nos estudos da geometria analítica e no cálculo.

No que se refere à segunda concepção, a Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos problemas, Usiskin (1995) afirma que é relativamente fácil traduzir um problema na linguagem materna para a linguagem algébrica. Entretanto, ao armar a equação, a resolução algébrica difere da resolução aritmética, os raciocínios são distintos visto que segundo Booth (1995), na Aritmética, o símbolo de igual geralmente é visto como unidirecional, precedendo o resultado de uma resposta numérica e na Álgebra esse sinal deve ser visto como de forma bidirecional, indicando assim uma Equivalência, o que leva muitos alunos a ter dificuldade na passagem da Aritmética para a Álgebra.

Na terceira concepção, a Álgebra como estudo de relações entre grandezas, Usiskin (1995) traz duas considerações interessantes. A primeira delas está relacionada à fórmula da área de um retângulo $A=b.h$, que é uma relação entre grandezas, contudo não temos a sensação de estarmos lidando com uma incógnita, mesmo porque não estamos resolvendo um problema. Por outro lado, ao perguntar ao aluno o que acontece com o valor de $1/x$,quando aumentamos o valor de x, ele fica confuso, pois não estamos pedindo o valor de x, e também não se trata de uma incógnita.

A quarta e última concepção da Álgebra como estudo das estruturas, que são estudados grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, nos cursos

[11]Tradução nossa para: can take various forms, including (a) the use of arithmetic as a domain for expressing and formalizing generalizations (generalized arithmetic); (b) generalizing numerical patterns to describe functional relationships (functional thinking); (c) modeling as a domain for expressing and formalizing generalizations; and (d) generalizing about mathematical systems abstracted from computations and relation.

superiores e fundamentais, ainda de acordo com Usiskin (1995), nessa concepção, a Álgebra é trabalhada na Escola básica por meio do estudo das propriedades das operações com os números reais e os polinômios.

As vertentes mais comuns de raciocínio algébrico na educação básica, segundo Canavarro (2007), são a Aritmética generalizada e o pensamento funcional. A Aritmética generalizada é baseada no potencial algébrico da Aritmética. Para Canavarro (2007), "Uma abordagem algebrizada da Aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da Álgebra em anos posteriores (CANAVARRO, 2007, p. 91). A autora ainda afirma que

> É a partir da estrutura da Aritmética que se podem construir os aspectos da Álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que 33 + 8 = 8 + 33 não porque ambos representam 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente). (CANAVARRO, 2007, p. 89)

Diante disso, é possível compreender que há uma linha tênue entre a Aritmética e a Álgebra, admitindo trabalhar com conceitos aritméticos na perspectiva de conceitos e propriedades algébricas, como a comutatividade do exemplo dado.

Para Cyrino e Oliveira (2011, p.103), "O pensamento funcional envolve a exploração e a expressão de regularidades numéricas, como por exemplo, a descrição do crescimento de padrões ou generalizações sobre somas de números consecutivos". Em sua pesquisa, os autores relatam algumas formas como o raciocínio algébrico, na vertente do pensamento funcional, se manifestou em alunos do Ensino Fundamental. Eles perceberam que, de um modo geral, o aluno do 4º ao 9º ano do Ensino Fundamental "expressa simbolicamente quantidades ou operações; Encontra uma relação funcional; Prevê condições desconhecidas a partir de dados conhecidos; Identifica e descreve um padrão numérico; Reconhece uma relação equivalente à sua". Cyrino, Oliveira (2011, p.118)

Schliemann *et al.* (2013) defendem o início do ensino da Álgebra a partir do raciocínio funcional, eles afirmam que:

> Uma abordagem funcional das equações promove a mudança da atenção dos estudantes de particular (por exemplo), a visão de que *x* tem um valor determinado) para o muito maior e menor conjunto tangível de casos possíveis. No início, linguagem natural, gráficos de eventos e alguns combinação de linguagem e tabelas servem como a mídia para representar variáveis e expressando generalizações. Mesmo que estes meios sejam tipicamente menos sucintos que notação algébrica, porque eles são relativamente mais acessíveis para os jovens

> aprendizes, notação algébrica pode inicialmente pegar carona neles e no significado das situações sendo modelado. (Schliemann *et al.* 2013, p. 4[12])

Os dados da sua pesquisa indicam que iniciar o ensino da Álgebra por meio de uma abordagem funcional "pode ajudar alunos do ensino fundamental a aprender representações algébricas básicas e procedimentos"[13] (SCHLIEMANN, *et al.* 2013, p. 7). Segundo Carraher e Schliemann (2016, p. 3), "a história da educação matemática está repleta de tentativas de implementar ideias poderosas no ensino fundamental de matemática"[14], e destacam quatro delas:a primeira ideia é que as operações aritméticas podem ser definidas como funções; a segunda revela que funções e relações devem ter um papel de destaque; a terceira diz que funções possibilitam a união da Aritmética, Álgebra e geometria; e a quarta ideia poderosa é que equações e inequações podem ser consideradas como a comparação de duas funções em seus domínios (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2016).

De acordo com o nosso grupo de pesquisa, RePARe, *Early Algebra* pode ser trabalhada sob três vertentes: (i) da sequência; (ii) da Equivalência; (iii) e da relação funcional. Em relação a sequência, Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que o trabalho com sequências beneficia a introdução ao raciocínio algébrico desde os Anos Iniciais. "Este trabalho contribui para o desenvolvimento do sentido de número nos alunos e constitui uma base para o desenvolvimento da sua capacidade de generalização" (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 40).

Em relação a Equivalência temos a ênfase no sinal de igual (=) que pode ter diversas interpretações, para Booth (1995), a forma como nos referirmos ao símbolo "=", influencia no entendimento dos alunos na hora de compreender que se trata de uma equivalência ao invés de um resultado imediato. E em relação a vertente da relação funcional temos de acordo com Carraher e Schliemann (2016) que, as funções podem ser vistas em situações cotidianas, tanto dentro como fora do âmbito escolar, além disso, muitas atividades relacionadas a operações aritméticas são exemplos de funções, logo é possível desenvolver o raciocínio algébrico trabalhando esse conceito desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

---

[12]Tradução nossa para: A functional approach to equations promotes the shift of students' attention from particular (e.g. the view that x has a determined value) to the much larger and less tangible set of possible cases. At first, natural language, graphs of events, and some combination of language and tables serve as the media for representing variables and expressing generalizations. Even though these means are typically less succinct than algebraic notation, because they are relatively more accessible to young learners, algebraic notation can initially piggyback on them and on the meaning of the situations being modelled.

[13]Tradução nossa para: can help elementary school students to learn basic algebraic representations and procedures.

[14]Tradução nossa para: The history of mathematics education is replete with attempts to implement powerful ideas in elementary school mathematics.

Na nossa pesquisa enfatizaremos a Equivalência e trabalharemos, partindo desta, o conceito de equação, contudo trouxemos os estudos desenvolvidos no RePARe envolvendo essas três vertentes, em ordem cronológica, que contribuíram de forma veemente na proposta desse estudo.

Iniciaremos com a pesquisa de Teixeira (2016), que teve por objetivo *investigar o raciocínio funcional introdutório dos alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental, apoiado em uma intervenção de ensino pautada em situações multiplicativas e sequenciais, icônica e numérica.* O público alvo dessa pesquisa foram alunos do 5º ano de uma escola pública do Sul da Bahia. A pesquisa se dividiu em quatro fases: pré-teste, intervenção de ensino, pautada em resoluções de problemas envolvendo multiplicação/divisão e sequências, pós-teste 1 (15 dias após a intervenção) e pós-teste 2 (66 dias após o pós-teste 1). Os resultados de pesquisa trouxeram fortes indicadores do efeito positivo da intervenção de ensino na construção do raciocínio funcional desses alunos. O autor pôde perceber o início da compreensão dos primeiros conceitos algébricos por parte dos alunos. A pesquisa de Teixeira (2016) converge com nossa pesquisa, pois trabalhou na perspectiva da *Early Algebra*, especificamente com alunos do 5º ano. Além disso, o autor sugere que sejam efetuadas mais pesquisas a fim de verificar a introdução do raciocínio algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental,

Em seguida, temos o trabalho de Porto (2018), numa pesquisa em que 149 alunos (69 do 3º ano e 80 do 5º ano) responderam a um instrumento diagnóstico (teste) composto por dez situações-problemas, envolvendo os conceitos da Álgebra elementar: sequência, equação e função. Os resultados da sua pesquisa indicaram que tanto os alunos do 3º ano quanto os do 5º ano apresentaram competências semelhantes em relação às vertentes da sequência e da equação. Quanto à vertente da função, os alunos do 5º ano apresentaram um raciocínio algébrico mais próximo do raciocínio funcional que os alunos do 3º ano. Esses resultados indicaram que os alunos do 3º ano, assim como os do 5º ano, do Ensino Fundamental, apresentaram-se aptos para serem introduzidos nos conceitos algébricos elementares.

A pesquisa de Porto (2018) relaciona-se com nossa pesquisa, pois além de trabalhar na perspectiva da *Early Algebra*, com alunos do 5º ano, traz situações problema relacionadas ao conceito de equação. Cabe ressaltar que, adaptamos um dos problemas da sua pesquisa, a questão 4, no instrumento de nossa pesquisa.

Figura 1.1- Questão 4 do instrumento da pesquisa de Porto (2018)

Questão 04

Diogo e Matheus querem saber quem tem mais dinheiro.
Diogo tem um valor dentro da carteira e mais R$ 3,00 na mão.
Matheus tem 2 vezes mais o valor que Diogo tem dentro da carteira.

a) Quem tem mais dinheiro? Por quê?
b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Diogo terá dentro da sua carteira?

Fonte: (PORTO, 2018, p. 83)

Por fim, e não menos importante trazemos Bastos (2019), que em sua pesquisa teve o objetivo de *investigar as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 4º e do 5º ano, do Ensino Fundamental, ao lidarem com situações que envolvem sequências, Equivalência e relação funcional*. A metodologia utilizada se deu na forma de resolução, por parte dos alunos, de instrumento diagnóstico composto de 8 questões que deveriam ser respondidas de duas formas: papel e lápis e material manipulativo, além de contar com o método clínico piagetiano na realização de uma entrevista, no momento da aplicação do instrumento diagnóstico. Os resultados de sua pesquisa demonstraram que alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental conseguem identificar padrões e regularidades, generalizam situações em certa medida, compreendem a Equivalência e usam algumas propriedades, como também resolvem problemas relacionados às funções, sobretudo as lineares. A pesquisa de Bastos (2019) converge para a nossa pesquisa, pois traz o 5º ano com público alvo e também utiliza situações problema relacionados à Equivalência.

Observamos os estudos anteriores e vimos que os pesquisadores que trabalham com a *Early Algebra* defendem o desenvolvimento do raciocínio algébrico desde os Anos Iniciais. Mas afinal como se deu o surgimento da Álgebra? Vemos na seção seguinte como se deu o surgimento da Álgebra, sua evolução com o estudo das equações.

1.2 História da Álgebra e a evolução do estudo das equações

Nesta seção, trazemos a História da Álgebra e a evolução do estudo das equações, enfatizando possíveis reflexos dessa evolução histórica na aprendizagem da Álgebra nos dias do hoje, refletidas a partir das dificuldades dos alunos. Para isso, nos embasamos principalmente, em textos de autores como Eves (2002), Boyer (2016) e Baumgart (1992), que apresentam trabalhos focados na história da Matemática e algumas pesquisas que trazem a relação entre as dificuldades encontradas pelos alunos e dificuldades durante a evolução da Álgebra na história.

O desenvolvimento da Matemática se deu pela necessidade prática e a partir da evolução da sociedade, como afirma Eves (2002) ao declarar que:

> Pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia.[...] Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção dos canais e reservatórios e para dividir a terra, e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis (EVES, 2002, p.57).

Como percebemos, a ênfase inicial da Matemática teve base na Aritmética e em atividades cotidianas, como as práticas de mensuração. A partir dos registros históricos, verificamos que a fase inicial do desenvolvimento algébrico foi após as primeiras conclusões aritméticas. Ainda segundo Eves (2002, p. 57), “Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração”, e foi dessa maneira, segundo o autor, que a Álgebra evoluiu após a Aritmética.

A Álgebra foi construída ao longo do desenvolvimento da Matemática, talvez pela necessidade de se criar uma linguagem em que fosse possível resolver problemas da antiguidade (Eves, 2002). Sabe-se que durante centenas de anos desde o seu surgimento, a Álgebra sofreu transformações até chegar ao ponto como se encontra nos atuais livros didáticos. Contudo, atualmente muitas vezes a Álgebra é tida apenas como um ramo da Matemática que utiliza letras para representar valores desconhecidos, e que essas letras são chamadas de incógnitas. Segundo Ribeiro *et al.*(2017, p.57), “os professores da Educação Básica enfatizam que a Álgebra tem somente por base um valor desconhecido a ser determinado”.

Muitas civilizações contribuíram para o desenvolvimento da Matemática, dentre elas estão: a civilização babilônica, a egípcia e a grega. Por volta de 2000 a. C. a Aritmética babilônica evoluiu para uma bem desenvolvida Álgebra retórica (EVES, 2002). Eles não utilizavam letras para valores desconhecidos, no entanto utilizavam palavra referente à geometria (comprimento, área, volume), para assumir esse papel (BOYER, 2016). Assim, entendemos que a Álgebra dos babilônicos se referia também a problemas geométricos. Eles eram conhecidos como ótimos calculistas e construíram muitas tábuas de cálculos.

A Matemática teve origem com a Aritmética que antecede o surgimento da Álgebra e sua evolução. A palavra Aritmética é derivada da palavra grega *arithmos*, que significa números (BAUMGART, 1992). Mas qual a origem da palavra Álgebra?

> Álgebra é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr*[...], usada no título de um livro, *Hisabal-jabrw'al-muqabalah*, escrito em Bagdá por volta de 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi. [...] Uma tradução literal do título completo do livro é "ciência da restauração (ou reunião) e redução". [...] Talvez a melhor tradução fosse simplesmente "a ciência das equações". (BAUMGART, 1992, p. 1)

Mesmo que a origem da Álgebra faça referência a equações, segundo Baumgart (1992), atualmente seu significado se ampliou, e podemos dividi-la em duas fases: a Álgebra antiga, que se refere ao estudo e resolução das equações e, a Álgebra moderna, que trata do estudo das estruturas matemáticas (anéis, grupos e corpos). Levando em consideração o fato da Álgebra, segundo Baumgart (2012), ser considerada a ciência das equações, adentraremos à história da Álgebra dando enfoque a esse conceito matemático.

Não sabemos ao certo quando ocorreu o surgimento das equações, mas segundo Eves (2002), por meio das tábuas de cálculos, foi constatado que os babilônicos utilizavam vários métodos para a resolução de equações.

> Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). (EVES, 2002, p. 61-62)

A civilização egípcia também contribuiu para o desenvolvimento da Matemática. "O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia" (EVES, 2002, p. 70), O *papiro Rhind*, Figura 1.2, de acordo com Boyer (2006, p. 8) "é o rolo de papiro mais extenso de natureza matemática, também chamado de *Papiro Ahmes* em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 a. C.".

Figura 1.2 – Uma parte do *papiro Rhind*. Depositado no *Museu Britânico*, Londres.

Fonte: IMÁTICA: A matemática interativa na internet.

Neste Papiro, estão descritos muitos problemas algébricos sendo que, os números e diversos assuntos matemáticos eram tratados "numa escrita mais cursiva" (BOYER, 2006, p.8). Salientamos que no *papiro Rhind* os problemas

> [...] não se referem a objetos concretos, específicos, como pães, cervejas, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma x + ax + bx = c, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de 'aha'. O probl. 24, por exemplo, pede o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19. A solução de Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como "método de falsa posição", ou "regra do falso". Um valor específico, provavelmente falso, é assumido para aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. (BOYER, 2006, p. 11)

O método da falsa posição pode ser comparado com o que hoje se chama de "método por tentativas" (RIBEIRO 2009, p.72). Eves (2002) apresenta uma resolução bem sucinta e de fácil compreensão para problemas como esse exposto anteriormente: "Assim, para resolver x + x/7 = 24 assume-se um valor conveniente para x, digamos x=7. Então x + x/7 = 8, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de x deve ser 3.(7) ou 21." (EVES, 2002, p. 73).

Dando continuidade à história, foi no período entre 250 a 350 d. C. que surgiu em Alexandria, na Grécia, quem seria "o maior algebrista grego, Diofanto de Alexandria" (BOYER 2016, p. 121). Em sua principal obra, *Arithmetica*, ele muito contribuiu para a evolução da Álgebra, utilizando uma letra grega para representar o valor desconhecido de uma equação.

Segundo Milies (2004), foi Diofanto quem utilizou, pela primeira vez, uma letra para representar um valor desconhecido de uma equação, que era chamada de número do problema.

> Como os manuscritos originais de Diophanto não chegaram até nós, não sabemos com toda certeza quais os símbolos que ele usava, mas acredita-se que representava a incógnita pela letra ς, uma variante da letra σ quando aparece no fim de uma palavra (por exemplo, em, αριθμ΄ος - arithmos) (MILIES, 2004, p. 5).

A partir do declínio do Império Romano houve um deslocamento dos centros das investigações matemáticas para a região da Índia, assim como para as regiões conquistadas pelos árabes. Dessa feita, a matemática árabe se desenvolve a partir de problemas, apresentando como principal característica a relação entre a solução desses problemas e um intenso trabalho teórico. (RIBEIRO, 2007).

Um dos mais respeitados matemáticos Árabes foi *Mohamed Ibu-Musa Al-Khowarizmi*, que segundo Ribeiro (2007) escreveu, no século IX, a obra que mais contribuiu para o estudo de equações, intitulada *IImal-Jabr Wa al Muqabalah*. Nesta obra, estavam presentes duas regras para se resolver equações, nos dias de hoje, intituladas de Princípios de Equivalência da Igualdade, que são *al-jabr e al muqabalah, sendo que "al-jabr* é a operação que soma a ambos os membros da equação termos iguais; *al muqabalah* é a operação que reduz ou elimina termos iguais de ambos os membros da igualdade"(RIBEIRO, 2007, p. 62).

Os europeus também deram contribuições significativas para o desenvolvimento da Álgebra e, consequentemente, das equações. De acordo com Santos e Morelatti (2016, p.21), "A obra italiana mais importante sobre a Álgebra foi *A Summa de Aritmética, geométrica, proportioni et proportionalitá*, escrita pelo frade Luca Pacioli [...] A parte concernente à Álgebra abordou a resolução usual de equações lineares e quadráticas."

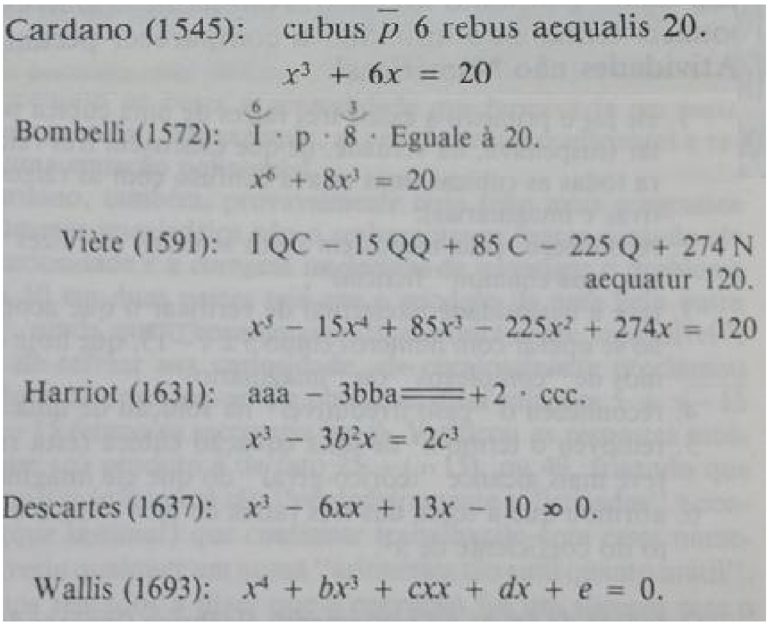
Segundo Ribeiro (2007), houve outros matemáticos europeus que contribuíram no campo algébrico, são alguns deles: Scipione Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli. O autor também ressalta a importância de François Viète (1540-1603), autor da obra *In Artem Analyticam Isagoge*, que traz o desenvolvimento do simbolismo algébrico.

> A simbologia de Viète consistia fundamentalmente em palavras e abreviaturas, como: x^3, Viète representava por *x cubus*; x^2, ele representava por *x quadratus*; o sinal de igual, Viète representava por *aequalis*; a multiplicação, por *in*; a divisão Viète representava por /. (RIBEIRO, 2007, p. 71-72)

Outro matemático que merece destaque é Renè Descartes. "Ele refinou a notação de Viète usando letras do início do alfabeto para valores conhecidos (a, b, c) e letras do fim do alfabeto para incógnitas (x, y, z). (ROONEY, 2012, p. 141).

Percebemos as mudanças e evoluções na utilização dos símbolos algébricos, quando observamos,por meio da história, as formas diversas que diferentes matemáticos representam uma mesma equação, cada um utilizando uma notação própria, como podem constatar na figura seguinte:

Figura 1.3–Diferentes formas de representação de uma equação por diferentes matemáticos



Cardano (1545): cubus $\bar{p}$ 6 rebus aequalis 20.

$x^3 + 6x = 20$

Bombelli (1572): $\overset{\underset{\smile}{6}}{1} \cdot \text{p} \cdot \overset{\underset{\smile}{3}}{8} \cdot$ Eguale à 20.

$x^6 + 8x^3 = 20$

Viète (1591): 1 QC − 15 QQ + 85 C − 225 Q + 274 N aequatur 120.

$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$

Harriot (1631): aaa − 3bba ═══ + 2 · ccc.

$x^3 - 3b^2x = 2c^3$

Descartes (1637): $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0.$

Wallis (1693): $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0.$

Fonte: Baumgart (1992, p. 12-13).

Observamos que a simbologia algébrica demorou séculos para se desenvolver e o seu desenvolvimento continua ainda nos dias de hoje. Isso significa que a história nos mostra que a escrita algébrica nem sempre foi composta somente por símbolos, ela passou por várias fases até chegar até o ponto que vimos hoje nas nossas salas de aula.

Historicamente, segundo Boyer (2016), desde a antiguidade aos dias atuais, a Álgebra evoluiu em três estágios: o primitivo ou retórico, o sincopado e, o simbólico.

1) O primitivo ou retórico: trata-se de uma linguagem verbal, onde as informações eram tratadas de forma cursiva, escrita somente com palavras.

2) O sincopado: seria uma linguagem cursiva, mas eram utilizadas algumas abreviações das palavras.

3) A linguagem simbólica: é a linguagem na qual as ideias passaram a ser representadas por símbolos.

Entendendo a importância desses três estágios para o desenvolvimento da Álgebra, explicitaremos a seguir, cada um deles, assim como traremos estudos correlatos que tragam sua importância para o ensino e aprendizagem da Álgebra nos dias de hoje.

A Álgebra retórica é o primeiro estágio. Neste, “os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos” (EVES, 2002,

p. 206). Citaremos dois exemplos de problemas da antiguidade que foram resolvidos de forma retórica.

É justo que o primeiro exemplo seja de um problema babilônico, pois “a Álgebra provavelmente se originou na Babilônia” (BAUMGART, 1992, p.4). Esse problema babilônico, resolvido em cinco etapas, utiliza o sistema numérico decimal, diferente da notação sexagesimal [15]da escrita cuneiforme[16].

> [1] Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.
> [2] [Dado] 32 soma;
> 252 área.
> [3] [Resposta] 18 comprimento, 14 largura.
> [4] Segue-se esse método: Tome metade de 32 [que é 16].
> $16 \times 16 = 256$
> $256 - 252 = 4$
> A raiz quadrada de 4 é 2.
> $16 + 2 = 18$ comprimento
> $16 - 2 = 14$ largura.
> [5] [Prova] Multipliquei 18 comprimento por largura.
> $18 \times 14 = 252$ área. (BAUMGART, 1992, p.4-5)

Na etapa [1], temos a formulação do problema, cuja necessidade dos babilônicos está em reconhecer as grandezas do problema (comprimento e largura), determinando a área a partir da relação de multiplicação entre elas; na etapa [2], são apresentados os dados do problema; na etapa [3] é dada uma resposta; na etapa [4] é explicado o modo de resolução passo a passo; e na etapa [5], a resposta é verificada para tirar a prova.

O segundo exemplo que trouxemos é um problema, que traduzido na linguagem atual é $x^2 + 21 = 10x$, que foi enunciado por um matemático árabe: al-Khowarizmi e resolvido (BAUMGART,1992). Para melhor apresentar o problema, colocamos em um quadro que a partir da etapa [2] aparecem duas colunas, sendo que a segunda coluna se encontra as etapas de resolução numa linguagem mais atual.

---

[15] Sistema de numeração de base 60.

[16] Escrita em que eram utilizados caracteres assemelhados a cunhas.

Quadro 1.1- Problema enunciado por al-Khowarizmi e resolvido por Baumgart (1992)

[1]Qual deve ser o valor de um quadrado que, quando vinte e um dirhems são somados a ele, torna-se igual ao equivalente a dez raízes daquele quadrado?	
[2] divida ao meio o número de raízes; a metade é cinco	$\frac{10}{2} = 5$
[3] Multiplique este número por si mesmo; o produto é 25.	$5 \times 5 = 25$
[4] Subtraia deste o vinte e um que está ligado ao quadrado; o resto é quatro.	$25 - 21 = 4$
[5] Extraia sua raiz, ela é dois.	$\sqrt{4} = 2$
[6] Subtraia isto da metade das raízes, que é cinco, o resto é três. Esta é a raiz do quadrado que você procura e o quadrado é nove.	$5 - 2 = 3$, $3 = \sqrt{9}$,
[7] Ou você pode somar a raiz à metade das raízes; a soma é sete; esta é a raiz do quadrado que você procura, e o quadrado mesmo é quarenta e nove.	ou $5 + 2 = 7$ $7 = \sqrt{49}$

Fonte: Baumgart, 1992, p. 31 (adaptado)

Se utilizássemos o modo atual para resolver esse problema, aplicaríamos a fórmula de Bháskara e encontraríamos de forma rápida, como solução dessa equação, os números 3 e 7. “Se a Álgebra de al-Khowarizmi parece prosaica, é preciso dizer que as ideias muitas vezes precedem a notação; o simbolismo é inventado conforme se faz necessário” (BAUMGART, 1992, p. 31).

Séculos mais tarde, entre 250 a 350 d. C., o matemático grego Diofanto inicia a resolução de equações utilizando-se, além da linguagem retórica, a abreviação de palavras. Emerge, assim, o segundo estágio do desenvolvimento algébrico: a Álgebra sincopada, “em que se adotam abreviações para algumas quantidades e operações que se repetem mais frequentemente.” (EVES, 2002, p. 206).

