



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

WÉRITON DE SOUZA LÔBO

LIMITES E POTENCIALIDADES DE UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO
PARA AMPLIAÇÃO DO CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA

ILHÉUS, BA
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

WÉRITON DE SOUZA LÔBO

LIMITES E POTENCIALIDADES DE UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO
PARA AMPLIAÇÃO DO CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Irene Maurício Cazorla

ILHÉUS, BA
2019

L799

Lôbo, Wériton de Souza.

Limites e potencialidades de uma sequência de ensino para ampliação do conceito de média aritmética / Wériton de Souza Lôbo. – Ilhéus, BA: UESC, 2019.

145f. : il.

Orientadora: Irene Maurício Cazorla

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Educação matemática.

Inclui referências e apêndices.

1. Aritmética – Estudo e ensino. 2. Conceitos. 3. Investigação científica. 4. Alfabetização estatística. 5. Ensino. 6. Sequências (Matemática). I. Título.

CDD 372.72

WÉRITON DE SOUZA LÔBO

**LIMITES E POTENCIALIDADES DE UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO
PARA AMPLIAÇÃO DO CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA**

Dissertação apresentada à Universidade
Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título
de Mestre em Educação Matemática.

Ilhéus, 24 de julho de 2019.

Profa. Dra. Irene Maurício Cazorla
UESC
(Orientadora)

Profa. Dra. Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana
UESC

Profa. Dra. Míriam Cardoso Utsumi
UNICAMP- Campinas

**Ilhéus, BA
2019**

DEDICATÓRIA

À minha pequena, grande e guerreira família, Rubens, Luzinete, Daisy, Danyele e Willian e os meus sobrinhos Lys e Ailton, pelo amor, cuidado e incentivo. E à minha orientadora, que contribuiu de forma significativa para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Nesta página especial quero agradecer àqueles que me ajudaram, compreenderam e sabem da razão da realização desse projeto.

Primeiramente, a Deus e à Nossa Senhora, pelas bênçãos alcançadas, força para enfrentar as dificuldades, interseção e sabedoria para concluir este trabalho que tanto desejei.

À minha família, meu pai Rubens, minha mãe Luzinete, meus irmãos Dayse, Danye e Willian e sobrinhos Lys e Aílton obrigado por acreditarem, compreenderem e confiarem em mim durante esse período de ausência.

À minha orientadora, Profa. Dra. Irene Maurício Cazorla, pelas excelentes contribuições para a minha formação, pela confiança, paciência e pela dedicação para edificação deste trabalho. Muito obrigado. Que o Senhor possa retribuir tudo que a senhora fez por mim.

À minha namorada, Neyla, e seus familiares, pela compreensão, companheirismo, apoio e incentivo para a realização desse projeto.

Aos amigos que conheci nesse percurso, com os quais brincamos, farreamos, dividimos casa... mas, na hora em que precisei, estavam ali, dispostos a ajudar, a saber: Luana, Jean, Kamilla, Thaís e demais colegas.

Ao grupo de pesquisa GPEMEC, pela caminhada, parceria e aprendizado. Meu muito obrigado. Sou muito feliz por fazer parte desse grupo.

Aos parceiros do grupo de segunda que contribuíram para a construção deste texto, Profa. Dra. Eurivalda Santana e Profa. Dra. Maria Elizabete e aos colegas Cláudio, Helenita, Lânia Gleide, Luana, Luciano, Sandra Paula e Thiago. Obrigado pelas colaborações!

Ao PPGEM, de maneira especial aos professores pelos ensinamentos para meu desenvolvimento profissional, e a Rafael Bertoldo, pela atenção, competência e por sempre estar à disposição.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa, Profa. Dra. Eurivalda Santana, Profa. Dra. Miriam Utsumi e Prof. Dr. Leandro Diniz, muito obrigado pelas contribuições.

À CAPES, pelo financiamento dessa pesquisa.

Aos demais colegas, a saber: colegas dos semestres 2015.2, 2016.1, 2016. 2, 2017.1, 2018.1, 2018.2 e 2019.1 por todos os momentos felizes que tivemos juntos.

À minha turma Allan Elkee, Denisson Novais, Frank Neves, Letícia Menezes, Martielle Soledade, Sandra Paula e Wesley Nery. GRATO!!!

Aos meus irmãos de fé da Paróquia São Vicente Ferrer, pelas orações e carinho de sempre.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas que acreditaram em mim e me apoiaram durante todos estes anos.

Tudo posso Naquele que me fortalece!!!

Filipenses 4:13

LIMITES E POTENCIALIDADES DE UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA AMPLIAÇÃO DO CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo investigar os limites e potencialidades de uma sequência de ensino construída para ampliar o conceito de Média Aritmética, pautada nos princípios do ciclo investigativo de Wild e Pfannkuch e do letramento estatístico de Gal. Para trabalhar o conceito de média nos ancoramos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e de uma primeira aproximação do campo conceitual da média. A pesquisa, do tipo intervencionista, foi realizada pela professora de Matemática, em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública do interior da Bahia, que implementou a sequência de ensino denominada “Cartão de vacinação”, sendo que o planejamento, análise e reflexão sobre o ensino foram realizados em colaboração com o pesquisador, em sete encontros, que foram filmados e os registros dos estudantes foram coletados. A sequência foi iniciada com uma palestra sobre a importância da vacinação para a saúde humana, a partir da qual a professora e os estudantes formularam o problema de investigação e o planejamento da atividade; os estudantes coletaram dados a partir dos seus cartões de vacinação, construíram o banco de dados, tabelas, gráficos e calcularam a média e ao final responderam a questão de investigação. Os resultados mostram que envolver os estudantes no processo investigativo, coletando, tratando e analisando dados de seu contexto social contribui para ampliar o domínio dos conceitos estatísticos, propiciando ao estudante a oportunidade de ter um papel ativo na produção do seu conhecimento e a tomada de consciência sobre o poder desse conhecimento na tomada de decisões para suas vidas. Todavia, verificamos que essa não conseguiu gerar outras situações que permitissem explorar outras propriedades e representações da média. Nesse sentido, concluímos que se faz necessário combinar estratégias a fim de abranger os diversos aspectos deste campo conceitual e sua apropriação.

Palavras-chave: Média Aritmética. Campos Conceituais. Ciclo investigativo. Letramento Estatístico. Sequência de ensino.

LIMITS AND POTENTIALITY OF A TEACHING SEQUENCE FOR EXTENSION OF THE ARITHMETIC MEAN CONCEPT

ABSTRACT

This research aims to investigate the limits and potentialities of a sequence constructed to extend the concept of Arithmetic Mean, based on the principles of Wild and Pfannkuch investigation cycle and the statistical literacy of Gal. In order to work the concept of average, we anchor ourselves in Vergnaud's Theory of Conceptual Fields and a first approximation of the conceptual field of the average. The research, of the interventionist type, was carried out by the Mathematics teacher, in a class of 9th grade of Elementary School, of a public school in the interior of Bahia, which implemented the teaching sequence called "Vaccination card", and the planning, analysis and reflection on teaching were conducted in collaboration with the researcher, in seven meetings, that were filmed and student records were collected. The sequence was started with a lecture about the importance of vaccination to human health, from which the teacher and the students formulated the problem, the investigation question and the planning of the activity; the students collected data from their vaccination cards, constructed the database, tables, graphs and calculated the average and at the end answered the question of investigation. The results show that involving students in the research process, collecting, treating and analyzing data from their social context contributes to expand the control of statistical concepts, giving the student the opportunity to take an active role in the production of their knowledge and awareness about the power of this knowledge in making decisions for their lives. However, we found that this could not generate other situations that would allow exploring other properties and representations of the mean. In this sense, we conclude that it is necessary to combine strategies in order to cover the various aspects of this conceptual field and his appropriation.

Keywords: Arithmetic Mean. Conceptual Fields. Investigation cycle. Statistical literacy. Teaching sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Modelo do Letramento Estatístico baseado em Gal (2002)	39
Figura 2	Ciclo Investigativo PPDAC	40
Figura 3	Situações para encontrar a média aritmética	49
Figura 4	Representação gráfica da média no diagrama de hastes	52
Figura 5	Diagrama de hastes do número de vacinas completas tomadas	54
Figura 6	Histograma da altura de 22 estudantes	55
Figura 7	Média calculada a partir dos dados brutos e a representação da altura de 22 estudantes	57
Figura 8	Número de casos de duas doenças DRSAI	62
Figura 9	Representação dos dados no diagrama de pontos	64
Figura 10	Fluxo da transformação dos dados e fontes para o cálculo da média	66
Figura 11	Representação da média aritmética no gráfico de barras	68
Figura 12	Representação da média aritmética como “fiel da balança”	68
Figura 13	Representação pictograma da taxa de fecundidade	69
Figura 14	Representação da média aritmética como o “fiel da balança” proposta por Cobo	73
Figura 15	Modelo do cartão de vacinação preenchido por um estudante	89
Figura 16	Solução apresentada pela Dupla 1 referente à porcentagem da linha do Total	93
Figura 17	Solução apresentada pela Dupla 8, referente à porcentagem da linha do Total	94
Figura 18	Gráfico de barras construído pela Dupla 13, referente à Cobertura Vacinal dos estudantes do 9º ano A	95
Figura 19	Resposta de um estudante da Dupla 6 referente à Cobertura Vacinal	96
Figura 20	Resposta de um estudante da Dupla 8 referente à Cobertura Vacinal	96
Figura 21	Cálculo da média para as meninas a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 10	98
Figura 22	Cálculo da média para as meninas a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 2	99
Figura 23	Número de vacinas tomadas pelas meninas	100
Figura 24	Número de meninas que tomaram cada vacina	100

Figura 25	Cálculo da média para as meninas a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 5	101
Figura 26	Cálculo da média para os meninos a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 1	102
Figura 27	Cálculo da média para os meninos a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 4	102
Figura 28	Cálculo da média para os estudantes (meninas e meninos) a partir dos dados brutos, realizado pela Dupla 6	103
Figura 29	Cálculo da média a partir das somas parciais de grupos realizado pela Dupla 5	104
Figura 30	Protocolo para o cálculo da média a partir da TDF realizado pela Dupla 1.....	105
Figura 31	Construção do gráfico de barras a partir da TDF realizada pela Dupla 7	106
Figura 32	Solução da Dupla 5 para o cálculo do número de vacinas completas tomadas e da média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes	107
Figura 33	Solução da Dupla 6 referente à construção da TDF a partir das somas parciais	108
Figura 34	Interpretação da média da Dupla 5	110
Figura 35	Percepção da compreensão a partir do cálculo procedimental da Dupla 13..	111
Figura 36	Relato do Estudante 2 da Dupla 11 referente à sequência de ensino	114
Figura 37	Relato do Estudante 1 da Dupla 1 referente à sequência de ensino	115
Figura 38	Relato do Estudante 2 da Dupla 10 referente à sequência de ensino	115
Figura 39	Relato do Estudante 1 da Dupla 6 referente à sequência de ensino	116

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Conteúdos conceituais e procedimentais propostos para o ensino de Estatística no primeiro e segundo ciclo do Ensino Fundamental	26
Quadro 2	Conteúdos propostos pelos PCNEM para o ensino de Estatística no Ensino Médio	29
Quadro 3	Conteúdos, objetivos e habilidades propostos para o ensino de Estatística pela BNCC, nos anos iniciais do Ensino Fundamental	32
Quadro 4	Conteúdos, objetivos e habilidades propostos para o ensino de Estatística pela BNCC, nos anos finais do Ensino Fundamental	33
Quadro 5	Abreviação do cálculo da média “ponderada”	55
Quadro 6	Estatística da altura dos estudantes por gênero	58
Quadro 7	Renda per capita dos estados brasileiros em 2017	60
Quadro 8	Cálculo dos desvios dos valores em relação à média para as duas doenças	66
Quadro 9	Artigos científicos envolvendo a média aritmética	71
Quadro 10	Dissertação e teses envolvendo a média aritmética, publicados no período de 2008 a 2018	72
Quadro 11	Planejamento das atividades a serem desenvolvidas na intervenção de ensino	87
Quadro 12	Número de vacinas tomadas pelas meninas	101
Quadro 13	Resposta das duplas referente à quinta tarefa	112

LISTA DE SIGLAS

BA	Bahia
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CDC	Centro de Controle e Prevenção de Doenças dos Estados Unidos da América
DCI	Diário, Comercio, Industria & Serviços
D-ESTAT	Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática
DRSAI	Doenças Relacionadas ao Saneamento Ambiental Inadequado
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FNUAP	Fundo da População das Nações Unidas
GPEMEC	Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e em Ciências
IBGE	Instituto Nacional de Geografia e Estatística
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IES	Instituto de Ensino Superior
IDH	Índice de Desenvolvimento Humano
MPF	Ministério Público Federal
MTC	Medidas de Tendência Central
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OMS	Organização Mundial de Saúde
ONU	Organização das Nações Unidas
OPAS	Organização Pan Americana de saúde
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIB	Produto Interno Bruto
PNAD	Pesquisa Nacional por Amostragem de Domicílios
PNB	Produto Nacional Bruto
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PPDAC	Problema, Planejamento, Dados, Análise e Conclusão
PPGEM	Programa de Pós-graduação em Educação Matemática
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SESAB	Secretaria da Saúde do Estado da Bahia
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCC	Teoria dos Campos Conceituais

TCLE	Termo de Compromisso Livre e Esclarecido
TDF	Tabela de Distribuição de Frequência
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
UNIAN	Universidade Anhanguera de São Paulo
UNIRIO	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	TDF para calcular a média de uma variável discreta que toma poucos valores	55
Tabela 2	TDF para calcular a média de uma variável agrupada em classes	56
Tabela 3	Número de filhos por mulher	61

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
O ENSINO DE ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	24
1.1 Estatística na Educação Básica	24
1.1.1 A Estatística nos Parâmetros Curriculares Nacionais e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio	25
1.1.2 A Estatística na Base Nacional Comum Curricular – BNCC.....	30
1.1.3 A média aritmética e seu ensino na Educação Básica	36
1.2 O Letramento Estatístico	38
1.3 O Ciclo Investigativo – PPDAC	39
1.4 Interfaces do letramento e do ciclo investigativo na abordagem de conteúdos estatísticos	41
CAPÍTULO II:.....	44
A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.....	44
2.1 Teoria dos Campos Conceituais	44
2.2 O campo conceitual da média	48
2.2.1 As Situações	49
2.3 Os Invariantes	58
2.6 As representações.....	65
2.3 As pesquisas sobre a média aritmética	69
CAPÍTULO III	84
PERCURSO METODOLÓGICO	84
3.1 Contexto da pesquisa do D-Estat.....	84
3.2 O tipo de estudo.....	85
3.3 Os participantes	85
3.4 Os procedimentos.....	86
3.5 Instrumentos.....	89
3.5.1 Ficha do cartão de vacinação – CV	89
3.5.2 Banco de dados em papel metro e em papel A4.....	89
3.5.3 Sequência de Ensino Cartão de Vacinação	90
3.6 Guia da Sequência de Ensino Cartão de Vacinação.....	91
3.7 Procedimentos adotados para a análise dos vídeos e dos registos dos estudantes ao longo da intervenção	91
CAPÍTULO IV.....	92

ANÁLISE	92
4.1 Desenvolvimento da intervenção de ensino	92
4.1.1 Desenvolvimento da sequência de ensino relativo à cobertura vacinal	92
4.1.2 Analisando a situação de vacinação dos estudantes	97
4.2 Fechando o ciclo investigativo PPDAC	112
CAPITULO V	117
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	117
REFERÊNCIAS	121

INTRODUÇÃO

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a construção”.

Paulo Freire

A cada dia presenciamos o crescente uso de informações, nos mais diversos meios de comunicação, envolvendo conceitos estatísticos, que são apresentadas em tabelas, gráficos e estatísticas resumo, tornando-se cada vez mais necessário compreendê-las, analisá-las e interpretá-las, destacando a importância do ensino da Estatística como forma de possibilitar a leitura e a compreensão do mundo em que os cidadãos estão inseridos, contribuindo, assim, com uma formação crítica.

No Brasil, o ensino de Estatística na Educação Básica é recomendado, oficialmente, a partir da publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998), que inseriu o bloco “Tratamento da Informação”, que é um dos quatro blocos que compõem o componente curricular de Matemática. A orientação é que ela deva ser ensinada durante toda a Educação Básica, desde os anos iniciais até o final do Ensino Médio. Sua inserção teve como objetivo desenvolver competências relativas ao método estatístico. No caso do Ensino Fundamental, anos finais, enfatiza que:

A finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos (BRASIL, 1998, p. 52).

Com relação às Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2006), os conteúdos de Estatística são abordados no bloco “Análise de Dados”, que é um dos quatro blocos do componente Matemática, e destaca que:

Durante o ensino médio, os alunos precisam adquirir entendimento sobre o propósito e a lógica das investigações estatísticas, bem como sobre o processo de investigação. Deve-se possibilitar aos estudantes o entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos (BRASIL, 2006, p. 79).

Com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) para o Ensino Fundamental, o componente curricular de Matemática será implementado em cinco unidades temáticas, das quais uma delas é específica para o ensino de Estatística e Probabilidade. A BNCC (BRASIL, 2018) propõe para o ensino de Estatística uma:

[...] abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL, 2018, p. 274).

Contudo, as orientações curriculares sobre o ensino de Estatística na Educação Básica não se limitam ao componente curricular Matemática, mas ao contrário, a riqueza de sua utilização perpassa as orientações curriculares dos diversos componentes curriculares, tanto das Ciências Humanas, quanto das Ciências da Natureza.

Além disso, a Estatística, decorrente da revolução computacional e do tratamento de milhares de dados em frações de segundos, está em franca expansão, e seus procedimentos são utilizados em grande escala e, na mesma proporção, a divulgação de seus resultados domina as manchetes cotidianas do mundo. Fenômenos como a utilização dos dados das redes sociais, como o da “*Cambridge Analytica*”¹, para manipular as decisões de cidadãos americanos na eleição para presidente dos Estados Unidos da América em 2016, nos alertam para a necessidade do ensino de Estatística para a “leitura de mundo”.

Nesse sentido, acreditamos que o ensino de Estatística não pode, e nem deve ser pautado apenas para o domínio dos aspectos procedimentais de suas ferramentas, mas ao contrário, deve ser ensinado para contribuir na leitura de mundo, o que tem sido denominado de letramento estatístico. Segundo Gal (2002), podemos entender o letramento estatístico, como a capacidade que um adulto possui em elaborar e interpretar questões críticas na leitura de informações estatísticas. Esse adulto, ainda, precisa ter competência para discutir ou comunicar sua compreensão diante de tais informações e, assim, poder emitir opiniões sobre suas implicações e fazer considerações acerca da aceitação das conclusões fornecidas.

Além da Estatística ser uma ferramenta poderosa para ampliar a leitura de mundo, essa, pela sua própria natureza, pode contribuir para o desenvolvimento do espírito científico, aguçar a curiosidade do estudante, que pensa, reflete e é instigado a formular problemas para os fenômenos que perpassam sua vida cotidiana, levantar conjecturas e cotejá-las com evidências empíricas.

No caso do tema escolhido para nossa dissertação, sobre o problema que o mundo está enfrentando com o retorno de doenças, controladas via vacinação, o estudante poderá aprender a calcular a média e fazer conjecturas do tipo: as meninas tomam mais vacinas do que os

¹ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=x1SnHHby0wA>. Acesso em: 06 nov. 2018.

meninos? Aprender a calcular a porcentagem de estudantes da sala de aula que tomaram a vacina contra a HPV, que é a frequência relativa (em porcentagem) e que isso é denominado pela área de saúde de “cobertura vacinal”.

Dessa forma, ao ler a manchete: “Brasil perderá certificado de erradicação do sarampo após novo caso registrado” (G1, 2019), o estudante poderá ser capaz de entender que a raiz do problema está também na conscientização sobre a importância da vacinação e na responsabilidade de cada um de nós sobre a tomada de todas as vacinas e as doses recomendadas.

Nesse sentido, é preciso que o estudante amplie seu conhecimento sobre o contexto, no caso, sobre o drama da humanidade com o retorno de doenças, em especial o Sarampo.

Além disso, analisando as reportagens, observamos que o surto do Sarampo é apenas a “ponta do *iceberg*” num mundo da “pós-verdade”, dos “*fake News*”, onde os jovens interagem ativamente nas redes sociais e formam sua opinião sem muita criticidade, colocando em risco sua saúde.

Portanto, o tema envolvendo a imunização humana, via vacinação, é relevante para a formação crítica do cidadão, sendo um tema que pode e deve ser discutido nas escolas e, também, pelo professor de Matemática, principalmente quando tiver de ensinar os conteúdos de Estatística, conforme orientações curriculares.

Esses cuidados com a saúde dos estudantes foram indicados pelos PCN (BRASIL, 1988, p. 15), quando orienta que o professor de Matemática estabeleça “conexões da Matemática com os conteúdos relacionados aos Temas Transversais – Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Trabalho e Consumo”. Da mesma forma, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 10) ratifica, nas competências gerais da Educação Básica, que o estudante deve “conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional [...]”.

Com isso em mente, elaboramos, para nossa dissertação de mestrado, uma sequência de ensino (SE) envolvendo a cobertura vacinal, de tal forma que fosse possível contribuir tanto para a compreensão dos estudantes sobre o fenômeno, a tomada de consciência do seu protagonismo em prol da melhoria de seu bem-estar e da sociedade em que está inserido, quanto no ensino dos conteúdos de Estatística, na perspectiva do letramento estatístico, isto é, um conhecimento situado e útil para a compreensão do mundo no qual está inserido.

A escolha desse tema foi bastante oportuna, pois ao desenvolvermos a SE, além dos noticiários internacionais e nacionais sobre surtos de doenças preveníveis com a vacinação, na cidade onde a escola está inserida, o *site* Correio, BAHIA (2018) noticiava: “Bahia confirma primeiro caso de Sarampo na cidade de Ilhéus: há outros dois casos suspeitos em investigação

na cidade”. De acordo com a Secretaria da Saúde do Estado da Bahia (Sesab), um homem de 38 anos, que trabalhava na construção civil na cidade onde a escola está inserida, havia sido diagnosticado com a doença.

O desenvolvimento do estudo com essa interligação com contexto real se insere no projeto de pesquisa, com elementos mais amplos, denominado “Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática (D-Estat)”, desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e em Ciências (GPEMEC), do qual fazemos parte. O D-Estat tem como objeto matemático de investigação, os conceitos e procedimentos da Estatística, no Ensino Fundamental, e como finalidade a construção de sequências de ensino, em colaboração entre pesquisadores e professores das escolas, pautadas nos princípios do letramento estatístico proposto por Gal (2002) e do Ciclo Investigativo – PPDAC proposto por Wild e Pfannkuch (1999). Assim, a nossa dissertação se insere nesse contexto.

Com isso em mente, decidimos realizar uma investigação que fosse capaz de responder a seguinte questão de pesquisa:

Quais são as limitações e potencialidades de uma sequência de ensino, baseada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, para a ampliação do conceito de Média Aritmética no Ensino Fundamental?

E traçamos, como objetivo geral:

Investigar os limites e potencialidades de uma sequência de ensino, baseada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, para a ampliação do conceito de Média Aritmética no Ensino Fundamental.

Como objetivos específicos:

- Elaborar uma sequência de ensino baseada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, visando a ampliação do conceito de média aritmética;
- Investigar diferentes situações, invariantes e representações da média aritmética;
- Analisar a viabilidade do desenvolvimento da sequência de ensino na realidade da escola;
- Verificar as limitações e potencialidades da sequência de ensino na ampliação do conceito de média aritmética e no letramento estatístico.

Observamos que pela própria natureza do PPDAC e do letramento estatístico, a sequência de ensino envolveu não apenas aspectos relativos à média, mas também à cobertura vacinal, isto é, a porcentagem de pessoas que tomaram uma determinada vacina. Para isso, construíram Tabela de Distribuição de Frequência de dupla entrada (TDF), construção de gráficos de barras empilhadas, cujos resultados iremos relatar de forma breve, sem discutir as nuances dos conceitos envolvidos e que já foram relatados em Lôbo e Cazorla (2019).

Dessa forma, organizamos nossa dissertação em cinco capítulos. O primeiro, destinado ao ensino de Estatística na Educação Básica, as orientações curriculares oficiais e como nesse contexto está inserida a média aritmética. Para dar sentido aos conceitos e procedimentos de Estatística recorreremos às fases da investigação científica, preconizadas por Wild e Pfannkuch (1999), que postulam o PPDAC (Problema, Plano, Dados, Análise e Conclusão); e ao sentido do ensino para a formação cidadã, para o qual recorreremos ao letramento estatístico, postulado por Gal (2002). Ainda neste capítulo, refletimos sobre as possíveis interações entre o letramento e o ciclo investigativo na abordagem de conteúdos estatísticos por meio do tema transversal “Imunização humana via vacinação”.

O segundo capítulo, está dedicado à Teoria dos Campos Conceituais - TCC, ancorados nos aportes de Vergnaud (1996), e utilizamos a primeira aproximação conceitual da Média Aritmética proposto por Cazorla, Santana e Utsumi (2019); explicitando as Situações (S), os Invariantes (I) e as representações (R). Finalizamos este capítulo fazendo uma revisão de estudos correlatos, sempre buscando extrair destes, os diversos aspectos do conceito de média.

No terceiro capítulo, apresentamos o percurso metodológico da pesquisa, descrevendo, inicialmente, os aspectos relacionados ao tipo de estudo, os participantes, os procedimentos e os instrumentos. No quarto capítulo, apresentamos os resultados e analisamos as resoluções apresentadas pelos estudantes na realização das tarefas, a partir dos registros escritos e da filmagem.

No quinto capítulo, apresentamos as considerações finais onde tecemos algumas reflexões acerca da nossa questão de investigação, bem como possíveis respostas sobre os limites e potencialidade da sequência de ensino “Cartão de vacinação”.

Acreditamos que este trabalho pode contribuir para a sistematização do ensino da média aritmética e orientar melhor o professor sobre como planejar seu ensino ao longo da Educação Básica.