Diofanto utilizava “abreviações para a incógnita, potências da incógnita até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos.” (EVES, 2002, p. 209). Eves (2002) apresenta algumas das abreviações de Diofanto, segundo o autor para representar a incógnita ele usou o símbolo equivalente à letra grega ζ; para o quadrado da incógnita usou Δ^{Y}, as duas primeiras letras da palavra dunamis (quadrado); para cubo da incógnita usou K^{Y}, as duas primeiras letras da palavra Kubos; para a potência de expoente quatro usou $\Delta^{Y}\Delta$, que significa quadrado-quadrado; para as potências de expoente cinco e seis usou, respectivamente, ΔK^{Y} (quadrado-cubo) e $K^{Y}K$ (cubo-cubo).

A sincopação de Diofanto é denominada por Baumgart (1992) de semi-simbolismo. A expressão na linguagem algébrica atual, $x^3 + 13x^2 + 5x$ pode ser representada na linguagem sincopada de Diofanto como $K^{Y}\alpha\Delta^{Y}\iota\gamma\zeta\varepsilon$.

Na Índia, os algebristas também sincoparam a sua Álgebra, segundo Eves (2002), eles indicavam a subtração colocando um ponto sobre o subtraendo, para indicar a multiplicação escrevia-se depois dos fatores *bha* (sílaba inicial da palavra *bhavita*, que significa produto), escrevia-se o divisor abaixo do dividendo para expressar a divisão e para a raiz quadrada escrevia-se antes da quantidade *ka* (sílaba inicial da palavra *karana*, que significa irracional).

O algebrista indu que mais teve destaque segundo Eves (2002) foi Brahmagrupta, ele denominava a incógnita por *yā*(primeira sílaba da palavra *yāvā*tt*āvat,* que significava tanto quanto), antecedidos aos números inteiros vinha *rū* (sílaba inicial de *rū*, que significa número puro). “As incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores. Assim uma segunda incógnita poderia ser denotada por *kā* (de *kālaka,* “preto”)” (EVES, 2002, p. 256). Poderíamos escrever a expressão atual 6 xy + $\sqrt{15}$-8, na sincopação de Brahmagrupta da seguinte forma: *yākā 6 bhaka 15 rū*$\dot{8}$.

A Álgebra simbólica (moderno simbolismo) emergiu por volta de 1500, contudo, “os métodos e notações de Diophanto foram se aperfeiçoando muito lentamente. Mesmo os símbolos hoje tão comuns para representar as operações demoraram a ser introduzidos” (MILIES, 2004, p. 6). Boyer (2006) afirma que muitos desses símbolos para representar as relações e operações, assim como para representar notação exponencial, surgiram do fim do século XV ao começo do século XVII, na Europa. As representações simbólicas utilizadas em situações matemáticas, que atualmente nos parecem simples, nem sempre foram assim. Rooney (2012) aponta que “Os primeiros símbolos a serem usados eram + e –, embora originalmente eles servissem para mostrar quantidades existentes ou faltando em um armazém. Logo eles assumiram o seu papel moderno como operadores matemáticos” (ROONEY, 2012, p. 134).

Segue-se abaixo, no Quadro 1.2, a ordem cronológica do surgimento de alguns símbolos matemáticos.

Quadro1.2 – Ordem cronológica do surgimento dos símbolos matemáticos

SÍMBOLO	DATA	ORIGEM
+ (mais) e - (menos)	1489	Johan Windmann, Alemanha,
√ (raiz quadrada)	1525	Christoff Rudolff, Alemanha.
= (igual)	1557	Robert Recorde, Inglaterra.
× (multiplicação)	1618	William Oughtred, Inglaterra.
a, b, c para valores desconhecidos (constantes) x, y, z para valores desconhecidos (variáveis)	1637	René Descartes, França
÷ (dividir)	1659	Johann Rahn (ou Rhonius), Alemanha.

Fonte: Rooney (2012, p. 135)

Percebemos então, que a Álgebra vem se desenvolvendo ao longo de séculos, e com ela a linguagem algébrica também apresentou significativas mudanças. No breve histórico que fizemos anteriormente, da Álgebra apresentada no *papiro de Rhind* de forma retórica até a simbólica, se passaram mais de três milênios.

Observamos que a Álgebra foi sendo desenvolvida de forma lenta, até chegar à Álgebra que desenvolvemos hoje em sala de aula. Desse modo, é compreensível que os alunos tenham tanta dificuldade, uma vez que a introdução de conceitos algébricos é feita de maneira brusca.

No final do século passado, Booth (1995) já apontava algumas dificuldades dos jovens alunos que se iniciam em Álgebra e, dentre elas está a interpretação dos símbolos. Ao se trabalhar com a Aritmética, os símbolos + (mais) e = (igual) têm suas interpretações definidas como símbolos operatórios. O símbolo + geralmente é interpretado como a ação a ser efetuada, e seu uso na Álgebra não necessariamente ocorre da mesma forma, enquanto que o símbolo = significa, essencialmente, escrever a resposta, como exemplo, podemos citar que a expressão algébrica 2a + 3b não pode ser realizada visto que os termos não são semelhantes, mas, mas segundo Boot (1995) a tendência dos alunos é pensar aritmeticamente, somando os termos e dando o termo 5ab como resposta. Em seus estudos a respeito de equações com alunos de 12 a 14 anos, Kieran (1981) concluiu que eles admitem o sinal de igual como sendo um símbolo unidirecional, aquele que precede uma resposta numérica.

Muitos alunos apresentam dificuldade ao lidar com números e suas operações, contudo, outros que conseguem se desenvolver de forma razoável no campo da Aritmética, não garantem a mesma desenvoltura no campo algébrico (PONTE 2006). O autor atribui como uma das razões dessa dificuldade a mudança de sentido dos símbolos em cada um desses campos.

Ponte (2006) nos chama a atenção para o fato que a Álgebra é tida como um campo que envolve muitos símbolos, embora grande parte dessa simbolização surja na própria Aritmética. Além de novos símbolos acrescentados por ocasião do ensino de Álgebra, outros já conhecidos sofrem uma mudança de significado, como por exemplo, os sinais de adição (+) e de igualdade (=) que, como já destacamos, geram dificuldades aos alunos.

Booth (1995), a partir de seus estudos, orienta que é necessário que nas primeiras experiências com a Aritmética, as crianças saibam que 2 + 3, por exemplo, não significa necessariamente a instrução de realizar essa adição, mas também significa “o número que é 3 mais que 2” (BOOTH, 1995, p. 28). Outro ponto importante que ele destaca é que o sinal de igualdade seja trabalhado de forma bidirecional e que se faça uma leitura adequada, o que significa dizer “é igual a” ao invés de dizer “dá”, como por exemplo, “um mais quatro dá cinco”. Uma maneira de trabalhar de maneira bidirecional seria proporcionar aos alunos outras formas de apresentar uma expressão numérica, como por exemplo, 5 = 1 + 4, ou ainda 1 + 4 = 2 + 3.

Dentre outras orientações, o autor destaca que tentar dar significado às letras pode não ser adequado, por exemplo, relacionar “três abacates mais 2 bananas” para a expressão $3a + 2b$. Essa pode não ser uma boa alternativa, pois favorece uma visão equivocada do significado das letras, além de ser uma boa justificativa para a resolução 5ab (3 abacates mais 2 bananas é igual a 5 abacates e bananas), de acordo com os resultados de sua pesquisa.

Outro ponto relevante que Booth (1995) aborda é a questão da ideia da variável em Álgebra. Ainda que os alunos interpretem as letras como as representantes de um número, “há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos, como em ‘$x + 3 = 8$’, e não números genéricos ou variáveis como em ‘$x + y = y + x$’” (BOOTH, 1995, p. 31). Segundo o autor, os alunos tratam os símbolos utilizados na Aritmética, cujos valores dos símbolos são sempre únicos, do mesmo modo na Álgebra.

Diferente do que se mostra na história, a Álgebra é apresentada aos alunos por meio de situações forçadas que não condizem em nada com a realidade, por meio de um excesso de regras e manipulações que não fazem sentido (KAPUT, 1999).

Pesquisadores têm trabalhado no sentido de resgatar o desenvolvimento histórico da Álgebra e apresentam resultados de pesquisas que nos ajudam a compreender melhor a importância dos três estágios: retórico, sincopado e simbólico no desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Estudos de Trevisan *et al.*(2018) identificaram como tipo de linguagem utilizada pelos alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental, a mais recorrente a linguagem retórica, passando pela sincopada e em alguns grupos até mesmo a simbólica utilizada na Álgebra formal. Tais resultados sustentam a necessidade do trabalho que contribua para o desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Panossian (2014), em sua tese de doutorado, cujo objetivo foi *investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da Álgebra*, realizou um trabalho em dois momentos: Inicialmente, a autora fez um estudo aprofundado do movimento histórico e lógico dos raciocínios algébricos e, no segundo momento, elaborou um curso de aperfeiçoamento de professores da rede pública do estado de São Paulo. Esses professores passaram a ser colaboradores de sua pesquisa, que partindo da história da Matemática produziram atividades para seus alunos envolvendo equações, área e perímetro, já que de acordo com a história, os babilônicos utilizavam a Álgebra (equações), basicamente para resolver problemas ligados à área e perímetro, como o exemplo de al-Khowarizmi citado no texto anteriormente. Os alunos envolvidos nessa pesquisa utilizaram os três estágios: retórico, sincopado e simbólico, para representar as soluções dos problemas propostos.

A pesquisadora concluiu, com sua pesquisa, que existe, no processo de formação dos professores, uma carência "de discussões históricas e filosóficas sobre o processo de elaboração do conhecimento, e consequentemente, neste caso em particular, do processo de formação de conceitos algébricos." (PANOSSIAN, 2014, p.147). Os professores envolvidos na pesquisa desconheciam os três estágios do desenvolvimento da Álgebra: retórico, sincopado e simbólico e perceberam a importância desse conhecimento para o ensino e aprendizagem dos conceitos algébricos.

Gil (2008), em seu trabalho de pesquisa, teve como objetivo *compreender as dificuldades encontradas pelos alunos de 8º ano do Ensino Fundamental, no entendimento dos conceitos e procedimentos que envolvem o estudo de Álgebra e propor alternativas de solução.* A pesquisa foi realizada no ano de 2007, em uma escola da rede privada deensino, que se localiza na cidade de Porto Alegre – RS e foram sujeitos da pesquisa alunos e professores de 8º ano do Ensino Fundamental. A pesquisadora observou na sua pesquisa que, muitas vezes, as dificuldades apresentadas pelos alunos na tradução de situações-problema, para a linguagem formal, residem na interpretação. Não conseguindo formalizar as informações, o aluno não resolverá o problema.

Em relação às dificuldades do ensino de Álgebra sob o ponto de vista dos professores, Gil (2008) percebeu que um fator que aparece em todas as falas é a falta de pré-requisitos por parte dos alunos, principalmente no que diz respeito à passagem da Aritmética para a Álgebra.

Concordamos com as ideias de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 89), quando afirmam que

> a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da álgebra, o menosprezo ao modo de expressão simbólico formal constitui-se também em impedimento para o seu pleno desenvolvimento.

É visível que durante centenas de anos desde o seu surgimento, a Álgebra sofreu transformações até chegar ao ponto como se encontra nos atuais livros didáticos.

No âmbito escolar, houve três concepções que tiveram grande influência no ensino da Álgebra: O *transformismo algébrico*, o Movimento da Matemática Moderna, e uma terceira concepção que uniu as duas concepções anteriores (COELHO e AGUIAR, 2018).

Durante o século XIX, até metade do século XX, ocorreu como base no ensino da Álgebra o chamado *transformismo algébrico*. Nessa concepção visava-se a obtenção de identidades algébricas "mediante o emprego de regras e propriedades válidas, resultando, em última instância, em um mero jogo, muitas vezes artificial, de habilidades visando a resolução de problemas" (COELHO, AGUIAR, 2018, p.173).

Coelho e Aguiar (2018) ressaltam que, após o transformismo algébrico, nas décadas de 1950, 1960 e 1970 o destaque foi o Movimento da Matemática Moderna, onde o ensino da Matemática passa a ser fundamentada pela Álgebra. Posteriormente, as duas concepções anteriores foram sintetizadas, dando origem a uma terceira concepção que foi caracterizada pelo emprego de recursos visuais (balanças, gangorras), no qual identidades algébricas eram justificadas por meio de construções geométricas.

> Conscientemente ou não, esse enfoque vai ao encontro de uma das características que envolvem a história da Álgebra, pois, por muito tempo, as justificativas para a resolução de equações algébricas se baseavam em construções geométricas.
> Os adeptos dessa concepção, porém, acreditavam que essa etapa geométrico-visual constituiria um primeiro estágio nesse aprendizado e que, a seguir, poder-se-ia apresentar então aos estudantes a abordagem simbólica. Entendemos, porém, que essa passagem se constitui na grande dificuldade do aprendizado, e, recorrendo novamente à história da Álgebra, foi justamente a não percepção deque a Álgebra sobreviveria independentemente de justificativas geométricas que atrasou, de certa forma, o desenvolvimento do que chamamos atualmente de pensamento algébrico-abstrato. (COELHO E AGUIAR, 2018, p. 174)

Do mesmo modo que a Álgebra foi desenvolvida, primeiramente na forma retórica e, gradativamente, passou a ser sincopada e simbólica, assim deveria ser o ensino, ou pelo menos, a introdução dos conceitos algébricos, pois "ao tomar como ponto de partida a existência de uma Álgebra simbólica já constituída, reduzem-se os processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra ao transformismo algébrico" (RIBEIRO, 2016, p. 4).

Lins e Gimenez (2006) citam um artigo do inglês Eon Harper, publicado em 1987, em que do desenvolvimento da Álgebra "de retórico a sincopado e a simbólico haveria um correspondente desenvolvimento intelectual" (LINS, GIMENEZ, 2006, p. 92), ou seja, nesse artigo o autor concluiu que não era possível ensinar Álgebra a alunos menores que 14 anos, já que eles não teriam maturidade cognitiva para assimilar tal conceito.

A partir desse estudo,

> surgiu a sugestão de que o ensino-aprendizagem da Álgebra na escola deveria ser iniciada apenas de forma bastante tardia (por volta dos 14-15 anos de idade).[...]O resultado geral foi uma geração ou mais de alunos que terminavam o equivalente ao ensino fundamental sem qualquer educação algébrica, ou, no máximo, no caso dos alunos classificados na faixa superior em matemática, com uma formação bastante superficial. Ainda hoje, a universidade inglesa sente o efeito desse processo sobre alunos ingressantes. (LINS, GIMENEZ, 2006, p. 94).

Diante do exposto, percebemos que o ensino tardio da Álgebra não traz benefícios para a aprendizagem da mesma. Estudiosos como Lins e Gimenez (2006); Carraher, Schliemann e Schwartz (2008); Blanton e Kaput (2005) argumentam que a Álgebra pode e deve ser introduzida desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, por meio do desenvolvimento do raciocínio algébrico, que chamaram de *Early Algebra.* Dessa forma, na próxima seção procuramos entender o que dizem os documentos oficiais a respeito do ensino da Álgebra nos Anos Iniciais.

1.3 A *Early Algebra* na Escola

No breve histórico que fizemos anteriormente, sobre o surgimento da Álgebra, vimos que a Matemática surgiu para auxiliar as atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Inicialmente, o destaque da Matemática foi a Aritmética, mas com o tempo passou-se a estudar a ciência (Matemática) por si mesma, foram se desenvolvendo tendências abstratas. Então, a Álgebra surgiu ao fim da Aritmética (EVES, 2002) e, desde então, vem se desenvolvendo e tomando o seu espaço, sendo hoje, parte importante no ensino de Matemática nos níveis Fundamental e Médio, visto que o ensino da Álgebra se faz presente no currículo da Escola Básica ao longo dos anos.

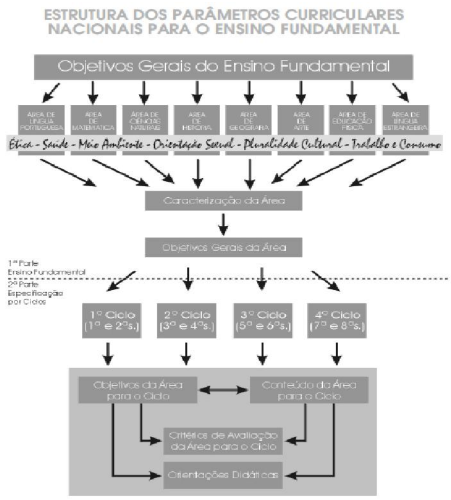
Como mencionamos na seção 1.1, o nosso estudo define a *Early Algebra* como a Álgebra que pode ser trabalhada desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Diante disso, buscamos, nos documentos oficiais que regem a educação brasileira e nos livros didáticos dos Anos Iniciais, indícios do trabalho com a *Early Algebra.*

Abordamos então a *Early Algebra* do ponto de vista dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), do ponto de vista da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do ponto de vista dos livros didáticos, através de um estudo correlato de Bitencourt (2018).

Iniciamos com os PCN (BRASIL, 1998), que foram redigidos no intuito de respeitar as disparidades culturais, regionais e políticas do país, bem como de ponderar a necessidade de se estabelecer referências nacionais que unificassem o processo educativo em todas as regiões brasileiras.

Os PCN (1997, 1998) agrupam os anos escolares em ciclos, como indica a figura seguinte:

Figura 1.4 – Estrutura Curricular dos PCN para o Ensino Fundamental



Fonte: PCN (1998)

Sendo assim, o primeiro ciclo corresponde ao 2º e 3º anos, o segundo ciclo corresponde ao 4º e 5º anos, o terceiro ciclo equivale ao 6º e 7º anos e o 4º ciclo equivale aos 8º e 9º anos, do Ensino Fundamental.[17]

Os PCN (1997, 1998) trazem as orientações pedagógicas da Área de Matemática em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da

[17] Em 1997, o hoje (2019) chamado de 1º ano era a alfabetização e pertencia à Educação Infantil, e os hoje intitulados 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º e 9º anos eram denominados, respectivamente, de 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries.

Informação. No que dizem respeito à *Early Algebra*, eles sugerem que é possível o desenvolvimento de uma pré-Álgebra nos Anos Iniciais, no entanto não os especifica. De acordo com esse documento, as noções algébricas e o ensino efetivo da Álgebra só serão desenvolvidos nos 3º e 4º ciclos, atualmente denominados por Anos Finais do Ensino Fundamental.

O documento mais recente, no Brasil, que rege o Ensino Fundamental, publicado em 2017, é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Assim,

> A BNCC é um documento plural, contemporâneo, e estabelece com clareza o conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos, têm direito. Com ela, redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passam a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas. Essa referência é o ponto ao qual se quer chegar em cada etapa da Educação Básica, enquanto os currículos traçam o caminho até lá. (BRASIL, 2017, p. 7)

A BNCC traz a Álgebra como uma unidade temática e dá destaque ao raciocínio algébrico bem como sua utilização desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos [...] Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. ” (BRASIL, 2017, p. 268)

Portanto, esse documento reitera o que dizem os estudiosos da *Early Algebra* (CANAVARRO; BLANTON; KAPUT; BRIZUELA, SCLIEMANN; SCHWARTZ; KATZ; LINS, GIMENEZ; PONTE) citados nas seções anteriores, também recomenda o desenvolvimento de aspectos da Álgebra desde os Anos Iniciais e sua ampliação nos Anos Finais do Ensino Fundamental. A unidade Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental vem distribuída conforme demonstrado no Quadro 1.3, a seguir.

Quadro 1.3- Objetos de conhecimento dispostos na BNCC

Ano escolar	**Objetos de conhecimento**
1° ano	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências; Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2).
2° ano	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas; Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.
3° ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas; *Relação de igualdade.*
4° ano	Sequência numérica recursiva, formada por múltiplos de um número natural; Sequência numérica recursiva, formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero; Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão; *Propriedades da igualdade.*
5º ano	*Propriedades da igualdade e noção de Equivalência;* Grandezas diretamente proporcionais; Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.

Fonte: Elaborado e adaptado pela pesquisadora partir da BNCC (BRASIL, 2017, p. 276 a 292)

Observando o Quadro 1.3, percebemos que o ensino de Álgebra no Brasil deve ser iniciado já no 1º ano do Ensino Fundamental com padrões, regularidades e sequências, estendendo esses conceitos para o 2º e o 3º ano do Ensino Fundamental. Observamos também que, a partir do 3º ano deve-se iniciar o conhecimento das relações e propriedades da igualdade, que segue até o 5º ano, ano este em que se estabelecem as noções de Equivalência, abordando assim as três vertentes da *Early Algebra*: sequência (1º ao 4º anos), Equivalência (3º ao 5º anos) e relação funcional (4º e 5º anos), que no quadro 1.3 é caracterizado nas Relações entre as operações Aritméticas e nas Grandezas diretamente proporcionais.

Para esclarecer a *Early Algebra,* do ponto de vista do livro didático, traremos a pesquisa de Bitencourt (2018), em que seu objetivo foi *analisar como os livros didáticos têm abordado o raciocínio algébrico, considerando os pontos de vista do padrão de sequência, da Equivalência e da relação funcional*. Essa pesquisa foi de caráter documental, a autora analisou livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), no ano de 2016, referentes aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para tal análise, Bitencourt (2018) contabilizou e discutiu as tarefas relacionadas as três vertentes da *Early Algebra:* sequência, Equivalência e relação funcional, além de classificá-las como numéricas e pictóricas.

Os resultados apontaram que os livros das coleções analisadas apresentavam tarefas no que diz respeito ao padrão de sequência, em sua maioria numérica e crescente. No que diz respeito à Equivalência, a autora percebeu a predominância de tarefas com uso do ícone da balança e, quanto à relação funcional, as tarefas eram apresentadas em forma de situações problemas.

A pesquisa de Bitencourt (2018) converge para a nossa pesquisa, pois além de trabalhar na vertente da *Early Algebra*, ainda nos elucida de que forma a Álgebra vem sendo abordada pelos livros dos Anos Iniciais, nos auxiliando principalmente em relação à Equivalência, conceito matemático importante para o entendimento nos Anos Finais do nosso conceito matemático que é a equação (PONTE, 2003).

Na próxima seção, exploraremos o nosso conteúdo matemático: a equação, discutindo a relação de igualdade e a importância dos Princípios de Equivalência para o entendimento do mesmo.

1.4 A equação como conceito Matemático

Nessa seção, trouxemos o conceito matemático que trabalhamos nesse estudo, qual seja a Equação do 1º grau, trouxemos também estudos que tratam do sinal da igualdade, no qual diz respeito aos seus significados, tratamos a Equivalência na equação e suas propriedades no contexto da Educação Matemática.

Iniciamos com Ponte (2003), ao afirmar que a equação é o conceito central da Álgebra, além disso, a sua aprendizagem tem representado para os alunos o início de uma nova etapa do estudo da Matemática. Nessa nova etapa surgem expressões matemáticas que envolvem novos símbolos e novas regras de manipulação para os símbolos já conhecidos, remetendo o aluno para outro nível de abstração, o que para muitos deles revela-se como um problema.

Vimos na seção 1.2 desse capítulo que, com desenvolvimento da Álgebra, surgiram os símbolos matemáticos que foram aperfeiçoados ao longo do tempo. Além de novos símbolos acrescentados por ocasião do ensino de Álgebra, outros já conhecidos sofrem uma mudança de significado, como por exemplo, os sinais de adição (+) e de Igualdade (=) que, como já destacamos, geram dificuldades aos alunos. Vimos também que o desenvolvimento da Álgebra se deu concomitantemente com a evolução dos métodos de resolução de equações, desta forma achamos pertinente definir esse conceito matemático e o faremos por meio da sua definição em alguns livros didáticos.

A equação geralmente é definida como uma sentença matemática com uma igualdade e que possui valores desconhecidos representados por letras e estas letras são chamadas de incógnitas (BIANCHINI, 2015). Vorderman (2015), afirma que "equação é uma demonstração matemática que contém o sinal de igual. O cálculo da equação serve para achar o valor de uma incógnita, como x ou y" (VORDERMAN, 2015, p.180); a autora ainda distingue equações simples de equações complexas. Andrini e Vasconcelos (2012, p.198) asseveram que as "Equações são igualdades em que há pelo menos uma letra representando um número desconhecido".

Segundo Garbi (1997), tanto a palavra igual quanto a palavra igualdade tem a mesma origem da palavra equação. Esse mesmo autor afirma que "qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações [...]'Equacionar um problema', mesmo entre leigos, é generalizadamente entendido como colocá-lo dentro de um mecanismo do qual ele sairá inapelavelmente resolvido" (GARBI, 1997, p. 1).

A definição de equação dada anteriormente nos demonstra que para uma sentença matemática ser uma equação, necessariamente deve apresentar dois elementos: o sinal de igual (que relaciona duas expressões) e pelo menos um valor desconhecido (a incógnita). O nosso trabalho trata de um tipo particular de equação, a equação do 1º grau e, manter a Equivalência é importante para a sua resolução.

A história nos mostra que "a resolução de equações era o tema principal da obra *Hisab al jabrw'almuqabalah* de Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi [...], que representa o marco inicial da nossa álgebra."(BERNARD; COHEN, 1995, p. 111). Cabe retomar a seção 1.2 e relembrar que nesta obra estavam presentes duas regras para se resolver equações *al-jabr e al muqabalah; "al-jabr* é a operação que soma a ambos os membros da equação termos iguais; *al muqabalah*é a operação que reduz ou elimina termos iguais de ambos os membros da igualdade"(RIBEIRO, 2007, p. 62). Essas regras podem ser chamadas nos dias de hoje de Princípios de Equivalência da Igualdade.

Provavelmente essas regras presentes no livro de al-Khowarizmi foram baseadas em um dos Elementos de Euclides, já que estes foram traduzidos para o árabe por vários intelectuais, incluindo al-Khowarizmi (EVES 2002). Em seus livros, Euclides demonstrou alguns teoremas[18] e inseriu conceitos essenciais para solucionar equações (GARBI,1997).

[18] Proposição que, para ser admitida ou se tornar evidente, necessita de demonstração.

> Logo no início dos Elementos ele explicitou algumas verdades evidentes por si mesmas, os chamados axiomas, dentre eles os seguintes:
> a) Entidades iguais a uma terceira são iguais entre si.
> b) Se a iguais somam-se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais.
> c) A parte é menor que o todo.
> d) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais.
> Aqui estava a chave para a solução de equações do 1º grau. (GARBI, 1997, p. 19)

Os axiomas b) e d),deram origem às regras para resolução de equações, citados por al-Khowarizmi em seu livro *Hisab al jabrw'almuqabalah,* título que pode ser traduzido por O Livro da Restauração e Balanceamento. (GARBI, 1997)

Hoje os livros didáticos trazem essas regras e as denominam de Princípios de Equivalência da Igualdade ou até de propriedades da Igualdade[19], denominados, respectivamente, de Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo, explicitados a seguir:

Se a = b, então a + c = b + c (Princípio Aditivo);

Se a = b, então a. c = b. c (Princípio Multiplicativo).

Trazendo esses Princípios para a resolução da equação do 1º grau, Sangiorgi (1963) os enuncia da seguinte forma:

1) Princípio Aditivo: "Somando-se ou subtraindo-se, aos membros de uma equação, uma mesma expressão, obtém-se uma equação equivalente a uma equação dada." (SANGIORGI, 1963, p. 130);
2) Princípio Multiplicativo: "Multiplicando-se ou dividindo-se os membros de uma equação por uma expressão diferente de zero e que não contenha a incógnita, obtém-se uma equação equivalente à equação dada." (SANGIORGI, 1963, p. 131)

Em termos matemáticos, a relação de igualdade é uma relação de Equivalência. Isso quer dizer que é simétrica (se $a = b$, então $b = a$, para quaisquer elementos a e b), é reflexiva ($a = a$, para todo o elemento a) e é transitiva (se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ para quaisquer elementos a, b e c). Aos poucos os alunos devem conseguir reconhecer e usar estas propriedades.

Os alunos necessitam compreender os Princípios de Equivalência da Igualdade, o aditivo e o multiplicativo para obter sucesso na resolução de uma equação do 1º grau (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Atualmente muitos livros didáticos trazem como o auxílio para o entendimento desses Princípios, a utilização da figura de uma balança de dois pratos, mas o uso desse ícone, apesar de facilitar o entendimento dessa relação de equilíbrio que há entre os membros de uma equação, deve ser utilizado como ponto de partida, sendo importante que os alunos possam realizar suas experiências, argumentar os resultados e

---

[19] No nosso trabalho utilizaremos o termo Princípio de Equivalência da Igualdade.

relacionar o que ocorre na balança com o que ocorre nas expressões algébricas. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009)

Lins e Gimenez (2006) discutem a utilização de balanças de dois pratos para ensinar resoluções de equações como sendo uma "abordagem facilitadora". Os autores apresentam pesquisas que investigaram o que ocorria quando alunos, ao estudar o mesmo conteúdo, passavam pelo ensino primeiro com atividades tidas como concretas para depois para outras tidas como formais. O resultado foi que, apesar dos alunos terem achado o material concreto útil, eles não conseguiram fazer a interlocução com o que havia feito de maneira formal. Havia, na verdade, uma lacuna, faltou um material que pudesse fazer a intermediação que fosse capaz de preencher essa lacuna.

Os autores trouxeram a experiência de uma professora que propôs aos seus alunos a seguinte equação: $3x + 10 = 100$, e questiona se é possível reescrever essa sentença como sendo $3x = 90$, e todos responderam afirmativamente. Mais do que isso, os alunos afirmaram que é possível tirar 10 de cada lado. A professora, imaginando que todos haviam entendido, e como já havia trabalhado com os números inteiros, sugere agora a equação $3x + 100 = 10$ para que eles resolvam em casa, uma vez que era semelhante à anterior, só que agora com números negativos. No dia seguinte, nenhum dos alunos conseguiu resolver a equação, alegando que aquela equação não tinha solução, pois "não é possível produzir significado para '$3x + 10 = 100$'como uma balança de dois pratos" (LINS, GIMENEZ, 2006, p.134).

Para tal professora, as equações utilizavam a mesma lógica das operações, mas não para os alunos. Na perspectiva dos alunos era impossível ter em um prato da balança apenas 10 sendo que no outro prato tinha 100 a mais de alguma coisa, significa que $3x + 10 = 100$ não faz o menor sentido para eles. A proposta dos autores é que se faça atividade contínua, possibilitando ao aluno estabelecer significado para cada tipo de expressões.

A dificuldade dos alunos em resolver equações surge, segundo Ponte, Branco e Matos (2009) das falhas que cometem ao trabalhar com expressões algébricas, pela não compreensão do significado destas expressões ou as relações da sua Equivalência. Os autores citam erros e dificuldades mais frequentes no trabalho com expressões algébricas e equações, dentre eles estão a adição de termos não semelhantes e a interpretação equivocada do sinal de igual "=".

Desse modo, daremos enfoque no sinal de igual, analisando os seus diferentes significados e sua importância no que diz respeito ao entendimento do Princípio de Equivalência da Igualdade.

O sinal de igual pode ter vários significados, como afirmam Ponte, Branco e Matos (2009), o Quadro 1.4 a seguir apresenta quatro deles:

Quadro 1.4 – Os significados do sinal de igual para Ponte, Branco e Matos (2009)

Significado	Explicação e exemplo
Operador (Resultado de uma operação)	4 + 5 = 9
Equivalência entre dois objetos	8 + 4 = 7 + 5
Equivalência entre duas expressões	Em equações como 8 + x = 12
Para definir uma relação funcional	Em situações como y = x + 2

Fonte: Elaborado e adaptado pela pesquisadora a partir de Ponte, Branco e Matos (2009, p. 19-23)

Kieran (1981) e Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que o sinal de igual com o significado de operador é tido como sequencial e direcional (da esquerda para a direita), sendo trabalhado, predominantemente, nos primeiros anos de escolaridade. Dessa forma, é comum que os alunos o compreendam apenas como o resultado de uma operação. Quanto ao significado de Equivalência entre dois objetos, os autores destacam que estes podem ser números, expressões numéricas ou expressões algébricas.

Os autores ainda asseveram que

> [...] o sinal de igual como resultado de uma operação é largamente utilizado [...]. No entanto, é fundamental que não se perca o sentido mais geral desse sinal como estabelecendo uma equivalência entre duas expressões numéricas. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.20)

Com relação ao significado do sinal de igual como Equivalência entre duas expressões, identifica um questionamento, se existe um valor possível para a incógnita, que satisfaça a igualdade. Por fim, mas não menos importante, os autores trazem o significado do sinal de igual para definir uma relação funcional. Para esse significado, o sinal de igual aponta para uma relação de dependência entre duas variáveis.

O conhecimento da igualdade, ainda de acordo com esses autores, tem um papel muito importante na Matemática, assim como o seu significado como Equivalência é mais próximo do que de identidade.

> Na identidade matemática existe uma coincidência total entre dois objectos – um objecto só é idêntico a si mesmo. Em contrapartida, a igualdade ou equivalência matemática é sempre relativa apenas a uma certa propriedade.
> Em termos matemáticos, a relação de igualdade é uma relação de equivalência. Isso quer dizer que é simétrica (se $a = b$ então $b = a$, para quaisquer elementos a e b), é

> reflexiva ($a = a$, para todo o elemento a) e é transitiva (se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ para quaisquer elementos a, b e c). (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.19).

Para ilustrarmos, a propriedade simétrica, poderia supor a seguinte expressão numérica "4 + 2 = 6", sendo que o termo da direita (6) e os da esquerda (4 + 2) são distintos e, portanto, apesar de não existir identidade entre os termos, eles são equivalentes uma vez que representam o mesmo número. Entendemos que a propriedade reflexiva se auto ilustra. E a propriedade transitiva, pode ser apresentada da seguinte forma: Temos que "2 + 3 = 5" e "5 = 4 + 1", sendo assim, podemos afirmar que "2 + 3 = 4 + 1", pois representam o mesmo número, o 5.

Nos Anos Iniciais, do Ensino Fundamental, o sinal de igualdade, como resultado de uma operação, tem essa conotação e é muito forte, tanto que esses mesmos autores recomendam que os professores trabalhem de forma menos habitual, como $c = a + b$, em que o resultado da operação fique do lado esquerdo da igualdade. É importante que o aluno perceba a relação de Equivalência que há entre o que está antes e o que está depois do sinal da igualdade da expressão.

Para compreendermos o Princípio de Equivalência da Igualdade, trouxemos para o debate duas perspectivas: do ponto de vista das pesquisas e do ponto de vista da escola.

Trouxemos alguns pesquisadores para o primeiro ponto de vista que está relacionado às pesquisas. Para Kieran (2006) os alunos enfrentam uma descontinuidade entre Aritmética e a Álgebra, no que diz respeito às representações e métodos formais de resolução de problemas, que até então poderiam ser resolvidos intuitivamente. Para a autora, ao se deparar com um problema aritmético, normalmente o aluno pensa nas operações necessárias que representem as relações entre seus dados, para assim resolvê-lo. Isso significa que o pensamento aritmético está relacionado ao cálculo, à procura do resultado, o que não o impede de utilizar outras estratégias para resolvê-los. Os resultados encontrados nos estudos feitos por Merlini, Magina e Santos (2014) mostram que, ao resolver situações relacionadas à estrutura multiplicativa, a maioria dos alunos dos Anos Iniciais, em especial 3º e 5º anos, fazem uso tanto de estratégias numéricas quanto de pictóricas. Além disso, destacam que em ambas as estratégias eles se utilizam de operações da estrutura aditiva para solucioná-las.

Em contrapartida, um problema algébrico requer que o aluno raciocine não somente na criação de uma equação, mas que a resolva levando em consideração procedimentos que possam gerar sucessivas equações equivalentes para só então encontrar a solução.

Diferentemente do raciocínio aritmético, que está atrelado à concepção processual, o raciocínio algébrico está relacionado à concepção estrutural. Cabe salientar que um aspecto relevante da passagem entre a concepção processual para a estrutural está intrinsecamente relacionado com o entendimento do sinal de igual.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), do ponto de vista processual, o sinal de igual indica a realização de uma operação, assumindo o papel de operador direcional. Já do ponto de vista estrutural, esse mesmo sinal remete a uma relação de Equivalência. Retomando o exemplo 4 + 2 = 6, o aluno entende e fala "quatro mais dois dá seis", sendo que essa é principal maneira que se trabalha nos Anos Iniciais; realiza-se a operação da esquerda para direita, sendo o sinal de igual como separador entre a operação e o resultado obtido.

O conceito de Igualdade é importante para o desenvolvimento algébrico e entender o sinal de igual como Equivalência, "é fundamental para o desenvolvimento do conceito de equação, conceito central da álgebra no Ensino Fundamental II" (RIBEIRO e SILVA, 2014, p. 80). Ribeiro e Silva (2014) identificaram, em sua pesquisa, que os livros, a partir do 4º ano, citam atividades com a ideia de número desconhecido, que podem ser representados por um quadrado vazio. Apesar de essas atividades terem sido desenvolvidas com o objetivo de apenas treinar conhecimentos operacionais, notaram que esse tipo de atividade, seria o passo número um para o futuro aprendizado do conceito de incógnita e de equação.

Vergnaud (1986), afirma que uma das identificações através da qual a Álgebra ganha força é a "Identificação de diferentes significações do sinal de igualdade: é o mesmo que, dá como resultado, é equivalente a." (VERGNAUD, 1986, p.87). Percebemos que o autor estabelece três significados para a igualdade, que pode ser visto como uma identidade (é o mesmo que), isto dá (resultado) e, como uma relação de igualdade. Bandarra (2011) reduz para duas, as formas de representações relacionadas ao significado do sinal da igualdade: a *operacional*, quando o aluno utiliza o sinal para dar a resposta da operação, e a *relacional,* que se remete a noção de Equivalência desse sinal. Contudo, segundo Civinski (2015, p.42), "muitos alunos não conseguem, sozinhos, perceber a diferença entre os métodos operacional e relacional, então a noção de igualdade deve ser desenvolvida e associada com a ideia de Equivalência".

Estudos realizados por Falkner, Levi e Carpenter (1999, apud PONTE, BRANCO, MATOS, 2009) apontam que alunos do 1º ao 6º ano tendem a realizar suas resoluções na perspectiva processual. Numa questão de múltipla escolha, sendo que as alternativas eram 7,12 e 17, os alunos foram questionados sobre que número deveria ser colocado para que a expressão 8 + 4 = ___ + 5. Embora a alternativa correta fosse 7, a maioria dos alunos colocou como resposta a alternativa 12. De acordo com esses pesquisadores, esse resultado indica que o que prevalece nesses alunos é a concepção processual do significado do sinal de igual.

Nessa direção, Schliemann *et al.* (2013) afirmam que a interpretação do sinal de igual tem, diretamente, influência na aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental e Médio com a Álgebra. Contudo, a proposta sugerida está na preocupação de fazer um trabalho com equações, sem que os alunos tenham uma única visão, associando a uma variável apenas um valor, uma vez que esses pesquisadores entendem que para uma abordagem inicial para o ensino da equação, deve ser a abordagem funcional.

Finalmente, apresentamos o segundo ponto de vista, o Princípio de Equivalência na escola, trazendo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) que é o documento que atualmente direciona o ensino básico no Brasil e, está apresentada na unidade temática Álgebra desde o início do Ensino Fundamental. A unidade temática Álgebra presente na BNCC tem por finalidade

> [...] o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos [...] Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e **propriedades da igualdade**. (grifo nosso) (BRASIL, 2017, p. 268)

Assim, como podemos perceber esse documento determina o desenvolvimento de aspectos da Álgebra desde o 1º ano, perpassando por todos os Anos Iniciais. Quanto ao termo igualdade esse aparece como Objeto de Conhecimento a partir do 3º ano como Relação de igualdade; no 4º ano como Propriedades da igualdade; e no 5º ano como Propriedades da igualdade e Noção de Equivalência (BRASIL, 2017). Esse propósito da BNCC (BRASIL, 2017) vem ao encontro dos resultados de pesquisa nacionais e internacionais que tem acenando positivamente para que, de fato, o aluno seja possibilitado de desenvolver o raciocínio algébrico. Isso posto, passaremos agora para os procedimentos metodológicos desse estudo.

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O objetivo deste capítulo é descrever a metodologia adotada para a realização da nossa pesquisa. O presente estudo tem caráter diagnóstico, pois, segundo Rudio (2001), uma pesquisa diagnóstica é uma pesquisa descritiva na qual o pesquisador busca conhecer e interpretar a realidade, contudo sem modificá-la. Ela apresenta dupla abordagem, qualitativa e quantitativa, por entendermos que elas se complementam. Optamos por unir as modalidades qualitativas e quantitativas por concordarmos com a ideia de Goldemberg (2004), o qual afirma que:

> É o conjunto de diferentes pontos de vista, e diferentes maneiras de coletar e analisar os dados (qualitativa e quantitativamente), que permite uma ideia mais ampla e inteligível da complexidade de um problema (GOLDEMBERG, 2004. p. 63).

Nessa direção, para alcançar nosso objetivo, **que é investigar o desempenho e as estratégias de resolução que alunos do 5º ano utilizam frente a problemas que abordam equações de 1º grau, no que diz respeito a Equivalência,** optamos por uma metodologia descritiva, já que esta, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 70), visa "descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema", assim os dados obtidos podem ser analisados de forma qualitativa, onde podemos relatar o problema de forma verbal, bem como podem ser analisados de forma quantitativa relatando o fenômeno na forma de números.

Como se trata de um estudo diagnóstico, para que pudéssemos compreender melhor o raciocínio dos alunos, pedimos que, ao responder ao instrumento (detalhado na seção 2.2), eles rascunhassem suas respostas, afim de que analisássemos suas estratégias, e para que compreendêssemos o raciocínio utilizado para resolver cada problema. A partir das respostas registradas nos protocolos, escolhemos parte da amostra para realizarmos uma entrevista semiestruturada. O critério de escolha dessa amostra para entrevista estava vinculado àquelas respostas que poderiam nos favorecer o entendimento do raciocínio, que somente o registro no papel não deu conta de explicitá-lo. Nessa entrevista, de acordo com Delval (2002), são feitos alguns questionamentos básicos comuns para todos os alunos dessa amostra e, de acordo com a reposta de cada um, pudemos ampliar e complementar, retornando ao tema estabelecido inicialmente.

O roteiro da entrevista semiestruturada iniciou-se com os seguintes questionamentos: (a) Na questão 1 você respondeu assim (nesse momento fizemos a leitura da questão e da resposta dada pelo aluno). Como é que você pensou para dar essa resposta? (b) Se você fosse responder agora essa questão você trocaria sua resposta? (c) Como você responderia então (caso a resposta da (b) fosse positiva)? (d) Vamos imaginar que seu colega não compreendeu essa mesma questão, como você explicaria para que ele pudesse também resolvê-la?

2.1 Universo de Estudo

O nosso objetivo de estudo é **investigar o desempenho e as estratégias de resolução que alunos do 5º ano utilizam frente a problemas que abordam equações de 1º grau, no que diz respeito à Equivalência.**

Para alcançarmos esse objetivo, escolhemos realizá-lo em duas escolas públicas do Sul da Bahia. Optamos por realizá-lo em duas unidades escolares para que fosse atingido um público alvo satisfatório, já que a quantidade de alunos que frequentavam regularmente esses anos escolares, nas escolas citadas, era reduzida.

O trabalho foi realizado com seis turmas de 5º ano do Ensino Fundamental, quatro do turno matutino e duas do turno vespertino, perfazendo um total de 99 alunos de duas escolas públicas da rede municipal do sul da Bahia, sendo 66 alunos da escola que denominamos por "1" e 33 alunos da escola que denominamos por "2". Optamos por essas duas escolas devido à facilidade de acesso da pesquisadora.

As escolas "1" e "2" funcionam em dois turnos, matutino e vespertino, e trabalham somente com turmas dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A escola "1" trabalha com turmas do 1º ao 5º ano, sendo um total de 580 alunos matriculados. São quatro turmas do 1º ano, quatro turmas do 2º ano, seis turmas do 3º ano, quatro turmas do 4º ano e quatro turmas do 5º ano. A estrutura física dessa unidade escolar é admirável. Salas amplas, bem iluminadas e bem ventiladas, pátio amplo, além de contar com equipe pedagógica realmente ativa com dois supervisores pedagógicos e dois orientadores.

A escola "2" trabalha com turmas do 1º ao 5º ano, sendo um total de 350 alunos matriculados. São duas turmas do 1º ano, duas turmas do 2º ano, três turmas do 3º ano, três turmas do 4º ano e duas turmas do 5º ano. É uma escola conveniada, o prédio pertence a uma igreja evangélica e é alugado ao município. As salas são amplas, mas não tão bem ventiladas e iluminadas, além disso, não dispõe de muito espaço para recreação.

Entramos em contato com a direção das escolas, que se mostraram solícitas com o apoio e autorização para a pesquisa. Esse primeiro contato se deu, nas duas escolas, por telefone e, em seguida, encaminhamos o projeto de pesquisa por e-mail para as coordenadoras das escolas. Assim que elas analisaram a proposta, marcamos um encontro, com cada uma delas, para as devidas explicações de como seria realizada a pesquisa. Nesses encontros, explicitamos nosso objetivo, além de outros esclarecimentos, e a direção assinou o Termo de Anuência. Foi marcado um momento para que pudéssemos confirmar o dia e horário mais adequado para a realização do diagnóstico.

Isso feito solicitamos aos responsáveis pelos alunos, que assinassem o Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (TCLE), para que os seus pais tivessem ciência e aprovassem a participação ou não dos respectivos filhos como colaboradores da pesquisa. Paralelamente, pedimos aos alunos que assinassem o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), só então, mediante esses documentos em mãos, demos início à nossa pesquisa.

Cabe ressaltar, que as turmas da escola "1" estavam sem professor de Matemática há dois meses, pois o mesmo se encontrava de licença médica, então não tivemos a oportunidade de conhecê-lo. As turmas da escola "2" estavam tendo aula normalmente, e tivemos a oportunidade de contar com a colaboração do professor para a aplicação do instrumento de pesquisa, e este, por sinal, demonstrou bastante interesse pelo tema e pediu textos que o fizessem refletir a sua prática, além de solicitar um retorno da conclusão da pesquisa.

2.2 Instrumento Diagnóstico

O Instrumento Diagnóstico aplicado foi composto por nove questões, sendo quatro delas icônicas, quatro numéricas e a última delas (Q9), que solicita ao aluno que escreva uma expressão matemática a partir da primeira questão (Q1). Essas questões foram elaboradas de forma que pudéssemos fazer um comparativo entre as questões icônicas e as numéricas, como mostra o quadro 2.1. Contudo, cabe ressaltar que a análise da Q9 será feita a parte por ser uma questão aberta no sentido de não ter um único tipo de resposta. Desse modo, o aluno poderá respondê-la, por exemplo, de forma simbólica ou na linguagem natural.

Quadro 2.1- Comparativo entre os tipos dos itens das questões

QUESTÕES	
Icônica	Numérica
-	Q8a
Q1a	Q8b
-	Q8c
Q1b	Q8d
Q3	Q4
Q6	Q5
Q7	Q2

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Ressaltamos que a disposição dos itens de questões no quadro foi proposital, pois ao elaborarmos o instrumento idealizamos questões de tipo icônico e numérico, algumas correlacionadas. Essa organização será levada em consideração ao analisarmos esses itens correlacionados, observando a potencialidade do ícone para o aluno ao resolver a questão. Tomamos o exemplo do item Q8b, numérico, que está relacionado ao item Q1a, icônico e seus desempenhos e estratégias de resolução serão analisados comparativamente.

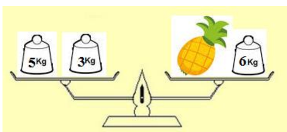
Estão listadas, a seguir, as nove questões, sendo as oito primeiras duas a duas relacionadas, com as devidas intenções do que se pretenderam analisar, além de descrever algumas possíveis soluções e respostas dos alunos:

Questão 1 (Q1) – icônica e Questão 8 (Q8) – numérica

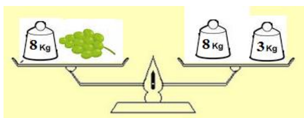
Figura 2.1- Questão 1 do instrumento de pesquisa

Q1: Sabendo que as balanças seguintes estão equilibradas, ou seja, o peso no prato da direita é o mesmo peso no prato da esquerda, descubra qual o peso de cada uma das frutas:

a)



b)

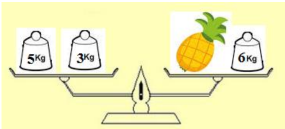


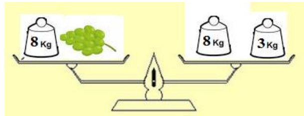
Fonte: criada pela autora

A partir das respostas dessa questão, pretende-se analisar o desempenho no que diz respeito ao ícone e o entendimento que o aluno tem da relação de igualdade entre o peso dos pratos, tendo o auxílio do instrumento do ícone da balança como "abordagem facilitadora" (LINS; GIMENEZ, 2006).

Possível solução para a Q1:

Figura 2.2- Questão 1 do instrumento de pesquisa com possível solução

<table>
<tr><td colspan="2">Q1: Sabendo que as balanças seguintes estão equilibradas, ou seja, o peso no prato da direita é o mesmo peso no prato da esquerda, descubra qual o peso de cada uma das frutas:</td></tr>
<tr><td>a)


Possível resposta correta:
Chamando o abacaxi de “a”, temos:
$5 + 3 = a + 6$
$8 = a + 6$
$8 - 6 = a + 6 - 6$
$2 = a$
a = 2, sendo assim, temos que o abacaxi pesa 2kg.</td>
<td>b)


Possível resposta correta:
Denominando o cacho de uvas de “u”, temos:
$8 + u = 8 + 3$
$8 + u - 8 = 8 + 3 - 8$
u = 3, sendo assim, temos que o cacho de uvas pesa 3 kg.</td></tr>
</table>

Fonte: criada pela autora

Possíveis respostas dos alunos para a Q1

No item Q1a pode se repetir alguma quantidade já disposta nos pratos da balança ou, ainda, a soma de todas as quantidades presentes nos pratos da balança. O mesmo procedimento cabe ao item Q1b, contudo se o aluno colocar a quantidade 3, não saberemos, somente pelo registro, se ele simplesmente repetiu o número presente ou compreendeu a relação. Por outro lado, nesse item ele também poderá colocar como resposta a soma de todas as quantidades dispostas nos dois pratos.

Ressaltamos que o item Q1a está relacionado com o item Q8b, e o item Q1b está relacionado com o item Q8d, em que os quadradinhos assumem o papel das frutas. Tomamos, inclusive, o cuidado de colocar os quadradinhos na mesma posição em que se encontravam as frutas na balança, para analisar se o ícone da balança ajudaria ou não na resolução da questão.

Figura 2.3- Questão 8 do instrumento de pesquisa

Q8: Complete os quadradinhos de forma que as igualdades sejam verdadeiras:

a) $4 + 5 = \boxed{}$

b) $8 + 4 = \boxed{} + 5$

c) $\boxed{} = 9+5$

d) $7 + \boxed{} = 6 + 4$

Fonte: Criada pela autora

Resposta correta para a Q8:

Q8: Complete os quadradinhos de forma que as igualdades sejam verdadeiras:

a) $4 + 5 = \boxed{9}$

b) $8 + 4 = \boxed{7} + 5$

c) $\boxed{14} = 9+5$

d) $7 + \boxed{3} = 6 + 4$

Possíveis respostas dos alunos para a Q8 item a:

- O aluno pode somar o 4+5 e dar a resposta 9; ou
- O aluno pode igualar a 5, não considerando a soma, e considerando a igualdade apenas de acordo com a propriedade reflexiva;

Possíveis respostas dos alunos para a Q8 item b:

- O aluno pode somar todos os números da questão, completando com o número 17, ignorando a Equivalência;
- O aluno pode somar 4 + 8 e dá o resultado 12, ignorando a Equivalência;
- O aluno pode entender a relação de Equivalência e colocar como resposta o número 7.
- O aluno pode escrever como resultado o número 4, entendendo que um número só pode ser igual a ele mesmo;

Possíveis respostas dos alunos para a Q8 item c:

- O aluno pode dar como resposta o 9;
- O aluno pode escrever o número 14 como resposta.

Possíveis respostas dos alunos para a Q8 item d:

- O aluno pode dar como resposta 10;
- O aluno pode dar como resposta 6;
- O aluno pode dar como resposta 3;
- O aluno pode dar como resposta 17.

Ressaltamos que o item Q1a está relacionado com o item Q8b, e o item Q1b está relacionado com o item Q8d, onde os quadradinhos assumem o papel das frutas. Tomamos, inclusive, o cuidado de colocar os quadradinhos na mesma posição em que se encontravam as frutas na balança, para analisar se há diferença no desempenho dos alunos no que se refere às questões icônicas e numéricas observando se o ícone da balança ajudaria ou não na resolução da questão.

Questão 2 (Q2) – numérica e Questão 7 (Q7) – icônica

A partir das respostas dessas questões pretende-se analisar as estratégias utilizadas pelos alunos, a partir de situações que envolvem uma relação de Equivalência entre dois membros de uma Igualdade.