CAPÍTULO I

O ENSINO DE ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Este capítulo é destinado a apresentar o ensino de Estatística na Educação Básica e está dividido em quatro seções: na primeira apresentamos a Estatística e as razões para sua inserção na Educação Básica, examinando as orientações curriculares dos documentos oficiais neste nível de ensino, com foco na média aritmética. Na segunda seção, os fundamentos do letramento estatístico postulado por Gal (2002); na terceira seção, as fases do ciclo investigativo preconizadas por Wild e Pfannkuch (1999); na quarta seção, refletimos sobre as possíveis interfaces do letramento e do ciclo investigativo na abordagem de conteúdos estatísticos, por meio do tema transversal “Imunização humana via vacinação”.

1.1 Estatística na Educação Básica

Segundo Cazorla e Santana (2010), desde a Antiguidade, a Estatística esteve relacionada à organização e à sistematização de informações do Estado, visando a tomada de decisões políticas, econômicas e sociais. “Somente no século XX seus métodos foram incorporados à pesquisa científica e empírica, pela capacidade inferencial de suas técnicas, bem como pelo auxílio na tomada de decisões em condições de incerteza” (CAZORLA; UTSUMI, 2010, p. 9).

Podemos definir a Estatística, segundo Cazorla e Oliveira (2010, p 113), como “uma ciência que tem como objetivo desenvolver métodos para coletar, organizar e analisar dados, com a finalidade de auxiliar as outras ciências na tomada de decisões, em condições de incerteza”. Assim, um dos objetivos desta ciência é disponibilizar ferramentas para análise de dados, sendo seu insumo os dados brutos oriundos da observação de fenômenos das mais diversas áreas do conhecimento. Por essa razão, a Estatística faz parte da pesquisa científica, em especial das áreas que lidam com o tratamento de dados e, por essa mesma razão, faz parte do currículo dos cursos de graduação e pós-graduação, tanto das ciências da natureza, quanto das ciências humanas e sociais aplicadas.

O reconhecimento da importância do ensino de Estatística fez com que diversos países inserissem seus conteúdos na Educação Básica (BATANERO, 2000). Assim, o Brasil oficializou seu ensino nos documentos oficiais.

1.1.1 A Estatística nos Parâmetros Curriculares Nacionais e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio

No Brasil, o ensino de Estatística, passou a ser recomendado no Ensino Fundamental, a partir da publicação dos PCN (BRASIL, 1997, 1998). Nesses documentos, os conteúdos matemáticos foram distribuídos em quatro grandes blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas e, Tratamento da Informação, sendo este último, relativo à Estatística, Probabilidade e Contagem.

Com relação ao ensino de Estatística para os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, no bloco Tratamento da Informação, os PCN postulam que a finalidade é “fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia” (BRASIL, 1997, p. 40).

Os objetivos de Matemática para os estudantes do primeiro ciclo (antigas 1ª e 2ª séries) e do segundo ciclo (antigas 3ª e 4ª), no que se refere ao ensino de Estatística, deve respectivamente, proporcionar ao estudante “identificar uso de tabelas e gráficos para facilitar a leitura e interpretação de informações e construir formas pessoais de registro para comunicar informações coletadas” (BRASIL, 1997, p. 47) e “utilizar diferentes registros gráficos - desenhos, esquemas, escritas numéricas - como recurso para expressar ideias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados” (BRASIL, 1997, p. 56).

No primeiro ciclo, os conteúdos do bloco Tratamento da Informação, segundo os PCN (BRASIL, 1997), podem ser trabalhados de modo a estimular os estudantes a desenvolver o espírito de investigação, iniciando a partir de perguntas, estabelecendo relações e a construção de justificativas. No segundo ciclo, os conteúdos poderão ser desenvolvidos a partir da coleta, organização, descrição, leitura e interpretação de dados apresentados nas tabelas e gráficos ou na “produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas, e a construção de gráficos e tabelas, com base em informações contidas em textos jornalísticos e científicos” (BRASIL, 1997, p. 58). No Quadro 1, apresentamos os conteúdos propostos pelos PCN (BRASIL, 1997).

Quadro 1 – Conteúdos conceituais e procedimentais propostos para o ensino de Estatística no primeiro e segundo ciclo do Ensino Fundamental

Primeiro ciclo (1ª e 2ª série)	Segundo ciclo (3ª e 4ª série)
Leitura e interpretação de informações contidas em imagens; coleta e organização de informações. Criação de registros pessoais para comunicação das informações coletadas. Exploração da função do número como código na organização de informações (linhas de ônibus, telefones, placas de carros, registros de identidade, bibliotecas, roupas, calçados). Interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada e gráficos de barra para comunicar a informação obtida.; produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas.	Coleta, organização e descrição de dados. Leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações. Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos. Produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas, construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros. Obtenção e interpretação de média aritmética.

Fonte: PCN (BRASIL, 1997).

Com relação aos objetivos de Matemática para o terceiro ciclo (antigas 5ª e 6ª séries), no que se refere ao raciocínio Estatístico, o ensino de Matemática deve contemplar, por meio da exploração de situações de aprendizagem, condições que levem os estudantes “a coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas” (BRASIL, 1998, p. 65).

No terceiro ciclo é importante que os estudantes sejam incentivados a construir e analisar diferentes métodos de resolução de situações-problema e, em seguida, compará-los. Pois, ao desenvolver competência de ir em busca de soluções, pode favorecer ao estudante a possibilidade de construir argumentos plausíveis, (BRASIL, 1998).

Outro ponto de relevância apresentado pelos PCN (BRASIL, 1998, p. 69 - 70), referente ao bloco Tratamento da Informação, é a ideia dos estudantes, nos ciclos anteriores, explorarem conceitos básicos de Estatística tais como “coletar e organizar dados em tabelas e gráficos, a estabelecer relações entre acontecimentos, a fazer algumas previsões, a observar a frequência de ocorrência de um acontecimento”. Os quais poderão ser ampliados no terceiro ciclo e poderão contribuir para a formulação de “questões pertinentes para um conjunto de informações, a elaborar algumas conjecturas e comunicar informações de modo convincente, a interpretar diagramas e fluxogramas”. Com a relação ao nosso objeto matemático, média, os PCN destacam que no decorrer deste trabalho “é possível iniciar o estudo das medidas estatísticas, como a média que possibilitará uma interpretação mais aperfeiçoada dos dados” (BRASIL, 1998, p. 70).

Conforme os PCN, as orientações dispostas no bloco Tratamento da Informação, referente aos conceitos e procedimentos para o terceiro ciclo, são:

Coleta, organização de dados e utilização de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões;
 Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos;
 Compreensão do significado da média aritmética como um indicador da tendência de uma pesquisa;
 Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias;
 Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 74-75).

Desta forma, podemos perceber, que os PCN destacam a importância do trabalho com a coleta e organização de dados, bem como leitura, construção e interpretação de tabelas e gráficos e, com a compreensão do significado da média, como exposto no bloco Tratamento da Informação, para o ensino de Estatística.

No quarto ciclo, com relação os objetivos, o ensino de Matemática deve visar o desenvolvimento do raciocínio Estatístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o estudante a “construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos” (BRASIL, 1998, p. 82).

De acordo com os PCN, no bloco Tratamento da Informação, os conceitos e procedimentos estatísticos podem ser aprofundados, pois os estudantes “têm melhores condições de desenvolver pesquisas sobre sua própria realidade e interpretá-la, utilizando-se de gráficos e algumas medidas estatísticas” (BRASIL, 1998, p. 85). Além disso, os estudantes, também, podem fazer uso das tabelas que ajudarão na compreensão dos dados estatísticos.

Para esta situação, os PCN apresentam uma proposta de ensino de Estatística para a promoção da aprendizagem e a realização de investigação: “pesquisas sobre Saúde, Meio Ambiente, Trabalho e Consumo etc., poderão fornecer contextos em que os conceitos e procedimentos estatísticos ganham significados” (BRASIL, 1998, p. 85).

Com relação ao quarto ciclo, conforme os PCN, as orientações dispostas no bloco Tratamento da Informação, referente aos conceitos e procedimentos, são:

Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência;
 Organização de dados e construção de recursos visuais adequados, como gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência) para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de inferências;
 Compreensão de termos como frequência, frequência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa;

Distribuição das frequências de uma variável de uma pesquisa em classes de modo que resuma os dados com um grau de precisão razoável;
Obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências;
Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão;
Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas. (BRASIL, 1998, p. 90).

No quarto ciclo, existe a orientação para ampliação dos conceitos referente a leitura, interpretação, organização e construção dos gráficos. Neste caso, é ampliado para os gráficos de setores, os histogramas e polígonos de frequência. Com relação às medidas de tendência central, além da média, são ampliadas para os conceitos e significados de moda e mediana. E, a ampliação dos conhecimentos estatísticos referente à compreensão de termos como frequência, frequência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa.

Outro ponto bastante importante para o terceiro e quarto ciclos são as orientações didáticas. Conforme os PCN, as orientações didáticas “pretendem contribuir para a reflexão a respeito de como ensinar, abordando aspectos ligados às condições em que se constituem os conhecimentos matemáticos” (BRASIL, 1998, p. 95).

Para este bloco, as orientações didáticas, destacam a importância de trabalhar com informações do dia-a-dia, tanto nos aspectos voltados para uma cultura, quanto para as atividades profissionais. Assim,

O estudo, nos terceiro e quarto ciclos, dos conteúdos estabelecidos no Tratamento da Informação justifica-se por possibilitar o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio para resolver determinadas situações-problema – as que envolvem fenômenos aleatórios – nas quais é necessário coletar, organizar e apresentar dados, interpretar amostras, interpretar e comunicar resultados por meio da linguagem estatística (BRASIL, 1998, p. 134).

Nesse sentido, a aprendizagem dos conteúdos estatísticos se justifica pela importância de poder contribuir para o desenvolvimento do pensamento e raciocínio estatístico do sujeito. Dessa maneira, as investigações estatísticas, com uso de diferentes recursos de investigação, podem contribuir para o aprendizado do estudante, permitindo que ele faça reflexões a respeito dessas diferentes formas de aprendizagem e, certamente, contribuindo para seu aprendizado.

Até aqui apresentamos o que os PCN destacam para o ensino de Estatística no Ensino Fundamental. Apesar de nosso trabalho ter sido desenvolvido no Ensino Fundamental, acreditamos ser necessário ter uma visão mais ampla da demanda de Estatística na Educação Básica, por esse motivo trazemos aqui as orientações curriculares para o Ensino Médio, pois é aqui onde serão incluídas as medidas de dispersão em que a média tem um papel importante.

Segundo os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio) o ensino de Estatística e a Probabilidade fazem parte do eixo ou tema estruturador Análise de dados, que devem ser vistas,

[...] como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente (BRASIL, 2002, p. 126).

Os PCNEM ampliam as recomendações dos PCN, no que diz respeito a discutir o ensino de Estatística a partir de situações do mundo real, e essa discussão pode envolver e perpassar outras áreas do conhecimento.

No quadro a seguir (Quadro 2), apresentamos os conteúdos relacionados para o ensino da Estatística no Ensino Médio.

Quadro 2 – Conteúdos propostos pelos PCNEM para o ensino de Estatística no Ensino Médio

Conteúdos propostos para o Ensino Médio
Descrição de dados; representações gráficas; análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão;
Identificar formas adequadas para descrever e representar dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata;
Ler e interpretar dados e informações de caráter estatístico apresentados em diferentes linguagens e representações, na mídia ou em outros textos e meios de comunicação;
Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas;
Compreender e emitir juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica apresentadas em textos, notícias, propagandas, censos, pesquisas e outros meios.

Fonte: PCNEM (BRASIL, 2002).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) (BRASIL, 2006), organiza os conteúdos básicos em quatro blocos: Números e operações; Geometria; Funções; e, Análise de dados e Probabilidade. Sendo que os conteúdos de Estatística são trabalhados no bloco Análise de dados e probabilidade. Os conteúdos trabalhados, nesse bloco, possibilitam aos estudantes “ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico (BRASIL, 2006, p. 78).

O PCNEM, também, aponta que os estudantes devem aperfeiçoar as habilidades que adquiriram no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Para isso, uma possibilidade é com a construção e a representação dos gráficos e tabelas, que podem ser mais elaborados, e, quando possível, deve-se fazer o uso das tecnologias. Outro destaque é para o ensino das medidas de

tendência central e de dispersão, pois, deve-se intensificar sua compreensão e abordá-las de forma mais intuitiva no que diz respeito a ampliação desses conceitos (BRASIL, 2006).

1.1.2 A Estatística na Base Nacional Comum Curricular – BNCC

A última versão da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), para o Ensino Fundamental e Médio, foi finalizada pelo Ministério da Educação – MEC em 2018. A BNCC organiza o currículo do Ensino Fundamental em quatro grandes áreas do conhecimento, a saber: Linguagens; Matemática; Ciências da Natureza; e, Ciências Humanas. Com relação a área de Matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e, Probabilidade e Estatística.

A unidade em que constam os conteúdos estatísticos é denominada de Probabilidade e Estatística, na qual são estudados a incerteza e o tratamento de dados, e

Propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL, 2018, p. 274).

Dessa forma, a BNCC orienta para o ensino da Estatística para desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados. Para isso, as abordagens podem ser das mais diversas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia, visando o desenvolvimento do raciocínio estatístico, de forma a estabelecer relações com os diferentes campos da Matemática e com outras áreas do conhecimento.

Para os anos iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018) propõe que o estudo da Estatística pode ser iniciado com uma pesquisa do interesse dos estudantes com o intuito de gerar dados para a construção de gráficos e tabelas. Além disso, é importante que os estudantes analisem os dados e, em seguida, apresentem suas conclusões com base nos dados. Assim, “a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados, pois é preciso compreender que o texto deve sintetizar ou justificar as conclusões” (BRASIL, 2018, p. 275), apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 - Conteúdos, objetivos e habilidades propostos para o ensino de Estatística pela BNCC, nos anos iniciais do Ensino Fundamental

ANO	CONTEÚDOS	OBJETIVOS E HABILIDADES
1º ano	Leitura de tabelas e de gráficos de colunas simples. Coleta e organização de informações. Registros pessoais para comunicação de informações coletadas.	Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples. Realizar pesquisa, envolvendo até duas variáveis categóricas de seu interesse e universo de até 30 elementos, e organizar dados por meio de representações pessoais.
2º ano	Coleta, classificação e representação de dados em tabelas simples e de dupla entrada e em gráficos de colunas.	Comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada e em gráficos de colunas simples ou barras, para melhor compreender aspectos da realidade próxima. Realizar pesquisa em universo de até 30 elementos, escolhendo até três variáveis categóricas de seu interesse, organizando os dados coletados em listas, tabelas e gráficos de colunas simples.
3º ano	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos de barras; Coleta, classificação e representação de dados referentes a variáveis categóricas, por meio de tabelas e gráficos.	Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas. Ler, interpretar e comparar dados apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos. Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de tecnologias digitais.
4º ano	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e colunas e gráficos pictóricos. Diferenciação entre variáveis categóricas e variáveis numéricas. Coleta, classificação e representação de dados de pesquisa realizada.	Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise. Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas e organizar dados coletados por meio de tabelas e gráficos de colunas simples ou agrupadas, com e sem uso de tecnologias digitais.
5º ano	Leitura, coleta, classificação interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráfico de colunas agrupadas, gráficos pictóricos e gráfico de linhas.	Interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas e gráficos (colunas ou linhas), referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões. Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas, pictóricos e de linhas, com e sem uso de tecnologias digitais, e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Com relação ao ensino da Estatística para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC propõe, assim como nos anos iniciais, que o trabalho em sala de aula seja iniciado com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos estudantes. Com isso, a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos poderão apresentar papel

fundamental na construção do conhecimento dos estudantes, bem como a produção de texto escrito para a sistematização dos dados. Inferimos que uma possibilidade para o trabalho com a pesquisa em sala de aula, poderá ser por meio do letramento estatístico (GAL, 2002) e do ciclo investigativo PPDAC (WILD; PFANNKUCH, 1999). Portanto, no Ensino Fundamental (anos finais), a expectativa “é que os alunos saibam planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central e construção de tabelas e diversos tipos de gráfico” (BRASIL, 2018, p. 275).

Cabe ainda destacar que, nos anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC aborda que a aprendizagem em Matemática também está intrinsecamente relacionada a aprendizagem dos significados dos objetos matemáticos.

Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação (BRASIL, 2018, p. 298).

Assim, os significados propostos pela BNCC poderão possibilitar ao estudante estabelecer conexões entre os conceitos estatísticos, e com diferentes temas matemáticos ou com outra área do conhecimento. Nesse processo, a leitura e a comunicação dos dados na linguagem matemática, com o uso da linguagem simbólica da representação e da argumentação, possibilitarão a compreensão dos fenômenos em estudo a fim de desenvolver um conjunto de habilidades, numa perspectiva de integrar os conteúdos, por meio da Estatística.

No Quadro 4, a seguir, apresentamos como estão organizados os conteúdos estatísticos para os anos finais do Ensino Fundamental, na unidade temática Probabilidade e Estatística.

Quadro 4 – Conteúdos, objetivos e habilidades propostos para o ensino de Estatística pela BNCC, nos anos finais do Ensino Fundamental

ANO ESCOLAR	CONTEÚDOS	OBJETIVOS e HABILIDADE
6º ano	Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas.	Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico. Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.
	Coleta de dados, organização, registro. Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações.	Planejar e coletar dados de pesquisa referente às práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para o registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
	Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas.	Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).
7º ano	Média e amplitude de um conjunto de dados.	Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.
	Pesquisa amostral e pesquisa censitária. Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações.	Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
	Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados.	Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.
8º ano	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados.	Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
	Organização dos dados de uma variável contínua em classes.	Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
	Medidas de tendência central e de dispersão.	Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

Continua ...

Quadro 4 – Conteúdos, objetivos e habilidades propostos para o ensino de Estatística pela BNCC, nos anos finais do Ensino Fundamental

Continua ...

8º ano	Pesquisas censitária ou amostral. Planejamento e execução de pesquisa amostral.	Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada). Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.
9º ano	Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação.	Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
	Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos.	Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
	Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório.	Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Com relação às orientações propostas pela BNCC e pelos PCN, podemos destacar um avanço que é o reconhecimento de uma unidade temática específica para o ensino de Estatística, a unidade temática Probabilidade e Estatística. Além disso, podemos destacar dois pontos em comum, a equidade e a sistematização de um currículo, com o propósito de superar a fragmentação disciplinar.

Em 2018 foi publicada a BNCC para o Ensino Médio, a qual propôs para a área de Matemática e suas Tecnologias “a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental” (BRASIL, 2018, p. 527). Com relação à ampliação dos conceitos estatísticos, este documento afirma que os estudantes devem ter competência para interpretar informações estatísticas divulgadas pela mídia. Assim, é recomendado “planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, e de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo representações gráficas adequadas” (BRASIL, 2018, p. 528).

A BNCC (BRASIL, 2018) orienta que os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas, as quais estão ligadas ao raciocinar, representar, comunicar e argumentar.

Essas habilidades, segundo a BNCC (BRASIL, 2018) estão ligadas às competências indicadas a serem alcançadas pelos estudantes. Assim, para cada competência relacionada ao raciocinar, é proposto que o estudante investigue, explique e justifique as soluções apresentadas para os problemas, com argumentações matemáticas; as relacionadas à representação, pressupõem a elaboração de registros para reproduzir na imaginação o objeto matemático; para a competência de comunicar “os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros” (BRASIL, 2018, p. 530); e, a competência de argumentar, pressupõe que os estudantes formulem e testem conjecturas, com a apresentação de suas justificativas.

Com relação as habilidades propostas para a unidade temática Probabilidade e Estatística para o Ensino Médio, a BNCC orienta que uma “organização possível – e mais próxima da prática de elaboração curricular dessa área – é por unidades similares às propostas para o Ensino Fundamental” (BRASIL, 2018, p. 542). Assim, temos as seguintes considerações para a organização curricular:

Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas;

Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos;

Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão);

Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra;

Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise (BRASIL, 2018, p. 546).

Em suma, podemos verificar que as diretrizes da BNCC avançam em relação às orientações dos PCN no sentido que ampliam os conceitos e procedimentos estatísticos, em especial para as variáveis contínuas, destacando o histograma e na utilização de representações gráficas tais como o diagrama de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, até então ignorados na

Educação Básica. Todavia, apresenta um retrocesso ao retirar dos anos iniciais as medidas de tendência central, nem sequer a média permaneceu no currículo.

1.1.3 A média aritmética e seu ensino na Educação Básica

Em nosso dia-a-dia, constantemente nos deparamos com o conceito de média; mesmo que não tenhamos consciência disso, como por exemplo quando estimamos o tempo médio que demoramos ao tomar banho, ou ao nos deslocarmos da nossa residência ao local de trabalho ou estudo; na nossa vida escolar, pois para sermos aprovados em uma disciplina, em geral, temos que obter uma nota acima da média estipulada pela instituição de ensino.

Além disso, a média está também presente nas informações veiculadas pela mídia, como por exemplo, a renda per capita, o número de filhos por mulher, a média de gols por jogo, dentre outros. Vejamos alguns exemplos.

Na reportagem “Cai número de filhos por família no Brasil”² (QUEIROZ, 2015), baseada nos números das edições de 2003 a 2013 da Pnad (Pesquisa Nacional por Amostragem de Domicílios), do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), verifica-se que em 2003 a média de filhos por família no Brasil era 1,78 e esta caiu para 1,59 em 2013. Neste caso, a média é calculada a partir do número de filhos que uma família tem e o número de famílias, que é diferente da taxa de fecundidade.

Segundo o *site* Wikipédia (2011) a taxa de fecundidade é uma estimativa do número médio de filhos que uma mulher teria até o fim de seu período reprodutivo, mantidas constantes as taxas observadas na referida data. Conforme dados do Relatório sobre a Situação da População Mundial de 2010, do Fundo de População das Nações Unidas (Fnuap), a taxa de fecundidade foi de 2,52 filhos por mulher. Esse resultado confirma uma tendência mundial de redução no número de filhos. No Brasil, em 2015, a taxa de fecundidade foi de 1,72 filhos por mulher.

A taxa de fecundidade não pode ser inferior a 2,1 filhos por mulher, uma vez que as duas crianças substituem os pais e a fração 0,1 é necessária para compensar os indivíduos que morrem antes de atingir a idade reprodutiva. No caso do Brasil, com uma taxa de fecundidade em queda deixa de ser um país de jovens.

² Os números foram divulgados pelo Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome e têm como base as edições de 2003 a 2013 da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad), feita pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

O Produto Interno Bruto (PIB) per capita também é uma média e é anualmente veiculada pela mídia, fazendo parte da informação do cidadão. Em geral, é utilizada para avaliar a evolução econômica de um país e o impacto das políticas públicas. Todavia, essa é calculada a partir da razão entre duas grandezas, PIB³, riqueza produzida por um país ou região e, o número total de habitantes que vivem nesse país ou região, ou seja, não dispomos dos dados brutos, mas do valor agregado total.

Nos exemplos apresentados, anteriormente, constatamos contextos e diferentes situações que envolvem o conceito de média na vida dos cidadãos, distintos dos que estamos habituados nas aulas e nos livros didáticos de Matemática, na Educação Básica.

Nesse sentido, podemos observar a média aritmética é contemplada tanto nas orientações dos PCN, quanto nas diretrizes da BNCC.

No PCN (BRASIL, 1998), como citamos anteriormente, após o trabalho com a média no segundo ciclo, é possível que os estudantes do terceiro ciclo, iniciem o estudo das medidas estatísticas, por exemplo, a média aritmética “que possibilitará uma interpretação mais aperfeiçoada dos dados” (BRASIL, 1998, p. 70).

Com relação aos conteúdos propostos, no bloco Tratamento da Informação, para os estudantes do terceiro ciclo, é recomendado que a compreensão do significado da média possa ser por meio de uma pesquisa para indicar uma tendência (BRASIL, 1998). No quarto ciclo, também, é recomendado que o ensino da média seja por meio de pesquisas e que nesse processo, seja ampliado o conceito das medidas de tendência central, ou seja, média, mediana e moda.

Como observarmos no Quadro 3, a BNCC postula que o conceito de média deve ser iniciado no 7º ano do Ensino Fundamental e aprofundado no 8º ano. Porém, ao fazermos uma comparação entre os PCN e a BNCC, podemos verificar que os PCN sugerem iniciar o estudo dos conceitos e propriedades da média nos anos iniciais, o que não é recomendado nas diretrizes da BNCC.

Porém, um ponto em comum entre as orientações dos PCN e do OCEM, bem como as diretrizes da BNCC é que o trabalho com os conceitos estatísticos pode ser iniciado a partir de uma pesquisa estatística do interesse dos estudantes. Além disso, essa pesquisa pode ser desenvolvida em qualquer nível escolar, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até ao último ano do Ensino Médio.

³ Segundo o *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o PIB “é a soma de todos os bens e serviços finais produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente em um ano”. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/pib.php>. Acesso em: 30 ago. 2019.

1.2 O Letramento Estatístico

O termo letramento, segundo Gal (2002), nos remete à capacidade de ler, interpretar, compreender e avaliar criticamente informações, sejam elas escritas ou orais, possibilitando ao cidadão adquirir conhecimentos, que possam ser aplicados nos meios sociais, políticos, culturais e econômicos:

[...] refere-se, em termos gerais, a dois componentes inter-relacionados, primeiramente (a) a capacidade das pessoas de interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas, os argumentos ou fenômenos estocásticos, que elas podem encontrar em diversos contextos e, quando relevante (b) sua capacidade de discutir ou comunicar suas reações a tais informações estatísticas, tais como a sua compreensão do significado da informação, as suas opiniões sobre as implicações das informações, ou as suas preocupações quanto à aceitabilidade de determinadas conclusões⁴. (GAL, 2002, p. 2-3, Tradução nossa).