Figura 2.4 - Questão 2 do instrumento de pesquisa

Q2: Uma mosca tem 6 pernas e uma aranha tem 8 pernas. Juntas, 3 moscas e 2 aranhas tem tantas pernas quanto 9 galinhas e quantos gatos?

Fonte: (Projeto Canguru, 2017, Categoria: Benjamim)

Solução correta para a Q2:

Existe uma relação de Equivalência, sendo que a equação é a seguinte:
Total de pernas de (3 moscas + 2 aranhas) = total de pernas de (9 galinhas + x gatos).
Como cada mosca tem 6 pernas, cada aranha tem 8 pernas, cada galinha tem 2 pernas e cada gato tem 4 pernas, o aluno substituirá os valores e a equação ficará escrita da seguinte forma:

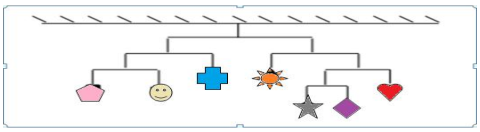
(3 × 6) + (2 × 8) = (9 × 2) + (x × 4), resolvendo as multiplicações, teremos:
18 + 16 = 18 + (x × 4)
Nessa equação temos a propriedade reflexiva da igualdade, que 16 = (x × 4)
Então, a resposta é 4 gatos uma vez que o número que 4 multiplicado por 4 é que resulta em 16.

Possíveis respostas dos alunos para a Q2:

- Os alunos podem calcular a quantidade total de pernas de três moscas e duas aranhas, obtendo um total de 34 pernas, depois calcular o total de pernas de 9 galinhas, obtendo um total de 18 pernas e calcular 34 – 18 para obter o total de pernas dos gatos, 16 pernas, assim veriam quantos gatos teriam um total de 16 pernas e concluiriam que só poderiam ser 4 gatos;
- Os alunos podem, simplesmente, somar todos os números envolvidos no problema e dar como resposta 28 gatos;
- Os alunos podem pensar que existe uma relação funcional entre o número de moscas e aranhas e o número de galinhas e gatos. Afirmando assim que como eram 3 moscas e agora são 9 galinhas (3 × 3), então já que eram 2 aranhas, agora seriam 6 gatos (2 × 3).

Figura 2.5- Questão 7 do instrumento de pesquisa

Q7: Abaixo temos representado um objeto que está em equilíbrio. Sabendo que o peso dos fios e das barras deve ser desconsiderado, e que o objeto pesa no total 160 gramas, determine o peso da estrela cinza. Justifique sua resposta.

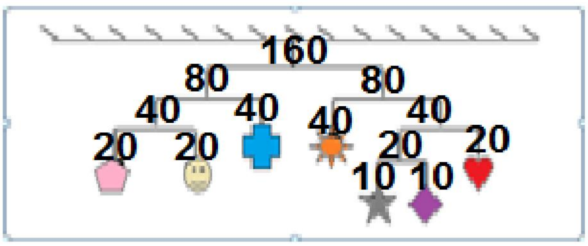


Fonte: Adaptada de (CIVINSKI, 2015, p.69)

Solução correta para a Q7:

O peso da estrela cinza será 10 gramas, pois o objeto está em equilíbrio em todas as suas etapas. Logo, podemos dividir os pesos da seguinte forma:

Figura 2.6 - Solução da Questão 7 do instrumento de pesquisa



Fonte:Adaptada de (CIVINSKI, 2015, p.69)

Sendo assim, tanto a estrela cinza como o losango pesam 10 gramas cada.

Possíveis respostas dos alunos para a Q7:

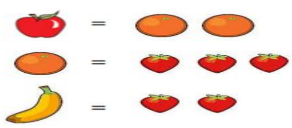
- O aluno pode simplesmente dar um valor aleatório para o peso da estrela, sem levar em consideração o equilíbrio do objeto;
- O aluno pode dividir os 160 gramas por 7, já que possui 7 figuras distintas penduradas no objeto, dando para a estrela cinza uma valor aproximado entre 22 gramas e 23 gramas.

Questão 3 (Q3) – icônica e Questão 4 (Q4) – numérica

Pretendemos analisar se o aluno compreende a relação de transitividade entre o peso das frutas (Q3) e entre o peso dos animais (Q4) e, novamente, que estratégias eles utilizam para resolver o problema.

Figura 2.7 - Questão 3 do instrumento de pesquisa

Q3: Num determinado jogo é possível fazer trocas de frutas. Sara tem 3 maçãs. Quantas bananas terá Sara, quando trocar todas as suas maçãs por bananas? Justifique sua resposta.



Fonte: (CIVINSKI, 2015, p. 73-74).

Solução correta para a Q3

Primeiro fazer a equivalência entre as maçãs e as laranjas da seguinte forma:
Se 1 maçã é igual a 2 laranjas, então 3 maçãs que Sara tem, equivalem a 6 laranjas (2 x 3);
Depois, fazer a equivalência entre as laranjas e os morangos, fazendo:
Se uma laranja é igual a 3 morangos então, 6 laranjas equivalem a 18 morangos(6 x 3);
E por último, fazer a equivalência entre os morangos e as bananas, fazendo:
Se uma banana é igual a 2 morangos, logo podemos também dizer que dois morangos equivalem a 1 banana. Dessa forma, como temos 18 morangos podemos trocar por 9 bananas (18÷2).

Possíveis respostas dos alunos para a Q3:

- O aluno pode escrever que não é possível trocar maçãs por bananas, ignorando a transitividade;
- O aluno pode dar como resposta 9 bananas, mostrando que entende a transitividade ou;
- O aluno pode olhar a figura e sugerir que é só uma banana, demonstrando não compreender o problema.

Figura 2.8 - Questão 4 do instrumento de pesquisa

Q4: Utilize as informações seguintes e complete a sentença: "um leão pesa o mesmo que ______cachorros." Um leão pesa o mesmo que dois jacarés; Um jacaré pesa o mesmo que dois cachorros.

Fonte: Adaptada de (CIVINSKI, 2015, p. 72)

Pretendemos analisar se o aluno compreende a relação de transitividade entre o peso dos animais (Q4), e que estratégias eles utilizam para resolver o problema.

Solução correta para a Q4

Nessa questão é possível trabalhar a propriedade transitiva da Equivalência.
Se um leão é igual a dois jacarés e um jacaré é igual a dois cachorros, temos:
1 leão = 2 jacarés = 1 jacaré + 1 jacaré = 2 cachorros + 2 cachorros = 4 cachorros. Sendo assim, temos que 1 leão = 4 cachorros.

Possíveis respostas dos alunos para a Q4:

- O aluno pode observar as informações e dizer que a resposta é dois cachorros, demonstrando entender, de forma incorreta, que a relação é sempre de um para dois;
- O aluno pode compreender a relação de Equivalência, entender o que foi proposto e utilizando a propriedade da transitividade, responder que são quatro cachorros.

Questão 5 (Q5) – numérica e Questão 6 (Q6) –icônica

Figura 2.9 - Questão 5 do instrumento de pesquisa

Q5: Diego e Marcus têm a mesma quantidade de dinheiro. Diego tem um valor dentro da carteira e mais R$ 3,00 na mão. Marcus tem 2 vezes mais o valor que Diego tem dentro da carteira. Quanto Diego tem na sua carteira?

Fonte: Porto 2018.

A partir das respostas dessas questões, pretende-se analisar as estratégias utilizadas na compreensão da igualdade como uma Equivalência entre duas expressões (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Solução correta para a Q5:

Há uma Equivalência entre o valor que Diego tem e o valor que Marcus tem, entendendo que os dois têm a mesma quantia. A partir daí montar uma equação:
Valor na carteira + 3 = 2 × valor na carteira, chamando o valor na carteira de x temos:
$x + 3 = 2 \times x$*, sabendo que* $2 \times x = x + x$ *temos:*
$x + 3 = x + x$*, utilizando a propriedade reflexiva da Equivalência, temos:*
$3 = x$*, e utilizando a propriedade da simetria da Equivalência temos:*
$x = 3$.
Ou seja, Diego tem 3 reais dentro da carteira.

Possíveis respostas dos alunos para a Q5:

- O aluno pode resolver a questão por tentativa e erro. Exemplo pode ir testando:

Se Diego tiver 1 real na carteira ele terá um total de 4 reais e Marcus terá 2 reais ($4 \neq 2$)

Se Diego tiver 2 reais na carteira ele terá um total de 5 reais e Marcus terá 4 reais ($5 \neq 4$)

Se Diego tiver 3 reais na carteira ele terá um total de 6 reais e Marcus terá 6 reais ($6 = 6$), assim a resposta correta é: Diego tem 3 reais em sua carteira.

- O aluno pode montar uma igualdade do tipo:

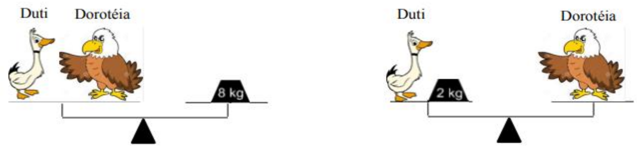
Valor na carteira de Diego + 3 = 2 × valor na carteira de Diego

Valor na carteira de Diego + 3 = valor na carteira de Diego + valor na carteira de Diego, assim o valor na carteira de Diego só poderá ser 3.

- O aluno poderá simplesmente somar os números envolvidos no problema e dar como resultado o número 5.

Figura 2.10 - Questão 6 do instrumento de pesquisa

Q6: As balanças abaixo estão equilibradas, sendo assim, determine o peso do pato Duti e da águia Dorotéia.



Fonte: (CIVINSKI, 2015, p. 74)

Solução correta para a Q6

Há uma relação entre as duas balanças, sendo que na balança da direita,a Dorotéia pesa o mesmo que o Duti mais dois quilos. Sendo assim, é possível retornar à balança da esquerda e substituir a Dorotéia pelo Duti mais dois quilos, tendo assim, que dois Duti mais dois quilos é equivalente a 8 quilos, Logo em seguida, diminuir dois quilos em ambos os pratos da balança (Princípio Aditivo de Equivalência), e chegar à conclusão que dois patos Duti equivalem a seis quilos, ou seja, cada Duti pesa 3 quilos. Por fim, como a Dorotéia tem o peso do Duti mais 2 quilos, conclui-se que a Dorotéia é igual a 3 + 2 que é igual a 5 quilos.

Possíveis respostas dos alunos para a Q6:

- O aluno pode considerar só a balança da esquerda e procurar valores que somados deem 8, dando nesse caso, uma das respostas seguintes:

Duti 1 kg, e Dorotéia 7 kg;

Duti 2 kg, e Dorotéia 6 kg;

Duti 3 kg, e Dorotéia 5 kg;

Duti 4 kg, e Dorotéia 4 kg;

Duti 5 kg, e Dorotéia 3 kg;

Duti 6 kg, e Dorotéia 2 kg;

Duti 7 kg, e Dorotéia 1 kg;

- O aluno pode levar em consideração somente a balança da direita, dando, nesse caso, uma das respostas seguintes:

O pato Duti pesa 2 kg, pois é o peso que se encontra ao lado dele na balança; E a Dorotéia pesa 4 kg;

Ambos os animais pesam 2 kg, pois é o número que está na figura;

- O aluno pode observar as figuras e dizer que o Duti pesa 2 kg, e a Dorotéia pesa 8 kg, pois são os dois números que aparecem nas balanças;
- O aluno pode entender a relação entre as duas balanças, utilizar a propriedade transitiva da Equivalência e, responder de forma correta que o Duti pesa 3 kg, e a Dorotéia pesa 5 kg.

Questão 9 (Q9)

Figura 2.11- Questão 9 do instrumento de pesquisa

Q9: Escreva uma expressão matemática que possa representar o equilíbrio das balanças da Q1.

Fonte: Criada pela pesquisadora

A questão nove, enunciada a seguir, foi criada pela pesquisadora, no intuito de verificar se o aluno conseguiria escrever uma equação que representasse o ícone da balança.

Solução correta para a Q9:

Escrever as igualdades:
1a) 5 + 3 = abacaxi + 6
1b) 8 + uva = 8 + 3

Possíveis respostas dos alunos para a Q9:

- O aluno pode, no item a, somar os pesos do prato esquerdo da balança e escrever a expressão 8 = 8; e no item b, pode somar os pesos do prato direito e escrever a expressão 11 = 11
- O aluno poderia tomar como exemplo a questão 8, escrevendo no item a, a expressão: 5 + 3 = □ + 6; e no item b escreveria a expressão 8 + □ = 8 + 3

2.3 Aplicação do Instrumento Diagnóstico

A pesquisa se deu em duas escolas públicas do Sul da Bahia, com quatro turmas do 5º ano, do Ensino Fundamental, perfazendo um total de 99 alunos, com idade variando de 9 a 14 anos. O estudo diagnóstico foi composto por nove questões, algumas criadas pelas pesquisadoras, outras extraídas ou adaptadas de pesquisas correlatas. Para o desenvolvimento desse estudo, os alunos responderam no seu espaço escolar nove questões impressas, que foram entregues aos mesmos na forma de um caderno de atividades.

Os alunos responderam ao instrumento individualmente. Na ocasião, lemos em voz alta, por duas vezes, cada questão do teste, e eles respondiam em seguida. Assim que a maioria respondia a questão, passávamos para a leitura da próxima. Ao responder o questionário, às vezes eles nos faziam algumas perguntas referentes às suas resoluções, se estavam corretas ou não, que não eram respondidas. Somente respondíamos quando alguma palavra ou expressão não estava sendo compreendida. Eles levaram, em média, 100 minutos para responder todas as nove questões.

Após a aplicação do Instrumento Diagnóstico, analisamos todos os protocolos. Como se tratou de um estudo diagnóstico, para que pudéssemos compreender melhor o raciocínio desses alunos, escolhemos, a partir das respostas registradas nos protocolos, parte da amostra para realizarmos uma entrevista semiestruturada. O critério de escolha dessa amostra para entrevista não foi aleatória, mas esteve vinculado àquelas respostas que poderiam nos favorecer o entendimento do raciocínio, que somente o registro no papel não daria conta de explicitá-lo. Nessa entrevista, de acordo com Delval (2002), são feitos alguns questionamentos básicos comuns para todos os alunos dessa amostra e, de acordo com a resposta de cada um, pudemos ampliar e complementar, retornando ao tema estabelecido inicialmente.

O roteiro da entrevista semiestruturada iniciou-se com os seguintes questionamentos: (a) Na questão 1 você respondeu assim (nesse momento faremos a leitura da questão e da resposta dada pelo aluno). Como é que você pensou para dar essa resposta? (b) Se você fosse responder agora essa questão você trocaria sua resposta? (c) Como você responderia então (caso a resposta da (b) fosse positiva)? (d) Vamos imaginar que seu colega não compreendeu essa mesma questão, como você explicaria para que ele pudesse também resolvê-la?

2.4 Procedimentos da análise dos dados

Quanto à análise dos dados, esta foi realizada sob dois pontos de vista: quantitativo e qualitativo. No que se refere ao ponto de vista quantitativo, o foco foi analisar o desempenho dos alunos sob alguns aspectos. Primeiramente de um modo geral, apresentando a porcentagem de acerto de todas as questões juntas, para, em seguida, investigar se houve diferença no desempenho dos alunos, no que se refere às questões icônicas e numéricas.

Todas essas investigações foram comprovadas estatisticamente, de acordo com os testes estatísticos convenientes.

Por outro lado, do ponto de vista qualitativo, a partir das respostas registradas nos protocolos e das respostas dadas pelos alunos, oriundas da entrevista semiestruturada com parte de nossa amostra, elas foram classificadas em nove categorias.

CAPÍTULO 3

A ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo direcionamos à análise dos dados obtidos na pesquisa, sob dois pontos de vista: quantitativo e qualitativo. Do ponto de vista quantitativo, o foco foi analisar o desempenho dos alunos sob alguns aspectos, primeiramente, de um modo geral, apresentando a porcentagem de acerto de todas as questões juntas. Em seguida, fizemos algumas comparações entre os desempenhos dos alunos nas questões icônicas versus numéricas. Determinadas análises foram comprovadas estatisticamente, de acordo com os testes estatísticos convenientes.

A análise qualitativa foi realizada a partir das estratégias de resolução registradas nos protocolos e das respostas dadas pelos alunos, oriundas de entrevista semiestruturada com parte de nossa amostra, as quais classificamos em nove categorias de análise.

3.1Análise Quantitativa

Iniciamos a análise quantitativa destacando que foram 99 alunos que responderam as nove questões, que formam 13 itens de questões no total, totalizando 1287 possíveis respostas. Cabe relembrar que esses 99 alunos foram de duas escolas da rede municipal de duas cidades do Sul da Bahia, as quais intitulamos como sendo Escola 1 com 66 alunos e Escola 2 com 33 alunos.

3.1.1 Desempenho Escola 1 e Escola 2

Por termos duas escolas distintas fizeram-se necessário realizarmos um teste estatístico para verificarmos se houve diferença significativa entre os acertos das duas escolas envolvidas. Como o instrumento estava formado por 9 questões, sendo que a Questão 1 (Q1) tinha dois itens (Q1a e Q1b) e a Questão 8 (Q8), 4 itens (Q8a, Q8b, Q8c e Q8d), totalizando ao todo 13 itens, as respostas aos itens foram categorizadas em certas e não certas (erradas e em branco), e para avaliar o desempenho foi criada a variável número de itens respondidos corretamente, variando de 0 a 13.

Para analisar se havia diferença no desempenho por escolas, utilizamos o teste *t-student,* e para analisar o nível de complexidade das questões, utilizamos o teste não paramétrico de McNemar. Utilizamos o nível de significância de 5%.

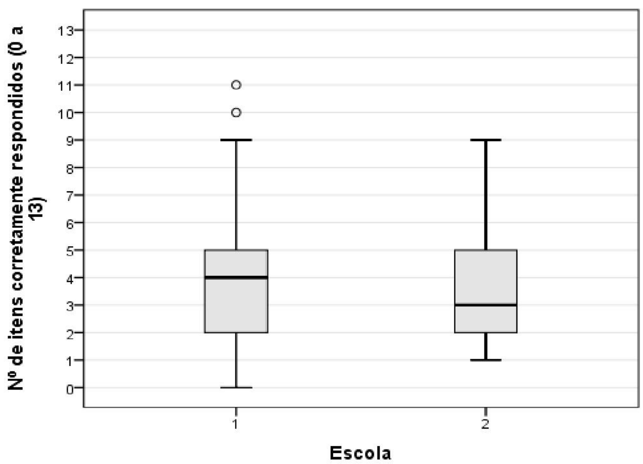
Na tabela 3.1 e na Figura 3.1, apresentamos o desempenho das duas turmas, e, segundo o teste t-student, não houve diferença entre as escolas.

Tabela 3.1- Estatísticas do desempenho dos alunos por escola

Escola	Nº de participantes	Média	Desvio Padrão	Estatística t	p-valor
1	66	4,09	2,332	$t_{(97)} = 0,844$	0,401
2	33	3,67	2,407		
Geral	99	3,95	2,353		

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 3.1- Desempenho dos alunos no instrumento diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa

Uma vez constatado que não havia diferença significativa entre as escolas, passamos analisar todos os dados sem distinguir as escolas. A tabela seguinte nos mostra a frequência de acertos por item de questão se referindo a quantidade total de 99 alunos.

Tabela 3.2- Frequência de acertos (entre parênteses o percentual) por item de questão

Itens	Q1a	Q1b	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8a	Q8b	Q8c	Q8d	Q9	Total (%)
Acertos n=99	43	45	20	14	61	11	5	5	**93**	**3**	69	14	7	390
	(43,4)	(45,5)	(20,2)	(14,1)	(61,6)	(11,1)	(5,1)	(5,1)	**(93,9)**	**(3,0)**	(69,7)	(14,1)	(7,1)	30,3

Fonte: Dados da pesquisa

A partir dos dados apresentados na Tabela 3.2, observamos que, de um total de 1287 respostas possíveis (produto entre 99 estudantes e 13 itens de questões), obtemos 390 acertos, o que equivale a 30,3% de respostas corretas. No entanto, ao analisarmos item a item observamos que eles não tiveram desempenho homogêneo, uma vez que os alunos alcançaram tanto nível de teto (Q8a) quanto nível de chão (Q8b). Esses itens foram inseridos no instrumento de pesquisa, porque queríamos identificar qual era o entendimento que os alunos tinham com relação ao sinal de igual (=). Segundo Vergnaud (1986, p. 87), existem "diferentes significações do sinal de igualdade: é o mesmo que, dá como resultado, é equivalente a". Sendo assim, o modo como a criança compreende o sinal de igualdade, bem como os demais símbolos de operações (+, -) durante o aprendizado aritmético, pode vir a contribuir para o sucesso ou a dificuldade dos alunos no entendimento futuro da Álgebra (KIERAN, 1982; PONTE, BRANCO, MATOS, 2009).

Trazemos os itens Q8a e Q8b na figura seguinte:

Figura 3.2- Itens de questões Q8a e Q8b que obtiveram respectivos níveis teto e chão

Q8: Complete os quadradinhos de forma que as igualdades sejam verdadeiras:

a) 4 + 5 = $\boxed{}$

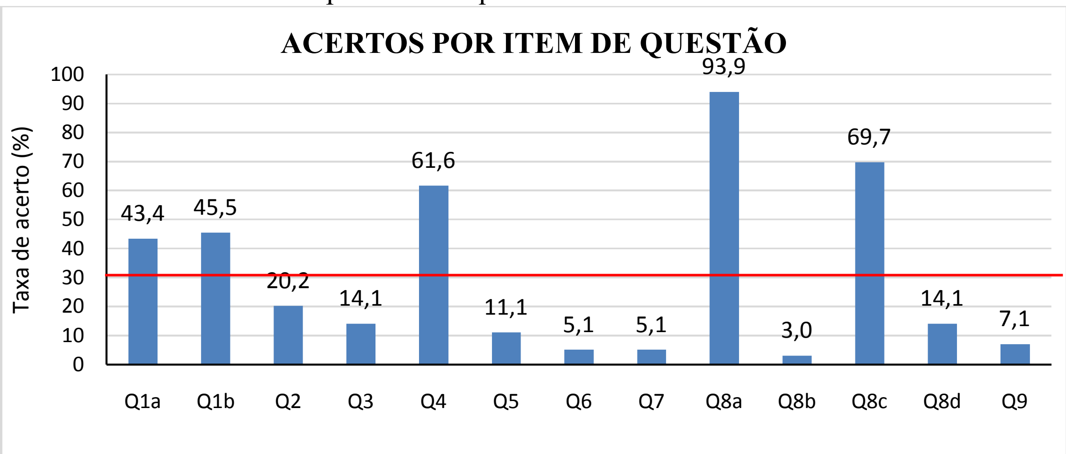
b) 8 + 4 = $\boxed{}$ + 5

Fonte: Instrumento da pesquisa

A diferença entre o desempenho dessas duas questões pode ter sido pelo fato do item Q8a a resposta era imediata, 4 + 5 é igual a um determinado valor e o item Q8b vindo na sequência, pode ter induzido o aluno ao erro, visto que anterior a igualdade que precede o quadradinho também há uma soma, inferimos que talvez agindo por um impulso o aluno tenha colocado o resultado da operação ignorando a adição que sucede o quadradinho, no entanto não podemos afirmar com certeza, então percebemos que apesar dessa informação ser importante, nossa pesquisa não forneceu elementos para uma ampliação dessa discussão.

Colocamos esses mesmos dados em um gráfico de colunas, para que pudéssemos visualizar a diferença entre os percentuais de acerto dos itens das questões. Segue o Gráfico 3.1 que traz o percentual de acertos em cada um dos itens das questões.

Gráfico 3.1- Percentual de acertos por item de questão



Fonte: Elaborado pela pesquisadora a partir de dados da pesquisa

A partir dos dados apresentados no Gráfico 3.1, destacamos alguns pontos relevantes. O primeiro deles é acima da média geral de acerto que foi de 30,3%, tivemos cinco itens de questões, dentre elas duas icônicas e três numéricas. Contudo, cabe salientar que os três itens nos quais os alunos tiveram desempenho maior que 60% são de questões numéricas, o que nos leva a inferir que o ícone não necessariamente leva o aluno ao sucesso. Esse pode ter sido um resultado pontual, e essa análise está feita no item 3.1.3, que é a comparação entre o desempenho dos alunos nos itens icônicos em relação aos itens numéricos.

Entretanto, antes de fazer essa análise comparativa entre itens icônicos e numéricos, optamos por analisar os itens da Q8 por se tratar de uma questão que envolve os significados do sinal de igual, quais sejam: o operacional e o relacional. Além disso, foi a questão que obteve tanto o maior desempenho, (93,9% na Q8a), quanto o menor desempenho (3% na Q8b), de todos os 13 itens de questões.

3.1.2 Analisando a Q8

Para que possamos analisar o desempenho que os alunos alcançaram nos itens da Q8, trouxemos novamente a Q8 na íntegra na Figura 3.3.

Figura 3.3- Os quatro itens da Q8

Q8: Complete os quadradinhos de forma que as igualdades sejam verdadeiras:

a) 4 + 5 = $\square$

b) 8 + 4 = $\square$ + 5

c) $\square$ = 9+5

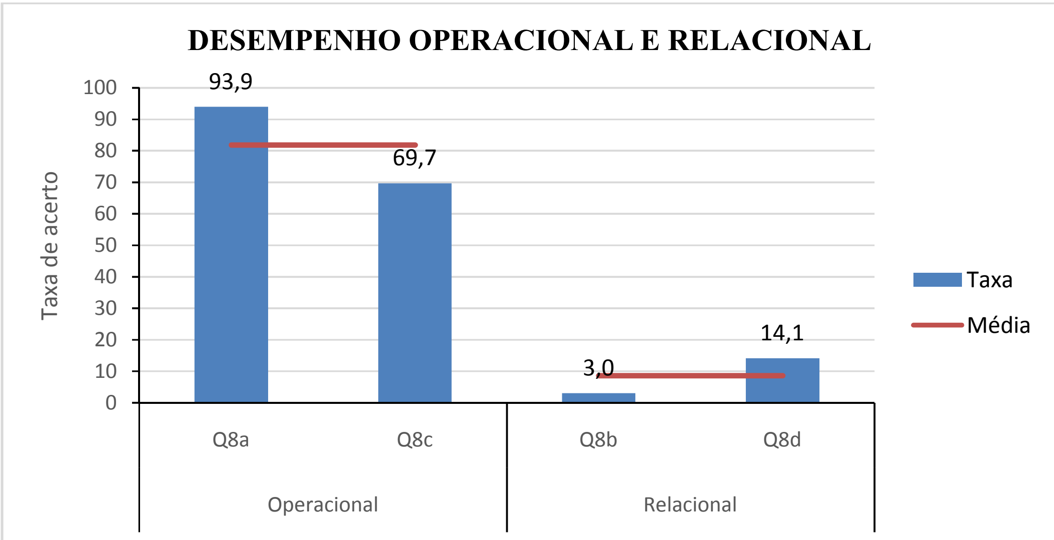
d) 7 + $\square$ = 6 + 4

Fonte: Instrumento de pesquisa

Iniciamos a análise comparando os resultados dos itens da Q8 agrupados pelo tipo de conceito envolvido, segundo o significado da igualdade. Os itens Q8a e Q8c são operacionais e os itens Q8b e Q8d são relacionais (BANDARRA, 2011).

Quando analisamos de forma conjunta os dois itens operacionais, com relação aos dois itens relacionais, verificamos que a taxa média de acerto dos dois itens operacionais foi de 81,1% contra 8,6% dos relacionais, observados nos dados do Gráfico 3.2.

Gráfico 3.2-Desempenho do significado da igualdade operacional e relacional



Fonte: Elaborado pela pesquisadora a partir de dados da pesquisa

Analisamos os dados do Gráfico 3.2 nos itens dos significados da igualdade operacional e relacional, e houve diferença significativa entre os resultados. Verificamos esta diferença significativa segundo o teste Qui-quadrado ($\chi^2_{(1)} = 214{,}348$; $p = 0{,}000$).

Nos itens Q8a e Q8c, tidos como operacionais, houve uma queda de 24,2 pontos percentuais da Q8a para a Q8c. É possível que essa diferença esteja pautada no que Kieran

(1981) e Ponte, Branco e Matos (2009) descrevem a respeito do sinal de igualdade que é trabalhado de forma direcional e sequencial. Para os autores, as operações nas sentenças matemáticas são, normalmente, realizadas da esquerda para a direita. Vergnaud (1986) por sua vez afirma que o sinal de igual é interpretado como a função de anunciar o resultado ao invés de representar uma relação de igualdade.

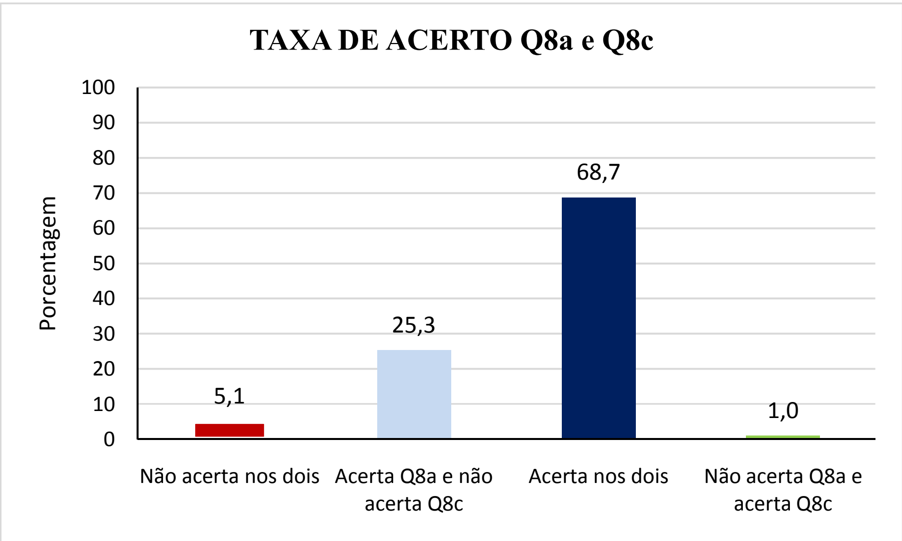
Verificamos que esta diferença é significativa segundo o teste Qui-quadrado ($\chi^2_{(1)}$ = 19,556; p = 0,000). Para o nível de complexidade entre Q8a e Q8c, utilizando o teste de McNemar, e verificamos que o Q8c é mais complexo do que a Q8a, conforme Tabela 3.3 e Gráfico 3.3.

Tabela 3.3- Nível de complexidade da Q8a e Q8c

Q8a (Sequencial)	Q8c (Não sequencial)		
	Não certa	Certa	Total
Não certa	5,1	1,0	6,1
Certa	25,3	68,7	93,9
Total	30,3	69,7	100,0
Teste de McNemar: n = 99; Qui-quadrado = 20,346; p-valor = 0,000			

Fonte: Dados da pesquisa

Gráfico 3.3- Taxa de acerto dos itens operacionais Q8a e Q8c



Fonte: Elaborado pela pesquisadora a partir de dados da pesquisa

Observamos que estes foram dois itens que os alunos foram bem sucedidos.

Continuamos a análise do desempenho dos alunos no Q8c, analisando também as respostas dadas por eles, dispostas na Tabela 3.4 a seguir.

Tabela 3.4- Respostas dadas pelos alunos ao item Q8c

RESPOSTAS DADAS PELOS ALUNOS NO ITEM Q8c								
Respostas	14	15	**9 4+5 5+4 8+1**	4	0 e 14; 5 e 14	4 e 17	Outras	Branco
Frequência	70	2	**7**	2	2	1	10	5
n=99 (%)	70,7	2%	**7,1%**	2%	2%	1%	10,1%	5,1%

Fonte: Elaborado pela pesquisadora a partir de dados da pesquisa

Apesar da maioria, 69,7% dos alunos, ter acertado esse item, algumas respostas tidas como erradas nos chamaram a atenção, e é sobre elas que discutiremos. Sete alunos deram como resposta a esse item o número 9 ou uma soma cujo resultado fosse 9 (4+5; 5+4; 8+1). Com relação à resposta 9, podemos inferir que, embora seja uma resposta incorreta, eles compreendem uma das propriedades da Equivalência que é a reflexiva (a = a, para todo o elemento a). No que se refere às outras respostas (4+5; 5+4; 8+1) uma razoável justificativa seria que para o aluno o sinal de igualdade é tido como um resultado (VERGNAUD, 1986; BOOTH, 1995), desprezando a operação que está no segundo membro da equação.

Das respostas dadas como sendo o 4, o aluno poderia ter dado essa resposta por pensar no complemento do número 5, mas não poderíamos afirmar com certeza sem a entrevista. Então, retornamos à escola e entrevistamos os dois alunos, estes nos elucidaram dizendo que responderam 4 por achar que deveriam dar como resposta o número que somado com 5 daria 9. Trouxemos um extrato de entrevista que fizemos com o aluno A30:

Pesquisadora: *Nessa questão (Q8c) era para completar o quadradinho, então era quadradinho é igual a 9 + 5 e você colocou no quadradinho o número 4. O que você pensou pra colocar esse valor? Por que você acha que é 4 a resposta?*
Aluno (A30): *É porque 5 mais 4 é 9*
Pesquisadora: *Ah que legal! Agora eu entendi!*

Como podemos observar, o aluno A30 admite que após o sinal de igual, necessariamente, será o resultado da operação. Esse tipo de resolução representa a ideia expressa por Vergnaud (1986), que para o aluno após o sinal de igual terá o resultado; além disso, Kieran (1981) e Ponte, Branco e Matos (2009) acrescentam que a operação é tida como sequencial e unidirecional.

Um dos alunos deu como resposta dois valores, zero no lugar do quadrado e 14 após a operação 9 + 5 e outro deu como resposta também dois valores, 5 no lugar do quadrado e 14 após a operação 9 + 5. Percebemos então que, o aluno acerta o resultado da operação da adição, mas não admite que a resposta venha antes da operação e novamente temos que o sinal de igualdade é tido como sequencial e unidirecional (KIERAN, 1981; PONTE, BRANCO, MATOS, 2009), uma vez que ele acrescenta o sinal de igual depois do número 5 e coloca o resultado 14.

Quando analisamos as questões que dizem respeito ao entendimento do sinal de igual como relacional, verificamos que o desempenho na Q8d (7 + □ = 6 + 4) é superior ao desempenho no Q8b (8 + 4 = □ + 5) em 11,1 pontos percentuais, conforme Gráfico 3.2, sendo que esta diferença é também é significativa segundo o teste Qui-quadrado ($\chi^2_{(1)}$ = 7,786; p = 0,005). Observando o desempenho dos alunos nos itens Q8b e Q8d é razoável inferir que no item Q8b os alunos tiveram maior grau de dificuldade, comparativamente ao item Q9d. Esta evidência nos leva a inferir que o item Q8b apresenta maior grau de complexidade.

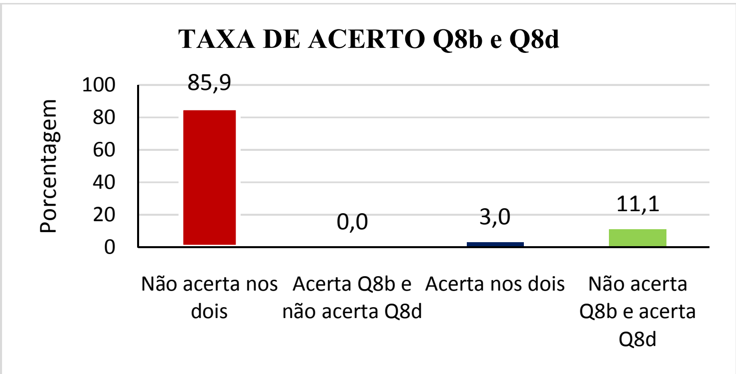
Analisando o nível de complexidade entre Q8b e Q8d, utilizando o teste de McNemar, podemos verificar que o Q8b é mais complexo do que a Q8d, como podemos observar na Tabela 3.5 e Gráfico 3.4.

Tabela 3.5 - Nível de complexidade da Q8b (Sequencial) e Q8d (Não sequencial), no nível relacional.

Q8b (Sequencial)	Q8d (Não sequencial)		
	Não certa	Certa	Total
Não certa	85,9	11,1	97,0
Certa	0,0	3,0	3,0
Total	85,9	14,1	100,0
Teste de McNemar: n = 99; p-valor = 0,001 (Foi utilizado o teste binomial)			

Fonte: Dados da pesquisa

Gráfico 3.4 - Taxa de acerto dos itens relacionais Q8b e Q8d



Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que estes foram dois itens que os alunos foram mal sucedidos. Em relação a Q8b, não tivemos uma grande variedade de tipos de respostas e podemos observá-las na tabela 3.6 seguinte.

Tabela 3.6- Respostas dadas pelos alunos ao item Q8b

RESPOSTAS DADAS PELOS ALUNOS Q8b						
Respostas	7	17	12 e 17	**12**	Outras	Branco
Quantidade de respostas	3	28	11	**46**	7	4
n=99 (%)	3%	28,3%	11,1%	**46,5%**	7,1%	4%

Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisarmos as respostas dos alunos no item Q8b, o que nos chamou a atenção foram aquelas que eles colocaram somente 12, somente 17 e coloca 17 e 12, totalizando 85,9% das respostas dadas. A resposta 12 refere-se ao resultado da adição do primeiro membro, desconsiderando a adição explícita do segundo membro, o que nos permite inferir que os alunos admitem a igualdade como processual, ou seja, eles entendem que esse sinal deve ser sucedido de um único valor (resposta) e não de outra operação equivalente. De acordo com Kieran (1982), esse comportamento corresponde ao sinal de igual como operador direcional e sequencial da esquerda para direita.

Quanto à resposta 12 e 17, os alunos colocaram o número 12 no lugar do quadradinho e não admitiram que o segundo membro terminasse em uma soma, então seguiram com o sinal de igual após a soma 12 + 5, acrescentando após ela o número 17, o que nos leva a inferir que os alunos acham que uma expressão matemática sempre deve ter uma resposta única e numérica.

Analisando as respostas, observamos que quem acertou a Q8d, acertou também a Q8b, o que nos leva a inferir que esses alunos compreendem o sinal de igual como relacional e entendem a igualdade como uma Equivalência.

Tabela 3.7: Respostas dadas pelos alunos ao item Q8d

	RESPOSTAS DADAS PELOS ALUNOS Q8d								
Respostas	3	17	10	- 1	6	4	4 e 10	Outras	Branco
Frequência	14	30	20	1	1	3	2	22	6
n=99 (%)	14,1	30,3	20,2	1	1	3	2	22,2	6,1

Fonte: dados da pesquisa

Observamos os dados da Tabela 3.7, percebemos que 14,1% dos alunos compreendem a igualdade como uma Equivalência, no entanto, temos que 50,5%, somando as porcentagens de alunos que deram como resposta para esse item o número 17 ou o número 10, entendem o sinal de igual como apenas o resultado de uma operação, igualdade como sequencial e direcional (KIERAN, 1982; PONTE et al, 2009).

Constatamos, nas entrevistas, que realmente a resposta 17 se deu pelo fato dos alunos acreditarem que deveriam somar todos os números existentes na operação (7 + 6 + 4), e a resposta 10 se deu ao fato deles acreditarem que, realmente, o sinal de igual nos remete a uma resposta de uma operação, como vimos na entrevista com A9 detalhada a seguir:

Pesquisadora: *Por que você colocou o número 10 dentro desse quadradinho?*
Aluna (A09): *Porque seis mais quatro é igual a 10.*
Pesquisadora: *Mais aqui o quadrado está antes do igual, ou seja, o quadrado é igual a seis mais quatro e você falou que seis mais quatro é igual a 10, está certo isso? O que você acha?*
Aluna (A09): *Tá certo! Se seis mais quatro é igual a 10, então 10 pode ser igual a seis mais quatro! Ta certo sim!*
Pesquisadora: *Mas, e esse 7 na frente do dez?*
Aluna (A09)*: Ele não usa, não serve.*
Pesquisadora: *Muito bem! Obrigada!*

Percebemos, então, que a aluna compreende a propriedade simétrica da Equivalência, (se $a = b$ então $b = a$, para quaisquer elementos a e b). No entanto, não podemos esquecer o fato de que antes do sinal de igual não havia somente uma lacuna (quadradinho) e sim uma adição 7 + □, então também concluímos que para o aluno o sinal de igualdade é tido como um resultado (VERGNAUD, 1986), desprezando a operação que está no primeiro membro da equação. Nessa direção, Booth (1995) afirma que o símbolo da adição tanto indica o resultado quanto a ação e que o sinal de igualdade sugere uma relação de Equivalência ao invés de ser tido apenas com um símbolo que antecede a resposta, e para que o aluno tenha uma compreensão algébrica é preciso que essas noções sejam trabalhadas.

O autor sugere que é necessário acentuar que o símbolo de igualdade é bidirecional e, portanto, ser lido de forma adequada, por exemplo, numa sentença como 8 + 4 = 12, deve-se ler 8 + 4 é igual a 12, e não 8 + 4 dá 12, assim como se deve proporcionar aos alunos experiências com expressões do tipo 10 = 8 + 2, bem como 1 + 9 = 8 + 2 (BOOTH, 1995).

Apesar de ser única e não termos feito entrevista com o aluno, encontramos uma resposta, de certo modo, intrigante. Estamos nos referindo a um aluno de 5º ano que colocou -1 como resposta ao item Q8d, como o aluno não apresenta o conhecimento formal dos números inteiros negativos, inferimos que ele pensou que o único modo de obter o número 6 como resposta, seria se ele colocasse no quadradinho uma operação de subtração, visto que para ele a única forma de o resultado dar 6 seria diminuir o número 1 de 7. Entendemos que essa resposta segue a mesma ideia do sinal de igual, como sequencial o qual sucede uma operação.

Passamos a analisar as questões de acordo como foram elaboradas e ou selecionadas, as numéricas e as icônicas.

3.1.3 Desempenho geral Icônica × Numérica

Para realizarmos essa análise, optamos por retirar dois itens da Q8, quais sejam, a Q8a e Q8c e também a questão Q9. O motivo pelo qual fizemos esta opção está justamente relacionado à proposta do instrumento diagnóstico. Ao idealizar o instrumento diagnóstico, a nossa intenção foi elaborar algumas questões numéricas e icônicas de mesma natureza, e esses dois itens da Q8 assim como a Q9 não tinham questões relacionadas.

Interessa-nos saber qual o tipo de questões os alunos mais acertaram: icônicas ou numéricas então, organizamos os dados da tabela 3.2 e montamos a tabela 3.8, de forma a nos elucidar.

Tabela 3.8 - Quantidade de acerto por item de questão por categoria icônica e numérica

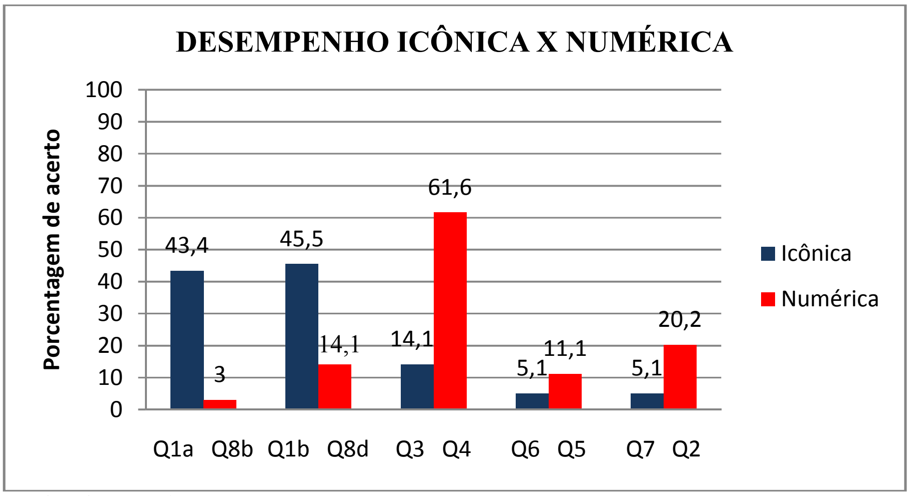
	TOTAL DE ACERTOS (%)
QUESTÕES ICÔNICAS n = 495	**112 (22,6)**
QUESTÕES NUMÉRICAS n = 495	**109 (22,0)**

Fonte: Dados de Pesquisa

De acordo com os dados da tabela 3.8, os resultados alcançados pelos alunos entre as questões icônicas e numéricas foram bem próximos. Como citamos anteriormente, a maioria das questões foi elaborada de forma correlacionada, ou seja, tivemos questões com o mesmo objetivo do que se pretendia analisar, sendo uma de forma icônica e a outra numérica.

Desse modo, nos resta um questionamento, será que o desempenho separadamente das questões icônicas e numéricas correlacionadas se deu realmente de forma homogênea? Para que pudéssemos responder a esse questionamento, elaboramos o Gráfico 3.5 que analisamos em seguida.

Gráfico 3.5 - Desempenho das questões icônicas e numéricas



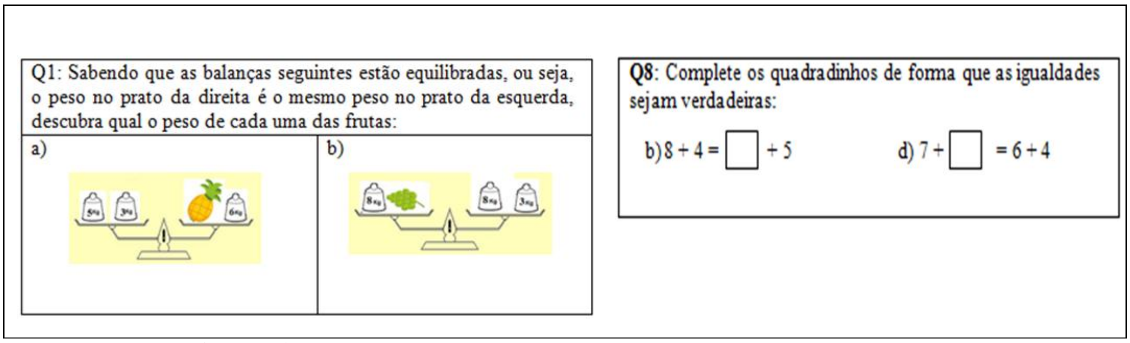
Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com os dados que o Gráfico 3.5 apresenta, temos resultados que divergem daqueles obtidos no desempenho geral com relação a sua homogeneidade. Como podemos observar há superioridade de desempenho em todos os itens de questões, ora para icônica (Q1a e Q1b), ora para a numérica (Q4, Q5 e Q2). Desse modo, analisamos a seguir os pares de itens de questões correlacionadas.

3.1.3.1 Análise comparativa do desempenho Q1 × Q8

Começamos por analisar as questões Q1 e Q8, mais especificamente os itens Q1a e Q1b com os itens Q8b e Q8d, que dizem respeito à compreensão do sinal de igual como operacional e como relacional. Trazemos na figura 3.4 os itens de questões correlacionadas para melhor compreensão da análise.

Figura 3.4- Itens correlacionados das questões Q1 e Q8



Fonte: Instrumento de pesquisa

Tabela 3.9 - Quantidade de acerto relacionando icônico e numérico

ITENS	Q1a	Q8b	Q1b	Q8d
ACERTOS	43	3	45	14
n = 99 (%)	(43,4)	(3,0)	(45,5)	(14,1)

Fonte: Dados de Pesquisa

Os itens de questões se relacionam Q1a com Q8b, e Q1b com Q8d são itens icônicos e numéricos, respectivamente. Em cada um dos itens, poderíamos ter 99 possíveis respostas, e somente a Q1a e Q1b obtiveram em média 44% de acerto, em contraponto as Q8b e Q8d obtiveram resultados pífios, não chegando a uma média de 9% de acerto. Ambos tratam da relação de Equivalência, sendo que na Q8 temos o sinal de igual como relacional, e na Q1 temos o equilíbrio da balança, assumindo o papel da igualdade. É possível perceber que, além disso, as frutas foram posicionadas de modo que tivesse a mesma estrutura dos itens relacionados da questão Q8. Entretanto, os resultados alcançados nos indicam que o ícone foi um facilitador (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009; LINS E GIMENEZ, 2006).

Podemos observar pelos dados da Tabela 3.9, que o desempenho dos alunos nos itens (a) e (b) da Q1 foi maior do que nos itens (b) e (d) da Q8. Nesse caso, é possível inferir que a balança auxilia e pode ser, apesar de sua limitação com relação aos números inteiros negativos, um bom artifício para introdução da equação e do significado relacional da igualdade, já que por meio do ícone da balança os alunos demonstraram entender a Equivalência que há entre os dois pratos (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009). Entretanto, Lins e Gimenez (2006) fazem algumas considerações para o ensino aprendizagem de Álgebra, e dentre elas estão as denominadas por facilitadoras, que trazem a utilização do material concreto para facilitar o aprendizado. Nessa abordagem facilitadora, cabe a utilização do ícone da balança que, de acordo com nossa pesquisa, percebemos que esse ícone gera maior compreensão do Princípio de Equivalência da Igualdade por parte dos alunos, contudo, essa mesma compreensão não é sentida nos itens numéricos das questões correlatas.

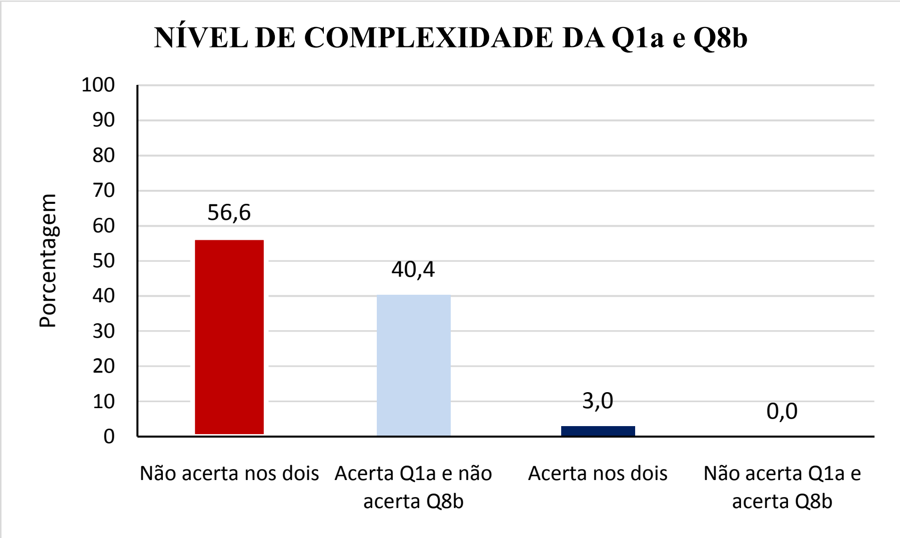
A seguir, analisamos o grau de complexidade do item Q1a, icônica, em relação ao item Q8b, numérica (Tabela 3.10 e Gráfico3.6).

Tabela 3.10-Nível de complexidade da Q1a (Icônica) e Q8b (Numérica)

Q1a (Icônica)	Q8b (Numérica)		
	Não certa	Certa	Total
Não certa	56,6	0,0	56,6
Certa	40,4	3,0	43,4
Total	97,0	3,0	**100,0**
n = 99; Qui-quadrado = 38,025; p-valor = 0,000			

Fonte: Dados de pesquisa

Gráfico 3.6: Nível de complexidade da Q1a (Icônica) e da Q8b (Numérica)



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que, enquanto 43,4% dos alunos conseguiram responder corretamente a Q1a, apenas 3,0% conseguiram responder a Q8b. Além disso, 41,1% conseguiram acertar a Q1a, mas não conseguiu acertar a Q8b, indicando que a Q8b é mais complexa do que a Q1a.

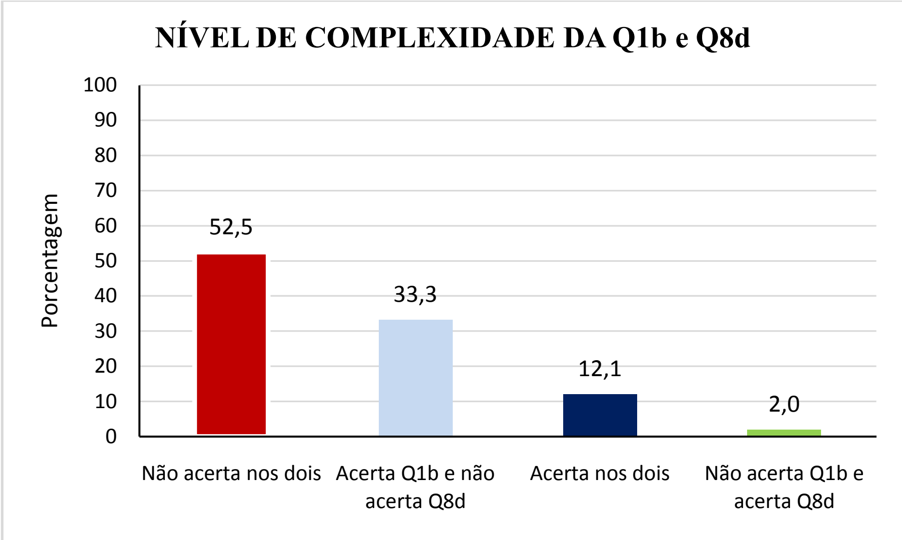
Em seguida analisamos o grau de complexidade do item Q1b, que era icônica, em relação ao item Q8d que era numérica (Tabela 3.11 e Gráfico 3.7).