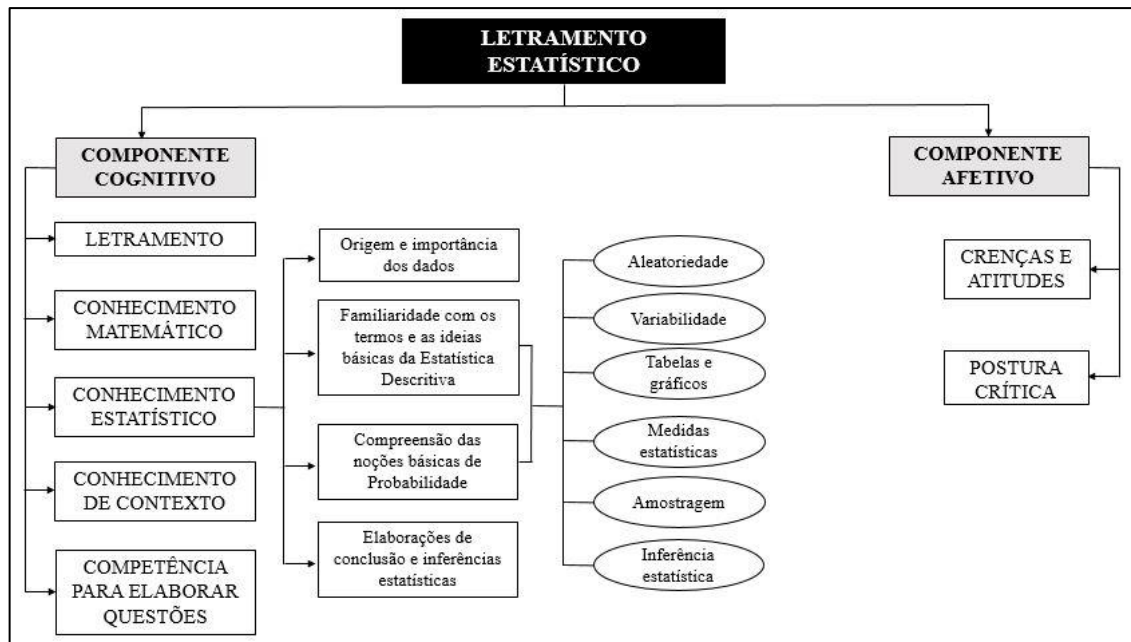
Portanto, para que o cidadão alcance o letramento estatístico, é necessário que tenha a capacidade de interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas e, em seguida, conseguir relacioná-las com dados e com o fenômeno de onde foi extraído.

Gal (2002) também ressalta que o letramento estatístico pode servir aos indivíduos e suas comunidades de muitas maneiras. Por exemplo, se estão plenamente conscientes das tendências e fenômenos de importância social e pessoal (taxa de criminalidade, crescimento da população e propagação de doenças); contribuir para a capacidade das pessoas de fazerem escolhas quando confrontadas com o acaso (compra de bilhetes de loteria, tomadas de decisões em condições de incerteza) e, apoiar na participação de debates públicos e ações comunitárias.

Segundo Gal (2002), o letramento estatístico envolve dois componentes: o cognitivo e o afetivo. O componente cognitivo é formado por cinco elementos que são responsáveis pela competência das pessoas para compreender, interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas, são eles: letramento; conhecimento estatístico; conhecimento matemático; conhecimento do contexto e; a competência para elaborar questões. O componente afetivo, por sua vez, é formado por dois elementos, o primeiro relacionado às atitudes e às crenças das pessoas, que moldam suas visões de mundo; e o segundo que está relacionado à postura crítica, que nada mais é que a aptidão para uma conduta questionadora diante das informações estatísticas, conforme Figura 1.

⁴ “refers broadly to two interrelated components, primarily (a) people's ability to interpret and critically evaluate statistical information, data-related arguments, or stochastic phenomena, which they may encounter in diverse contexts, and when relevant (b) their ability to discuss or communicate their reactions to such statistical information, such as their understanding of the meaning of the information, their opinions about the implications of this information, or their concerns regarding the acceptability of given conclusions”. (GAL, 2002, p. 2-3).

Figura 1 – Modelo de letramento estatístico baseado em Gal (2002)



Fonte: Cazorla e Santana (2010, p. 12).

Cazorla e Santana (2010) afirmam que, além do letramento estatístico, é preciso desenvolver no estudante o *pensamento estatístico* de maneira que possa refletir, de forma crítica, sobre todas as fases de uma pesquisa investigativa. Nesse sentido, acreditam que,

O Letramento Estatístico, na Educação Básica, não pode ser limitado ao contexto de leitura. Ao ensinar os conceitos e os procedimentos estatísticos, devemos, também, promover o desenvolvimento do pensamento estatístico, que está fortemente atrelado à compreensão da tomada de decisão, em condições de incerteza, nas diversas fases do ciclo investigativo. (CAZORLA; SANTANA, 2010, p. 13).

Assim, não podemos, em nossas práticas pedagógicas, limitar nossos estudantes apenas ao contexto da leitura. É necessário, articularmos os conhecimentos estatísticos, de forma que seus conceitos e procedimentos sejam associados à temas de relevância social, cultural, econômica ou política, possibilitando aos estudantes fazerem aplicações de suas aprendizagens em situações que exigirão a tomada de decisão, principalmente em procedimentos investigativos.

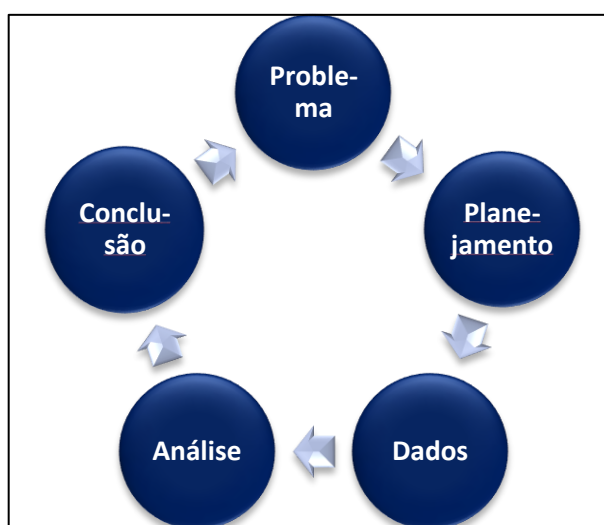
1.3 O Ciclo Investigativo – PPDAC

O ciclo investigativo PPDAC, Figura 2, proposto por Wild e Pfannkuch (1999), é composto por cinco fases: *Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusions* (Problema, Planejamento, Dados, Análise, Conclusão). Optamos por utilizar o PPDAC, pois acreditamos que é possível instituir condições de aprendizagem envolvendo ativamente os estudantes em

um processo investigativo, bem como possibilitar a compreensão do fenômeno como um todo, tendo como suporte a Estatística.

O **Problema (P)**, refere-se ao conhecimento do contexto dos dados, à definição do problema ou fenômeno a ser investigado; o **Planejamento (P)**, abrange a definição das ações para a investigação; os **Dados (D)**, compreende o processo de coleta de dados; a **Análise (A)**, faz referência a análise dos dados e a **Conclusão (C)**, encerra a investigação com um posicionamento crítico, reflexivo, com a comunicação dos dados, podendo gerar novas ideias e novos questionamentos.

Figura 2 - O ciclo investigativo PPDAC



Fonte: Esquema baseado em Wild e Pfannkuch (1999).

Conforme a Figura 2, o ciclo investigativo PPDAC é contínuo, pois para a concretização da investigação estatística com seu emprego, faz-se necessário percorrer as cinco fases, respeitando sua ordem, ou seja, o fechamento do ciclo. Com o fechamento do ciclo e, respondida à questão de investigação, podem surgir novos questionamentos de modo que possam ser solucionados utilizando o mesmo modelo, em um movimento espiral crescente, com o propósito de alcançar os objetivos no processo de aprendizagem.

De acordo com Wild e Pfannkuch (1999),

Um ciclo de investigação PPDAC é definido para alcançar cada objetivo de aprendizagem. O conhecimento adquirido e as necessidades identificadas nestes ciclos podem iniciar novos ciclos de investigação. As conclusões das investigações se alimentam de uma base de conhecimento de contexto expandida que pode então informar qualquer ação⁵. (WILD; PFANNKUCH, 1999, p. 225 – tradução nossa).

⁵ “A PPDAC investigative cycle is set off to achieve each learning goal. Knowledge gained and needs identified within these cycles may initiate further investigative cycles. The conclusions from the investigations feed into an expanded context-knowledge base which can then inform any actions” (WILD; PFANNKUCH, 1999, p. 225).

Portanto, acreditamos que ensinar os conceitos e procedimentos estatísticos, com a utilização desse ciclo de investigação, na perspectiva do letramento estatístico, poderá ajudar os estudantes, não só a tratar os dados, mas assumir uma postura investigativa, ampliando sua compreensão de mundo, de modo a melhorar seu posicionamento frente a novas informações sejam elas sociais, políticas ou econômicas, melhorando assim, sua qualidade de vida e da comunidade onde está inserido.

Até aqui explicitamos os princípios que nortearam a construção da sequência de ensino e, as razões pelas quais escolhemos a média aritmética como objeto matemático e estatístico a ser trabalhado. A seguir apresentamos as razões que nortearam a escolha do tema que investigamos.

1.4 Interfaces do letramento e do ciclo investigativo na abordagem de conteúdos estatísticos

Nesta seção apresentamos as possíveis interfaces entre o ensino dos conteúdos estatísticos, na perspectiva do letramento estatístico e do ciclo investigativo a partir do tema transversal “Vacinação” como forma de imunização humana, conforme as orientações dos documentos oficiais.

Observamos que o objetivo de investigação e compreensão das diversas ciências é a compreensão dos fenômenos de seu campo de conhecimento, o que nos remete a uma visão interdisciplinar. Compreender um fenômeno como um todo pode requerer necessariamente uma perspectiva interdisciplinar e/ou transdisciplinar.

De acordo com Oliveira (2018), trabalhar na escola na perspectiva interdisciplinar implica na interação entre as diversas áreas do conhecimento, por meio de planejamentos comuns entre as áreas envolvidas, visando um conhecimento menos fragmentado. Já a transdisciplinaridade implica em trabalhar temas de uma perspectiva social, a nível local e global.

Dessa forma, se quiséssemos investigar as razões de doenças quase extintas ou controladas pela vacinação estarem voltando nos dias atuais, poderíamos traçar diversas abordagens. Do ponto de vista da Biologia poderíamos estudar o ciclo de vida das bactérias ou dos vírus⁶; da Genética, as mutações que fazem com que eles se tornem cada vez mais

⁶ Segundo o site TodaBiologia.com (2016-2019) a palavra vírus “tem sua origem no latim e significa toxina ou veneno. O vírus é um organismo biológico com grande capacidade de replicação, utilizando para isso a estrutura de uma célula sadia (hospedeira). É um agente capaz de causar doenças em animais e vegetais”.

resistentes às vacinas e medicamentos; da Epidemiologia, como essas doenças se propagam; do ponto de vista cultural ou social, a propagação das “*Fake News*” induzem milhares de pais a recusarem a vacinar seus filhos etc.

Assim, trabalhar um tema como esse nos permite uma abordagem interdisciplinar e transdisciplinar na escola, pois é possível permear diversos conteúdos disciplinares, por exemplo, Ciências ou Biologia, Geografia, Sociologia, Matemática, em especial, a Estatística que nos subsidia no levantamento, tratamento e análise dos dados.

Esse é um tema global, uma vez que a humanidade já sofreu grandes epidemias como a peste negra, a gripe espanhola, a gripe suína e a aviária e, mais recentemente o Ebola.

Nesse sentido, é preciso que o estudante amplie seu conhecimento de contexto, um dos componentes do letramento estatístico. Para isso se faz necessário que o estudante seja capaz de acompanhar a evolução das doenças, preveníveis por meio da vacinação. De acordo com a reportagem de Laboissière (2018), em 2016 o Brasil recebeu da Organização Pan-Americana de Saúde (Opas) o selo de país livre da circulação do vírus do Sarampo. Porém, em 2019 o *site* do G1 (2019) divulgou que o Brasil se tornou o terceiro país do mundo com a maior alta de casos de Sarampo.

Ainda, a Organização Mundial da Saúde (OMS) divulgou que só no primeiro trimestre de 2019 os casos de Sarampo no mundo quase quadruplicaram, chegando a 112.163 casos. Segundo a reportagem de Escobar (2019), só no início do ano de 2019 houve um aumento de 300% dos casos de Sarampo no mundo, porém, esse aumento, não ocorreu apenas em regiões da América do Sul, África ou Ásia, ocorreu, também, nos Estados Unidos da América (USA) e na Europa, o que vem preocupando as autoridades de saúde.

Segundo o *site* do Diário, Comércio, Indústria & Serviços – DCI (2019), o Centro para Controle e Prevenção de Doenças dos Estados Unidos da América “ter registrado 626 casos da doença, altamente contagioso, e às vezes fatal, em 22 estados, até 19 de abril, a mais alta taxa de infecção em cinco anos”, sendo que esse surto provavelmente poderá supera o de 2014 em número de casos e foram relatados 55 casos entre os dias 1º de janeiro a 11 de abril de 2019.

Aqui no Brasil, o retorno de doenças como a Pólio, o Sarampo e a Febre Amarela, têm alertado as autoridades sanitárias, realizando uma grande mobilização para aumentar a Cobertura Vacinal⁷, tanto em nível nacional, quanto local. Com o avanço dessas doenças, Vigné (2018) publicou uma reportagem em que o Ministério Público Federal (MPF) fez um apelo:

⁷ Cobertura vacinal é a porcentagem de pessoas que tomaram a vacina em uma população determinada.

“MPF pede que escolas cobrem carteira de vacinação de estudantes: Bahia tem 349 casos suspeitos de Sarampo. A Sesab considera que o risco de reintrodução da doença é ‘iminente’”.

Segundo a reportagem de Laboissière (2018) “a coordenadora do Programa Nacional de Imunizações do Ministério da Saúde, Carla Domingues, alertou em 27 de setembro de 2018 para a necessidade dos três entes federados trabalharem juntos para mobilizar a população sobre a importância da vacinação”. Além disso, Laboissière (2018) divulgou que a mesma coordenadora, Carla Domingues, alertou que “o país enfrenta queda na adesão às vacinas – no ano passado (2017), das 14 doses que integram o programa, apenas a BCG, aplicada em recém-nascidos para prevenir a tuberculose, atingiu a meta de 95% de cobertura”.

Nesse sentido, um tema dessa natureza permite um diálogo entre o local, regional e global, pois doenças como essas e outras, dizem respeito a um fenômeno global e, ao mesmo tempo, tem a ver com a ação de cada indivíduo. Nesse sentido, esse movimento ajuda o estudante a compreender o fenômeno e a tomar consciência do seu papel em prol da melhoria de seu bem-estar, da comunidade escolar e fora da escola, em que está inserido, utilizando para isso o conhecimento matemático e estatístico.

Verificamos ainda que a Estatística está presente em quase todas as abordagens anteriormente mencionadas, seja na experimentação, na observação ou na pesquisa de opinião. Conceitos como amostragem, variáveis, instrumentos, coleta de dados etc. serão necessários para instrumentalização da coleta e tratamento de dados, bem como de comunicação de resultados.

Assim, neste trabalho nos propomos a desenvolver uma sequência de ensino com o tema “vacinação”, com foco na média aritmética, ancorada em dois princípios, o da compreensão do fenômeno como um todo, utilizando o ciclo investigativo proposto por Wild e Pfannkuch (1999) e a do desenvolvimento do letramento estatístico proposto por Gal (2002).

Para abordar o conceito da média aritmética, que é um conceito complexo e envolve uma rede imbricada de conceitos, operações, esquemas, propriedades, significados, situações etc., escolhemos a Teoria dos Campos Conceituais, pois ao nosso ver, essa teoria pode nos ajudar a sistematizar essa rede conceitual. Assim, apresentamos, no próximo capítulo, uma visão desta teoria.

CAPÍTULO II:

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Neste capítulo apresentamos a Teoria dos Campos Conceituais – TCC, ancorados nos aportes de Vergnaud (1996) e da primeira aproximação do campo conceitual da média aritmética apresentado por Cazorla, Santana e Utsumi (2019); explicitando as Situações (S), os Invariantes (I) e as representações (R). Em seguida, realizamos uma revisão dos trabalhos que abordam a média a partir dessa teoria, bem como trabalhos que envolveram a construção de sequências de ensino pautados no ciclo investigativo e no letramento estatístico, a fim de termos subsídios tanto para a elaboração de nossa sequência de ensino, quanto para traçarmos comparativos com o nosso trabalho.

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi desenvolvida pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud, que busca “[...] fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas” (VERGNAUD, 1996, p. 155).

Segundo Vergnaud, por mais simples que se constitua uma única situação, será necessário que o estudante mobilize mais de um conceito para solucioná-la, assim como, para compreender um conceito é preciso fazer uso de várias situações que deem sentido ao conceito. Dessa forma, não faz sentido falarmos em apenas um conceito, e sim, em um campo conceitual. Assim, um campo conceitual é definido como “um conjunto de problemas e situações para o tratamento necessário de conceitos, procedimentos e representações de diferentes tipos, mas estritamente interligados⁸” (VERGNAUD, 1983, p. 127, tradução nossa).

Para Vergnaud (1996, p. 156), um conceito “não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino”. Assim, para que ocorra a apropriação do conceito, é necessário que exista um conjunto de situações que se complementem de forma que o estudante, ao se apropriar dessas situações, compreenda não só um conceito, mas a variedade de conceitos que ali esteja envolvido.

⁸ “a conceptual field is a set of problems and situations for the treatment of which concepts, procedures, and representations of different but narrowly interconnected types are necessary” (VERGNAUD, 1983 p. 127).

Vergnaud (1996), classifica o conceito como uma terna de três conjuntos, o qual pode ser representado por $C = (S, I, R)$. Segundo Vergnaud (1996):

S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (Referência). I, conjunto dos invariantes nas quais se assenta a operacionalidade dos esquemas (Significado). R, conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). (VERGNAUD, 1996, p. 166).

O conjunto de situações (S) é o que dá sentido ao conceito. O conjunto de invariantes (I) são as relações e propriedades referentes a um determinado conceito e, o conjunto de representações (R) possibilita representar com símbolos as relações e as propriedades para lidar com uma situação.

De acordo com Santana (2010, p. 34), as situações são “o ponto de abertura para um dado Campo Conceitual. Contudo, um só conceito precisa de uma variedade de situações para tornar-se significativo. Da mesma forma, uma só situação precisa de vários conceitos para ser analisada”.

Conforme Vergnaud (1996), o conceito de situação abrange, principalmente, duas ideias, são elas:

- 1- ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceptual, e as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis;
- 2- ideia de história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles se deparam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que lhes pretende ensinar-lhes. (VERGNAUD, 1996, p. 171).

A ideia de variedade está atrelada a várias situações que, ao serem organizadas por meio de classes, de maneira sistematizada, dão sentido ao conceito, sendo essa variedade inerente ao conceito. Se tratando da ideia de história, esta está atrelada às situações as quais os estudantes vão se apropriando, ou seja, as situações que progressivamente eles já dominam, se apropriando assim, dos procedimentos e conceitos necessários para resolvê-las.

Para Vergnaud (1996), existem duas classes de situações,

- 1- classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- 2- classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso. (VERGNAUD, 1996 p. 156).

A primeira se refere às classes de situações que o estudante utiliza as competências e habilidades já dominadas para resolver a situação. A segunda, refere-se às situações que o

estudante não dispõe das competências e habilidades, necessárias para resolver imediatamente, por isso requer maior tempo de reflexão e tentativa, levando-o ao acerto ou não.

Para as situações que dão sentido ao conceito de média, em geral, as primeiras situações que a maioria dos estudantes tem contato é com a média aritmética simples, que implica em somar todos os valores da variável e dividir pelo número de dados. Assim, quando são defrontados com dados agrupados em uma tabela de distribuição de frequência, via de regra, os estudantes somam os valores da variável, somam os valores da frequência e dividem o resultado da soma dos valores da frequência pela soma dos valores da variável, muitas vezes dando valores completamente absurdos, mas nem por isso, os estudantes conseguem perceber que aquele esquema, que ele estava acostumado a utilizar não é mais adequado a esta nova classe de situações.

Se pensarmos em uma situação envolvendo a média, os invariantes operatórios envolvidos, são os dados (brutos ou agrupados), os algoritmos (adição, multiplicação, divisão), as propriedades da média e suas representações.

Os invariantes operatórios do esquema, são denominados de “conceito-em-ação” e “teorema-em-ação”, “[...] um teorema-em-ação é uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa. Um conceito-em-ação é um objeto, um procedimento, ou uma categoria de pensamento tida como partida, relevante” (VERGNAUD 1998, apud SANTANA, 2010, p. 36). Portanto, podemos entender o teorema-em-ação sendo uma proposição que o estudante utiliza para responder uma situação, porém pode ser verdadeira ou falsa e, o conceito-em-ação, está relacionado ao procedimento ou propriedade que o aprendiz utiliza, conduzindo-o ao sucesso ou não na realização da tarefa.

Uma suposição de conceito-em-ação, o estudante se defronta, pela primeira vez, com a necessidade de calcular a média “ponderada”, com os dados dispostos em uma TDF, e parte do pressuposto que é necessário utilizar a média ponderada para resolver a situação. Um falso, teorema-em-ação é acionado pelo estudante quando soma os valores da variável, soma os valores da frequência e divide um pelo outro; porém essa operação não o levará a encontrar a média, pois os dados estão agrupados e ele precisa encontrar as somas parciais da média ponderada.

Outro elemento da terna $C = (S, I, R)$, é a representação, podendo ser linguística ou simbólica, e possibilita representar os conceitos e suas relações. Segundo Vergnaud (1996, p.184), “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão colocada exige várias etapas”.

No campo conceitual da média aritmética, as representações são a linguagem verbal, algébrica, numérica, gráfica e pictórica. Dessa forma, as representações simbólicas são necessárias e podem ser usadas pelo estudante ao representar os invariantes operatórios.

De acordo com Almeida (2017), é importante lembrar que cada sujeito fará uso, ao buscar solucionar uma situação, das representações que ele achar mais conveniente, ou seja, cada tipo de representação simbólica apresentará para o estudante uma utilidade e importância, tal como é afirmado por Santana (2010, p. 39), ao colocar que “quando o sujeito se encontra diante da situação a ser resolvida, ele vai escolher a representação, para seu esquema, conforme a importância que ela tiver para ele”.

Na situação da média apresentada anteriormente, para calcular a média simples, o estudante poderá fazer uso da representação que achar mais conveniente. Caso ele tenha um conjunto numérico de dados ele procederá a somar e dividir encontrando um valor numérico. Por exemplo, suponhamos que Ana tenha um filho, Bia dois, Bianca um, Eloá nenhum e Flavia três filhos, então, o número médio de filhos dessas cinco mulheres será de:

$$\bar{X} = \frac{1 + 2 + 1 + 0 + 3}{5} = \frac{7}{5} = 1,4 \text{ filhos por mulher}$$

Ao lidar com os elementos da terna $C = (S, I, R)$, o sujeito faz uso de *esquemas*. Para Vergnaud (1996, p. 157), esquema é “a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos em ato do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória”.

Dessa forma, é através dos esquemas que vão surgir os elementos cognitivos, permitindo que a ação do sujeito seja cada vez mais operatória, buscando, assim, a resolução de uma determinada situação. Assim, “quanto mais se resolve situações do mesmo tipo, o estudante pode ir se apropriando dessa organização, tornando-a operatória” (ALMEIDA, 2017, p. 25).

De acordo com Vergnaud (1996), frequentemente, os esquemas empregados pelos sujeitos são eficazes, porém, quando não são satisfatórios, as experiências já vivenciadas fazem com que o estudante modifique os esquemas que foram empregados, por ele, na solução de certas situações.

Para Vergnaud, o conceito de esquema é importante, “tanto para as situações em que o indivíduo já dispõe de competências necessárias para resolvê-las como para aquelas às quais ele ainda não dispõe” (ALMEIDA, 2017, p. 25). Na situação da média simples, envolvendo o número de filhos por mulher, esperamos que os estudantes procedam a soma e a divisão. Mas,

os dados podem ser apresentados em uma Tabela de Distribuição de Frequência, como por exemplo:

Nº de filhos por mulher	0	1	2	3	4
Nº de mulheres	15	50	30	4	1

Quando o estudante se depara com essa situação pela primeira vez, ele pode aplicar o esquema da média simples, assim ele soma o número de filhos ($0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$), soma o número de mulheres ($15 + 50 + 30 + 4 + 1 = 100$) e divide a quantidade de mulheres pela “quantidade de filhos”, obtendo como resultado dez.

Se o estudante conhece as propriedades da média, ele saberá que esse resultado está errado, pois a média só pode tomar valores entre o valor mínimo e máximo do conjunto de dados, que neste caso, entre zero e quatro, respectivamente, portanto seria impossível que a média fosse dez filhos.

Portanto, concordamos com Santana (2010, p. 43), sendo o esquema a estrutura cognitiva que o estudante organiza para resolver a sua atividade, ou seja, “é a organização invariante que o estudante dá para uma classe de situação, buscando solucionar a tarefa colocada”.

Nesse sentido, a ampliação do conceito de média simples para média “ponderada” não é intuitiva, e acreditamos que precisa de instrução. A solução dessa situação é apresentada na seção 2.3, que trata dos invariantes.

A partir desses conceitos discutidos, os quais poderão ser essenciais para o processo do entendimento do nosso objeto matemático, média aritmética, discutiremos, na seção, a seguir, sobre suas propriedades e conceitos.

2.2 O campo conceitual da média

Cazorla, Santana e Utsumi (2019) traçaram uma primeira aproximação do campo conceitual da média, circunscrito ao seu ensino na Educação Básica, que nos serviu de suporte para a construção da sequência de ensino e da análise dos resultados.

A média, junto com a mediana e a moda formam as medidas de tendência central que descrevem o comportamento das variáveis, indicando para onde tendem os dados. Dessas três medidas, a média é a mais importante, mesmo que ela seja vulnerável à influência de valores extremos. É a única que reconstitui o todo a partir dela e do número de dados, bem como é a única que está mais próxima de todos os dados. Além disso, a média serve de base para outras

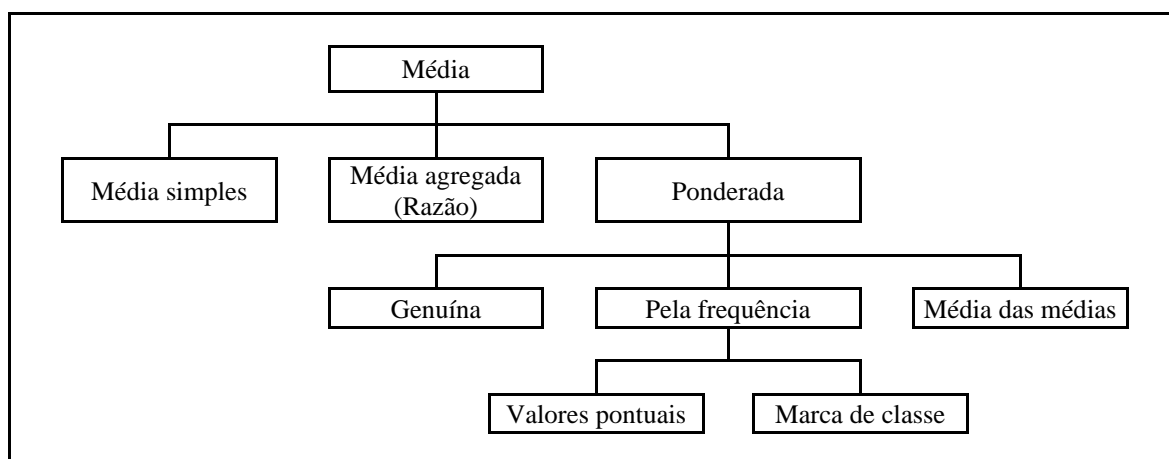
medidas estatísticas, tais como a variância, desvio padrão, coeficiente de variação, coeficiente de correlação, dentre outras.