Tabela 3.11- Nível de complexidade da Q1b(Icônica) e Q8d (Numérica)

Q1b	Q8d		
	Não certa	Certa	Total
Não certa	52,5	2,0	54,5
Certa	33,3	12,1	45,5
Total	**85,9**	**14,1**	**100,0**
n = 99; Qui-quadrado = 25,714; p-valor = 0,000			

Fonte: Dados da pesquisa

Gráfico 3.7- Nível de complexidade da Q1b (Icônica) e da Q8d (Numérica)



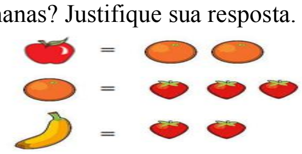
Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com os dados apresentado na Tabela 3.11 e Gráfico 3.7, podemos observar que, enquanto 45,5% dos alunos conseguiram responder corretamente a Q1b, apenas 14,1% conseguiram responder a Q8d. Além disso, 33,3% conseguiram acertar a Q1b, mas não conseguiu acertar a Q8d, indicando que a Q8d é mais complexa do que a Q1b.

3.1.3.2 Análise comparativa do desempenho Q3 × Q4

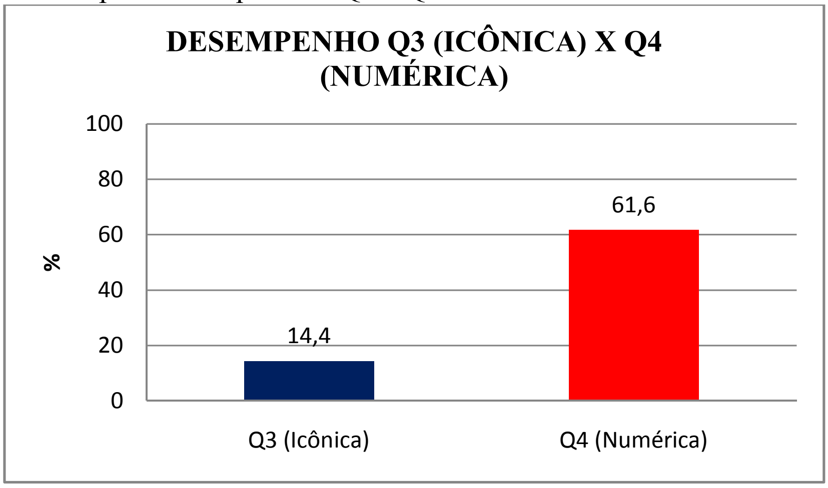
Para essa análise, trazemos o gráfico 3.8 do desempenho da Q3 e Q4 para melhor discuti-lo, além de trazermos a figura 3.5 com as questões Q3 e Q4 para uma melhor compreensão da análise.

Figura 3.5- Questões Q3 e Q4 correlacionadas

Q3: Num determinado jogo é possível fazer trocas de frutas. Sara tem 3 maçãs. Quantas bananas terá Sara, quando trocar todas as suas maçãs por bananas? Justifique sua resposta.  (CIVINSKI, 2015, p. 73-74)	Q4: Utilize as informações seguintes e complete a sentença: “um leão pesa o mesmo que ______cachorros.” Um leão pesa o mesmo que dois jacarés; Um jacaré pesa o mesmo que dois cachorros. Adaptada de (CIVINSKI, 2015, p. 72)

Fonte: Instrumento da pesquisa

.Gráfico 3.8 - Desempenho das questões Q3 e Q4



Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisarmos o desempenho da Q3 (icônica) e Q4 (numérica), essa última alcançou 47,2 pontos percentuais a mais que sua correlacionada, fato que poderia nos arremeter a ideia de que o ícone não ajudou na resolução do problema. Entretanto, não chegamos a essa conclusão, pois apesar das duas questões terem sido introduzidas no instrumento de pesquisa com o mesmo objetivo, qual seja investigar se o aluno compreendia a propriedade transitiva de Equivalência da Igualdade, a Q3 exigia também a compreensão da propriedade reflexivade Equivalência da Igualdade, visto que o aluno deveria compreender que se uma banana equivale a dois morangos então dois morangos equivale a uma banana, esse pode ter sido um dos motivos dessa disparidade nos desempenhos.

3.1.3.3 Análise comparativa do desempenho Q5 × Q6

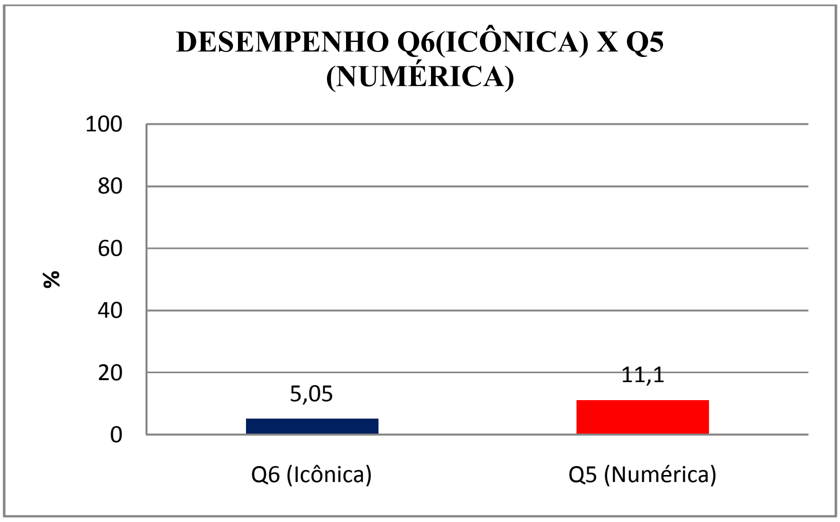
Para essa análise, trazemos na figura 3.6 as questões correlacionadas Q5 e Q8, além do Gráfico 3.9 com o desempenho da Q5 e Q6 para melhor discuti-lo.

Figura 3.6- Questões Q5 e Q6 correlacionadas

Q5: Diego e Marcus têm a mesma quantidade de dinheiro. Diego tem um valor dentro da carteira e mais R\$ 3,00 na mão. Marcus tem 2 vezes mais o valor que Diego tem dentro da carteira. Quanto Diego tem na sua carteira? Fonte: Porto 2018	Q6: As balanças abaixo estão equilibradas, sendo assim, determine o peso do pato Duti e da águia Dorotéia.  Fonte: (CIVINSKI, 2015, p. 74)

Fonte: Instrumento de pesquisa

Gráfico 3.9- Desempenho das questões correlacionadas Q6 e Q5



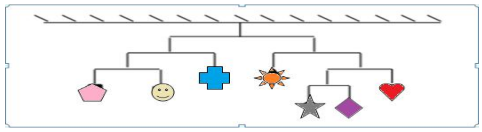
Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisarmos o desempenho da Q6 (icônica) e Q5 (numérica), vimos que o índice de acerto nas duas questões foi mínimo. Ainda assim, a Q5 (numérica) alcançou 6,05 pontos percentuais a mais que a Q6, sua correlacionada icônica. Apesar do resultado da numérica (Q5) ter sido maior que o dobro em relação a icônica (Q6), podemos perceber por meio dos protocolos de pesquisas que os alunos demonstraram, ou conseguiram expressar mais as estratégias utilizadas para a resolução da Q6, que se fez presente o ícone da balança, enquanto que a questão numérica eles se preocuparam apenas em dar uma resposta, sem tentar, em sua maioria, justificá-la por meio de estratégias. Para esse estudo, o uso do ícone favoreceu uma melhor compreensão de análise do raciocínio algébrico dos alunos.

3.1.3.4 Análise comparativa do desempenho Q2 × Q7

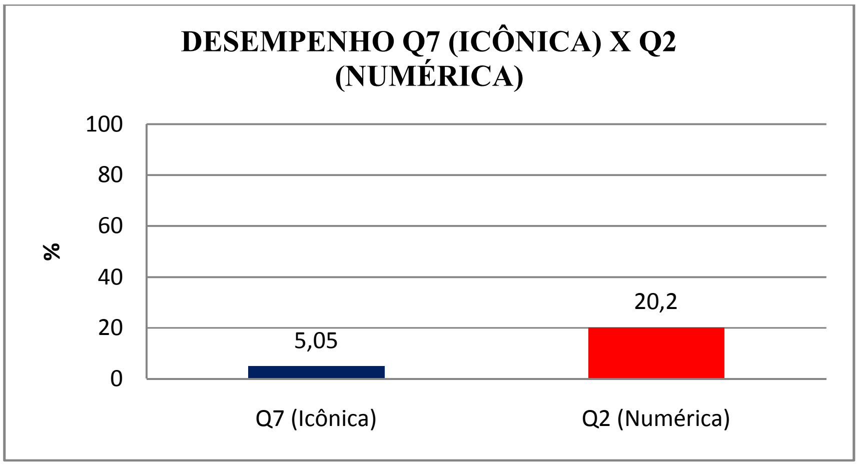
Para essa análise, retomamos o Gráfico 3.10 do desempenho da Q2 e Q7 para melhor discuti-lo. E para melhor compreensão da análise trazemos também a figura 3.7 com as questões analisadas.

Figura 3.7- Questões Q2 e Q7 correlacionadas

Q2: Uma mosca tem 6 pernas e uma aranha tem 8 pernas. Juntas, 3 moscas e 2 aranhas tem tantas pernas quanto 9 galinhas e quantos gatos? Fonte: (Projeto Canguru, 2017, Categoria: Benjamim)	Q7: Abaixo temos representado um objeto que está em equilíbrio. Sabendo que o peso dos fios e das barras deve ser desconsiderado, e que o objeto pesa no total 160 gramas, determine o peso da estrela cinza. Justifique sua resposta.  Fonte: Adaptada de (CIVINSKI, 2015, p.69)

Fonte: Instrumento da pesquisa

Gráfico 3.10- Desempenho das questões correlacionadas Q7 e Q2



Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisarmos o desempenho da Q2 (numérica) percebemos que esta obteve o quádruplo dos pontos percentuais da Q7 sua correlacionada icônica. Não conseguimos encontrar uma justificativa para essa diferença no resultado, mas percebemos novamente o interesse em demonstrar as estratégias utilizadas na resolução dessa questão icônica.

3.1.4 Síntese da análise quantitativa

Apresentamos, nesta seção, uma síntese do que discutimos na análise quantitativa. Inicialmente fizemos uma análise de desempenho por escola, mas após o teste estatístico, *t-student,* percebemos que não havia diferença significativa entre o desempenho das duas escolas (1 e 2). Nesse caso optamos por juntar os dados das escolas e fazermos uma análise única do desempenho por item de questão.

Percebemos então que em alguns itens de questões, os alunos obtiveram desempenho maior que 60%, sendo estes itens de questões numéricas, o que nos leva a inferir que o ícone não necessariamente leva o aluno ao sucesso. Outro ponto que nos chamou a atenção é que a questão Q8, que trata dos significados do sinal de igual, foi a questão que obteve o maior e o menor desempenho de todos os 13 itens de questões, sendo o Q8a (93,9) e o Q8b com 3% de acertos, então decidimos fazer uma análise individual da Q8 para tentar entender se os alunos entendem os diferentes significados do sinal de igual: operacional e relacional.

Observamos que os itens da Q8 cujo significado do sinal de igualdade foi operacional os alunos obtiveram desempenho acima de 69%, enquanto que no relacional o índice de acerto não chegou a 15%. Contudo, mesmo nos itens do significado operacional, a diferença entre os resultados foi aparentemente significativa. É possível que essa diferença esteja pautada no que Kieran (1981) e Ponte, Branco e Matos (2009) descrevem a respeito do sinal de igual, que é trabalhado de forma direcional e sequencial, sendo as operações nas sentenças matemáticas normalmente, realizadas da esquerda para a direita, resultando na maioria das vezes, o entendimento do sinal de igual com a função de anunciar o resultado.

Com relação aos desempenhos dos alunos nos itens Q8b (3,03%) e Q8d (14,14%), que se tratavam ao significado do sinal de igual como relacional, tivemos uma diferença percentual de 11,11 pontos. É possível que essa diferença em favor da Q8d se deve ao fato que a lacuna (quadradinho) está à direita do sinal de igual, o que aponta uma tendência à resolução sequencial.

Esgotadas, a nosso ver, as possibilidades de análise da questão 8, passamos a analisar o desempenho dos alunos entre as questões icônicas e numéricas. De modo geral o desempenho dos alunos entre esses dois tipos de questões foi muito próxima, o que nos levou a querer analisar as questões numéricas e as icônicas correlacionadas: Q1a e Q8b; Q1b e Q8d; Q2 e Q7; Q3 e Q4; Q5 e Q6. Cabe relembrar que retiramos os itens de questões Q8a, Q8c e Q9 por não terem questões correlacionadas.

Quanto à análise das questões Q1 e Q8, mais especificamente os itens Q1a e Q1b com os itens Q8b e Q8d, que dizem respeito à compreensão do sinal de igual como operacional e como relacional, as diferenças de desempenhos dos itens Q1a e Q8b, e dos itens Q1b e Q8d foram significativas. Nesse caso, foi possível inferir que a balança auxilia e pode ser um bom artifício para introdução da equação e do significado relacional da igualdade.

Analisamos o grau de complexidade, para os alunos, dos itens Q1a× Q8b, e dos itens Q1b × Q8d e verificamos que os itens Q8b e Q8d são mais complexos que suas respectivas correlacionadas, Q1a e Q1b. O que vai ao encontro do que afirmam Lins e Gimenez (2006) e Ponte, Branco e Matos (2009), que o uso da balança para o ensino da equação é eficaz, porém ele por si só não garante que o aluno faça a analogia entre a relação dos pratos da balança e as expressões algébricas. Assim, diferente do que pensávamos a transposição entre a balança e a expressão algébrica não se dá de maneira natural e, além disso, o ícone da balança é tão somente um ponto de partida, uma vez que é limitado a quantidades positivas, como afirmam Lins e Gimenez (2006) e Ponte, Branco e Matos (2009).

No que diz respeito à análise comparativa do desempenho Q3 e Q4, verificamos que a Q4 (numérica) teve um desempenho bem superior a Q3 (icônica),no entanto percebemos que talvez essa disparidade não tenha se dado devido ao não auxílio do ícone, mas talvez ao fato de que a Q3 exigia uma compreensão maior das propriedades de Equivalência da Igualdade.

Analisando o comparativo do desempenho da Q5 e Q6, vimos que o resultado da numérica (Q5) foi maior que o dobro em relação a icônica (Q6), no entanto, podemos perceber que os alunos demonstraram ou conseguiram expressar mais as estratégias utilizadas para a resolução da Q6, onde se fez presente o ícone da balança, enquanto que a questão numérica eles se preocuparam apenas em dar uma resposta.

E, por fim, ao analisarmos comparativamente o desempenho da Q2 e Q7, percebemos que a Q2 (numérica) obteve o quádruplo dos pontos percentuais da Q7, sua correlacionada icônica. Apesar dessa diferença significativa nos resultados, percebemos novamente o interesse em demonstrar as estratégias utilizadas na resolução dessa questão icônica.

Do ponto de vista quantitativo, os resultados apontam que, de maneira geral, os alunos alcançaram resultados bem próximos nas questões icônicas e numéricas. Contudo, ao analisarmos os itens de questões separadamente, os resultados não se mostram homogêneos, os itens de questões numéricas foram melhores ao compararmos aos itens de questões icônicas.

3.2 Análise qualitativa

Para que pudéssemos proceder a análise qualitativa, focamos nas estratégias de resolução registradas nos protocolos e nas respostas das entrevistas dos alunos. Assim, de posse dos dados, para que pudéssemos atingir um dos objetivos da pesquisa, reconhecemos e classificamos as respostas dos alunos em nove categorias. Cabe relembrar que tivemos um total de 1287 possíveis respostas (99 alunos vezes 13 itens de questões) e dentre elas tivemos 81 respostas em branco. Do ponto de vista da pesquisa, esse dado é importante, uma vez que 6% das possíveis respostas foram em branco, um índice relativamente baixo, o que demonstra seriedade com a pesquisa por parte dos alunos.

Assim, foi a partir da análise das 1206 respostas (resultado das respostas possíveis menos as respostas em branco), oriundas dos protocolos, que criamos as nove categorias. Contudo, ressaltamos que é possível que um único protocolo seja classificado em mais de uma categoria. Assim, apesar de termos 1206 respostas passíveis de categorização, ao somarmos os totais de respostas por categoria, essa soma ultrapassa o total de respostas possíveis.

Nessa categorização, apresentada no Quadro 3.1 a seguir incluiu tanto as respostas corretas quanto as incorretas.

Quadro 3.1- Relação das categorias de análise

Categoria	Nome da Categoria
C1	Relacional
C2	Somente Operacional
C3	Pensamento Aditivo
C4	Pensamento Multiplicativo
C5	Retórica
C6	Sincopada
C7	Simbólica
C8	Pictórica
C9	Só resposta

Fonte: Criado a partir dos dados da pesquisa

De acordo com as categorias elencadas, elaboramos a Tabela 3.12 que quantifica as respostas de cada um dos itens de questão por categoria. As categorias C1 e C2 se referem somente aos itens Q8a, Q8b, Q8c e Q8d, já que essas dizem respeito ao entendimento do sinal de igual como operacional e ou relacional e esses itens são os únicos que foram introduzidos no instrumento de pesquisa para este fim.

Cabe ressaltar que ao analisar os dados foi possível categorizar o mesmo protocolo em mais de uma categoria. Destacamos as categorias mais recorrentes por questão.

Tabela 3.12-Frequência das categorias por questão

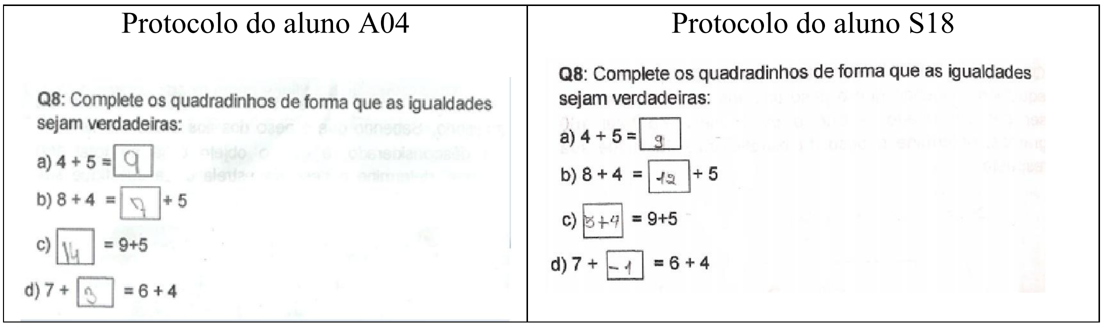
	Q1a	Q1b	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8a	Q8b	Q8c	Q8d	Frequência por categoria
C1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	2	**17**	22
C2	-	-	-	-	-	-	-	-	**93**	85	76	53	307
C3	41	39	61	16	12	30	31	20	-	-	-	-	250
C4	3	2	13	7	3	16	3	13	-	-	-	-	60
C5	13	9	9	15	21	9	14	16	-	-	-	-	106
C6	-	1	1	1	1	-	1	-	-	-	-	-	5
C7	**44**	42	**66**	25	17	**41**	32	32	-	-	-	-	299
C8	-	-	6	16	5	3	6	4	-	-	-	-	40
C9	42	**49**	20	**40**	**54**	31	**42**	**41**	-	-	-	-	**319**

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos, na tabela 3.12, que a categoria mais recorrente pelos alunos foi a C9 (Só resposta), ou seja, a maioria dos alunos não explicitou as estratégias utilizadas para resolver as questões, apesar da insistência da pesquisadora para que eles demonstrassem como chegaram aos resultados. Outro ponto que nos chamou a atenção foi que somente duas das nove categorias, a C6 (sincopada) e a C8 (pictórica), não estiveram presentes em todas as questões.

As categorias C1 e C2, Relacional e Operacional respectivamente, dizem respeito exclusivamente às respostas dadas para os itens da questão 8. Trouxemos dois protocolos, A04 e S18 que as explicitam:

Figura 3.8 – Extrato dos protocolos dos alunos A04 e S18



Fonte: Dados da pesquisa

Nas resoluções apresentadas na Figura 3.8 vemos que o aluno A04 responde todos os itens de forma correta, com isso, podemos inferir que ele compreende ambos os significados do sinal de igual, como Relacional (Q8b e Q8d) percebendo uma relação de Equivalência (simétrica, reflexiva e transitiva) e, também como Operacional (Q8a e Q8b) sendo esse símbolo também o responsável pelo resultado de uma operação.

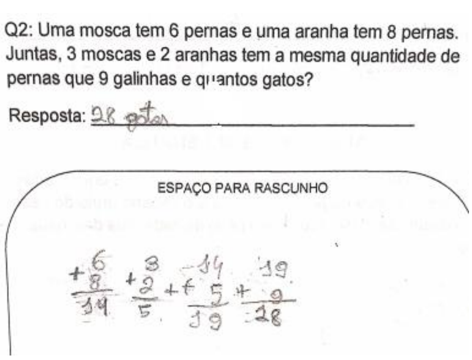
Vemos também que o aluno S18 compreende esse símbolo matemático somente como o responsável pelo resultado de uma operação, ou seja, esse aluno entende o sinal de igual estritamente como Operacional. Se observarmos, ele coloca 12 na Q8b como o resultado da soma de 8 + 4, ignorando a adição seguinte; no item Q8c ele escreve uma adição de dois números naturais dentro do quadradinho e que tem por resultado 9, que está colocado imediatamente após o sinal de igual; além disso, no item Q8d o aluno, apesar de ainda não ter um conhecimento formal dos números inteiros, completa o quadradinho com -1 para que a operação dê o resultado 6 que sucede a igualdade. Essas respostas nos leva a inferir que o aluno ignora a soma que sucede a igualdade e não assume o sinal de igual como significado de uma relação entre duas expressões (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009).

Resultados semelhantes foram encontrados dentre as respostas dos alunos na pesquisa de Civinski (2015). De acordo com nossos dados temos que mais de 78% da amostra se encaixa na categoria C2, ou seja, a maioria dos alunos entende o sinal de igual apenas como operacional, como o resultado de uma operação, não compreendendo o sinal de igualdade como a Equivalência entre os dois membros da equação.

A categoria C3 denominada por Pensamento Aditivo corresponde aos protocolos de pesquisa em que os alunos utilizaram a operação de adição ou a de subtração para resolver as questões. Embora essa categoria tenha se apresentado na maioria dos itens ela se fez mais presente na Q2. Trouxemos e discutimos dois extratos de protocolos S25 e S29 para ilustrá-la.

Figura 3.9 - Extrato dos protocolos dos alunos S25 e S29

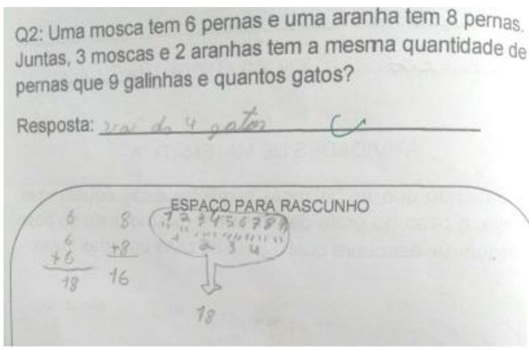
Protocolo do aluno S25


Q2: Uma mosca tem 6 pernas e uma aranha tem 8 pernas. Juntas, 3 moscas e 2 aranhas tem a mesma quantidade de pernas que 9 galinhas e quantos gatos?

Resposta: 28 gatos

ESPAÇO PARA RASCUNHO

Protocolo do aluno S29


Q2: Uma mosca tem 6 pernas e uma aranha tem 8 pernas. Juntas, 3 moscas e 2 aranhas tem a mesma quantidade de pernas que 9 galinhas e quantos gatos?

Resposta:

ESPAÇO PARA RASCUNHO

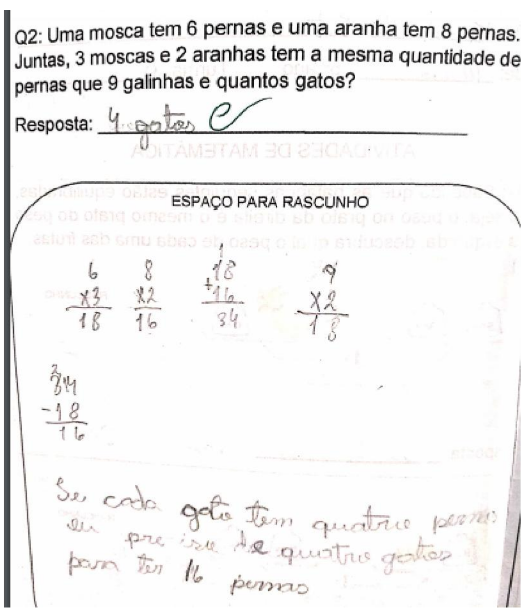
Fonte: Dados da pesquisa

Nos extratos dos protocolos que trouxemos na Figura 3.9, o aluno S25 resolve a Q2 efetuando a operação de adição entre todos os dados numéricos do problema, não se importando com as grandezas das parcelas, quantidade de pernas e quantidade de animais. O aluno S29 utiliza adequadamente a operação de adição para calcular a quantidade de pernas das três moscas e das duas aranhas, depois utiliza o pensamento aditivo juntamente com a representação pictórica para representar a quantidade de gatos que faltam para chegar as 16 pernas que faltam, confirmando o que dizem Magina, Merlini e Santos (2014), que os alunos utilizam em sua maioria, as estratégias pictórica e numérica, sendo que em ambas as estratégias eles se utilizam da estrutura aditiva para a resolução de problemas.

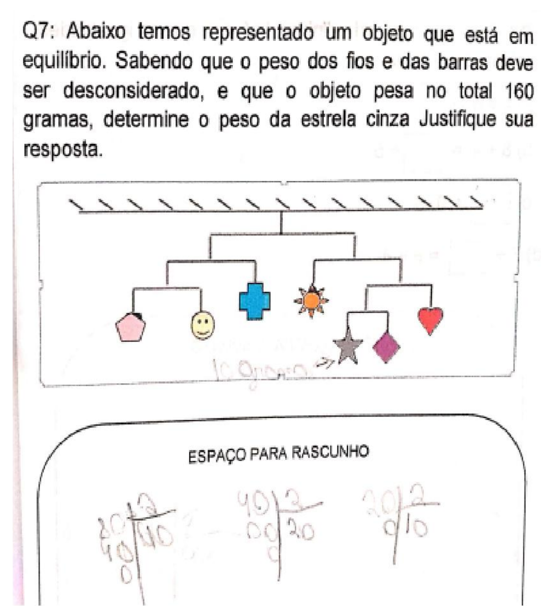
A categoria C4 que denominamos por Pensamento Multiplicativo, trata das estratégias relacionadas às operações de multiplicação e divisão. Observamos que na maioria das vezes a categoria C4 vinha acompanhada de outras categorias e trouxemos para ilustrá-la dois extratos de protocolos referentes às questões Q2 e Q7.

Figura 3.10 - Extrato dos protocolos dos alunos S64 e S04

Protocolo do aluno S64



Protocolo do aluno S04



Fonte: Dados da pesquisa

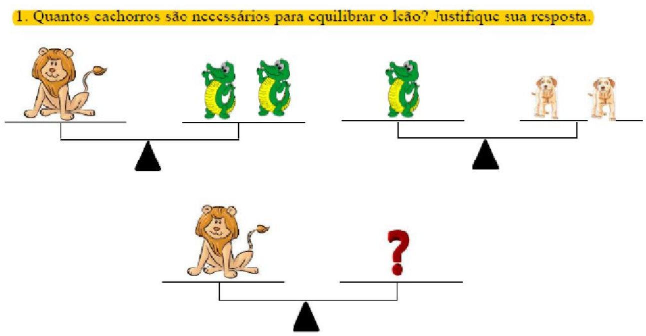
O extrato do protocolo S64 mostra que esse aluno utilizou de maneira apropriada as operações de multiplicação (C4) e subtração (C3). A sequência das operações por ele realizada nos mostra que compreendeu e interpretou a situação problema e, além disso, utilizou da língua materna (C5) para explicitar sua resposta. A Q7 foi, em sua maioria, resolvida utilizando o pensamento multiplicativo.

No extrato do protocolo do aluno S04 podemos observar que ele compreendeu que o mobílie está em equilíbrio e que, portanto havia uma relação de Equivalência entre os objetos. A sequência das três operações de divisão registradas pelo aluno S04 explicita esse entendimento. Percebemos que a maioria dos alunos compreendeu a ideia do equilíbrio do móbile, contudo para descobrir o peso da estrela cinza muitos deles simplesmente dividiram o peso 160 pela quantidade total de figuras, não levando em consideração que o lado esquerdo do móbile tem menos figuras que do lado direito.

Nas estratégias de resolução dos alunos foi possível observar a presença dos três estágios do desenvolvimento da Álgebra: retórica, sincopada e simbólica (EVES, 2002), e, por conta disso, criamos três categorias de análise a C5, a C6 e a C7, respectivamente. A seguir trouxemos extratos de protocolos comentados que ilustram essas classificações.

Foram classificados como categoria C5 (retórica) os extratos de protocolos nos quais os alunos explicitaram estratégia utilizando a língua materna. A categoria C5 apareceu com mais frequência nas questões Q4 (numérica), Q3 (icônica) e Q7 (icônica). A Q4 foi inspirada numa questão do trabalho de Civinski (2015), explícita na Figura 3.11, reestruturada de modo que para nossa pesquisa optamos por omitir as figuras e o ícone da balança.

Figura 3.11: Questão Q4 na forma icônica



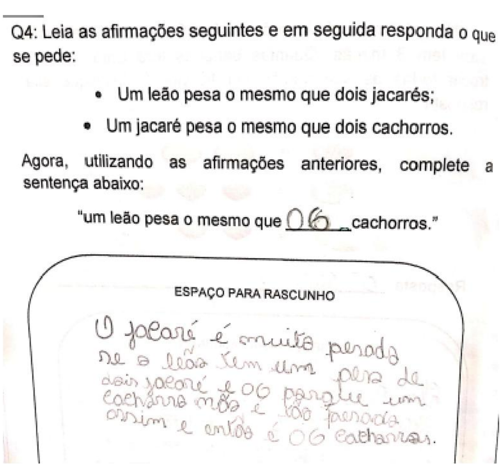
Fonte: (CIVINSKI, 2015, p. 72)

É importante ressaltar que Civinski (2015) aplicou as atividades a 19 alunos do 5º ano, em duas aulas de 38 minutos e que 84% dos alunos responderam corretamente, apresentando facilidade em determinar o resultado. Sentimos-nos motivados a aplicar a mesma questão de forma que não houvesse o ícone para compararmos os resultados.

Ao analisarmos os registros da Q4 observamos que, assim como na pesquisa se Civinski (2015), a maioria dos alunos apresentou facilidade em resolver a situação problema e a segunda estratégia de resolução mais utilizada foi classificada na categoria C5.

Figura 3.12 - Extrato dos protocolos dos alunos A06 e S64

Protocolo do aluno A06



Q4: Leia as afirmações seguintes e em seguida responda o que se pede:

- Um leão pesa o mesmo que dois jacarés;
- Um jacaré pesa o mesmo que dois cachorros.

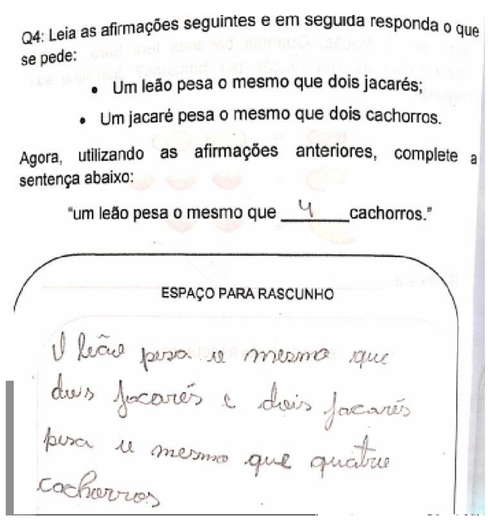
Agora, utilizando as afirmações anteriores, complete a sentença abaixo:

"um leão pesa o mesmo que 06 cachorros."

ESPAÇO PARA RASCUNHO

O jacaré é muito pesado se o leão tem um pesa de dois jacaré e 06 porque um cachorro não é tão pesado assim e então é 06 cachorros.

Protocolo do aluno S64



Q4: Leia as afirmações seguintes e em seguida responda o que se pede:

- Um leão pesa o mesmo que dois jacarés;
- Um jacaré pesa o mesmo que dois cachorros.

Agora, utilizando as afirmações anteriores, complete a sentença abaixo:

"um leão pesa o mesmo que 4 cachorros."

ESPAÇO PARA RASCUNHO

O leão pesa o mesmo que dois jacarés e dois jacarés pesa o mesmo que quatro cachorros

Fonte: Dados da pesquisa

Os dois extratos de protocolo trazem a resolução totalmente em formato retórico, contudo são diferentes em pelo menos um aspecto. Pelo argumento do aluno A06 e por não apresentar cálculo matemático que justificasse sua resposta é possível inferir que ele tenha como modelo de cachorro o de porte pequeno, uma vez que considera que são necessários seis cachorros. O aluno A06 descreve o seu pensamento utilizando a língua materna, que para melhor compreensão do leitor, transcrevemos a seguir a resposta do estudante:

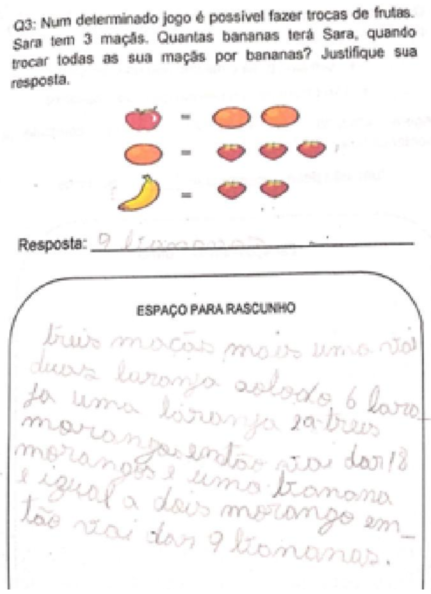
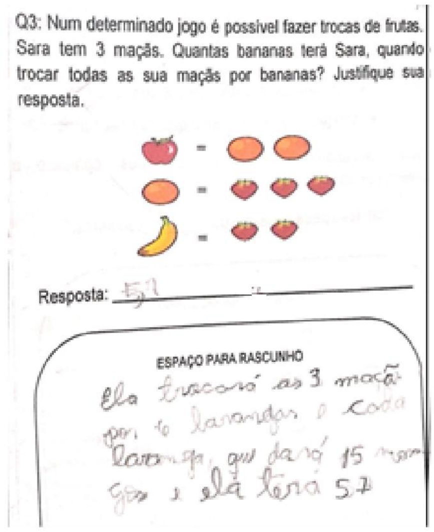
O jacaré é muito pesado, se o leão tem um peso de dois jacarés e 06 porque um cachorro não é tão pesado assim e então é 06 cachorros.

Apesar da resposta está incorreta, ele utiliza a propriedade transitiva, visto que pela escrita do aluno ele relaciona o leão com o jacaré e depois o jacaré com o cachorro. Entretanto, ele ou não entende as equações contidas nas informações do problema ou não concorda com essa Equivalência e assim, não aplica a propriedade transitiva de forma correta.

No extrato do estudante S64 não há operações matemáticas ele apenas transcreve seu pensamento na linguagem natural para explicitar sua resolução, o que justifica a categoria C5 (retórica). Notamos que nessa questão 21 dos 99 alunos tiveram esse mesmo procedimento de resolução, o de argumentar retoricamente sua resolução.

Ainda para a categoria C5 (retórica) trouxemos dois extratos de protocolo, dos alunos S23 e A24, que responderam a Q3 os quais classificamos também na categoria retórica.

Figura 3.13 - Extrato dos protocolos dos alunos S23 e A24

Protocolo do aluno S23	Protocolo do aluno A24
	

Fonte: Dados da pesquisa

Os protocolos S23 e A24 retratam a categoria C5 que corresponde ao primeiro estágio da Álgebra uma vez que "os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos" (EVES, 2002, p. 206). Como é possível observar, os alunos utilizaram da escrita e essa estratégia nos remete ao primeiro estágio do desenvolvimento da Álgebra, período em que tudo era demonstrado e descrito na linguagem natural.

Para melhor compreensão de leitura e análise, transcrevemos a escrita do protocolo do aluno S23: *Trêis maçãs mais uma vai duas laranja ao todo 6 laranjas uma laranja é a treis morangos então vai dar 18 morangos uma banana é igual a dois morangos então vai dar 9 bananas*.

Na primeira parte da escrita, (*Trêis maçãs mais uma vai duas laranja ao todo 6 laranjas*) é possível inferir que o aluno S23 compreende o Princípio Multiplicativo deEquivalência. Na sua escrita, ele encontra uma equação equivalente a equação dada, multiplicando os dois membros de uma equação por um mesmo número, de uma maçã passa a ter três e de duas passa a ter seis laranjas.

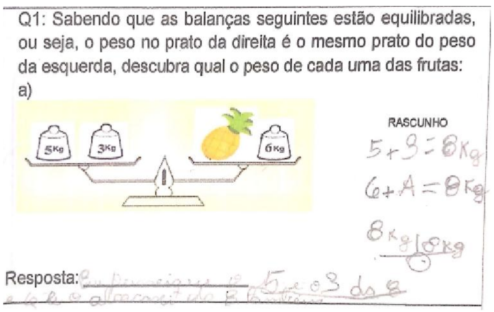
Em seguida ele escreve que *uma laranja é a treis morangos então vai dar 18 morangos*, o que sugere a aplicação da propriedade transitiva da Equivalência. Finalmente, ao escrever que *uma banana é igual a dois morangos então vai dar 9 bananas*, inferimos que ele admite a relação simétrica da Equivalência.

Do mesmo modo, transcrevemos o extrato do protocolo do aluno A24 para analisá-lo: *Ela trocará as 3 maçãs por 6 laranjas e cada laranja que dará 15 morangos e ela terá 57.* Apesar de essa resposta estar incorreta, destacamos dois pontos relevantes: (i) ela utilizou o Princípio Multiplicativo de Equivalência ao responder que *Ela trocará as 3 maçãs por 6 laranja;* (ii) ela lançou mão da propriedade transitiva ao registrar *e cada laranja que dará 15 morangos.* Cabe salientar que o fato dos alunos utilizarem as propriedades e o Princípio Multiplicativo de Equivalência não significa que eles tenham essa consciência, mas suas resoluções demonstram compreensão do conceito de igualdade (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009).

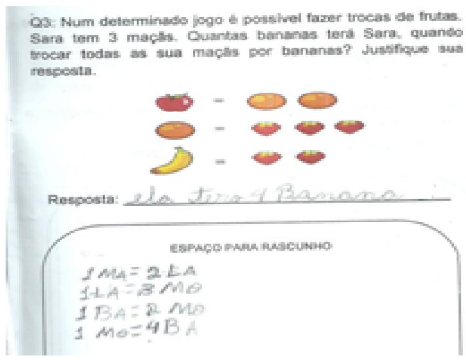
A categoria C6 denominada de sincopada, diz respeito às estratégias em que os alunos utilizaram o segundo estágio do desenvolvimento da Álgebra, o sincopado "em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente" (EVES, 2002, p. 206). Apesar da frequência dessa categoria ter sido pequena, somente em cinco das 1206 respostas categorizadas, acreditamos que foram significativas. A seguir, trouxemos dois extratos de protocolo referentes a essa categoria.

Figura 3.14 - Extrato dos protocolos dos alunos S13 e S46

Protocolo do aluno S13



Protocolo do aluno S46



Fonte: Dados da pesquisa

No registro deixado no extrato do protocolo o aluno S13 transcreve os pratos da balança em linguagem matemática e para a figura do abacaxi ele utiliza a letra A, talvez por ser a primeira letra da palavra. Essa forma de representação é interessante, pois é necessário que na linguagem algébrica a letra tenha significado para que o aluno compreenda a equação. Como pudemos notar nesse e nos demais extratos de protocolos, a utilização da letra pode ser utilizada de maneira natural pelos próprios alunos.

O aluno S13 demonstra a partir de sua resolução, reconhecer o equilíbrio da balança como uma Equivalência, entendendo que nos dois pratos da balança deve ter o mesmo peso (8kg). Essa inferência pode ser notada quando ele monta as duas equações relativas aos dois pratos da balança: 3 + 5 = 8 e 6 + A = 8, contudo não consegue transpor o equilíbrio da balança para a expressão matemática, o qual responde da seguinte maneira:

5 + 3 = 8 Kg
6+ A = 8 Kg
8 Kg | 8 Kg
Eu pensei que o 5 e o 3 dá 8 e 6 e o abacaxi dá 8 também.

Para que possamos analisar a estratégia de resolução do aluno S46, transcrevemos literalmente o que ele registrou nesse extrato de protocolo:

1 MA = 2 LA
1 LA = 3 MO
1BA = 2 MO
1MO = 4 BA

Iniciamos essa análise destacando que, apesar do aluno S46 ter resolvido essa questão de forma incorreta, esse registro traz importantes aspectos do ponto de vista algébrico. O primeiro deles é o que originou a criação dessa categoria, ou seja, o aluno S46 transcreve a questão e a responde por meio de abreviação de palavras. Para representar a equação ele utiliza a sílaba inicial do nome de cada fruta (MA de maçã; LA de laranja; MO de morango; BA de banana) e essa forma de representação é própria do segundo estágio do desenvolvimento da Álgebra, denominado por sincopado.

O segundo aspecto é quanto à escrita da última equação que, embora esteja resolvida de forma equivocada, é possível destacar que o aluno utilizou a propriedade de simetria da equação, pois ele admite a possibilidade de inverter a posição dos membros da equação. Originalmente tínhamos 1BA = 2MO e ele escreve em seguida 1MO = 4BA.

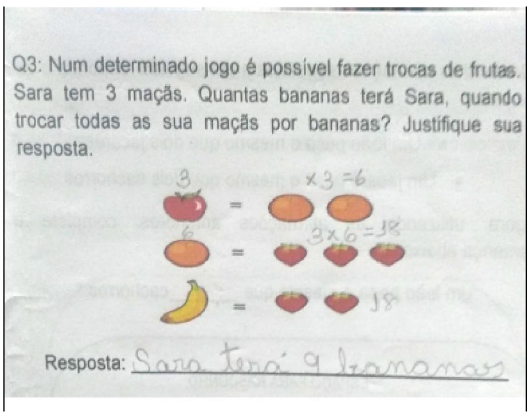
O terceiro aspecto que destacamos, pode estar relacionado ao isolamento da incógnita, nesse caso a quantidade de um morango, típico das estratégias de resolução das equações. Isola-se a incógnita colocando-a no primeiro membro, sendo que o segundo membro da equação representa o resultado da mesma, admitindo assim o sinal de igual como sendo um símbolo unidirecional antecedendo uma resposta numérica (KIERAN, 1981). Contudo, é relevante frisar mais uma vez que essas são inferências a partir do registro escrito, o que significa que é possível que o aluno tenha resolvido sem levar em consideração essas propriedades, mesmo porque nesse ano escolar eles ainda não tiveram o ensino formal do conceito de equação.

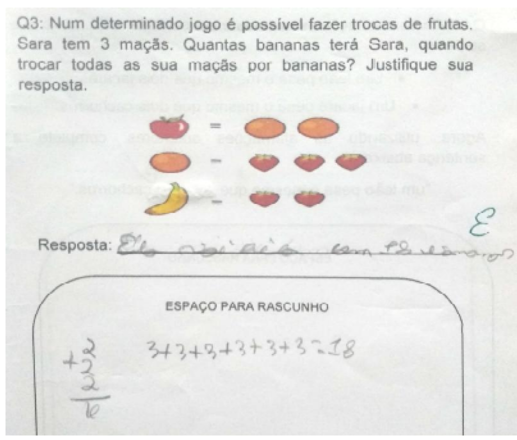
A categoria C7, a simbólica, essa está relacionada ao terceiro estágio da Álgebra no qual as ideias passaram a ser representadas por símbolos (BOYER, 2006). Foi a segunda categoria mais utilizada, uma vez que trata-se de um questionário com questões matemáticas sendo natural que a linguagem simbólica seria a mais requisitada, uma vez que nas resoluções de problemas matemáticos é a mais requisitada.

Trouxemos dois extratos de protocolos, cujas resoluções se utilizam de símbolos, sendo uma correta (S09) e outra incorreta (S66).

Figura 3.15 - Extrato dos protocolos dos alunos S09 e S66

Protocolo do aluno S09	Protocolo do aluno S66





Fonte: Dados da pesquisa

Iniciamos a análise pelo o extrato do protocolo do aluno S09. Ao resolver a questão, o aluno trabalha como os símbolos, se utilizando das informações contidas na questão (as figuras) e explicita cada etapa em cada uma das três equações apresentadas na questão. Na primeira equação, ao escrever o número 3 em cima da figura da maçã (primeiro membro da equação) e a expressão ×3 = 6 no segundo membro da igualdade, é possível inferir que ele está trabalhando com o Princípio Multiplicativo de Equivalência. Na segunda equação, utilizando a propriedade da transitividade, ele coloca o número 6 em cima da figura da laranja (primeiro membro da equação) e a expressão 3×6=18 em cima do segundo membro da equação. Em seguida, ele coloca o 18 ao lado dos dois morangos (segundo membro da equação) e responder que *Sara terá 9 bananas*. Nessa última etapa de sua resolução é possível notar que ele aplica tanto a propriedade transitiva quanto a simétrica.

No que se refere ao aluno S66, ele resolveu também utilizando símbolos matemáticos, contudo não obteve êxito. Dois fatores nos chamaram a atenção nas estratégias utilizadas pelo aluno. O primeiro deles é que ele não utiliza o Princípio Multiplicativo de Equivalência, ao invés disso, ele utiliza da estrutura aditiva para descobrir quantas laranjas são necessárias para trocar por três maçãs e quantos grupos de três morangos, são necessários para trocar por seis laranjas, por esse motivo esse tipo de resolução também representa a C3 (pensamento aditivo). O segundo fator diz respeito a utilização da propriedade transitiva da Equivalência ao aplicar o resultado da primeira troca de frutas na segunda igualdade.

Ainda com relação à categoria C7, fizemos entrevista com alguns alunos a respeito dos três sinais matemáticos muito utilizados nas estratégias de resolução das questões. Os sinais que nos referimos foram os de = (igual), + (mais) e – (menos), perguntamos se eles reconheciam esses sinais e como se chamavam e todos eles foram identificados de forma correta. Como o foco da nossa pesquisa é equação, e o significado do sinal de igual é de fundamental importância para o entendimento desse conceito matemático (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), decidimos perguntar o que o sinal de igual significa para ele. Segue parte da entrevista dos alunos A30 e A09.

Extrato de entrevista do aluno A30:

Pesquisadora: *Para você o que é o sinal de igual? O que significa o sinal de igual?*
Aluno A30*: Aí a gente soma 8 mais 8, 8 mais 8 é 16 né?*
Pesquisadora: *É*
Aluno A30: *Aí esse sinal ta perguntando quanto é.*
Pesquisadora: *Ah, o igual pra você significa quanto é?*
Aluno: *É.*

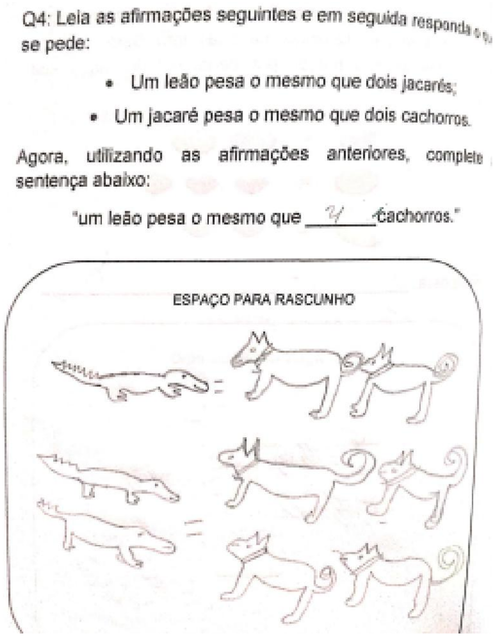
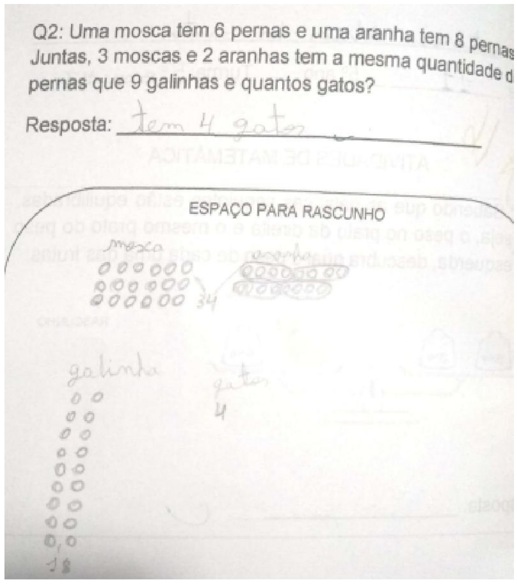
Extrato de entrevista do aluno A09:

Pesquisadora: *Para você o que é o sinal de igual? O que significa o sinal de igual?*
Aluno A09: *É quando junta eu acho, que multiplica ou faz alguma coisa aí quando dá o valor, aí coloca isso (aponta pra o sinal de igual) pra saber que aquele problema ali, o resultado é aquele.*
Pesquisadora: *Hum, então pra você o igual significa (pausa).*
Aluno A09: *O resultado.*

De fato, de acordo com as entrevistas, os alunos entendem que o sinal de igual deve vir sempre precedido de uma operação matemática (tanto da estrutura aditiva quanto da multiplicativa) e significa quanto é, o resultado da operação. Cabe ressaltar que todos os alunos entrevistados estabeleceram esse significado para a igualdade.

As estratégias de resolução categorizadas como C8, as denominamos por pictóricas, referem-se àquelas que os alunos utilizaram desenhos ou ícones para registrar os seu raciocínio. Segue dois protocolos para exemplificar essa categoria.

Figura 3.16 - Extrato dos protocolos dos alunos S32 e A16

Protocolo do aluno S32	Protocolo do aluno A16
	

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos inferir, a partir do extrato do protocolo S32, que o aluno compreende o Princípio Multiplicativo de Equivalência da Igualdade, visto que ele representa a partir do primeiro desenho a igualdade 1jacaré = 2 cachorros, e no segundo desenho ele representa a igualdade 2 jacarés = 4 cachorros, o que representa uma igualdade equivalente a primeira quando multiplicada por 2 em ambos os membros.

No protocolo A16, o aluno demonstra compreender o problema e a relação de igualdade, já que na primeira representação ele desenha 3 fileiras de bolinhas para representar as 18 pernas das moscas, e ao lado 16 bolinhas para representar o total de pernas das duas aranhas, soma o total de bolinhas e coloca entre elas o resultado que é 34. No esquema abaixo, ele representa os pés das 9 galinhas, totalizando 18, e do lado direito escreve 4 gatos, mas podemos observar que as bolinhas que representam as aranhas estão circuladas de 4 em quatro, o que nos leva a inferir que ele sabendo que o gato tem 4 pernas foi circulando e somando as pernas que faltavam, constatando que como circulou 4 grupos de 4 bolinhas, então só poderia ser 4 gatos.

3.2.2 Síntese da análise qualitativa

Apresentamos, nesta seção, uma síntese dos principais pontos que discutimos na análise qualitativa. De posse dos protocolos, criamos nove categorias de análise que julgamos pertinentes às estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, para relembrá-las trazemos novamente o quadro 3.1:

Quadro 3.1: Relação das categorias de análise

Categoria	Nome da Categoria
C1	Relacional
C2	Somente Operacional
C3	Pensamento Aditivo
C4	Pensamento Multiplicativo
C5	Retórica
C6	Sincopada
C7	Simbólica
C8	Pictórica
C9	Só resposta

Fonte: Criado a partir dos dados da pesquisa

As duas primeiras denominadas por Relacional (C1) e Operacional (C2), foram categorias típicas dos itens da Q8, por apresentarem quatro equações numéricas cujo objetivo foi identificar qual o significado do sinal de igual que o aluno assumiria em cada uma delas.

Na categoria Relacional (C1), foram classificadas as estratégias nas quais o aluno demonstra compreender o significado do sinal de igual como Relacional, demonstrando compreender a relação de Equivalência, a simétrica, a reflexiva e a transitiva. Os alunos que cujas estratégias fizeram parte da C1, também compreendem o sinal de igual como Operacional, sendo esse símbolo também o responsável pelo resultado de uma operação. Os dados revelaram que a minoria das estratégias adotadas pelos alunos se encaixa na categoria C1.

No que se refere à categoria Operacional (C2), na qual as estratégias apresentadas revelam que o aluno entende o sinal de igual somente como o resultado de uma operação. A análise dos protocolos mostra que grande parte dos alunos compreende o sinal de igual dessa forma.