Assim, definimos a média sendo um número que resume, representa e está mais próximo de todos os elementos do conjunto de dados.

2.2.1 As Situações

Cazorla, Santana e Utsumi (2019) distinguem três grandes classes de situações, que dependem do nível de agregação dos dados, isto é, da forma como os dados estão dispostos para o cálculo da média, como esquematizamos na Figura 3.

Figura 3 – Situações para encontrar a média aritmética



Fonte: Cazorla, Santana e Utsumi (2019).

Para as autoras, essas três classes de situações se dividem em: média simples, quando os dados são brutos; média agregada e a ponderada quando os dados já sofreram algum tratamento estatístico. No caso da média ponderada, distinguem três subclasses, de acordo com as características das variáveis tratadas.

a) A Média Simples

Segundo Bussab e Morettin (2010, p. 35), o conceito de média é o “resultado da adição dos valores da variável (dados) dividido pelo número de dados”. Neste caso, estamos diante da média simples, calculada a partir dos dados brutos.

Representação algébrica:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 \dots + x_n}{n}$$

Onde X representa a variável em estudo, x_1, x_2, \dots, x_n os valores que a variável toma naquela observação e n o número de dados ou observações, tamanho da amostra. A notação utilizada no Ensino Superior é \bar{X} (lê-se “X barra”), onde X representa a variável em estudo. Na Educação Básica, os livros didáticos têm evitado a utilização desse símbolo, substituindo pela palavra “Média”, ou simplesmente M .

Representação na linguagem verbal:

A média é o quociente entre a soma de todos os valores da variável e o número de dados ou a distribuição do todo em partes iguais.

Por exemplo, cinco estudantes examinaram seus cartões de vacinação com os seguintes resultados: Denis tomou cinco vacinas, Sara uma, Caio duas, Ivo seis e Lucas uma. Qual é o número médio de vacinas tomadas pelos cinco estudantes?

$$\text{Média} = \frac{5 + 1 + 2 + 6 + 1}{5} = 3 \text{ vacinas por estudante}$$

Logo o número médio de vacinas tomadas por estudantes é três ou três vacinas por estudante, na linguagem materna.

b) Média agregada ou razão entre duas grandezas

Segundo as autoras, este caso se aplica quando não conhecemos cada um dos valores específicos, mas conhecemos a soma de todos os valores, como por exemplo, o PIB per capita, uma expressão em latim que significa renda por cabeça, que é a razão entre o Produto Interno Bruto (PIB) e o número de habitantes de um país:

$$\text{PIB per capita} = \frac{\text{Produto Interno Bruto (PIB)}}{\text{número de habitantes}}$$

A média calculada dessa forma é divulgada a cada ano, num *ranking* de países, em geral, em dólares. Segundo o *site* Wikipédia (2019), no caso do ano de 2015, o Brasil, de 188 países, ocupava a 50ª posição, com um PIB per capita anual de U\$ 13.670,00 (treze mil, seis centos e setenta dólares), o que em reais nos dias de hoje daria R\$ 54.680,00 (cinquenta e quatro mil e seis centos e oitenta reais por ano), isto é, R\$ 4.556,7 reais por mês.

Todavia, esses valores devem ser usados com cautela, pois o *PIB per capita*, muitas vezes é considerado um indicador do nível de vida de um país, porém, esse indicador não é uma medida da renda pessoal.

Segundo a reportagem de Amorim (2019), a renda domiciliar per capita nominal mensal é calculada por amostragem. No caso do Brasil, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística realiza a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (Pnad Contínua), que investiga a renda das famílias e estima a média. Em 2018, esse valor foi de R\$ 1.373 no país. Esse valor, apesar de ser uma estimativa, por amostragem, é mais fidedigno que o PIB per capita.

A média agregada também pode ser utilizada em casos em que não é possível saber o valor da variável em cada ponto, mas se conhece as grandezas que a originaram. Por exemplo, para saber qual foi a velocidade média que um veículo realizou ao percorrer um espaço, basta conhecer o espaço percorrido e o tempo que gastou no percurso.

$$\text{Velocidade média} = \frac{\text{Espaço percorrido}}{\text{tempo gasto no percurso}}$$

Neste caso, a velocidade, por definição, já é uma média. Isto porque é quase impossível e desnecessário saber a velocidade instantânea a cada tempo.

c) A média ponderada

Neste caso, Cazorla, Santana e Utsumi (2019) distinguem três subclasses: a primeira onde o peso ou ponderação é uma valoração, a segunda onde a ponderação é a frequência com que ocorre cada valor ou faixa, e a terceira, a média geral calculada a partir da média de grupos, quando temos grupos e conhecemos a média e o tamanho de cada grupo.

c1) Média ponderada genuína

A média ponderada genuína é quando os valores da variável têm pesos ou ponderações diferentes, que podem ser de cunho subjetivo. Este caso é típico de variáveis que podem ser discretas ou contínuas, mas que tomam poucos valores.

Logo, a média ponderada levará em consideração esses pesos (w_i) e sua representação algébrica é:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k (w_i * x_i)}{\sum_{i=1}^k w_i} = \frac{w_1 * x_1 + w_2 * x_2 \dots + w_k * x_k}{w_1 + w_2 \dots + w_k}$$

Onde k é o número de valores de X (X representa a variável de estudo); x_i são os valores

de X no ponto i e w_i são os pesos que ponderam cada valor de x_i .

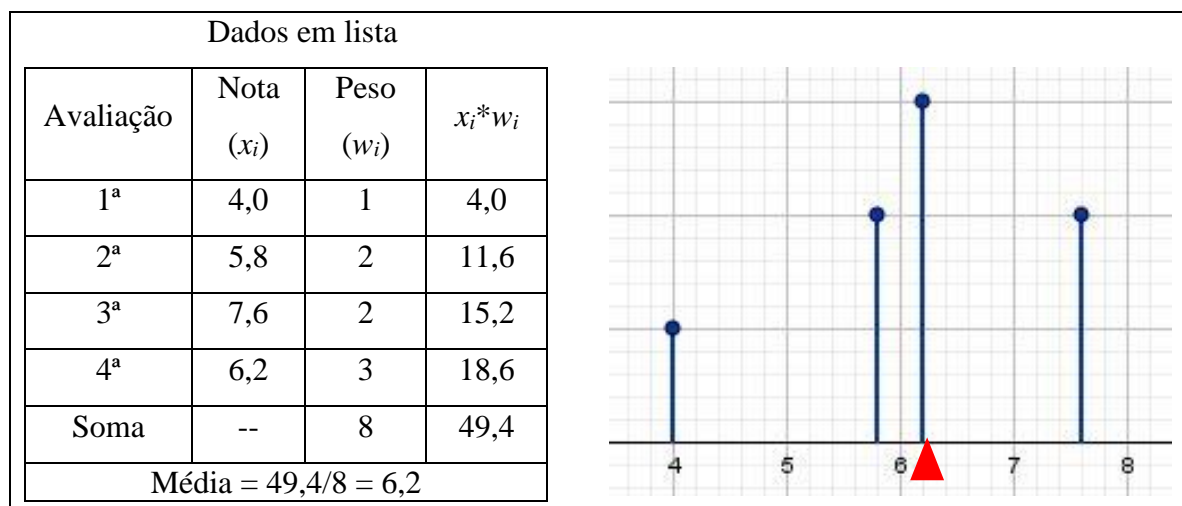
Para ilustrar esse caso, Cazorla, Santana e Utsumi (2019) apresentam um exemplo clássico das notas em uma disciplina. Suponha que a disciplina tenha 4 avaliações, com as seguintes notas: 1ª nota igual a 4,0; 2ª nota igual a 5,8; 3ª nota igual a 7,6 e 4ª nota igual a 6,2, e os seguintes pesos: 1ª avaliação com peso 1; segunda e terceira avaliação com peso 2 e 4ª avaliação com peso 3, totalizando um peso de 8 (1 + 2 + 2 + 3):

$$\bar{X} = \frac{1 * 4,0 + 2 * 5,8 + 2 * 7,6 + 3 * 6,2}{1 + 2 + 2 + 3} = \frac{4,0 + 11,6 + 15,2 + 18,6}{8} = \frac{49,4}{8} = 6,2$$

A média simples, sem ponderação, seria 5,9 [(4,0+5,8+7,6+6,2) / 4 = 23,6/4 = 5,9]. Se a nota mínima para aprovar a disciplina fosse 6, este estudante estaria reprovado pela média simples, mas aprovado pela média ponderada, uma vez que esse estudante foi melhor nas últimas avaliações, que tinham maior valoração.

Uma representação gráfica possível poderia ser um gráfico de hastes, onde cada haste representa o peso, assim, a média (ponto de equilíbrio) estará próxima do maior peso, conforme a figura 4.

Figura 4 – Representação gráfica da média no diagrama de hastes



Fonte: Construção do autor.

Nesse exemplo, representamos a média com o triângulo vermelho como o “fiel da balança”.

c2) Média ponderada pela frequência

Neste caso Cazorla, Santana e Utsumi (2019) apresentam dois tipos. O primeiro quando temos uma variável discreta que toma poucos valores e o segundo quando a variável é contínua

ou discreta, que toma muitos valores e eles estão agrupados em classes. Neste caso, a representação algébrica geral é:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k (f_i * x_i)}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{f_1 * x_1 + f_2 * x_2 \dots + f_k * x_k}{f_1 + f_2 \dots + f_k} = \frac{f_1 * x_1 + f_2 * x_2 \dots + f_k * x_k}{n}$$

Onde:

$$n = f_1 + f_2 + \dots + f_k = \sum_{i=1}^k f_i$$

Todavia o significado de seus componentes é diferente.

i) Média para uma variável discreta que toma poucos valores e estão em uma TDF

Quando a variável discreta toma poucos valores, como por exemplo, número de vacinas completas tomadas pelo estudante, x_i representa cada valor da variável, e os valores pontuais da variável estão dispostos em uma TDF ou em um gráfico de hastes, precisamos recompor a soma dos valores da variável:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k (f_i * x_i)}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{\sum_{i=1}^k (f_i * x_i)}{n}$$

Onde, x_i representa os valores da variável X e f_i a frequência que cada valor x_i ocorre.

Nesse sentido, a organização dos cálculos fica facilitada na TDF, em que podemos adicionar uma coluna para o produto do valor da variável (x_i) com sua frequência (f_i), que gera o número de vacinas tomadas, como podemos ver na Tabela 1. Assim, no final da segunda coluna temos o número total de estudantes e no final da terceira coluna temos o total de vacinas que esses estudantes tomaram; portanto, a média é a razão entre esses dois totais. Podemos proceder da mesma forma, partindo do diagrama de hastes (Figura 5).

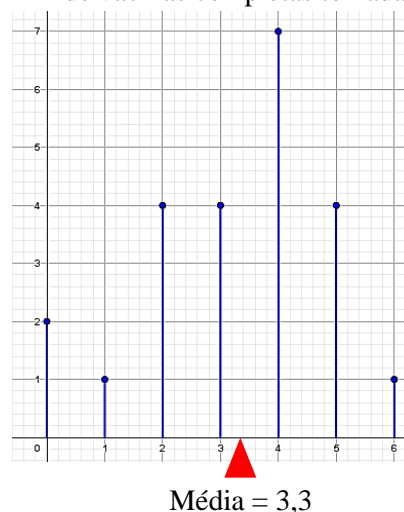
Tabela 1 – TDF para calcular a média de uma variável discreta que toma poucos valores

Nº de vacinas (xi)	Nº de estudantes (fi)	Produto (xi*fi)
0	2	0
1	1	1
2	4	8
3	4	12
4	7	28
5	4	20
6	1	6
Total	23	75

$$\text{Média} = 75/23 = 3,3$$

Fonte: Construção do autor

Figura 5 – Diagrama de hastes do número de vacinas completas tomadas



Segundo Cazorla, Santana e Utsumi (2019), neste caso não se trata de uma real ponderação, mas de uma abreviação de cálculos, isto é, ao invés de somar 2 zeros, com 1 um, e assim sucessivamente, basta multiplicar e somar, como podemos ver no Quadro 5.

Quadro 5 – Abreviação do cálculo da média “ponderada”

0, 0	1	2, 2, 2, 2	3, 3, 3, 3	4, 4, 4, 4, 4, 4, 4	5, 5, 5, 5	6
2	1	8	12	28	20	6
0*2 = 0	1*1 = 1	2*4 = 8	3*4 = 12	4*7 = 28	5*4 = 20	1*6 = 0
Soma = Total de vacinas tomadas = 0+1+8+12+28+20+6 = 75 vacinas; n = 2+1+4+4+7+4+1 = 23 estudantes						
Média = Soma/n = 75 vacinas/23 estudantes = 3,3 vacinas/estudante						

Fonte: Construção do autor.

Observamos que o gráfico adequado para este tipo de variável é o diagrama de hastes (construído com o *GeoGebra*) e não o gráfico de barras, que é utilizado na maioria das planilhas eletrônicas; bem como, pela grande maioria de autores de livros didáticos, mídia e comunidade geral, o que apresenta erro conceitual, mas que a comunidade científica aceita e, para não introduzir mais um elemento conflitivo, na nossa sequência de ensino, utilizamos o gráfico de barras.

ii) Média para uma variável contínua, ou discreta que toma muito valores, agrupada em classes

Quando a variável é contínua, que toma muitos valores, como por exemplo, a altura, a massa corpórea e o IMC dos estudantes, número de passageiros que viajam em ônibus por dia,

dentre outros; e esses dados estão agrupados em uma TDF, em classes (Tabela 2) ou em um histograma (Figura 6), não se tendo mais os valores originais, neste caso, o significado do x_i é diferenciado:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k (f_i * x_i)}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{3\ 640}{22} = 165,4 \text{ cm/estudante}$$

Onde x_i é a marca de classe ou o ponto médio do intervalo de classe, que representa os valores originais da variável; f_i é o número de observações contidas nesse intervalo.

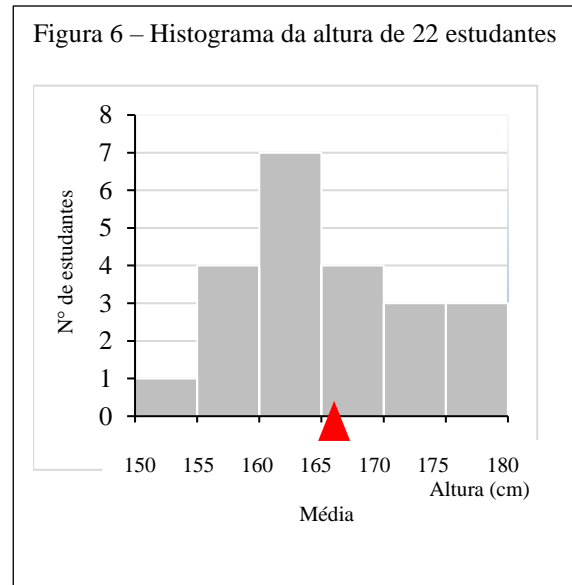
Tabela 2 – TDF para calcular a média de uma variável agrupada em classes

Classes de altura (cm)	Marca de classe (xi)	Nº de estudantes (fi)	Produto (xi*fi)
150 -- 155	152,5	1	152,5
155 -- 160	157,5	4	630,0
160 -- 165	162,5	7	1.137,5
165 -- 170	167,5	4	670,0
170 -- 175	172,5	3	517,5
175 -- 180	177,5	3	532,5
Total	--	22	3.640,0

$$\text{Média} = 3.640,0/22 = 165,45$$

Fonte: Construção do autor.

Figura 6 – Histograma da altura de 22 estudantes



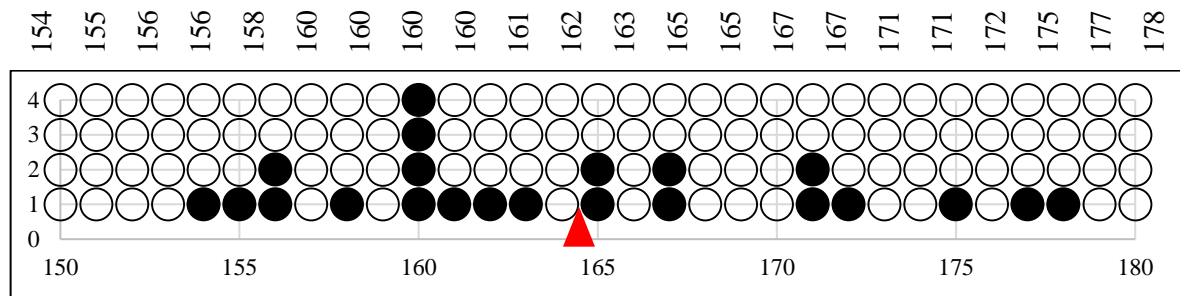
Esse procedimento era uma forma de abreviar o cálculo da média aritmética antes da revolução computacional. A média era calculada não com os valores originais, mas utilizando a marca de classe do intervalo, definido com o ponto médio do intervalo, que é o valor que representa e substitui os valores que estão contidos nesse intervalo. Sendo assim, esta média é um valor aproximado do verdadeiro valor da média. Hoje, com acesso a *softwares* livres, não tem muito sentido seu cálculo. Isto será útil quando não se tem mais os valores originais.

Observamos ainda que o histograma é muito útil para o estudo de distribuições e para a análise conjunta das medidas de posição, dispersão e forma da distribuição, que só é tratado no Ensino Superior, mas que há pesquisadores investigando essa possibilidade no ensino na Educação Básica.

A título de curiosidade, na Figura 7 apresentamos os dados brutos que originaram a TDF e o histograma, bem como o diagrama de pontos (referente a média calculada a partir dos dados brutos e a representação da altura de 22 estudantes). A média calculada a partir dos dados brutos

é igual a 164,6 cm/estudante. Logo, podemos ver que a média calculada a partir da TDF difere em dois centímetros para mais, o que é um erro muito pequeno, da ordem de 1,6%, para uma variável como esta, onde a precisão não é um fator crucial.

Figura 7 – Média calculada a partir dos dados brutos e a representação da altura de 22 estudantes



Fonte: Construção do autor.

Onde:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{n} = \frac{3\,621}{22} = 164,6 \text{ cm/estudantes}$$

Assim, encontramos o valor médio referente à altura dos 22 estudantes. Portanto, a média da altura dos estudantes é de 164,6 cm por estudante.

c3) A Média geral a partir de médias parciais

Segundo Cazorla, Santana e Utsumi (2019), este caso se refere a uma variável em uma população que é dividida em grupos, e queremos calcular a média geral a partir das médias parciais. Neste caso, o tamanho da população ou número de dados é composto pela soma do tamanho dos grupos e o valor da média geral é formado pela média ponderada das médias dos grupos.

$$\bar{X}_{\text{geral}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i * \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{n_1 * \bar{x}_1 + n_2 * \bar{x}_2 \dots + n_k * \bar{x}_k}{n_1 + n_2 \dots + n_k} = \frac{n_1 * \bar{x}_1 + n_2 * \bar{x}_2 \dots + n_k * \bar{x}_k}{n}$$

Onde, k é o número de grupos; \bar{x}_i é a média do grupo i; n_i é o tamanho do grupo i e n é o tamanho da amostra geral, resultante da soma do tamanho de todos os grupos:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i$$

Por exemplo, para calcular a média da estatura de todos os estudantes, quando conhecemos a média por sexo, podemos calcular a média geral a partir das médias dos grupos, conforme Quadro 6.

Quadro 6 – Estatísticas da altura dos estudantes por gênero

Sexo	Nº de estudantes (n_i)	Altura média (\bar{x}_i)	Soma das alturas ($n_i * \bar{x}_i$)
Feminino	14	160,5	2247
Masculino	8	171,9	1375
Geral	22	166,2	3622

Fonte: Construção do autor.

Assim, podemos calcular a média geral a partir das médias parciais, onde a frequência é o tamanho do grupo e o valor é a média do grupo. Aqui estamos aplicando uma propriedade da média, que diz que ela pode ser recalculada a partir de suas médias parciais, pois a soma dos valores de cada grupo é reconstituída ao multiplicarmos o número de dados pela média:

$$\bar{X}_{geral} = \frac{\sum_{i=1}^2 n_i * \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^2 n_i} = \frac{n_1 * \bar{x}_1 + n_2 * \bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{14 * 160,5 + 8 * 171,9}{14 + 8} = \frac{2247 + 1375}{22}$$

$$\bar{X}_{geral} = 166,2$$

Se denominarmos de Soma (S) o valor do numerador, teremos que a soma é igual ao produto da média com o tamanho da amostra:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = n * \bar{X},$$

$$S = n * \bar{X} \quad \text{ou} \quad S = \sum_{i=1}^n x_i$$

Se temos k grupos então:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n_i}$$

$$S_i = n_i * \bar{x}_i$$

Assim:

$$\bar{X} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Isto é, a média geral é razão entre a soma das somas parciais, dividido pelo número de dados geral.

2.3 Os Invariantes

Segundo Cazorla, Santana e Utsumi (2019), o campo conceitual da média é formado por um conjunto de conceitos, operações e propriedades como parte dos invariantes ligados ao conceito de média.

O insumo da média aritmética são os dados numéricos e estes são oriundos de variáveis quantitativas, definidas em uma população de estudo. Assim, os elementos para a média aritmética são: população, amostra, variável, dados.

Podemos entender o conceito de população como a reunião de elementos que possuem características em comum e que são objetos de estudo, de onde se extraem os dados. Por exemplo, quando realizamos a intervenção de ensino na turma do 9º ano A, a população será composta por todos os estudantes matriculados, nessa turma, em 2018. Se a pesquisa fosse na escola, a população estaria formada por todos os estudantes matriculados, nessa escola durante 2018. Neste caso, a turma do 9º ano A se configuraria como uma amostra.

2.4 Variáveis e dados

Os dados são resultado da operacionalização das variáveis, que são as características de uma população ou amostra, que podem ser qualitativas ou quantitativas, sendo que a média só pode ser calculada para variáveis quantitativas.

Além disso, os dados podem ser provenientes de fonte primária, quando coletamos diretamente dos elementos da população (ou amostra), ou de fonte secundária, quando os dados foram coletados por outrem. Por exemplo, quando os estudantes coletam os dados de sua altura, massa corpórea, idade etc., a fonte é primária; mas quando eles transcrevem as datas das doses das vacinas tomadas é uma fonte secundária, pois foi o agente de saúde do posto que aplicou a vacina e registrou no cartão. Em geral, as fontes secundárias se referem a dados já trabalhados e publicados pelas diversas agências governamentais, empresas etc. Por exemplo, se quisermos estudar as taxas de cobertura vacinal por estado no Brasil, temos que recorrer a fontes secundárias, como veremos mais adiante na Figura 11.

Ademais, as variáveis podem ser simples ou compostas. É importante notar que em situações escolares, nas aulas de Matemática, trabalhamos com variáveis simples, como notas

na disciplina, altura dos estudantes, número de gols por partida. Mas, em Geografia, por exemplo, se trabalha com variáveis compostas ou agregadas, tais como, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), renda per capita, taxa de fecundidade, dentre outros.

As variáveis compostas ou agregadas são formadas pela composição de variáveis simples e sua constituição pode ser altamente complexa e, portanto, requer cuidados para seu tratamento e não podem ser tratadas como variáveis simples.

As variáveis podem ser médias como, por exemplo, a expectativa de vida, taxa de fecundidade, a renda per capita e, são calculadas, em geral, por países. Por exemplo, se tivéssemos a lista com a renda a renda domiciliar per capita nominal mensal dos 27 estados brasileiros, não poderíamos calcular a média simples para encontrar a renda a renda domiciliar per capita nominal mensal do Brasil. Neste caso, teríamos que calcular a média das médias e para isso seria necessário conhecer o número de habitantes de cada estado. No Quadro 7, apresentamos a renda domiciliar per capita nominal mensal dos 27 estados brasileiros, e nele, podemos verificar que o cálculo da renda domiciliar per capita nominal mensal do Brasil não pode ser efetuado somando a renda de cada estado, pois a renda média dos estados é diferente da do Brasil.

Quadro 7 – Renda domiciliar per capita nominal mensal dos estados brasileiros em 2015

Estado	RP	Estado	RP	Estado	RP
Distrito Federal	2.254,00	Mato Grosso	1.053,00	Paraíba	774,00
São Paulo	1.482,00	Mato Grosso do Sul	1.044,00	Amazonas	753,00
Rio Grande do Sul	1.434,00	Roraima	1.008,00	Acre	752,00
Santa Catarina	1.368,00	Amapá	840,00	Bahia	736,00
Rio de Janeiro	1.284,00	Pernambuco	825,00	Piauí	728,00
Paraná	1.241,00	Rondônia	823,00	Ceará	681,00
Minas Gerais	1.128,00	Rio Grande do Norte	819,00	Pará	671,00
Goiás	1.078,00	Tocantins	816,00	Alagoas	598,00
Espírito Santo	1.074,00	Sergipe	782,00	Maranhão	509,00
Renda domiciliar per capita nominal mensal do Brasil: 1.113,00					
Média da renda domiciliar per capita nominal mensal dos 27 estados brasileiros: 983,52					

Fonte: Adaptado de Wikipédia (2019).

Dessa forma, devemos ter cuidado ao calcular a média e, de forma geral, as medidas estatísticas.