O Pensamento Aditivo representado pela categoria C3 refere-se às estratégias que os alunos utilizaram as operações de adição ou de subtração para resolver as questões. Essa categoria levou tanto ao sucesso quanto ao fracasso, sendo que esse último os alunos somavam todas as quantidades presentes nas questões não levando em consideração sua grandeza, sendo mais frequente na Q2.

Quanto à categoria Pensamento Multiplicativo (C4), foi destinada às estratégias que os alunos lançaram mão de operações de multiplicação ou divisão, ou ainda a combinação entre elas, para resolver as questões. De modo geral, observamos que foi frequente a categoria C4 ser acompanhada da categoria C3.

A categoria Retórica (C5) foi destinada às estratégias cujas resoluções das questões os alunos utilizaram a língua materna para explicitar o seu raciocínio. Essa estratégia nos remete ao primeiro estágio do desenvolvimento da Álgebra, período em que tudo era demonstrado e descrito na linguagem natural.

Na estratégia Sincopada (C6), encontramos, nas respostas dos alunos, formas abreviadas dos dados das questões mescladas como símbolos próprios da Matemática. Essa estratégia não foi frequente entre os protocolos analisados, no entanto significativa.

No que diz respeito à categoria Simbólica (C7), esta foi muito frequente entre as estratégias dos alunos, mesmo porque nela foi considerada a utilização dos símbolos matemáticos para a resolução das questões. De certa forma já esperávamos essa alta frequência, pelo fato da Matemática ter linguagem própria e ser comum na resolução de problemas matemáticos.

Quanto à categoria Pictórica (C8), essa está relacionada às estratégias nas quais os alunos utilizaram desenhos ou ícones para registrar os seus raciocínios.

Finalmente, a categoria Somente resposta (C9), apesar da insistência da pesquisadora para que os alunos demonstrassem seu raciocínio no instrumento de pesquisa, essa foi a estratégia de maior incidência.

Percebemos que os alunos se utilizam de variadas estratégias para solucionar situações problemas que envolvam equações, e que principalmente se utilizam dos seus conhecimentos aritméticos para resolvê-los.

CONCLUSÃO

Neste capítulo trouxemos a conclusão dessa pesquisa, apresentando os principais resultados encontrados, reflexões baseados nas análises dos dados coletados, a resposta da questão de pesquisa, bem como sugestões para próximos estudos.

É importante relembrar que o objetivo dessa pesquisa foi *Investigar o desempenho e as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental, na resolução de problemas envolvendo equação do 1º grau, no que diz respeito à Equivalência.* A seguir, apresentamos uma síntese do caminho percorrido para alcançar esse objetivo.

Passos percorridos para a pesquisa, uma retrospectiva

O primeiro passo foi a introdução, que trouxemos um pouco da nossa experiência como professora e as inquietações relacionadas ao ensino da Álgebra. Além disso, a motivação em participar do grupo de pesquisa RePARe que, naquela ocasião, estava desenvolvendo um projeto de pesquisa cujo tema era *Early Algebra.* Tomando como base as leituras e reflexões propiciadas no grupo RePARe, referentes ao desenvolvimento do raciocínio algébrico, a leitura dos documentos oficiais que tratam do currículo escolar brasileiro, bem como a análise do baixo desempenho dos alunos em relação ao conhecimento algébrico, definimos a nossa questão de pesquisa:

Qual é o desempenho e quais são as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental, na resolução de problemas envolvendo a equação do 1º grau, no que diz respeito à Equivalência?

Com o intuito de responder essa questão pesquisa, definimos o desenho da nossa pesquisa no Capítulo 1, A Álgebra em diferentes pontos de vista, trouxe uma discussão a respeito da história da Álgebra, a evolução histórica do estudo das equações. Enfatizamos os três estágios de desenvolvimento da Álgebra: retórico, sincopado e simbólico, bem como estudos correlatos que citam a importância desses três estágios para o ensino da Álgebra. Contemplamos a *Early Algebra* e a sua importância no desenvolvimento do raciocínio algébrico, a sua presença na escola, nos livros didáticos e nos documentos oficiais, PCN e BNCC. Ainda nesse capítulo, trouxemos o conceito matemático, a equação dando ênfase ao entendimento da Equivalência no que diz respeito aos seus Princípios, às suas propriedades e aos significados do sinal de igual.

No Capítulo 2, intitulado Procedimentos Metodológicos, trouxemos a metodologia adotada para a realização da nossa pesquisa de caráter diagnóstico segundo Rudio (2001), na qual o pesquisador busca conhecer e interpretar a realidade, contudo sem modificá-la. A pesquisa foi realizada com seis turmas de 5º ano, do Ensino Fundamental de duas escolas públicas do sul da Bahia, perfazendo um total de 99 alunos.

Elaboramos um instrumento diagnóstico com 9 itens de questões relacionadas à equação do 1º grau. Essas questões foram elaboradas de tal forma que pudéssemos fazer um comparativo entre as questões icônicas e as numéricas. Fizemos também uma entrevista com parte da amostra para melhor compreender o raciocínio dos alunos. A partir da resolução, feita pelos alunos, desse instrumento diagnóstico e das respostas das entrevistas, obtivemos os dados que possibilitaram o desfecho dessa pesquisa.

O capítulo 3, denominado por, A análise dos dados, refere-se à análise dos dados obtidos na pesquisa sob dois pontos de vista, o quantitativo e o qualitativo. Do ponto de vista quantitativo, estatisticamente não houve diferença significativa entre os desempenhos dos alunos das duas escolas, assim sendo unificamos e fizemos análise como se fosse uma única escola.

Do ponto de vista qualitativo, focamos nas estratégias de resolução dos alunos, e a partir delas criamos nove categorias de análise, são elas:

Na categoria Relacional (C1), foram classificadas as estratégias nas quais o aluno demonstra compreender o significado do sinal de igual como Relacional, demonstrando compreender a relação de Equivalência e suas propriedades, a simétrica, a reflexiva e a transitiva.

No que se refere à categoria Operacional (C2), na qual as estratégias apresentadas revelam que o aluno entende o sinal de igual somente como o resultado de uma operação.

O Pensamento Aditivo representado pela categoria C3 refere-se às estratégias que os alunos utilizaram as operações de adição ou de subtração para resolver as questões.

Quanto à categoria Pensamento Multiplicativo (C4), foi destinada às estratégias que os alunos lançaram mão de operações de multiplicação ou divisão, ou ainda a combinação entre elas, para resolver as questões.

A categoria Retórica (C5) foi destinada às estratégias cujas resoluções das questões os alunos utilizaram a língua materna para explicitar o seu raciocínio.

Na estratégia Sincopada (C6) encontramos nas respostas dos alunos formas abreviadas dos dados das questões, mesclados com os símbolos próprios da Matemática.

No que diz respeito à categoria Simbólica (C7) foi considerada a utilização dos símbolos matemáticos para a resolução das questões.

Quanto à categoria Pictórica (C8) essa está relacionada às estratégias nas quais os alunos utilizaram desenhos ou ícones para registrar os seus raciocínios.

Finalmente a categoria Somente resposta (C9) os alunos registraram somente a resposta deixando implícito o raciocínio utilizado para sua resolução.

Retomando a questão de pesquisa

O presente trabalho se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa:

Qual é o desempenho e quais são as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental, na resolução de problemas envolvendo a equação do 1º grau, no que diz respeito à Equivalência?

Tendo em vista responder a questão de pesquisa, iniciamos pelo desempenho dos alunos de 5º ano na resolução de problemas envolvendo equações do 1º grau. Embora tenhamos dados de duas Escolas distintas, não houve diferença significativa entre o desempenho de seus alunos, assim sendo, toda a análise foi feita como alunos de uma única escola. No geral, a média do percentual de acerto das nove questões (totalizando 13 itens de questões) não ultrapassou 30,2%. Embora possa parecer um resultado baixo, menos de um terço das possíveis respostas estarem corretas, nossos colaboradores de pesquisa foram alunos do 5º ano e, na ocasião da coleta de dados, ainda não tiveram acesso formal com o conceito de equação.

Outro resultado que destacamos provém da comparação de todas as questões correlacionadas icônica versus numérica. Os dados revelam que a presença do ícone não foi decisiva para o desempenho dos alunos, visto que a diferença entre os desempenhos nesse quesito foi de três acertos a mais nas questões icônicas, o que se traduz em 0,6 pontos percentuais em favor dos itens icônicos.

Ao analisarmos as questões correlacionadas icônica versus numérica, aos pares, encontramos resultados distintos. De acordo com os dados, somente uma das questões icônicas (Q1 referente a balança de dois pratos) superou, significativamente em desempenho, a sua correlata numérica (Q8b e Q8d, respectivamente). Esse resultado é importante do ponto de vista da utilização do ícone da balança para introduzir a ideia de equação. Contudo, ficou explícito que os alunos não fazem a transposição, naturalmente, do equilíbrio entre os pratos da balança (Q1) para a Equivalência entre os membros de uma equação (Q8b, Q8d).

Ainda a respeito do desempenho, os resultados obtidos na Q8 apontam que, maciçamente, os alunos admitem o significado do sinal de igual como operacional em detrimento ao relacional. Nas respostas dos alunos fica explícito que a igualdade é precedida sempre de uma operação e requer uma resposta numérica única, eliminando a possibilidade de outra operação. De acordo com esses resultados, afirmamos que os alunos admitem a operação como sequencial e unidirecional e o sinal como um operador direcional e sequencial da esquerda para direita.

A segunda parte da questão de pesquisa refere-se às estratégias utilizadas pelos alunos. Ao analisarmos os protocolos, identificamos diferentes estratégias de resolução as quais classificamos em nove categorias de análise, independente se as respostas estavam ou não corretas. Embora, no momento da coleta de dados, tenhamos insistido, veementemente, que os alunos registrassem o seu raciocínio no papel, a categoria mais recorrente foi a Só resposta (C9).

As categorias C1 e C2, Relacional e Operacional respectivamente, foram exclusivas das respostas encontradas na Q8. Em alguns dos protocolos foi possível encontrar estratégias que demonstram que os alunos compreendem ambos os significados do sinal de igual, além das propriedades simétrica, reflexiva e transitiva próprias da relação de Equivalência. No entanto, a maioria das estratégias de resolução da Q8 foi categorizada na C2, o que atesta que o aluno entende o sinal de igual apenas como operacional, como o resultado de uma operação, não compreendendo o sinal de igualdade como a Equivalência entre os dois membros da equação.

As respostas classificadas nas categorias C3 e C4, Pensamento Aditivo e Pensamento Multiplicativo respectivamente, foram encontradas na resolução das questões Q1 a Q7. Essas estratégias também levaram ao acerto e erro, sendo que em alguns protocolos categorizados como Pensamento Aditivo, encontramos adição de parcelas de grandezas diferentes.

Dentre as estratégias de resolução dos alunos, foi possível observar a presença dos três estágios do desenvolvimento da Álgebra a Retórica, a Sincopada e a Simbólica, que classificamos como sendo C5, C6 e C7, respectivamente. Ao classificarmos as respostas dos alunos pudemos observar que houve uma quantidade expressiva de protocolos cujas estratégias foram descritas na língua materna, que caracterizamos por Retórica (C5), pouco utilizada nas aulas de Matemática. Com esse tipo de registro, foi possível detectar, na maioria deles, o raciocínio do aluno por meio de sua argumentação, em especial quando erravam a resposta da questão.

A categoria Sincopada (C6), apesar sua frequência ter sido pequena, somente em cinco das 1206 respostas categorizadas, acreditamos que foram significativas. Nessas respostas, observamos que os alunos utilizavam a primeira letra ou a primeira sílaba para representar o ícone ou a grandeza da quantidade envolvida. Esse dado é importante se levarmos em consideração que é muito comum no início do ensino da Álgebra a utilização, quase que impositiva, do uso das letras x, y ou z para as incógnitas, que para o aluno tem pouco ou nenhum sentido.

No que diz respeito à categoria Simbólica (C7), fizemos entrevista com alguns alunos a respeito dos símbolos matemáticos, em especial ao sinal de igual. As respostas obtidas nas entrevistas foram unânimes, a igualdade é entendida como o sinal que deve vir sempre precedido de uma operação matemática (tanto da estrutura aditiva quanto da multiplicativa) e significa quanto é o resultado da operação.

Com relação à categoria Pictórica (C8), os alunos lançaram mão de desenhos ou ícones para a resolução de algumas questões, sejam elas icônicas ou numéricas. Esses dados da pesquisa nos fazem refletir a respeito das diversas possibilidades de respostas que poderiam ser exploradas em sala de aula e, normalmente, a mais trabalhada e cobrada é aquela que utiliza tão somente os símbolos matemáticos.

Retomando, embora os alunos tenham alcançado um percentual relativamente baixo de média de acerto, a partir de nossa análise concluímos que é preciso explorar o significado relacional da igualdade; essa exploração pode auxiliar o entendimento das propriedades simétrica, reflexiva e transitiva, próprias da relação de Equivalência; o ícone da balança é importante para a introdução do ensino de equação, mas é preciso que o professor faça uma transposição entre o ícone e a sentença matemática, talvez trabalhando as duas formas de maneira simultânea; admitir e trabalhar as respostas a partir das diversas formas de representação como, por exemplo, a retórica, a sincopada, a icônica e não somente a simbólica. Finalmente, mas não menos importante, a partir das respostas dos alunos, quer seja nos registros escritos ou ainda na fala das entrevistas, que é possível sim, trabalhar com conceitos algébricos em conjunto com os conceitos aritméticos, assim como sugere a *Early Algebra.*

Sugestões para pesquisas futuras

Enquanto estávamos em busca de responder a nossa questão de pesquisa, outras indagações foram surgindo e percebemos que nosso trabalho, talvez por ser de caráter diagnóstico, não daria conta de responder. Ao montarmos o nosso instrumento de pesquisa, nós pensamos que as questões icônicas estavam perfeitamente correlacionadas com as questões numéricas e que elas seriam equivalentes sendo possível comparar claramente e observar a potencialidade do ícone para o aluno resolver a questão, mas com exceção das questões Q1 e Q8, na verdade isso não ocorreu, visto que as estratégias utilizadas não foram as mesmas, então talvez houvesse outros fatores que diferenciavam as questões além do ícone. Propomos a seguir três ideias para pesquisas futuras.

Para melhor investigar se há diferença no desempenho dos alunos, no que se refere as questões icônicas e numéricas, criar um segundo instrumento onde as nossas questões numéricas (Q2, Q4, Q5) apresentassem ícones e as icônicas (Q3, Q6, Q7) fossem retiradas os ícones, pois aí de fato teríamos um comparativo e uma melhor percepção de que o ícone ajuda ou não na resolução das questões.

Como o nosso trabalho teve um público alvo restrito, alunos do 5º ano, que ainda não haviam tido um encontro formal com a Álgebra, sugerimos que a pesquisa fosse replicada para turmas de 7º, 8º e 9º anos, a fim de compararmos o desempenho e as estratégias utilizadas pelos dois anos escolares. É provável que a medida que os alunos evoluem no estudo algébrico eles melhoraram seu desempenho, contudo como seriam as estratégias utilizadas por eles?

O professor de uma das turmas em que trabalhamos se mostrou muito interessado em saber a respeito de *Early Algebra* e de como trabalhar a Álgebra com seus alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Esse fato nos fez perceber a necessidade de ser feito um trabalho de formação de professores com foco na *Early Algebra* para que estes possam apropriar-se desse conhecimento e desenvolver nos seus alunos as competências e habilidades necessárias para o raciocínio algébrico.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, ÁLVARO. **Praticando matemática**. 3. Ed renovada – São Paulo; Editora do Brasil, 2012 (7º ano).

BANDARRA, L. O sinal de igual – um estudo vertical. EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da álgebra. **Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática**, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, p. 305–322.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto. 3.ed, 2010.

BASTOS. ***Early Algebra*:** as estratégias de resolução de estudantes do 4º e 5º ano frente a problemas que aludem à álgebra. Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2019.

BAUMGART, John K. **História da álgebra**; Trad. Hygino H. Domingues – São Paulo: Atual, 1992 – Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 4

BERNARD, JHON E., COHEN, MARTIN P. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra**. (Hygino H. Domingues, trad.). São Paulo: Atual, 1995. p. 111 – 126.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 8.ed. – São Paulo: Moderna, 2015 (7º ano)

BITENCOURT, Daiane Venancio. **Early algebra na perspectiva do livro didático-** Dissertação de mestrado, 2018. Disponível em:http://ppgemuesc.com.br/producao-discente/. Acesso em: Abr., 2019.

BLANTON, M.;KAPUT, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, 36(5), 412-446.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; AYRTON, O. **Matemática**: fazendo a diferença– 5º Ed – São Paulo: FTD, 2006.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-26.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCpublicacao.pdf>. Acesso em: 14 de julho de 2017.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. XVI, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARRAHER D.;SCHLIEMANN, A.;SCHWARTZ, J. Early algebra is not the same as algebra early. In: KAPUT, J.;CARRAHER, D.;BLANTON, M. (Eds). **Algebra in the Early Grades** (p. 235-272).LEA: New York, 2008.

CARRAHER, D.W.; SCHLIEMANN, A.D. (2016). Powerful Ideas in Elementary MathematicsEducation. In:ENGLISH, L.; KIRSHNER, D. (Ed.). **Handbook of International Research in Mathematics Education** (3rd edition, pp. 191-218. New York: Taylor & Francis.

CIVINSKI, D. D. **Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no ensino fundamental**. Dissertação de mestrado. Blumenau, 2015.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal**. Boletim de Educação Matemática**, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 97-126

COELHO, Flávio Ulhoa; AGUIAR, Márcia. **A história da álgebra e o pensamento algébrico**: correlações com o ensino - ESTUDOS AVANÇADOS 32 (94), 2018.

EVES, H., **Introdução à História da Matemática.** Campinas, Editora da Unicamp, 2002.

FERREIRA, Miriam Criez Nobrega; RIBEIRO, Alessandro Jacques; RIBEIRO, Carlos Miguel. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. **Educação e Fronteiras** (online), Dourado s/MS, v.6, n.1 7 p.34-47, maio/ago. 2016, 34.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL. A. Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**, v,4, n. 1, p. 78-91, 1993.

GARBI, G.G. **O Romance das equações Algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

GIL, KATIA HENN **- Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra -** Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre 2008.

GOLDEMBERG, Miriam. **A Arte de Pesquisar**. Ed Record, São Paulo, 2004.

HOUSE, PEGGY A. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.** In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). As idéias da álgebra. (Hygino H. Domingues, trad.). São Paulo: Atual, 1995. p. 1 – 8

KATZ, Victor. J. **Algebra**: Gateway to a Technological Future, Columbia: MAA Reports, 2007.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema& T. Romberg (Orgs.), **Mathematics classrooms that promote understanding** (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999.

KATZ, Victor. J. **Algebra**: Gateway to a Technological Future, Columbia: MAA Reports, 2007

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics,** 12, 1981. p. 317-326.

KIERAN, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In: GUTIÉRREZ, A; BOERO, P. (Eds.).**Handbook of research on psychology of mathematics education**:Past, present and future (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense.

LESSA, Mônica Maria Lins; FALCAO, Jorge Tarcísio da Rocha. **Pensamento e linguagem**: uma discussão no campo da psicologia da educação matemática. *Psicol. Reflex. Crit.* [online]. 2005, vol.18, n.3, pp.315-322. ISSN 0102-7972. http://dx.doi.org/10.1590/S0102-79722005000300004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus, 2006.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, C. C. C. F. **Discussões sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 15, número especial, p. 817-835, 2013.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; SANTOS, Aparecido dos; MERLINI, Vera Lucia. - O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciênc. Educ**., Bauru, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014

MILIES, F. C. P. Breve História da Álgebra Abstrata. Minicurso apresentado na **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática** – SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004. [Links]

OLIVEIRA, Caio Fábio dos Santos de. **Formação continuada de professores e a Early Álgebra**: uma intervenção híbrida. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

História da Álgebra Abstrata. Minicurso apresentado na **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática** – SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004. [Links]

PANOSSIAN, Maria Lúcia. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino de álgebra**- Tese de Doutorado- Faculdade de educação da universidade de São Paulo, 2014.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

PONTE, J.P. da. As equações nos manuais escolares. In: **Revista Brasileira de História de Matemática**. Educação Matemática, v.4, n.8, p. 149-170, 2003.

______. Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores** (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE. 2006.

PORTO, R. S. O. **Early Algebra**: prelúdio da álgebra por estudantes do 3º e 5º Anos do Ensino Fundamental. 2018. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic**: From Children's Ideas to Classroom Practice. 1ª ed. USA: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

SILVA, T. H. I., & RIBEIRO, A. J. (2014). **O sinal de igualdade e seus diferentes significados**: buscando rupturas na transição entre os Ensinos Fundamental I e II.

RELATÓRIO SAEB (ANEB e ANRESC) 2005-2015: panorama da década. – Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2018. 154 p. : il.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Equação e seus multisignificados no ensino de matemática**: contribuições de um estudo epistemológico. Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

______. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, vol 2, núm 1, jan./abr. 2009.

______. Álgebra e seu ensino: dando eco às múltiplas "vozes" da educação básica. **REnCiMa**, Edição Especial: Educação Matemática, v.7, n.4, p. 1-14, 2016.

RIBEIRO, A. J.; BEZERRA, F. J. B. (Org.); GOMES, V. M. S. (Org.). **Formação de professores que ensinam Matemática e a Álgebra da Educação Básica**: um projeto desenvolvido na Universidade Federal do ABC, no âmbito do Observatório da Educação. 01 ed. Campinas/SP: Edições Leitura Crítica, 2017. v. 01, p. 200.

ROONEY, A. **A história da Matemática** - desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: Makron Books do Brasil, 2012.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa cientifica**. 29.ed. Petrópolis: Vozes, 1979.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática para a 2ª série ginasial**. 95ª ed. São Paulo: Companhia editora nacional, 1963.

SANTOS, Daniele Miranda Fernandes; MORELATTI, Raquel Miotto. **Ensino de equação do 1º grau**: concepções de professores de matemática.Curitiba: Appris, 2016.

SCHLIEMANN, Analúcia D. CARRAHER, David W.; GOODROW,Anne.;CADDLE, Mary C.; PORTER, Megan.**Equations in elementary school -** Tufts University, TERC, Rhode Island College Tufts University, Shady Hill School, 2013.

SILVA, T. H. I., & RIBEIRO, A. J. (2014). O sinal de igualdade e seus diferentes significados: buscando rupturas na transição entre os Ensinos Fundamental I e II.**REnCiMa**- Revista de Ensino de Ciências e Matemática. v.5, n.2, p.75-90, 2014.

TEIXEIRA, Antônio César Nascimento. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental**: uma proposta de intervenção**.** Dissertação apresentada à banca examinadora da universidade estadual de santa cruz. Ilhéus – BA, 2016.

TREVISAN, A. L.; VIEIRA, A.F.M.; DALTO, J.O.; BALDINI, L. A. F.Manifestações da linguagem algébrica evidenciadas na produção escrita de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.**Revista Paranaense de Educação Matemática,** Campo Mourão, PR, v.7, p.71-87, 2018.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra**. (Hygino H. Domingues, trad.). São Paulo: Atual, 1995. p. 23 – 37.

VORDERMAN, Carol. **Matemática para pais e filhos**. A maneira mais fácil de compreender e explicar todos os conceitos da disciplina. São Paulo: Publifolha, 2015.

VERGNAUD, GERARD. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas**. Um exemplo: As estruturas aditivas. EDITORA Instituto Superior de Psicologia Aplicada, Análise Psicológica, 5 (1), 75-90, 1986.

APÊNDICE

INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO

Q8: Complete os quadradinhos de forma que as igualdades sejam verdadeiras:

a) 4 + 5 = $\square$

b) 8 + 4 = $\square$ + 5

c) $\square$ = 9+5

d) 7 + $\square$ = 6 + 4

Q9: Escreva uma expressão matemática que possa representar o equilíbrio das balanças da questão Q1

Nome: ____

Idade: _____________ 5º ano Turma: ___________

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

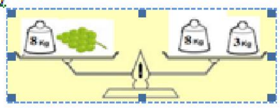
Q1: Sabendo que as balanças seguintes estão equilibradas, ou seja, o peso no prato da direita é o mesmo prato do peso da esquerda, descubra qual o peso de cada uma das frutas:

a)

RASCUNHO

Resposta: __________________

b)



RASCUNHO

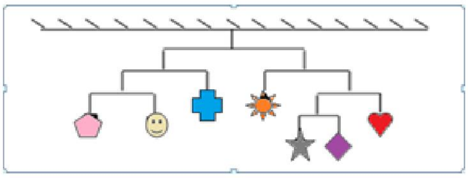
Resposta___________________

Q2: Uma mosca tem 6 pernas e uma aranha tem 8 pernas. Juntas, 3 moscas e 2 aranhas tem a mesma quantidade de pernas que 9 galinhas e quantos gatos?

Resposta: ___________________________________

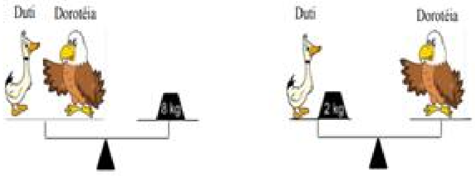
ESPAÇO PARA RASCUNHO

Q7: Abaixo temos representado um objeto que está em equilíbrio. Sabendo que o peso dos fios e das barras deve ser desconsiderado, e que o objeto pesa no total 160 gramas, determine o peso da estrela cinza Justifique sua resposta.



ESPAÇO PARA RASCUNHO

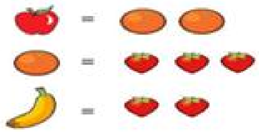
Q6: As balanças abaixo estão equilibradas, sendo assim, determine o peso do pato Duti e da águia Dorotéia.



Resposta: ______________________________

ESPAÇO PARA RASCUNHO

Q3: Num determinado jogo é possível fazer trocas de frutas. Sara tem 3 maçãs. Quantas bananas terá Sara, quando trocar todas as sua maçãs por bananas? Justifique sua resposta.



Resposta: ______________________________

ESPAÇO PARA RASCUNHO

Q4: Leia as afirmações seguintes e em seguida responda o que se pede:

- Um leão pesa o mesmo que dois jacarés;
- Um jacaré pesa o mesmo que dois cachorros.

Agora, utilizando as afirmações anteriores, complete a sentença abaixo:

"um leão pesa o mesmo que _______cachorros."

ESPAÇO PARA RASCUNHO

Q5: Diego e Marcus tem a mesma quantidade de dinheiro. Diego tem um valor dentro da carteira e mais R$ 3,00 na mão. Marcus tem 2 vezes mais o valor que Diego tem dentro da carteira. Quanto Diego tem na sua carteira?

Resposta: ______________________________

ESPAÇO PARA RASCUNHO