Além da natureza da variável é importante levar em consideração que a média está relacionada a duas variáveis (dimensões) que são expressas em uma dimensão relativa e sua compreensão é vital. Retomemos o exemplo do número de filhos por mulher da Seção 2.1, onde

Ana tenha um filho, Bia dois, Bianca um, Eloá nenhum e Flavia três filhos, então o número médio de filhos dessas cinco mulheres será de:

$$\bar{X} = \frac{1 \text{ filho} + 2 \text{ filhos} + 1 \text{ filho} + 0 \text{ filho} + 3 \text{ filhos}}{5 \text{ mulheres}} = \frac{7 \text{ filhos}}{5 \text{ mulheres}} = 1,4 \text{ filhos por mulher}$$

Mas, vejamos o que acontece quando os dados estão agrupados em uma Tabela de Distribuição de Frequência (Tabela 3):

Tabela 3 – Número de filhos por mulher

Nº de filhos por mulher	Nº de mulheres
0	15
1	50
2	30
3	4
4	1

Fonte: Construção do autor.

Ao analisarmos os dados, vamos verificar que eles têm significados distintos. Enquanto o zero da lista corresponde a Eloá que não tem filhos, o zero da TDF corresponde às 15 mulheres que não têm filhos, portanto, é uma razão: 0 filhos por mulher e, se nessa situação temos 15 mulheres, então as 15 mulheres somam parcialmente zero filhos. Da mesma maneira, o número 1 da lista corresponde ao filho único que Ana e Bianca têm. Na TDF, o número 1 corresponde à razão 1 filho por mulher, e nessa situação temos 50 mulheres, logo, o número total de filhos que essas 50 mulheres têm é 50, e assim sucessivamente. Logo, para calcular a média precisamos reconstruir o número total de filhos que as 100 mulheres têm. Vejamos o que acontece, matematicamente, ao tratarmos os dados com suas dimensões:

$$\bar{X} = \frac{0 \frac{\text{filho}}{\text{mulher}} * 15 \text{mulheres} + 1 \frac{\text{filho}}{\text{mulher}} * 50 \text{mulheres} + 2 \frac{\text{filhos}}{\text{mulher}} * 30 \text{mulheres} + 3 \frac{\text{filhos}}{\text{mulher}} * 4 \text{mulheres} + 4 \frac{\text{filhos}}{\text{mulher}} * 1 \text{mulher}}{15 \text{mulheres} + 50 \text{mulheres} + 30 \text{mulheres} + 4 \text{mulheres} + 1 \text{mulher}}$$

$$\bar{X} = \frac{0 \text{ filhos} + 50 \text{ filhos} + 60 \text{ filhos} + 12 \text{ filhos} + 4 \text{ filhos}}{100 \text{ mulheres}} = \frac{126 \text{ filhos}}{100 \text{ mulheres}} = 1,26 \text{ filhos por mulher}$$

Esse exemplo mostra que quando se trabalha com dados estatísticos, não se pode abstrair as dimensões dos números, pois essa abstração pode induzir a erros, principalmente quando se

trabalha com estudantes dos anos iniciais que não tem o domínio dos campos numéricos e das relações que se estabelecem entre esses campos.

Além dos conceitos de população, amostra, variável e dados, a média envolve outros conceitos relativos ao agrupamento dos dados. No caso de variáveis discretas, que tomam poucos valores e esses estão em uma TDF ou em um gráfico de hastes ou barras, precisamos do conceito de frequência absoluta, que é o número de vezes que ocorre o valor da variável, e da frequência relativa que é expressa em probabilidade ou porcentagem.

No caso de variáveis contínuas ou variáveis discretas, que tomam muitos valores e esses estão agrupados em intervalos de classe, será necessário utilizar outros conceitos, tais como: valor mínimo, valor máximo, amplitude (que é a diferença entre o máximo e o mínimo), intervalo de classe (limite inferior e limite superior), marca de classe (x_i) que é a soma dos limites dividido por dois e que substitui os valores originais da variável contidos nesse intervalo.

2.5 Operações

A média e suas propriedades envolvem as quatro operações básicas. No caso do Ensino Superior, a média de uma variável aleatória, denominada de esperança matemática envolve as séries infinitas e as integrais (BATANERO, 2000).

2.5.1 Propriedades

A compreensão da média está intimamente relacionada ao conhecimento de suas propriedades. Aqui apresentamos as sete propriedades postuladas por Strauss e Bichler (1988):

1. a média está localizada entre os valores extremos: valor mínimo $\leq \bar{x} \leq$ valor máximo;
2. a soma dos desvios dos valores da variável a partir da média é zero: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$;
3. a média é influenciada por cada um e por todos os valores: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$;
4. a média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;
5. a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por mulher é de 2,3);
6. a média é um valor representativo dos dados, a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores;
7. o cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos e os negativos.

A essas foram acrescentadas três propriedades algébricas:

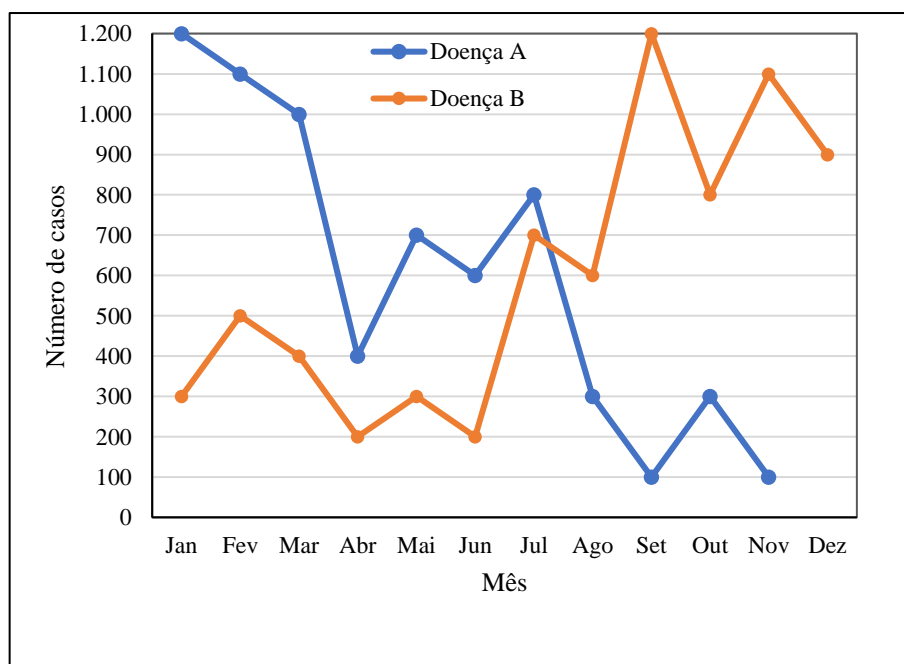
8. a soma de todos os valores da variável é igual ao produto do número de observações e a média: $\sum_{i=1}^n x_i = n * \bar{x}$;
9. ao acrescentar à variável um valor constante, a média fica acrescida nessa constante:
Se $Y = a + X$, então $\bar{y} = a + \bar{x}$;
10. Ao multiplicar a variável por uma constante, a média fica multiplicada por essa constante: Se $Y = a * X$, então $\bar{y} = a * \bar{x}$.

A segunda e a terceira propriedade fazem da média a “mais poderosa” representação de todas as medidas de tendência central, pois é a única que minimiza a distância entre os valores da variável em relação à média e, a média é a única que consegue reconstituir o todo (oitava propriedade), a partir do conhecimento dela e do número de dados envolvidos.

A média é o centro de massa de um conjunto de dados, por essa razão, os desvios positivos compensarão os desvios negativos zerando essa soma.

Para examinar essas propriedades adaptamos o exercício complementar número 5 do livro didático do 3º ano, do Ensino Médio (MODERNA, 2016, p. 71), que tem por enunciado “(Enem) Doenças relacionadas ao saneamento ambiental inadequado (DRSAI) podem estar associadas ao abastecimento deficiente de água, tratamento inadequado de esgoto sanitário, contaminação por resíduos sólidos ou condições precárias de moradia. O gráfico apresenta o número de casos de duas DRSAI de uma cidade:”

Figura 8 – Número de casos de duas doenças DRSAI



Fonte: Adaptado de Moderna (2016, p. 71).

Embora a questão não aborde a média, mas apenas a leitura de gráficos, este exercício nos parece muito adequado para discutir a média, seus limites e suas propriedades.

Nessa situação, se o estudante somar os 11 dados da Doença A e dividir por 12, ele estará assumindo que no mês de dezembro teve zero casos, o que não é verdade e que o levará a subestimar o valor da média de casos dessa doença.

Aqui o professor deve discutir o que é um dado faltante ou falta de informação e o que é o valor zero de uma variável, o que pode impactar significativamente no valor da média.

Assim, para iniciar o cálculo da média, o estudante deve observar que a Doença A tem um mês sem informação, portanto, deverá somar os 11 dados e dividir por 11; a Doença B tem os 12 dados, que deverá somá-los e dividir por 12.

Para a Doença A, temos:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{11} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}}{11}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{11} = \frac{1200 + 1100 + 1000 + 400 + 700 + 600 + 800 + 300 + 100 + 300 + 100}{11}$$

$$\bar{X} = \frac{6600}{11}$$

$$\bar{X} = 600 \text{ casos por mês (Doença A)}$$

E, para a Doença B, temos:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}}{12}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{300 + 500 + 400 + 200 + 300 + 200 + 700 + 600 + 1200 + 800 + 1100 + 900}{12}$$

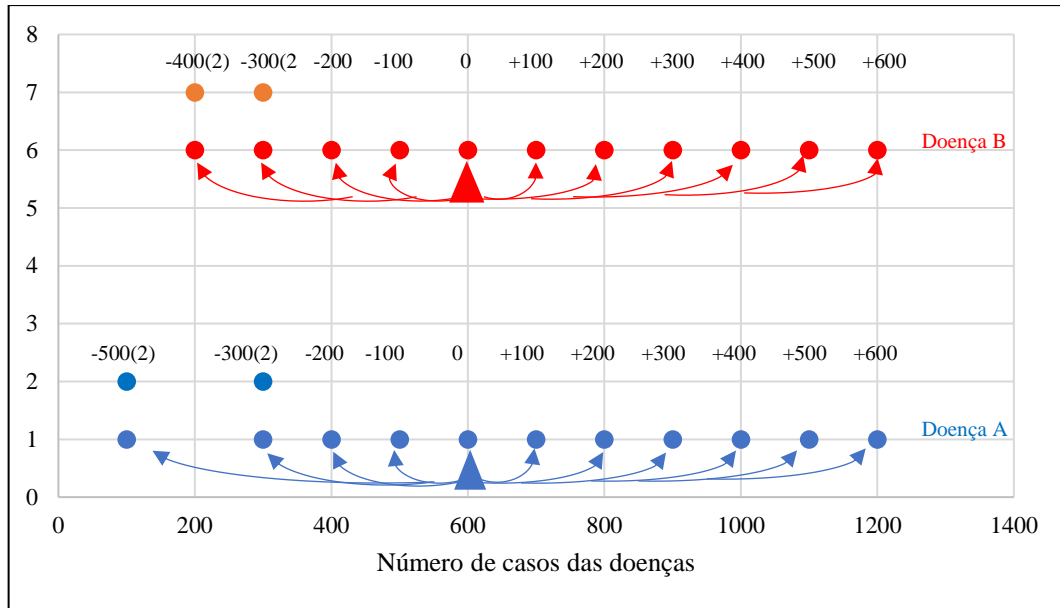
$$\bar{X} = \frac{7200}{12}$$

$$\bar{X} = 600 \text{ casos por mês (Doença B)}$$

Como podemos observar, o número médio de casos das duas doenças, ao longo do ano, foi de 600 casos/mês, o que pode induzir ao estudante a concluir que as duas doenças estão no mesmo patamar, o que em termos de média é verdadeiro, porém, em termos de tendência, não; uma vez que a Doença A está em franco declínio, enquanto que a Doença B está em franca ascensão, deve-se alertar as autoridades de saúde.

Uma outra representação, que retirasse a influência dos meses, é o diagrama de pontos. E neste caso, a representação da média será como o “fiel da balança”, conforme Figura 9.

Figura 9 – Representação dos dados no diagrama de pontos



Fonte: Construção do autor.

Neste diagrama, podemos analisar as propriedades da média e verificarmos que essa está entre o valor mínimo (100) e o valor máximo (1200); a soma dos desvios dos valores da variável, em relação à média, é zero (Quadro 7); se multiplicamos $11 \cdot 600$, obteremos o número total de casos da Doença A, e se multiplicarmos $12 \cdot 600$, obteremos o total de casos da Doença B. Observamos que o cálculo da média leva em consideração todos os valores, mas não a “ausência da informação”, como é o caso do mês de dezembro da Doença A. No Quadro 8 apresentamos o cálculos dos desvios em relação à média.

Quadro 8 – Cálculo dos desvios dos valores em relação à média para as duas doenças

Mês	DOENÇA A			DOENÇA B		
	Valor	Média	Desvios	Valor	Média	Desvios
Jan	1200	600	600	300	600	-300
Fev	1100	600	500	500	600	-100
Mar	1000	600	400	400	600	-200
Abr	400	600	-200	200	600	-400
Mai	700	600	100	300	600	-300
Jun	600	600	0	200	600	-400
Jul	800	600	200	700	600	100
Ago	300	600	-300	600	600	0
Set	100	600	-500	1200	600	600
Out	300	600	-300	800	600	200
Nov	100	600	-500	1100	600	500
Dez	*			900	600	300
Total	6600	600	0	7200	600	0

*Falta de informação

Fonte: Construção do autor.

Observando o comportamento dos desvios na Figura 9 e no Quadro 7, podemos verificar que os desvios negativos estão localizados do lado esquerdo da média e os positivos do lado direito e ao adicioná-los o resultado será igual a zero. Isso não é por acaso, mas um resultado algébrico, na busca de um número que esteja o mais próximo de todos os valores da variável, isto é, o que torna mínimo a soma dos desvios, como pontuam Cazorla, Santana e Utsumi (2019):

$$\sum_{i=1}^n (xi - \bar{X}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (xi - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n xi - \sum_{i=1}^n \bar{X} = \sum_{i=1}^n xi - n\bar{X} = 0$$

$$\text{Logo: } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n xi}{n}$$

Nesse sentido, não existe um outro número que cumpra essa condição. Assim, podemos concluir que a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada e, em termos espaciais, é o valor que está mais próximo de todos os valores, isto é, seu centro de massa.

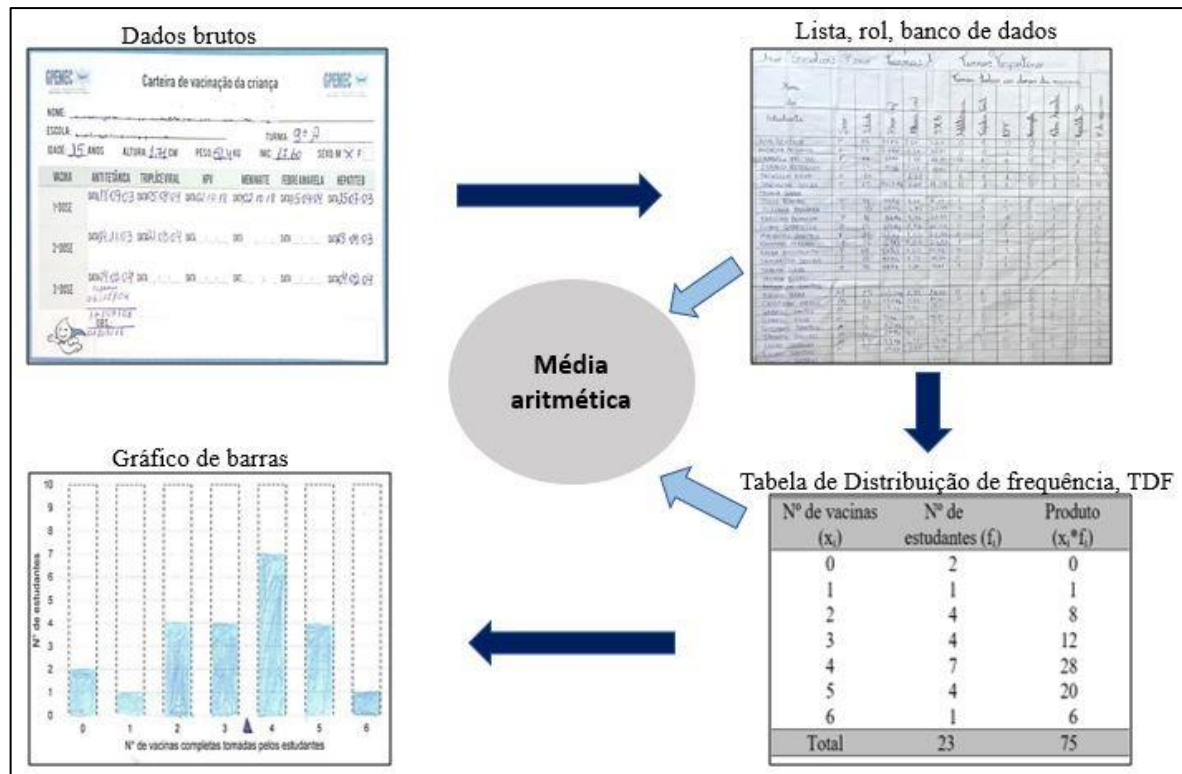
2.6 As representações

As representações podem ser linguística ou simbólica, e possibilitam representar os conceitos e suas relações. Segundo Vergnaud (1996, p.184), “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de auxiliar à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas”.

Aqui é importante salientar que há uma confusão entre a representação dos dados estatísticos e a representação da média. Para tentar esclarecer e distinguir esses dois tipos de representação, devemos levar em consideração a origem e a forma como estão representados os dados estatísticos que geram a média e lembrar que a média é um número, apenas e exclusivamente, um número expresso na razão de duas grandezas.

Na Figura 10 apresentamos as possíveis representações dos dados que permitem calcular a média. Os dados podem ser brutos (sem nenhuma organização) ou eles podem estar organizados em listas (rol, banco de dados, planilhas), em tabelas estatísticas ou em TDF ou em gráficos. Salientamos que nem todas as tabelas e gráficos permitem esse cálculo.

Figura 10 – Fluxo da transformação dos dados e fontes para o cálculo da média



Legenda: ➡ Transformações dos dados. ➡ Fontes para cálculo da média

Fonte: Construção do autor.

A média é um número, que pode ser representada de forma verbal, numérica, algébrica, gráfica e pictórica. Assim, a seguir apresentaremos os tipos de representação, analisando qual delas é mais adequada a situação trabalhada.

2.6.1 Representação verbal

A representação verbal, como citamos anteriormente, a média é o quociente entre a soma de todos os valores da variável e o número de dados. Vejamos um exemplo: um grupo de 5 crianças estavam brincando no recreio, e na hora de lanche verificaram que Anderson tinha seis biscoitos, Marcos sete, Júlia quatro, Ígor três e Bruna não tinha levado nada para o lanche. Marcos teve a ideia de juntar todos os biscoitos e repartir o total de biscoitos igualmente entre todas as crianças. Com quantos biscoitos cada criança ficou?

Representação na língua materna:

“Dividimos igualmente os 20 biscoitos entre as cinco crianças, ficando cada uma com quatro biscoitos” ou “em média cada criança ficou com quatro biscoitos” ou “a média do número de biscoitos por criança foi quatro”.

2.6.2 Algébrica

Como já vimos ao longo da apresentação das situações, a representação algébrica depende da situação, se envolve a média simples ou agregada, e sendo agregada, o tipo de agregação.

$$\text{Média simples: } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\text{Média ponderada: } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k (f_i * x_i)}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

2.6.3 Numérica

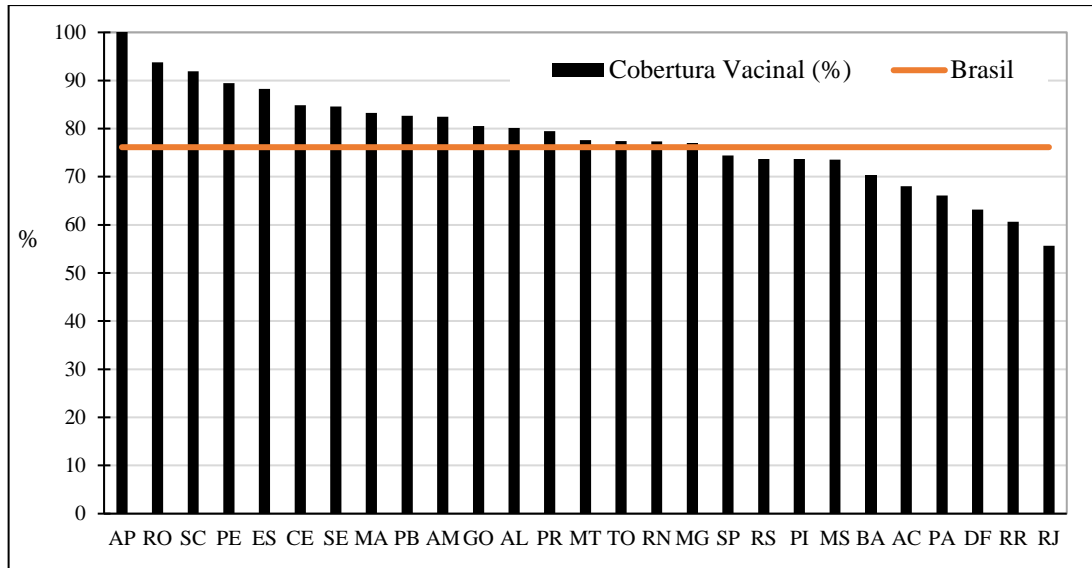
A representação numérica é resultado do cálculo da média em um caso específico de dados, como por exemplo, a renda per capita do Brasil em 2017 foi de R\$ 1.113,00.

2.6.4 Gráfica

Na Figura 11 utilizamos uma linha para representar a média em um gráfico de barras, relativo à cobertura vacinal nos estados brasileiros (BRASIL, 2019), sendo que a cobertura nacional foi de 76,1%. Neste caso, poderíamos ensinar aos estudantes como verificarem, de forma intuitiva, o valor da média, utilizando uma régua, fazendo um movimento paralelo à abscissa, procurando ficar o mais próximo do topo das as barras, equilibrando o que falta das barras que ficam abaixo da média, com o que excede das barras que ficam acima da média. Essa é uma atividade interessante para apropriação do conceito de média.

Aproveitamos esse exemplo para chamar atenção que não podemos calcular a cobertura nacional (geral) utilizando a média simples da cobertura vacinal dos estados, pois neste caso precisamos ponderar pelo tamanho da população de cada estado para recompor a porcentagem geral.

Figura 11 – Representação da média aritmética no gráfico de barras

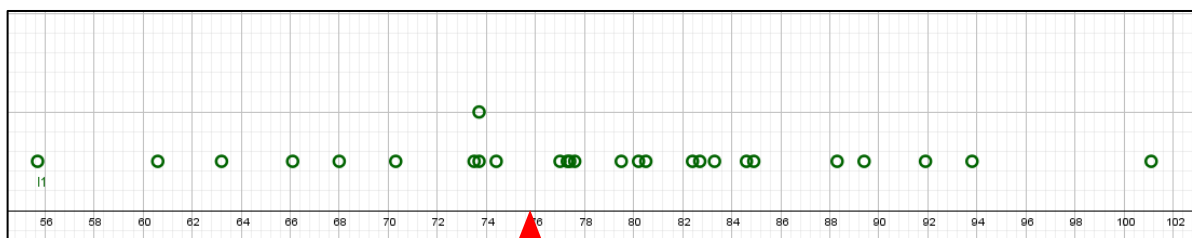


Fonte: Adaptado de Ministério da Saúde (2018).

Mas, se quiséssemos representar os dados independentemente da unidade federada, o correto seria construirmos o diagrama de pontos, para “representar” a média como o “fiel da balança”.

Nesse sentido, a representação mais adequada para “sentir” o centro de gravidade é a representação do “fiel da balança”, e para isso teríamos que utilizar o diagrama de pontos (Figura 12), representação que infelizmente ainda não foi introduzida na Educação Básica.

Figura 12 – Representação da média como “fiel da balança”



Fonte: Construção do autor.

Outras representações gráficas utilizando o “fiel da balança” foram apresentadas no caso da Figura 5, com variável discreta, no diagrama de hastes e na Figura 6, com variável contínua, no histograma.

2.6.5 Representação pictórica

Além dessas representações, podemos verificar a presença, cada vez maior, da representação pictórica. Na Figura 13 podemos observar uma representação pictórica da taxa

de fecundidade (número médio de filhos por mulher). Há um erro conceitual, pois a figura apresenta a imagem de um casal, quando deveria ser apenas uma mulher, pois se trata da taxa de fecundidade e não do tamanho das famílias.

Figura 13 – Representação pictórica da taxa de fecundidade



Fonte: Ribeiro (2018).

Com relação às representações: gráfica, algébrica, numérica, linguagem verbal e pictográfica, é de suma importância que o professor possibilite ao estudante não somente situações em que ele aplique o algoritmo, ou seja, o cálculo pelo cálculo e, obtenha o resultado, mas, situações que possibilitem ao estudante explorar tanto os dados, quanto os conceitos envolvidos, as representações e, em seguida, tenha capacidade de argumentar e analisar criticamente. Pois, apenas o cálculo pelo cálculo, sem sua interpretação, nem sempre poderá possibilitar tal compreensão. Uma possibilidade para a construção dos gráficos, além do ambiente papel e lápis, poderá ser com o auxílio de programas computacionais (*softwares*), como por exemplo, o Excel ou GeoGebra.

2.3 As pesquisas sobre a média aritmética

Nesta seção apresentamos uma revisão de alguns estudos correlatos, e como anunciado, buscamos extrair destes os diversos aspectos do conceito de média, sejam os esquemas envolvidos em sua apreensão, suas propriedades, invariantes e representações. Não focamos nos resultados dessas pesquisas, mas nos elementos que compõem o campo conceitual de média

aritmética, e assim, obter subsídios para discutir o campo conceitual proposto por Cazorla, Santana e Utsumi (2019), e podermos explicitar as contribuições do presente trabalho.

Nesse sentido, analisaremos artigos que envolvem a média aritmética, de forma abrangente, com um número substancial de participantes, ou de uma abordagem abrangente dos diversos aspectos da média aritmética e que, de certa forma, são tomados como clássicos na área de Educação Estatística, que estão apresentados no Quadro 9.

Quadro 9 – Artigos científicos envolvendo a média aritmética

Autor(es)	Ano	Publicações de artigos e tese relacionados à Estatística
Strauss e Bichler	1988	The development of children's concepts of the arithmetic average.
Batanero	2000	Significado y comprensión de las medidas de posición central.
Cazorla	2003	Média aritmética: um conceito prosaico e complexo.
Cobo	2003	Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria
Magina; Cazorla; Gitirana; Guimarães	2010	Concepções e concepções alternativas de média: Um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental
Rondero e Font	2015	Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética

Fonte: Construção do autor.

Além disso, consultamos teses e dissertações produzidos no Brasil, no período de 2008 a 2018, no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com filtros pesquisando por média, média aritmética e medidas de tendência central, e encontramos 11 dissertações e uma tese cujos títulos são apresentados no Quadro 10.

Quadro 10 – Dissertações e teses envolvendo a média aritmética, publicados no período de 2008 a 2018

Autor	Ano	IES	Título
Mabel Cristina Marques Melo	2010	UFPE-PE	Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.
Fábio Muniz Amaral	2010	PUC-SP	Validação de sequência didática para (re)construção de conhecimento Estatísticos por professores do Ensino Fundamental.
José Ivanildo Felisberto de Carvalho	2011	UFPE-PE	Média Aritmética nos Livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental.
Maria Patrícia Freitas de Lemos	2011	PUC-SP	O desenvolvimento profissional de professores do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental em um processo de formação para o ensino e a aprendizagem das medidas de tendência central.
Mario de Souza Santana	2011	UFOP-MG	A Educação Estatística com base num ciclo investigativo: um estudo do desenvolvimento do letramento estatístico de estudantes de uma turma do 3º ano do Ensino Médio
Robson da Silva Eugênio	2013	UFPE-PE	Explorações sobre a média no software <i>TinkerPlots 2.0</i> por estudantes do Ensino Fundamental.
Diego José Lopes Lôbo Leite	2014	UFRPE-PE	Média Aritmética Ponderada: Um estudo detalhado da influência dos pesos no posicionamento da média. Propriedades e Aplicações.
Tiago Augusto dos Santos Alves	2016	UNIAN-SP	Conhecimentos de professores de matemática da educação básica sobre o ensino de medidas de tendência central.
Wagner Dias Santos	2017	UNIRIO-RJ	Letramento estatístico nos livros de Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular
Antônio Vital da Silva Júnior	2018	UESC-BA	Efeitos do ciclo investigativo PPDAC e das transformações de representações semióticas no desenvolvimento de conceitos estatísticos no Ensino Fundamental.
Jean Paixão Oliveira	2018	UESC-BA	Aprendizagem em estatística numa perspectiva transdisciplinar: uma possibilidade?
José Ronaldo Alves Araújo	2018	PUC-SP	Atividades para o estudo de Medidas de Tendência Central: uma proposta com o apoio do GeoGebra.

Fonte: Construção do autor.

A seguir apresentamos a descrição dos referidos trabalhos correlatos.

Strauss e Bichler (1988) realizaram um estudo para investigar o desenvolvimento da compreensão das crianças de sete propriedades da média aritmética, avaliar os efeitos do material usado no teste (contínuo, descontínuo) e o meio de apresentação (história, material concreto e numérico). Participaram 20 crianças de cada uma das idades de 8, 10, 12 e 14 anos. Nesse trabalho os autores postularam sete propriedades para a média aritmética, cujo conhecimento pelo sujeito denota o domínio do conceito, e estas são:

1. a média está localizada entre os valores extremos;
2. a soma dos desvios dos valores da variável a partir da média é zero;
3. a média é influenciada por todos os valores que a compõem;
4. a média não necessariamente coincide com os valores que a compõem;
5. a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física;
6. o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos;
7. a

média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada⁹ (STRAUSS; BICHLER, 1988, p. 66, tradução nossa).

Nesse trabalho, os autores só focam a média simples, a representação verbal e numérica, adequadas à idade dos participantes. A grande contribuição desse trabalho radica no fato de que os autores investigaram o desenvolvimento do raciocínio das crianças em tarefas que envolvem as propriedades da média, verificando que nem a forma de apresentação, nem os materiais utilizados interferem nessa compreensão. Os resultados são discutidos em termos de sua importância para a Psicologia do desenvolvimento e a prática educacional. Dentre os principais resultados, os autores verificaram a dificuldade das crianças em reconhecer o zero como um dado, dividindo a soma dos valores pelo número de dados não nulos, superestimando a média, justificando que ao somar ou subtrair não se adiciona ou subtrai o zero.

Batanero (2000) teve por objetivo analisar o campo de problemas e atividades dos quais emergem o conceito de média e as demais medidas de tendência central (mediana e moda), a partir de quatro campos de problemas de onde surge o objeto matemático, a média: a média como estimativa de uma quantidade desconhecida, na presença de erros de medição; como quantidade equitativa a repartir para se conseguir uma distribuição uniforme; enquanto elemento representativo de um conjunto de dados; e, enquanto necessidade de conhecer o valor que será obtido com maior probabilidade, ao contar com um dado faltando em uma distribuição. Para a autora, o significado de média tem um caráter complexo e podem ser identificados cinco tipos de elementos, os extensivos, actuativos, ostensivos, intensivos e validativos, em que surgem as operações matemáticas (adição, multiplicação e divisão), as representações, as propriedades e suas demonstrações matemáticas. A autora apresenta a média simples, a Esperança Matemática (média de uma variável aleatória) discreta e contínua; a média geral a partir da média de grupos e a ideia da média como a razão entre duas grandezas, como a renda per capita.

Cazorla (2003, p. 1) teve por objetivo “investigar o nível de conhecimento sobre a média aritmética, principais lacunas e o papel da instrução no desenvolvimento desse conceito”. Participaram da pesquisa 840 estudantes de uma universidade estadual do interior do estado da Bahia, que estavam matriculados nas disciplinas de Estatística em diferentes cursos de graduação do segundo semestre de 1999 e do primeiro semestre de 2000. Foram aplicados dois

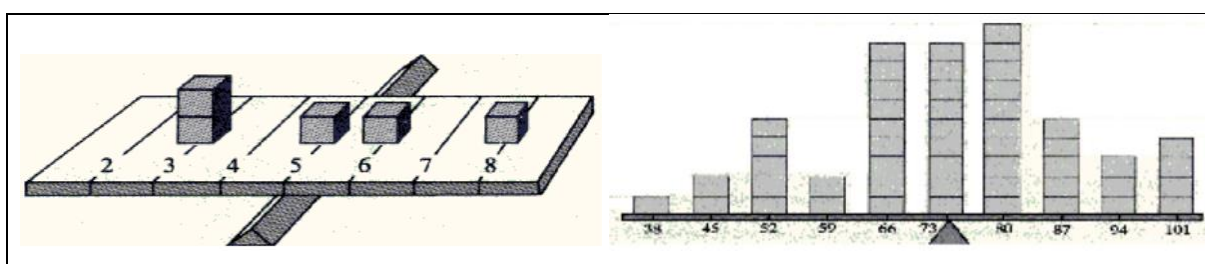
⁹ 1. The average is located between the extreme values; 2. the sum of the deviations from the average is zero; 3. the average is influenced by values other than the average; 4. the average does not necessarily equal one of the values that was summed; 5. the average can be a fraction that has no counterpart in physical reality; 6. then one calculates the average, a value of zero, if it appears, must be taken into account; 7. the average value is representative of the values that were averaged.

instrumentos do tipo lápis e papel: um questionário informativo e uma prova estatística composta por seis questões sobre a média. A autora, trabalhou, nas questões, o cálculo da média simples e ponderada; as propriedades da média propostas por Strauss e Bichler (1988); a relação do “todo” e a média, bem como o conhecimento de média ponderada; e a interpretação da média de uma variável discreta cujo resultado é um número decimal.

Na análise dos resultados, Cazorla (2003) identificou que os participantes definiram a média com o algoritmo; como ponto médio, mediana, valor central; e como um valor que resume os dados. Com relação à utilidade da média, responderam que a média serve para representar um conjunto de dados; para encontrar valores intermediários e que serve para fazer inferência. A autora concluiu que os participantes tinham um conhecimento da média considerado razoável, “conheciam o algoritmo da média simples; conseguiram calcular a média incorporando um novo dado e encontrar um valor a partir da média e do restante dos valores”. Porém, os participantes “não dominavam o conceito de média ponderada e não conseguiram interpretar a média de uma variável discreta”. Como definição para a média, os participantes definiram como um “algoritmo e que serve para representar um conjunto de dados” (CAZORLA, 2003, p. 12).

Cobo (2003), pautada na pesquisa de Batanero (2000), avançou na investigação sobre o significado e compreensão das medidas de tendência central, revisando livros do ensino médio e superior e as diretrizes curriculares do ensino médio. Além disso, realizou uma pesquisa com 312 estudantes do ensino médio que responderam um questionário contendo 15 questões, verificando as representações verbais, simbólicas (com um triângulo denotando o fiel da balança) e numérica; quanto aos algoritmos e procedimentos, a média simples, ponderada, cálculo gráfico da média, inversão do algoritmo; dado um valor para a média, buscar a distribuição; quanto às definições e propriedades, a média como algoritmo para média simples e ponderada, e as propriedades já postuladas por Strauss e Bichler (1988). É importante salientar a representação da média como o “fiel da balança” (Figura 14).

Figura 14 – Representação da média como o “fiel da balança” proposta por Cobo



Fonte: Cobo (2003, p. 51).

Magina et al. (2010, p. 61) desenvolveram uma pesquisa “comparativa que investigou as competências e concepções de alunos e professores primários, em relação à leitura de tabelas, gráficos e medidas de tendência central”. Ao todo, participaram 287 estudantes que foram divididos em cinco grupos. O primeiro foi composto por 54 estudantes do 5º ano; o segundo, 47 do 6º ano; o terceiro, 61 estudantes que estavam cursando um curso de Pedagogia; 82 estudantes concluintes de um curso de Pedagogia e, grupo cinco, 43 professores do Ensino Fundamental. Para analisar as concepções dos participantes, foi desenhada uma pesquisa exploratória, a partir da aplicação de um instrumento diagnóstico.

As autoras utilizaram um instrumento do tipo lápis e papel, com sete questões que envolveu a leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos e o conceito de média. Nesse trabalho, as autoras apresentam os resultados de três questões, as quais envolveram à compreensão do conceito de média simples. A primeira questão foi trabalhada com uma variável contínua, a segunda questão envolveu um gráfico de barras, com uma variável discretizada (consumo médio de água de uma família), e, a terceira questão, envolveu um gráfico de colunas com uma variável discreta. Magina et al (2010), concluíram que os participantes confundiram a média com a soma dos valores; a média com o valor máximo dos dados, ou seja, não tinham conhecimento das propriedades da média e, mostraram acreditar que a média tem que coincidir com pelo menos um dos valores.

Rondero e Font (2015) realizaram um estudo abrangente, utilizando o enfoque ontosemiótico da cognição e instrução matemática, cujo objetivo foi aprofundar a articulação da complexidade associada ao objeto matemático (média aritmética) como um passo prévio e necessário para avançar para uma visão unitária do objeto matemático. Inicialmente os autores apresentam um mapa conceitual da média, que mostra alguns conteúdos matemáticos que envolvem definições, propriedades, representações entre outros, relacionados à média, tais como: a própria estatística; o cálculo numérico; o cálculo de áreas e áreas sob as curvas; integrais definidas; raízes de inteiros, sequências e progressões; valores esperados de variáveis aleatórias; as demais medidas de tendência central e o cálculo de valores.

Esses autores concordam com Batanero (2000), no que diz respeito aos problemas estarem relacionados com os campos de problemas de onde surge a média. Quanto às representações, os autores mencionam a verbal, simbólica, tabular e gráfica; quanto às definições e conceitos (frequência, marca de classe num histograma, intervalo entre outros); as proposições estão relacionadas com os conceitos de média que surgem na estatística e probabilidade; os procedimentos estão relacionados com a soma, a divisão, a multiplicação, ou seja, são os procedimentos estatísticos que podem estar relacionados com a média aritmética

(cálculo da média aritmética de uma distribuição de frequência); e, os argumentos são as respostas apresentadas pelos estudantes ao responderem os problemas propostos.

Melo (2010) investigou como o conceito de média era compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações. Os participantes desse estudo foram 210 sujeitos de seis escolas públicas do município de Moreno, no estado de Pernambuco, sendo 75 estudantes do 3º ano, e 104 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental e 31 professores dos anos iniciais. Sua pesquisa foi ancorada na Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud. Os aspectos que foram trabalhados para o conceito de média nos dois testes foram os enunciados gráfico (gráfico de colunas) e escrito. Cada teste continha sete questões que focavam os invariantes e os significados propostos, respectivamente, por Strauss e Bichler (1988) e, Batanero (2000).

Nos testes elaborados, dentre as propriedades, não foi abordado a propriedade: a soma dos desvios dos valores da variável a partir da média é zero. Vale ressaltar que as questões propostas apresentavam equivalência entre os invariantes e significados, porém, mudavam na representação nos testes. As questões propostas por Melo focaram na média simples a partir de dados brutos, as variáveis trabalhadas foram discretas e contínuas, com o número máximo de cinco dados, todos os números inteiros e com ordem de grandeza pequena.

Na análise dos resultados, Melo utilizou o termo “estratégias” para verificar como os professores e estudantes resolveram as questões e, as categorizou, dependendo da questão, em sete ou 15 estratégias, sendo algumas comuns. Dentre as estratégias comuns, duas foram: resposta correta com explicitação do procedimento de resolução (algoritmo da média aritmética), e resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução. Melo verificou que os sujeitos tiveram dificuldades em considerar o zero no cálculo da média e na compreensão que a média pode ser um número sem sentido na vida real (número de filhos por mulher).

Amaral (2010) validou uma sequência didática que contempla os conteúdos de moda, mediana e média, utilizando a engenharia didática e se apoiando nos níveis de funcionamento dos conceitos e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Participaram da pesquisa seis professoras, cinco formadas em Pedagogia e uma em Jornalismo, com mais de 10 anos de experiência em sala de aula, que lecionavam Matemática no Ensino Fundamental. A sequência era composta por 10 questões e realizada em seis encontros com duração de 1h40min cada um. Para a solução das questões, as professoras responderam individualmente as atividades, sem nenhuma exposição ou discussão dos conteúdos previamente, e a seguir, fizeram os comentários e discussões pertinentes.

As questões focavam as propriedades propostas por Strauss e Bichler (1988) e das 10 questões, oito focaram a média e suas propriedades, sendo: três de média simples, duas o cálculo da média simples envolvendo uma variável discreta, a interpretação da média sem referente no mundo real (número médio de filhos por família brasileira); média simples com uma variável contínua (notas em uma disciplina); o cálculo da média simples de uma variável discreta, em um gráfico de barras; o cálculo da média ponderada de uma variável discreta; o cálculo da média “ponderada” pela frequência, de uma variável discreta, a partir de um pictograma e, e a análise da possibilidade de cálculo da média a partir de uma variável qualitativa, disposta em uma TDF.

Na análise a priori das questões, Amaral (2010) as classificou em língua natural, gráfica ou tabular, conforme cada questão era apresentada; na análise dos dados, também, observou as estratégias utilizadas pelas professoras, porém não as classificou, mas chamou a atenção para as representações feitas por essas professoras: algumas das representações foram o desenho por meio de figuras ou a mudança dos dados apresentados nas questões para o registro gráfico no intuito de calcular a média. O autor verificou que os sujeitos ao iniciar o desenvolvimento da resolução das questões conheciam o algoritmo da média, mas confundiam o significado; tiveram dificuldades no cálculo da média quando o número de elementos dos grupos é diferente (homens e mulheres); apresentaram dificuldades em reconhecer o tipo da variável; confundiram as frequências com as variáveis; e, calcularam a média de forma equivocada.

Carvalho (2011) analisou a abordagem de média dos livros didáticos de Matemática, destinados aos estudantes das escolas públicas dos anos finais do Ensino Fundamental. Os livros escolhidos foram os aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2011. Sua pesquisa foi embasada na Teoria dos Campos Conceituais, e o autor, realizou uma pesquisa documental feita a partir da análise de 10 coleções de livros didáticos, cada uma com quatro volumes, totalizando 40 volumes. Para a análise das atividades propostas nos livros, o autor observou o significado, os invariantes e a representação referentes ao conceito da média. Para os invariantes, o autor tomou por base as propriedades propostas por Strauss e Bichler (1988); para os significados, se baseou nos propostos por Batanero (2000); com relação às representações, Carvalho as classificou em linguagem materna (a mais utilizada); representação gráfica e tabular.

O autor apresenta a média simples, a média ponderada “genuína” e a média “ponderada” pela frequência e, neste caso o autor esclarece que a frequência não é o peso, mas a frequência com que ocorre cada valor pontual. Apresenta a ideia da média como ponto de equilíbrio ou centro de massa e também se refere à média como a razão entre duas grandezas.

Carvalho (2011) concluiu que os resultados apontados para o trabalho com a média nos livros didáticos analisados encontram-se em torno de um significado: a média como elemento representativo de um conjunto de dados. Quanto aos demais significados, são poucos explorados, além de uma lacuna na abordagem de dois significados, a saber: a média como um valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população, e a média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população. Para os invariantes, Carvalho concluiu que os dados analisados se concentram em duas propriedades: a média é influenciada por cada um e por todos os valores e, a média não precisa, necessariamente, coincidir com um valor a partir do qual foi calculada. Com relação à propriedade, “a soma dos desvios a partir da média é igual a zero”, esta não foi explorada em atividade alguma dos livros analisados. Para a representação da média, a mais utilizada foi a linguagem materna, a qual se repetiu em oito coleções; as representações tabular e a linguagem materna foram abordadas em duas coleções de formas equilibradas e, foi constatada uma lacuna para a representação gráfica. Por ter analisado livros didáticos, esse autor não verificou esquemas.

Lemos (2011) investigou a compreensão e o desenvolvimento pedagógico e do didático sobre o conteúdo das medidas de tendência central que podem ser identificados em professores que atuam do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, em uma formação continuada, a partir da investigação de seu desenvolvimento profissional. A formação foi estruturada em cinco etapas, das quais participaram 6 professores: realização de um curso de introdução dos conceitos de Estatística, em que foi aplicado um instrumento contendo 10 questões; elaboração de uma tarefa para ser aplicada em sala de aula; análise da tarefa elaborada; aplicação e análise da tarefa em sala de aula; e, momento de socialização e afetividade.

As questões utilizadas na pesquisa de Lemos (2011) foram as mesmas utilizadas por Amaral (2010). Essas questões, também, focaram nos significados propostos por Batanero (2000) e nas propriedades postuladas por Strauss e Bichler (1988).

Lemos (2011) utilizou o termo estratégia para analisar como as professoras resolveram as questões. Dentre as estratégias utilizadas pelas professoras para o cálculo da média, verificou-se o cálculo da média simples, o uso do gráfico pictórico para representar o número de filhos distribuídos entre as famílias para somar e dividir, a língua materna, a mudança de registro para a representação gráfica. Com relação ao cálculo da média dos dados dispostos em uma TDF, uma professora fez o desenho do gráfico de hastes para ajudar na solução; e, a mudança do registro gráfico para o tabular, para o cálculo da média ponderada. Com relação à elaboração das tarefas pelas professoras, a autora identificou as medidas de tendência central, leitura e interpretação de gráficos e tabelas, e representação de dados em gráficos.

Santana (2011) estudou as características do letramento estatístico que podem se manifestar em estudantes quando se promove uma Educação Estatística baseada em um ciclo investigativo. Para alcançar o objetivo, foi elaborada, testada e aplicada uma atividade pautada no ciclo investigativo PPDAC e na concepção do letramento. A atividade foi desenvolvida em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio, em uma escola pública no interior de Minas Gerais. O autor trabalhou o conceito de média simples e seu cálculo, a média como um valor “que pode ser distorcido por valores discrepantes”, “a média implica necessariamente a existência de valores acima e abaixo dela”, “a média é uma medida que leva em conta todos os valores do conjunto que está sendo analisado”, e a “média aritmética pode ser influenciada por valores extremos em um conjunto de dados e, portanto, pode não representar o “centro” de um conjunto de valores se os dados são tendenciosos” (SANTANA, 2011, p. 66).

Na resolução da atividade, Santana (2011) não investigou os esquemas, pois tinha como objetivo o desenvolvimento do letramento estatístico dos estudantes a partir da investigação estatística com dados reais, para a ampliação de conceitos estatísticos. Os resultados apontam para uma mudança de comportamento nas aulas de Matemática, maior motivação para aprendizagem e atribuição de significados, maior autonomia e crença na capacidade de aprender no decurso das aulas de Matemática, contribuindo para o desenvolvimento do letramento estatístico.

Eugênio (2013) analisou as explorações sobre a média por estudantes do 5º e 9º anos na interpretação de gráficos no *software TinkerPlots*. A pesquisa envolveu 16 estudantes do Ensino Fundamental, sendo oito estudantes do 5º ano, e oito estudantes do 9º ano. Eugênio, organizou sua pesquisa em quatro etapas. Na primeira etapa os participantes responderam um teste sobre média, de forma individual; segunda etapa foi realizada uma entrevista semiestruturada individual; terceira etapa foi o momento de familiarização com as ferramentas do *TinkerPlots*, realizada em duplas e, na quarta etapa ocorreu a interpretação de dados envolvendo situações para o trabalho com a média, realizada também em duplas.

O teste elaborado continha três bancos de dados, os quais foram: “Gatos”, “Tempo dos estudantes” e “Peixes” contendo variáveis qualitativas (tipo de peixe) e variáveis quantitativas (comprimento dos peixes). A tarefa dos estudantes foram explorar o conceito de média simples com ajuda do *software TinkerPlots*, que permite separar as medidas da variável quantitativa pela variável qualitativa, explorando visualmente a localização da média no diagrama de pontos.

Leite (2014) teve como objetivo ampliar o conceito de média aritmética para a ideia de ponto de equilíbrio, a partir de sua interpretação geométrica, e apresenta o *software Gangorra*

Interativa como uma possibilidade para a aprendizagem de média aritmética como ponto de equilíbrio. Trabalhou com o conceito de média simples e ponderada, porém, o tratamento dos dados foi de cunho matemático e não estatístico.

Nesse trabalho, Leite apresentou um capítulo específico para a solução de questões de vestibulares em que a interpretação das médias, a partir da influência dos pesos no posicionamento da média, poderia contribuir para os processos de solução. Além disso, este autor, apresentou em outro capítulo, o *software* Gangorra Interativa como uma possibilidade para a aprendizagem do conceito de média. Leite (2014, p. 33) argumentou que a média simples e a média ponderada podem ser entendidas como “valor intermediário entre dois extremos, sendo essa média igual aos extremos quando os extremos forem iguais”. É importante destacar, que em seu trabalho, Leite (2014), não investigou nenhum esquema, uma vez que seu trabalho foi para apresentar a média como ponto de equilíbrio, a partir da interpretação geométrica com auxílio do *software* Gangorra Interativa.

Alves (2016) investigou a ampliação da base de conhecimentos do ensino das medidas de tendência central de professores participantes de uma formação continuada. Foram sujeitos da pesquisa 14 professores da Educação Básica que estavam participando de uma formação continuada no estado de São Paulo. Para o desenvolvimento do trabalho, foram utilizados quatro instrumentos de pesquisa: questionário de identificação de perfil, questionário inicial, atividades práticas e atividades dissertativas.

Alves verificou a primeira, segunda, quinta, sexta e a sétima propriedade da média nas respostas dos professores, trabalhado com variáveis contínuas e discretas, com dados brutos e apresentados em quadros. Nas questões foi solicitado o cálculo da média simples de uma variável discreta em um conjunto com cinco dados, o cálculo da média ponderada com uma variável contínua, porém discretizada com os dados apresentados em quadro, a interpretação da média, dado o resultado final da questão, a interpretação da média sem referente no mundo real e, a compreensão da média, comparando com as demais medidas de tendência central. O autor não investigou os esquemas dos professores, apenas analisou como os professores responderam às questões. Porém, na análise apresenta dois tipos de representações que os professores utilizaram para responder as questões: a resposta na língua materna e na representação numérica.

Santos (2017) identificou o nível de letramento estatístico presente em livros didáticos do Ensino Médio, e observou se estão de acordo com as recomendações da segunda versão da BNCC. Ancorou sua pesquisa na Teoria Antropológica do Didático e analisou três coleções de livros mais distribuídos no Brasil, aprovados em 2015 pelo Programa Nacional do Livro

Didático (PNLD). Destacamos que o autor analisou os conteúdos propostos na segunda versão proposta para a BNCC em 2016. Para a análise das atividades apresentadas nos livros, o autor selecionou nas coleções analisadas duas atividades por livro: uma que estava de acordo com a BNCC e a outra, que necessariamente não estivesse.

Nas atividades analisadas, o autor identificou o cálculo da média simples de uma variável discreta com os dados apresentados em tabelas; a média a partir de um gráfico de colunas de uma variável contínua em cinco valores pontuais; cálculo da média de uma variável contínua com os dados agrupados em classes e em um histograma. Com relação às propriedades, Santos (2017) verificou três propriedades da média, as quais foram: crescer à variável um valor constante; a média é influenciada por cada um e por todos os valores; e, a soma de todos os valores da variável é igual ao produto do número de observações pela média. Com relação aos esquemas, Santos (2017) não os investigou, uma vez que foi feita a análise em livros didáticos e o autor não tinha esse foco.

Silva Junior (2018) identificou e caracterizou os efeitos do ciclo investigativo e das transformações de representações semióticas no desenvolvimento de conceitos estatísticos no Ensino Fundamental, na perspectiva do letramento estatístico. A pesquisa foi desenvolvida com duas turmas de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, sendo uma, o grupo controle e a outra, o grupo experimental. No grupo controle foram utilizadas atividades de livros didáticos de Matemática e no grupo experimental foram utilizados dados dos próprios estudantes sobre seus hábitos alimentares, os quais percorreram as fases do PPDAC. A pesquisa é de caráter intervencionista, com um delineamento quase experimental, com o emprego de um instrumento diagnóstico aplicado antes e depois da intervenção nos dois grupos.

Foram trabalhados como conceitos estatísticos população, amostra, variáveis e dados; tabelas, tabelas estatísticas e a TDF; gráficos estatísticos e as medidas de tendência central. As variáveis trabalhadas foram: temperatura de uma certa cidade, produção e venda de cadeiras, número de irmãos, notas dos estudantes, números de medalhas, idade de jogadores, desenho animado favorito versus gênero e o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica de certos municípios.

O instrumento diagnóstico continha cinco questões, das quais duas trabalharam com a média: em uma foi solicitado o cálculo da média simples de uma variável discreta com os dados apresentados em um gráfico de colunas, e na outra o cálculo da média simples ou ponderada de uma variável contínua, porém discretizada, com dados brutos. Alguns estudantes utilizaram o cálculo da média simples e ponderada, e a média como somas parciais; foi solicitado o cálculo da média simples e ponderada em gráficos de colunas, no diagrama de pontos (dotplot) e em

dados brutos; e, a interpretação da média sem referente no mundo real. Dentre as propriedades da média, uma que nos chamou atenção foi: o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos, terceira propriedade, a qual foi trabalhada em um gráfico de colunas envolvendo temperatura negativa, nula e positiva.

Oliveira (2018) analisou as possíveis contribuições de uma sequência de ensino, baseada na perspectiva transdisciplinar, para a aprendizagem de estudantes do 9º ano no que tange às medidas de tendência central e à metodologia transdisciplinar. Ancorou sua pesquisa e sua sequência de ensino na Transdisciplinaridade. Para a aprendizagem de conceitos estatísticos, o autor tomou como base o Letramento Estatístico. Foram participantes da pesquisa 21 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e a professora de matemática da escola. A sequência foi composta de cinco etapas, em que se discutiu os conceitos de média, moda e mediana, partindo de um tema integrador: poluição dos rios e preservação da água para a vida no planeta. A mesma foi aplicada em 12 horas/aula e foi inspirada na coleção Alfabetização Matemática.

Oliveira trabalhou em sua sequência apenas o cálculo da média simples a partir dados brutos apresentados em um quadro (consumo de água dos últimos 12 meses, a partir da conta de água da casa dos estudantes). Não abordou as propriedades da média, porém destacou que o valor da média sofre alteração, levando em conta os valores dos extremos do conjunto de dados. O autor, em seu trabalho, não investigou as representações e os esquemas, porém, como o foco é na aprendizagem dos estudantes, verificou como os estudantes resolveram as atividades sobre o cálculo da média simples.

Araújo (2018) identificou as potencialidades do *GeoGebra* para a compreensão dos conceitos de medidas de tendência central. O autor se ancorou nas fases de ação, formulação, validação e institucionalização da Teoria das Situações Didáticas e desenvolveu sua sequência de atividades com sete estudantes do 1º ano do Ensino Médio, porém, para a análise dos dados, o autor só analisou as respostas de dois estudantes, pois foram os que participam de todo processo da pesquisa. A estrutura da sequência de atividades, foi baseada nos PCN (BRASIL, 1998), o currículo do Estado de São Paulo (2010) e a BNCC (BRASIL, 2017).

A sequência explora a média simples, sua representação algébrica, para dados brutos, em lista e em tabela de dupla entrada. Trabalhou com variáveis contínuas simples e agregadas (esperança de vida, que por definição é uma média ponderada) e, em algumas atividades, a interpretação da média; não trabalhou com as propriedades da média e não focou nas representações. Porém, trabalhou com a construção do gráfico de colunas com o *GeoGebra*. Araújo (2018), também, não verificou os esquemas dos estudantes, ainda que tenha analisado

as respostas dos participantes verificando o avanço na compreensão dos conceitos das medidas de tendência central nas questões propostas com o auxílio do *GeoGebra*.

Sintetizando, temos que os trabalhos apresentados nessa seção discutiram acerca do ensino e aprendizagem de média ou das medidas de tendência central, com foco nos seus conceitos básicos e em como podem ser trabalhados em salas de aula, no Ensino Fundamental e Médio.

Quanto às situações, verificamos que Strauss e Bichler (1988) focam a média simples, a representação verbal e numérica; não abordam a média ponderada, nem a média como razão, e não postulam propriedades mais complexas da média aritmética; Cazorla (2003), Magina et al (2010), Melo (2010), Lemos (2011), Leite (2014), Alves (2016) e Santos (2017) focaram no cálculo da média simples e ponderada; Batanero (2000) apresenta a média como a razão entre duas grandezas, a média simples, a Esperança Matemática e a média geral a partir da média de grupos; Santana (2011), Eugênio (2013) e Oliveira (2018) exploraram o conceito de média simples; e, Carvalho (2011) apresenta a média simples, a média ponderada “genuína”, a média “ponderada” pela frequência, a ideia da média como ponto de equilíbrio ou centro de massa.

Amaral (2010) abordou o conceito de média simples e média geral a partir de médias parciais; Silva Junior (2018), focou no cálculo da média simples e ponderada, porém alguns estudantes utilizaram a média como somas parciais; Araújo (2018) explora a média simples, sua representação algébrica;

Quanto às propriedades propostas por Strauss e Bichler (1998), Melo não explorou a quarta propriedade; Amaral explorou a média a partir do valor da média e do tamanho da amostra e, a média sem referente no mundo real; Carvalho concluiu que a quarta propriedade não é abordada nos livros didáticos; Lemos abordou a terceira e quinta propriedades; Alves não abordou a terceira e quarta propriedades; Santos (2017), nas questões dos livros analisados, verificou a segunda propriedade.

Com relação às representações, Amaral explorou o cálculo da média a partir de dados dispostos em uma TDF e em um pictograma; Carvalho verificou a língua materna, as representações tabular e a representação gráfica; Lemos verificou o cálculo da média em gráficos de barras, TDF e pictograma; Silva Junior trabalhou com o cálculo a partir do gráfico de barras e dotplot; Eugênio explorou a visualização e localização da média no diagrama de pontos; Cobo utilizou a representação gráfica como o “fiel da balança” e o cálculo gráfico da média; e Santos verificou o cálculo da média a partir de tabelas, gráficos de linha e histograma.

Nesse sentido, nosso trabalho amplia a revisão realizada por Cazorla, Santana e Utsumi (2019), buscando subsídios para análise dos esquemas mobilizados pelos estudantes durante a

realização das tarefas da nossa sequência de ensino, visando sua compreensão como postulado pela Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996).

CAPÍTULO III

PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentamos o percurso metodológico da pesquisa, descrevendo inicialmente os aspectos relacionados ao delineamento do estudo, os participantes; os procedimentos e os instrumentos. Assim, retomamos nossa questão de pesquisa, a saber: quais são as limitações e potencialidades de uma sequência de ensino, baseada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, para a ampliação do conceito de Média Aritmética no Ensino Fundamental?

3.1 Contexto da pesquisa do D-Estat

O Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e em Ciências (GPEMEC¹⁰), no período de 2018 a 2019, vem desenvolvendo o projeto de pesquisa “Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática, D-Estat” (SANTANA; CAZORLA, 2018). O D-Estat tem como objetivo investigar as experiências de aprendizagens de professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental, no âmbito de um grupo colaborativo universidade-escola básica, visando o seu desenvolvimento profissional e a construção de sequências de ensino com conceitos fundamentais da Estatística. A pesquisa seguiu todas as recomendações éticas e está registrada na Plataforma Brasil, sob o protocolo 85950217.6.1001.5526.

Nesse contexto, nossa investigação, se insere nas pesquisas do D-Estat. Desenvolvemos o “Guia da Sequência de Ensino Cartão de Vacinação (CV)” (Apêndice A) e a Sequência de Ensino Cartão de Vacinação, contendo as atividades do estudante (Apêndice B), a fim de responder nossa questão de pesquisa e atender os objetivos, focando o conceito de média.

Como a sequência de ensino foi pautada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, envolveu outros conceitos, tais como tabelas de distribuição de frequência simples e dupla entrada, gráficos de barras simples e barras empilhadas, mas que não serão objeto de análise nesta dissertação.

¹⁰Disponível em: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/24728>. Acesso em: 26 abr. 2019.

3.2 O tipo de estudo

Trata-se de um estudo intervencionista, que tem a finalidade de investigar os limites e potencialidades de uma sequência de ensino, baseada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, para a ampliação do conceito de Média Aritmética no Ensino Fundamental.

Assim, concordamos com Damiani et al (2014, p. 58) ao enfatizarem que esse tipo de pesquisa envolve “o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências”.

Nessa modalidade, é necessário um rigor das técnicas para a realização da intervenção, com a finalidade de observar, controlar e analisar as variáveis e “contribuir para a solução de problemas práticos” (DAMIANI et al, 2014, p. 58).

De acordo com esses autores, uma pesquisa intervencionista deve contemplar dois componentes: o método da intervenção e o método de avaliação da intervenção.

O componente interventivo, isto é, a intervenção propriamente dita, deve ter seu lugar assegurado no relatório, devendo ser apresentado com detalhes. O método da intervenção demanda planejamento e criatividade, por parte do pesquisador, bem como diálogo com a teoria – que o auxilia na compreensão da realidade e na implementação da intervenção (DAMIANI et al, 2014, p. 60).

Nosso estudo possui essas características, pois para a realização da nossa sequência de ensino, trabalhamos em colaboração com a professora de Matemática, a quem apresentamos detalhadamente todo processo, planejamos e refletimos em conjunto os desdobramentos da intervenção. Além disso, também, destacamos que a sequência é destinada para a melhoria nos processos de aprendizagem dos estudantes.

3.3 Os participantes

Os sujeitos participantes de nossa pesquisa foram estudantes que estavam cursando o 9º ano A, do Ensino Fundamental, pois, foi a indicação da professora de Matemática da turma. Além disso, segundo as informações da professora, eram estudantes que estavam com a idade/série regular. Nessa turma, estavam matriculados 33 estudantes, porém, no período da pesquisa, havia apenas 27 estudantes, sendo 10 meninos e 17 meninas, com idade média de 15,5 anos e faixa etária entre 15 e 18 anos.

Para fins de manter no anonimato à identidade dos sujeitos, nas nossas análises, utilizamos o pseudônimo Maria para a professora de Matemática, já os estudantes foram

identificados pelo número da dupla. A professora Maria possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) e, no período da pesquisa, estava cursando o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na UESC.

3.4 Os procedimentos

Como a nossa pesquisa está inserida no D-Estat, todo o processo de planejamento da sequência de ensino foi realizado com os pesquisadores e os professores das escolas parceiras. Nesse sentido, procuramos a escola, acertamos com a direção e com os professores um calendário de formação, envolvendo o planejamento, a implementação da sequência pelos professores e acompanhamento pelo pesquisador; bem como momentos de reflexão sobre os desdobramentos do processo.

Assim, as atividades foram realizadas pela professora Maria em sete encontros, totalizando 10 horas/aula de 50 minutos cada, conforme descrito no Quadro 11.

Quadro 11 – Planejamento das atividades desenvolvidas na intervenção de ensino

Encontro	Data	Nº de horas aula	Procedimentos
1º	26/09/18	2	Palestra com um profissional de saúde para os estudantes e formulação do problema de investigação.
2º	27/09/18	1	Leitura de reportagens e entrega do modelo do cartão de vacinação
3º	02/10/18	1	Preenchimento do banco de dados
4º	03/10/18	2	Atividade 1: Análise estatística dos dados coletados
5º	04/10/18	1	Atividade 1: Análise estatística dos dados coletados
6º	09/10/18	1	Atividade 1: Análise estatística dos dados coletados
7º	10/10/18	2	Conclusão do PPDAC (resposta para o problema de investigação)

Fonte: Construção do autor.

O primeiro encontro foi iniciado com o esclarecimento aos estudantes sobre a investigação e entregue o Termo de Compromisso Livre e Esclarecido (TCLE), o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) e a autorização para o uso de imagem, para que os pais ou responsáveis e os estudantes assinassem. Posteriormente, a professora iniciou o ciclo investigativo com a fase da Problemática (P), primeira fase, com a realização de uma palestra com o tema “Vacinação”, ministrada por um profissional de Enfermagem. A palestra teve como finalidade despertar a importância da vacinação na saúde humana, principalmente

de doenças erradicadas no Brasil e, estão voltando, a exemplo, da Febre Amarela, o Sarampo, a Pólio, dentre outras.

Para finalizar o encontro, a professora Maria discutiu com os estudantes sobre quais doenças podem ser prevenidas por meio da vacinação, questionando se eles tomaram as vacinas obrigatórias, no intuito de tomar conhecimento sobre a situação da imunização. Questionando-os, ainda, sobre como poderiam saber se estavam imunizados ou não. Neste momento, esperava-se que os estudantes indicassem o cartão de vacinação, como fonte para se observar a imunização.

Nesse contexto, a professora, juntamente com os estudantes, elaborou a seguinte questão de investigação: **Como está a situação de imunização, através da vacinação, dos estudantes do 9º ano A?**

Por fim, visando ampliar o conhecimento do contexto, a professora Maria entregou aos estudantes reportagens com temas do tipo: pais que se recusam a vacinar seus filhos; queda na cobertura vacinal; alerta para volta de doenças do passado, entre outras. Além disso, solicitou que investigassem na internet, nos livros ou revistas o que é vacina, que doenças podem ser prevenidas, quais vírus e quais bactérias etc. Também foi solicitado que os estudantes conversassem com seus pais, avós ou pessoas mais velhas para saber se eles já sofreram ou conhecem alguém que sofreu com a Poliomielite, o Sarampo, a Caxumba (Papera) ou outras doenças que podem ser prevenidas por meio da vacinação.

O segundo encontro, foi dedicado à segunda fase do Ciclo Investigativo PPDAC, o Planejamento (P). O encontro foi iniciado com uma discussão a partir das reportagens entregues pela professora e das reflexões trazidas pelos estudantes. A partir dessa discussão, a professora os instigou a conjecturar o que pode explicar a volta dessas doenças tidas como erradicadas.

Após a discussão, a professora elencou algumas doenças, que foram indicadas por um profissional que trabalha em um Posto de Saúde Escolar. Esse profissional indicou as vacinas, uma vez que o público era adolescente e, para essa faixa etária dos estudantes, deveriam ser trabalhadas essas doenças. Além disso, nesse período, o Brasil estava enfrentando o retorno de algumas doenças, por exemplo, a Febre Amarela e o Sarampo. Elencamos, assim, seis doenças: as duas mencionadas, Meningite, HPV, Tétano e Hepatite B, para trabalhar em sala de aula. Observamos que, no período de aplicação da sequência, um homem da cidade foi diagnosticado com sarampo, segundo o *site* Correio (2018).

Ao final do encontro, a professora entregou um modelo de cartão de vacinação, para que os estudantes levassem para casa e preenchessem com os dados de sua carteira de vacinação, transcrevendo a data em que foi tomada a dose das vacinas e trouxessem para a próxima aula.

A professora solicitou aos estudantes, que não sabiam seu peso (massa corporal) e altura, que passassem em uma farmácia do seu bairro ou no Posto de Saúde e coletassem esses dados.

No terceiro encontro, a professora Maria abordou a terceira fase do Ciclo Investigativo PPDAC, os Dados (D). A partir do preenchimento do modelo do cartão de vacinação entregue no segundo encontro, a professora, juntamente com os estudantes, organizou os dados em um Banco de Dados, previamente elaborado no papel metro (Apêndice C), onde cada estudante registrou seus dados¹¹.

Observamos que dos 27 estudantes, um não participou das atividades e três não preencheram o instrumento, portanto, o Banco de Dados é composto pelos dados de 23 estudantes.

As informações de cada estudante foram dispostas nas linhas e as variáveis em estudo nas colunas. Esse encontro, por ser de 50 minutos, foi dedicado, apenas, ao preenchimento do banco de dados. Os dados do banco foram transcritos para o papel A4 (Apêndice D), a fim de facilitar o processo de tratamento de dados.

O quarto encontro foi dedicado à quarta fase do Ciclo Investigativo PPDAC, a Análise (A). Para dar início à análise dos dados, a professora entregou o banco de dados em papel A4 e o roteiro da Atividade 1, trabalhando os conceitos estatísticos, explicitando a natureza da variável e como eles devem ser tratados, a fim de fornecer informações estatísticas relevantes. Os estudantes trabalharam em 13 duplas.

Em seguida, a partir da discussão dos conceitos estatísticos, a professora iniciou a sequência auxiliando os estudantes que foram respondendo as tarefas em duplas, tais como as construções das tabelas, gráficos e no cálculo da média aritmética.

Durante o desenvolvimento da atividade, percebemos que o tempo era muito curto para tratar as variáveis contínuas (idade¹², peso, altura e IMC), decidimos em consenso com a professora que não iríamos tratá-las; focando a análise nas variáveis ligadas à vacinação por sexo.

O quinto e sexto encontro foram dedicados a concluir a análise de dados. E, o sétimo encontro foi dedicado à quinta e última fase do Ciclo Investigativo PPDAC, a Conclusão (C). Nesse momento a professora retomou o problema de investigação, e a partir das informações estatísticas concluiu o Ciclo Investigativo PPDAC. Assim, os estudantes retomaram e responderam o problema de investigação.

¹¹ Uma estudante não se sentiu à vontade para preencher o banco de dados com seus dados referentes ao peso, altura e IMC.

¹² A idade embora contínua foi recolhida como variável discreta.

Todos os encontros foram acompanhados pelo pesquisador, que se limitou a registrar e gravar em vídeo as interações entre a professora e os estudantes. Os registros escritos dos estudantes foram recolhidos, fazendo parte do acervo da pesquisa.

3.5 Instrumentos

Para a realização da sequência de ensino, foram utilizados cinco instrumentos, os quais descrevemos a seguir.

3.5.1 Ficha do cartão de vacinação – CV

Como o CV é um documento oficial e necessário para a matrícula na Educação Básica, visando evitar seu extravio, foi construído um modelo a fim de que os estudantes transcrevessem as datas quando tomaram as doses de cada uma das seis vacinas (Figura 15). Essa ficha também continha dados referentes ao sexo, idade, peso, altura e IMC.

Figura 15 – Modelo do cartão de vacinação preenchido por um estudante

VACINA	ANTITETÂNICA	TRIPLICE VIRAL	HPV	MENINGITE	FEBRE AMARELA	HEPATITE B
1ª DOSE	DATA 18/09/03	DATA 05/08/04	DATA 02/10/18	DATA 02/10/18	DATA 15/04/04	DATA 15/07/03
2ª DOSE	DATA 09/11/03	DATA 21/08/04	DATA	DATA	DATA	DATA 08/09/03
3ª DOSE	DATA 04/02/04	DATA	DATA	DATA	DATA	DATA 07/02/04

Obs: 12/10/108
02/10/111

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

3.5.2 Banco de dados em papel metro e em papel A4

Foi construído o arcabouço de um Banco de Dados, cujas linhas continham os dados do estudante, e as colunas os dados das variáveis (Apêndice C), e esses dados foram transcritos para o Papel A4 (Apêndice D) e entregues a cada dupla. No banco de dados, em papel metro, os estudantes transcreveram os dados contidos na ficha do cartão de vacinação. Assim, a partir

das dosagens tomadas foram construídas seis variáveis qualitativas nominais e uma variável quantitativa discreta.

No local de cada vacina, os estudantes preencheram com o número 1 se haviam tomado todas as doses da vacina, caso contrário, preencheram com o número 0. Por exemplo, no caso da vacina Antitetânica são exigidas 3 doses. Neste caso, se o estudante tivesse tomado as três doses, deveria preencher o banco de dados com o número 1. Caso o estudante não tivesse tomado todas as doses (dosagem incompleta) ou não tivesse tomado dose alguma, deveria colocar o número 0. A partir desses dados foi construída a variável “Número de vacinas”, que é resultado da contagem de vacinas tomadas pelos estudantes, que varia de zero a seis. Após o preenchimento do banco de dados, transcrevemos os dados para o banco de dados transcrito para o Papel A4.

3.5.3 Sequência de Ensino Cartão de Vacinação

A sequência de ensino é um roteiro para ser desenvolvido com o estudante em sala de aula (Apêndice B), composta de duas partes.

A primeira abordava a cobertura vacinal (% de estudantes que tomaram a vacina) das seis vacinas. Para isso foi disponibilizado o arcabouço de uma tabela de distribuição de frequência. Para calcular a cobertura vacinal, os estudantes tinham que calcular a porcentagem por linha.

A partir dos dados da TDF, os estudantes construíram o gráfico de barras empilhadas com os dados da porcentagem. Foi disponibilizado o arcabouço do gráfico para os estudantes e solicitado que utilizassem cores diferentes para o preenchimento. Após a construção do gráfico, os estudantes responderam a seguinte questão de investigação: como está a imunização, através da vacinação, dos estudantes do 9º ano A?

A segunda parte dedicada ao tratamento da variável discreta “número de vacinas tomadas pelos estudantes”, onde os estudantes calcularam a média simples a partir dos dados brutos, tanto para o sexo feminino, para o sexo masculino e para todos os estudantes (feminino e masculino); a média geral a partir das médias dos sexo; a média a partir da TDF (média ponderada) e, ao final, interpretaram o significado da média que surgiu nas questões.

Observamos que decidimos disponibilizar o arcabouço da TDF e dos gráficos, pois queríamos garantir a apropriação dos conceitos e não tínhamos tempo disponível para trabalhar a construção e a calibração das escalas.

3.6 Guia da Sequência de Ensino Cartão de Vacinação

O Guia da Sequência de Ensino Cartão de Vacinação (Apêndice A), é um roteiro detalhado de como o professor pode implementar a sequência em sala de aula. Tem por objetivo discutir a importância da imunização na saúde dos estudantes, em que são incentivados a realizar o levantamento dos seus dados, percorrendo as cinco fases do Ciclo Investigativo PPDAC (Problema, Planejamento, Dados, Análise e Conclusão), utilizando conceitos e procedimentos estatísticos.

Com relação aos conceitos e procedimentos estatísticos, pode-se discutir os tipos de variáveis de acordo a sua natureza (nominal, discreta, contínua); o tratamento e coleta de dados; construção, leitura e interpretação de tabelas de distribuição de frequência (simples e de dupla entrada) e de gráfico de barras simples, lado a lado e empilhada; e, o trabalho com as medidas de tendência central. Além disso, esclarecemos, na própria sequência, como o professor poderá proceder para desenvolvê-la em sala de aula

3.7 Procedimentos adotados para a análise dos vídeos e dos registros dos estudantes ao longo da intervenção

Toda a realização da sequência de ensino pela professora em sala de aula foi filmada e acompanhada pelo pesquisador que anotou, registrou as principais dúvidas, questionamentos e posicionamento dos estudantes, bem como recolheu os registros escritos na realização das tarefas.

A partir das filmagens, descrevemos e analisamos os diálogos entre a professora Maria e os estudantes e entre eles, “uma vez que a possibilidade de rever várias vezes as imagens gravadas direciona a atenção do observador para aspectos que teriam passado despercebidos, podendo imprimir maior credibilidade ao estudo” (PINHEIRO; KAKEHASHI; ANGELO; 2005, p. 718).

Para contribuir com a filmagem, utilizamos o registro escrito dos estudantes. Essa escolha se justifica pelo fato de constituir-se um recurso metodológico que auxilia o pesquisador a conhecer melhor o processo de aprendizagem dos participantes, percebendo seus avanços na apropriação do conhecimento. Nossa escolha é justificada por Lüdke e André (1986, p. 32), quando afirmam que o registro escrito é “[...] a forma mais frequente utilizada nos estudos”.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE

Neste capítulo apresentamos os resultados e análises da intervenção de ensino realizada pela professora, bem como as resoluções das tarefas realizadas pelos estudantes durante a sequência de ensino. Para tanto, retomamos a questão de pesquisa: Quais são as limitações e potencialidades de uma sequência de ensino, baseada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, para a ampliação do conceito de Média Aritmética no Ensino Fundamental? Além de destacarmos os principais resultados, respondendo à questão de pesquisa.

Para responder nossa questão de pesquisa, lançamos um olhar interpretativo para a ação da professora Maria, bem como das respostas dadas pelos estudantes e discussões no desenvolvimento da sequência de ensino.

4.1 Desenvolvimento da intervenção de ensino

Como já relatado, a sequência de ensino estava dividida em duas partes. A primeira dedicada à cobertura vacinal, analisa a situação dos estudantes por vacina e, na segunda, analisamos a situação de vacinação dos estudantes, a partir da análise da variável “número de vacinas” que o estudante tomou.

4.1.1 Desenvolvimento da sequência de ensino relativo à cobertura vacinal

Para iniciar o desenvolvimento da sequência, a professora solicitou aos estudantes que se organizassem em duplas. Ao todo, foram compostas 13 duplas. Ela entregou para cada dupla a SE, o Banco de Dados no papel A4 e lápis de cor.

Para responder à questão de pesquisa elaborada: “*como está a cobertura vacinal da turma?*”, os estudantes iniciaram o preenchimento da Tabela 1. Para isso, a professora Maria leu em voz alta a primeira tarefa e sinalizou para os estudantes observarem, no Banco de Dados, os valores uns e zeros, que indicavam respectivamente, se o estudante tomou ou não tomou a vacina. Em seguida, para cada vacina deveriam fazer a contagem desses valores e anotar o resultado na Tabela 1. Após a explicação da professora, as duplas conseguiram realizar o preenchimento da frequência absoluta.

Para o cálculo da porcentagem, os estudantes sinalizaram que não lembravam como proceder. Então, a professora começou a auxiliar as duplas explicando o cálculo da porcentagem por meio da regra de três simples e informou que eles podiam utilizar a calculadora ou o celular para realizar os cálculos. A professora Maria enfatizou que a porcentagem de estudantes que tomaram a vacina era a “Cobertura vacinal”.

Nessa atividade, apenas a Dupla 1 realizou corretamente todo o procedimento (Figura 16); as Duplas 3 e 9 não preencheram os dados referente à linha do Total; a Dupla 6 somou de forma errada a quantidade total de estudantes que tomaram e não tomaram as vacinas, o que os levou ao erro de cálculo da porcentagem total, porém, os outros valores estavam corretos; e, as demais duplas erraram apenas o cálculo da porcentagem total, pois ao invés de calcular a porcentagem da linha do total, somaram a porcentagem das seis vacinas, como a Dupla 8, ilustrada na Figura 17, sem se atentar que esse valor ultrapassava 100%. Esse erro também foi verificado na pesquisa de Silva Junior (2018), pois ao invés dos estudantes terem calculado a porcentagem, apresentaram a soma, considerando como se fossem dados absolutos ou porcentagem do total geral.

Figura 16 – Solução apresentada pela Dupla 1 referente à porcentagem da linha do Total¹³

Vacinas	Nº de estudantes			Porcentagem		
	Sim	Não	Total	Sim	Não	Total
Antitetânica	8	15	23	34,78	65,21	100,0
Triple Viral	17	6	23	73,91	26,08	100,0
HPV	13	10	23	56,52	43,47	100,0
Meningite	1	22	23	4,34	95,62	100,0
Febre Amarela	19	4	23	82,60	17,39	100,0
Hepatite B	17	6	23	73,91	26,08	100,0
Total	75	63	138	54,34	45,65	100,0

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Na Figura 16, podemos observar que as porcentagens não fecham 100%, sendo que a diferença se dá na segunda casa decimal. No caso da Meningite, esta dupla errou ao registrar a porcentagem dos estudantes que não tomaram a vacina que era 95,65% registrando 95,62%. Isto se deve ao fato de não nos atentarmos sobre a importância do arredondamento dos dados.

¹³ Por questões éticas borramos o nome do Colégio.

Figura 17 – Solução apresentada pela Dupla 8, referente à porcentagem da linha do Total

Vacinas	Nº de estudantes			Porcentagem		
	Sim	Não	Total	Sim	Não	Total
Antitetânica	8	15	23	34,78	65,21	100,0
Triple Viral	17	6	23	73,91	26,08	100,0
HPV	13	10	23	56,52	43,47	100,0
Meningite	1	22	23	4,34	95,65	100,0
Febre Amarela	19	4	23	82,60	17,39	100,0
Hepatite B	17	6	23	73,91	26,08	100,0
Total	75	63	138	326,05	273,88	100,0

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Na solução da Dupla 8 observamos que os estudantes calcularam corretamente as porcentagens de cada vacina, errando o cálculo da porcentagem total, pois somaram a porcentagem das seis vacinas, que, em tese, somaria 600%. Este resultado sinaliza que esses estudantes ainda não compreenderam que a porcentagem é calculada a partir da relação parte – todo, e que o todo é 100%. Isto é, os estudantes não compreenderam que essa porcentagem tem que ser calculada sobre o total geral, formado por 138 possíveis respostas, que é o número total de vacinas que deveriam ser tomadas ($138 = 23 \cdot 6$).

A segunda tarefa consistia na construção do gráfico de barras empilhadas, a partir das porcentagens (cobertura vacinal) encontradas na Tabela 1, da sequência de ensino. Como já referido, deixamos pronto o arcabouço do gráfico, para que os estudantes apenas pintassem as barras de acordo com a porcentagem encontrada em cada vacina. As duplas demonstraram não conhecer esse tipo de gráfico e não entenderam como deviam proceder. Assim, a professora Maria foi ao quadro, fez o desenho do gráfico com apenas uma barra referente a vacina Antitetânica e procedeu da seguinte maneira.

[...] o gráfico tem a barra, se vocês observarem abaixo do desenho do gráfico tem uma legenda “sim” e “não”. Eu entreguei para vocês dois lápis de cores diferentes. Então, tem aqui, digamos, que essa barra aqui, seja da Antitetânica, em baixo tem um quadradinho dizendo “sim” e um outro quadradinho dizendo “não”. Digamos que vocês escolham pintar o sim de preto, então vocês vão olhar. É... Antitetânica que deu 35%, tem os números do lado. Tão vendo os números? 10, 20, 30... Tá todo mundo acompanhando? Digamos que tenha dado 35%, você marca onde tem 35, pode fazer uma linha assim (desenhando dentro da barra da vacina Antitetânica a linha). Daqui pra baixo, vocês vão pintar de preto, são o “sim”. E o “não”, que vocês vão pintar de azul, vai ser daqui para cima. (MARIA, 03/10/2018).

Após a explicação da professora, a Dupla 3 fez a seguinte pergunta:

Dupla 3: professora, então eu pinto o “sim” de uma cor e o “não” é o que sobrar? Daí vou pintando de outra cor!

Professora: sim, sim. O todo não é 100%?

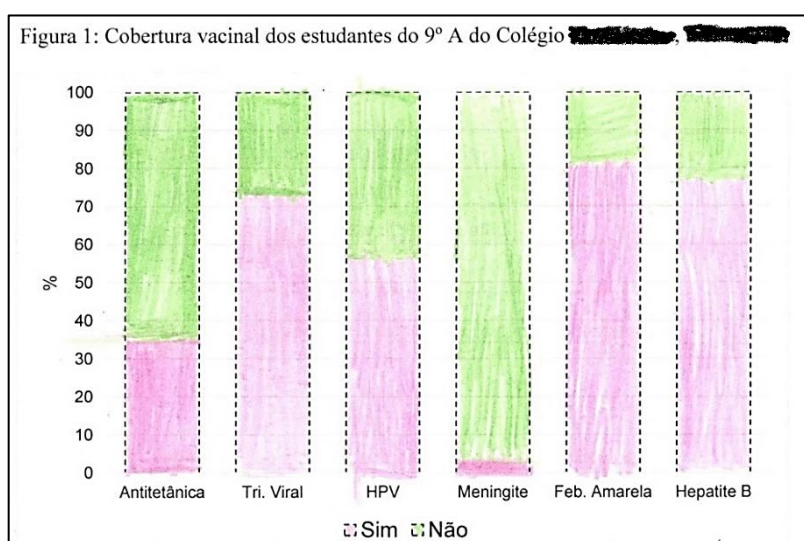
Dupla 3: É.

Professora: Então, você vai pegar esse (sinalizando o valor referente ao “sim”) e o que sobrar é o “não”. Entendeu? Alguma dúvida com relação a pintura?

Após a explicação da professora, apenas a Dupla 7 sinalizou uma dúvida e as demais duplas continuaram a tarefa. A Dupla 7 perguntou para a professora se estavam pintando corretamente o gráfico, pois iniciaram pintando as barras com a porcentagem dos estudantes que não tomaram as vacinas. Então, a professora esclareceu que não estava incorreto, porém, para um melhor entendimento da leitura do gráfico, o ideal seria iniciar a pintura com a porcentagem dos estudantes que tomaram as vacinas. Nesse momento, a professora pediu a atividade da Dupla 2 e comparou com a resposta da Dupla 7, e sinalizou mais uma vez como deviam pintar as barras. Após a explicação da professora, a Dupla 7 padronizou a pintura de todas as barras, iniciando a pintura com os valores da porcentagem dos estudantes que tomaram as vacinas, e complementaram a pintura das barras com a porcentagem dos estudantes que não tomaram as vacinas.

Após a intervenção da professora, a Dupla 7 e as demais duplas conseguiram realizar corretamente o solicitado, pois tinham calculado corretamente a porcentagem na atividade anterior. Na Figura 18 apresentamos o gráfico de barras empilhadas realizado pela Dupla 13.

Figura 18 – Gráfico de barras construído pela Dupla 13, referente à Cobertura Vacinal dos estudantes do 9º ano A



Este resultado, a construção do gráfico de barras empilhadas a partir da frequência relativa, é similar aos encontrados por Silva Junior (2018), ao abordar que os estudantes de sua

pesquisa, também, conseguiram converter adequadamente a frequência relativa para o gráfico de barras empilhadas.

Após todas as duplas terem terminado de pintar o gráfico, a professora solicitou realizar a terceira tarefa, que era responder à questão de investigação (Problema, P), formulada na primeira fase do ciclo: “*como está a cobertura vacinal da turma?* Neste momento, a professora solicitou que as duplas respondessem com suas próprias palavras, observando o gráfico de barras empilhadas construído por eles e perguntou se estavam lembrando da questão. Todas as duplas sinalizaram que estavam lembrando.

Nesta tarefa, a maioria dos estudantes apresentaram respostas individuais, que foram categorizadas de acordo a argumentação dos estudantes. Nesse sentido, oito estudantes afirmaram que a vacinação contra a Meningite e a Antitetânica são as mais preocupantes; um estudante escreveu “está na média”; outro, “todas estão com um ótimo percentual, em quase todas as vacinas, mas a Antitetânica e a da Meningite estão abaixo da média”, e os demais manifestaram que os estudantes não estão totalmente imunizados. Nas Figuras 19 e 20, apresentamos as respostas das Duplas 6 e 8, respectivamente.

Figura 19 – Resposta de um estudante da Dupla 6, referente à Cobertura Vacinal

c) Observando o gráfico, como está a imunização, através da vacinação, dos estudantes do 9º ano A?
A situação de imunização dos estudantes do 9º Ano A está relativamente na média, apesar de que em relação a Meningite e Antitetânica estão bem baixas e precisam se vacinar.

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Figura 20 – Resposta de um estudante da Dupla 8, referente à Cobertura Vacinal

c) Observando o gráfico, como está a imunização, através da vacinação, dos estudantes do 9º ano A?
A maioria dos alunos do 9º A não estão imunizados em todas as vacinas. A maioria tomou a vacina do febre amarela, hepatite B e tri. viral e poucas pessoas tomou a vacina da meningite e outra não lembra se tomou a Antitetânica.

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Analisando a resposta de um dos estudantes da Dupla 6 (Figura 19), percebemos que ele utilizou o termo “média” e sinaliza que duas vacinas estão em um nível “bem baixo”, indicando a percepção de tendência central e variação, e ainda acrescenta: “precisam se

vacinar”. Isto é, detecta o problema, toma consciência da gravidade e indica a necessidade de realizar uma ação. Aqui, observamos a postura crítica do letramento estatístico (GAL, 2002) do estudante que consegue compreender o fenômeno em estudo.

Nas soluções apresentadas pelas duplas, Figuras 19 e 20, é possível perceber que elas conseguiram fazer uma leitura correta do gráfico, o que revela indícios do letramento estatístico. Assim, com base no letramento estatístico, Gal (2002), podemos destacar sinais do conhecimento de contexto e a postura crítica, referentes aos componentes cognitivo e afetivo, respectivamente.

Assim, verificamos que os estudantes percorreram ativamente as cinco fases do ciclo investigativo, conseguiram transformar dados brutos em estatísticas, responderam à pergunta de investigação e tiveram um panorama de sua imunização em cada vacina. Verificaram, também, que a cobertura da vacina contra a Meningite era a mais preocupante, pois apenas um (4,34%) dos 23 estudantes havia tomado; seguida da cobertura da vacina Antitetânica, pois oito (34,8%) estudantes haviam se vacinado. A maior cobertura vacinal foi na Febre Amarela.

Nesse sentido, podemos perceber que nosso trabalho corrobora com os resultados encontrados por Santana (2011) e Giordano (2016). A SE permitiu aos estudantes vivenciar a lógica de uma investigação estatística, se apropriarem dos conteúdos estatísticos em contexto e mostrou que eles foram capazes de utilizar o conhecimento apreendido para a melhoria de suas vidas, isto é, apresentou indícios de letramento estatístico, no que diz respeito aos componentes cognitivos e afetivos.

Aqui é importante destacar, que todas as duplas utilizaram quase duas horas aula de 50 minutos para responderem as tarefas solicitadas no quarto encontro: construíram a tabela de dupla entrada (Tabela 1), construíram o gráfico de barras empilhadas, responderam à questão de investigação e justificaram suas respostas com base nos dados, como é solicitado para o fechamento do PPDAC. Além disso, algumas duplas conseguiram iniciar a segunda parte da sequência, a qual iremos relatar a seguir.

4.1.2 Analisando a situação de vacinação dos estudantes

Essa segunda parte da sequência de ensino era composta por cinco tarefas, todas relativas ao cálculo da média. A primeira, envolvia o cálculo da média simples a partir dos dados brutos; a segunda ao cálculo da média geral a partir da média dos grupos (sexos); a terceira, focava o cálculo da média a partir da TDF (média ponderada); a quarta tarefa sobre a

interpretação da média; e, a quinta focava a percepção dos estudantes sobre qual procedimento lhes ajudou na compreensão da média.

Para a primeira tarefa, as duplas calcularam o número médio de vacinas tomadas pelas meninas, pelos meninos e por todos os estudantes (meninas e meninos), a partir dos dados brutos. Esta tarefa tinha como objetivo explicitar o procedimento do cálculo da média a partir de dados brutos (somar os valores e dividir pelo número de dados); bem como verificar se para calcular a média de todos os estudantes utilizavam os cálculos que já haviam realizado anteriormente, isto é, se tem as somas parciais dos grupos, não é necessário recalculá-la a soma do todo, ou ainda realizar a média das médias.

Na Figura 21, apresentamos a resolução da Dupla 10 para o cálculo da média das meninas. A dupla soma os valores e divide pelo número de meninas, encontrando o valor correto da média. Embora a dupla não registre o algoritmo completo da divisão, ela registra o resultado encontrado nas suas calculadoras.

Figura 21 – Cálculo da média para as meninas a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 10

1.1 Para as MENINAS a partir dos DADOS BRUTOS	
i. Quantas meninas participaram da pesquisa?	15 meninas
ii. Transcreva o número de vacinas que cada menina tomou:	3, 2, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 2, 4, 5, 5, 2, 1, 6
iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que as meninas tomaram:	1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6
iv. Qual o total de vacinas, que as meninas tomaram? Explícite os cálculos.	$3+2+4+4+5+4+5+4+2+4+5+5+2+1+6=56$ <p>No total foram 56 vacinas tomadas pelas meninas</p>
v. Qual é o número médio de vacinas tomadas pelas meninas? Para isso divida o valor encontrado em "iv" pelo número de meninas:	$\frac{56}{15} = 3,73$

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Na Figura 22, apresentamos a resolução da Dupla 2, que fez uso de um teorema-emprego. A dupla não entende o comando de transcrever o número de vacinas que cada menina tomou, que estava disposto na última coluna do Banco de Dados, e registra a contagem do número de meninas que tomaram cada uma das seis vacinas (5, 12, 13, 1, 14, 11), que totalizam, também, 56 vacinas, e como resultado registram como a média 9,73, o que é correto para essa média; mas, em seguida corrigem o número para 3,73; provavelmente por terem escutado dos colegas que a resposta era essa. É importante destacar que a resposta da dupla está errada para

o que foi solicitado. Nesta tarefa o conceito-em-ação seria o cálculo da média simples, ou seja, somar o número de vacinas tomadas pelas meninas e dividir pelo número de meninas.

Figura 22 – Cálculo da média para as meninas a partir dos dados brutos realizado pela Dupla

2

1.1 Para as MENINAS a partir dos DADOS BRUTOS	
i. Quantas meninas participaram da pesquisa?	15 meninas
ii. Transcreva o número de vacinas que cada menina tomou:	Amt.(5) Trn.vin.(12) HPV(12) Mem(4) F.Ama(4) Hep.B(1)
iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que as meninas tomaram:	Mem.(1) Amt.(5) Hep.B(4) Trn.vin.(12) HPV(13) F.Ama(14)
iv. Qual o total de vacinas, que as meninas tomaram? Explícite os cálculos.	⁵⁶ 56 vacinas, juntamos o total que cada uma tomou
v. Qual é o número médio de vacinas tomadas pelas meninas? Para isso divida o valor encontrado em "iv" pelo número de meninas:	56 o numero medio foi 3.73 vacinas

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Nessa resolução, esses estudantes apresentam o conceito de média, pois somam seis números e dividem por seis. Na realidade, a média assim calculada é a média relativa ao número médio de meninas que tomaram as seis vacinas.

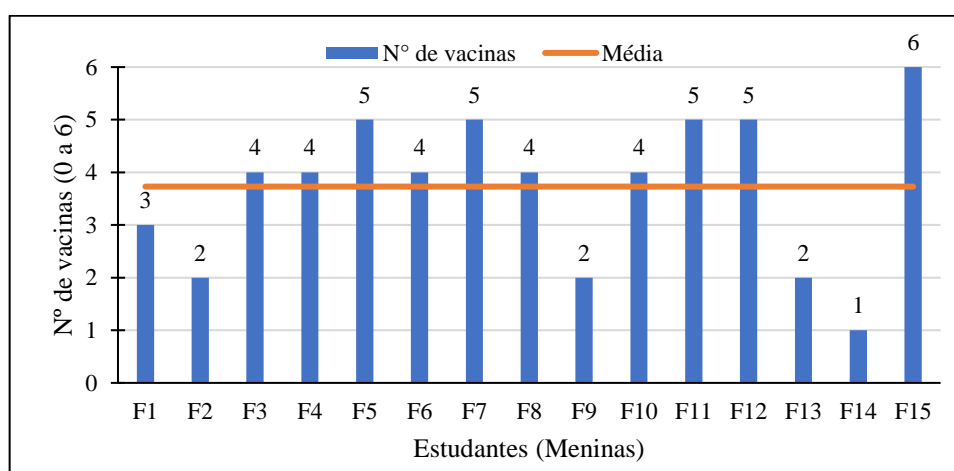
Embora, no momento da reflexão com os professores, não tenhamos nos apercebido deste esquema, trazemos as reflexões sobre esta situação. O comando dado nessa tarefa implicava localizar o número de vacinas tomadas pelas 15 meninas e dividir por 15, sendo que a variável “Número de vacinas tomadas” variava de zero a seis, contendo 15 dados, ver Quadro 12 e Figura 23. O que os estudantes fizeram foi trabalhar a variável “número de meninas que tomaram cada vacina”, que variava de zero a 15, tendo apenas seis dados, conforme Quadro 12 e Figura 24.

Quadro 12 – Número de vacinas tomadas pelas meninas

Estudante	Ant.	Tri. Vir.	HPV	Men.	F. Ama.	Hep. B	Nº de vac
F1	0	1	0	0	1	1	3
F2	0	0	1	0	1	0	2
F3	0	1	1	0	1	1	4
F4	0	1	1	0	1	1	4
F5	1	1	1	0	1	1	5
F6	0	1	1	0	1	1	4
F7	1	1	1	0	1	1	5
F8	0	1	1	0	1	1	4
F9	0	1	0	0	1	0	2
F10	0	1	1	0	1	1	4
F11	1	1	1	0	1	1	5
F12	1	1	1	0	1	1	5
F13	0	0	1	0	1	0	2
F14	0	0	1	0	0	0	1
F15	1	1	1	1	1	1	6
Soma	5	12	13	1	14	11	56

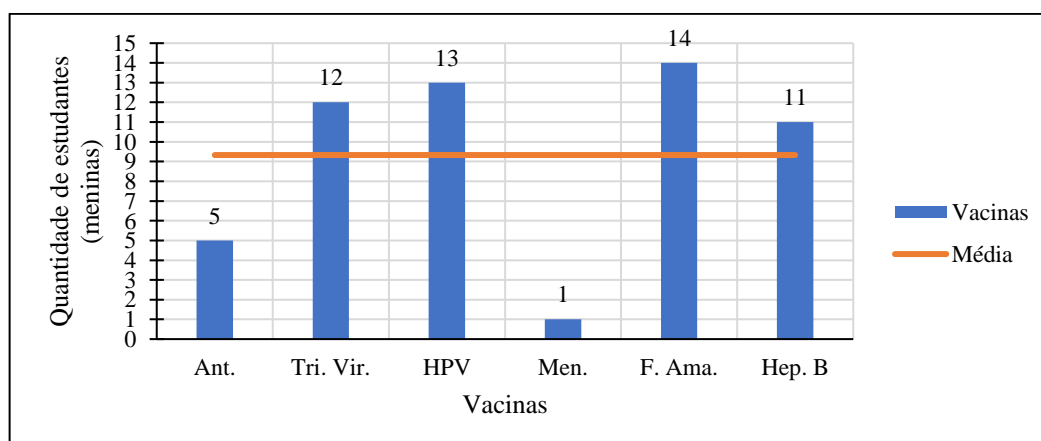
Fonte: Construção do autor.

Figura 23 – Número de vacinas tomadas pelas meninas



Fonte: Construção do autor.

Figura 24 – Número de meninas que tomaram cada vacina



Fonte: Construção do autor.

Esse resultado nos aponta a necessidade de ficarmos atentos às novas possibilidades que emergem de situações com dados reais e novas formas que emergem dos esquemas dos estudantes.

Na resolução da Dupla 5 (Figura 25), o que nos chamou a atenção foi o esquema adotado para encontrar o total de vacinas que as meninas tomaram. Diferente da Dupla 10, que adicionou todas as parcelas, a Dupla 5 apresentou um esquema diferente, que foi somar todas as parcelas iguais, para depois somar os subtotais e encontrar o resultado final ($1 + 6 + 3 + 20 + 20 + 6 = 56$).

Figura 25 – Cálculo da média para as meninas a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 5

1.1 Para as MENINAS a partir dos DADOS BRUTOS	
i. Quantas meninas participaram da pesquisa?	15
ii. Transcreva o número de vacinas que cada menina tomou:	3, 2, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 2, 4, 5, 5, 2, 3, 6
iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que as meninas tomaram:	3, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6
iv. Qual o total de vacinas, que as meninas tomaram? Explícite os cálculos.	$\left. \begin{array}{l} 56 \\ \text{vacinas} \end{array} \right\} 1 + 6 + 3 + 20 + 20 + 6 = 56$
v. Qual é o número médio de vacinas tomadas pelas meninas? Para isso divida o valor encontrado em "iv" pelo número de meninas:	3, 73

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Esse esquema utilizado por essa dupla pode ter sido incentivado pela ordenação dos dados realizados no item anterior, que é o prelúdio do cálculo da média quando está em uma TDF.

Com relação às resoluções das demais duplas, para essa tarefa, principalmente no item "v", algumas duplas responderam da mesma maneira que a Dupla 10 e outras apresentaram sua solução igual à Dupla 2. Porém, apenas a Dupla 1 apresentou sua resolução por meio de uma fração.

Na Figura 26 apresentamos a resolução da Dupla 1 relativa ao cálculo da média simples, a partir dos dados brutos para os meninos, que procedem da mesma maneira que a Dupla 10, isto é, soma todas as parcelas e divide pelo número de meninos. Observamos que esses estudantes utilizam a representação de fração, no numerador o total de vacinas e no denominador o número de meninos. Com relação à sétima propriedade (o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos), é possível perceber que esta dupla leva em consideração os oito valores inclusive os dois zeros, dividindo por oito meninos.

Figura 26 – Cálculo da média para os meninos a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 1

1.2 Para os MENINOS a partir dos DADOS BRUTOS	
i. Quantos meninos participaram da pesquisa?	8 meninos
ii. Transcreva o número de vacinas que cada menino tomou.	3, 0, 2, 4, 0, 4, 3, 3
iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que os meninos tomaram:	0, 0, 2, 3, 3, 3, 4, 4
iv. Qual o total de vacinas, que os meninos tomaram? Explícite os cálculos.	19. Somei a quantidade de vacina que cada menino tomou
v. Qual é o número médio de vacinas tomadas pelos meninos? Para isso divida o valor encontrado em "iv" pelo número de meninos	$\frac{19}{8}$ o número médio 2,375

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

A Dupla 4 responde que o número de meninos é seis, número que vai utilizar na divisão. Isto é, para esta dupla o zero não se constitui em um dado, conforme Figura 27. Este procedimento também foi identificado nos estudos de Strauss e Bichler (1988), ao perceberem que crianças de 8 a 14 anos não consideraram o zero ao calcular o valor da média. Além disso, Melo (2010), também, verificou que os participantes do seu estudo não consideraram o zero.

Figura 27 – Cálculo da média para os meninos a partir dos dados brutos realizado pela Dupla 4

1.2 Para os MENINOS a partir dos DADOS BRUTOS	
i. Quantos meninos participaram da pesquisa?	6 meninos
ii. Transcreva o número de vacinas que cada menino tomou.	3, 0, 2, 4, 0, 4, 3, 3.
iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que os meninos tomaram:	0, 2, 3, 4.
iv. Qual o total de vacinas, que os meninos tomaram? Explícite os cálculos.	19 vacinas.
v. Qual é o número médio de vacinas tomadas pelos meninos? Para isso divida o valor encontrado em "iv" pelo número de meninos	$\frac{19}{6}$ 3,16

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Destacamos, que apenas um estudante da Dupla 6 interpretou o resultado do item “v”, afirmando que “o número médio de vacinas tomadas pelos meninos é 2,3” e as Duplas 1 e 2, e um estudante da Dupla 3 afirmaram que “o número médio foi 2,375 vacinas”. Assim, é possível

perceber que essas duplas possuem, em seu esquema, a quinta propriedade da média (a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física).

Em relação ao cálculo do número médio de vacinas tomadas pelos estudantes (meninas e meninos), verificamos que todos os estudantes procederam da mesma maneira, para calcular a média dos grupos, como podemos observar na Figura 28. Da mesma forma, os estudantes que calcularam a média a partir do número de meninas que tomaram cada vacina, realizaram o mesmo procedimento e, os estudantes que agruparam as parcelas, também procederam da mesma maneira.

Figura 28 – Cálculo da média para os estudantes (meninas e meninos) a partir dos dados brutos, realizado pela Dupla 6

I.3 Para todos os ESTUDANTES (MENINAS + MENINOS), a partir dos dados brutos	
i. Ao todo quantos estudantes participaram da pesquisa?	23 estudantes
ii. Transcreva o número de vacinas que os estudantes tomaram	3, 2, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 2, 4, 5, 5, 2, 1, 6, 3, 0, 2, 4, 0, 4, 3, 3
iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que os estudantes tomaram:	0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6
iv. Quantas vacinas, ao todo, os estudantes tomaram? Para isso some o número de vacinas que todos os estudantes tomaram:	Os estudantes tomaram 75 vacinas $\begin{array}{r} 56 \\ + 19 \\ \hline 75 \end{array}$
v. Qual é o número médio de vacinas tomadas por todos os estudantes? Para isso divida o valor encontrado em "iv" pelo número total de estudantes da turma.	$\begin{array}{r} 75 \overline{) 23} \\ \underline{3,26} \end{array}$ O número médio é 3,26

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Como podemos observar no item "iv", a dupla realizou corretamente o procedimento que foi esperado para essa tarefa, ou seja, para encontrar a quantidade de vacinas tomadas pelos estudantes a dupla utilizou as somas parciais encontradas para as meninas e para os meninos.

Com relação à primeira tarefa, pudemos identificar alguns esquemas empregados pelas duplas e algumas propriedades da média, mas em muitos dos esquemas foi possível perceber erros conceituais, principalmente na operação de divisão e nos conceitos básicos da média.

A segunda tarefa tinha como objetivo o cálculo da média geral, a partir das somas parciais dos meninos e das meninas. A tarefa especificava o passo a passo para recompor o número total de vacinas tomados pelas meninas e pelos meninos, bem como o número de meninas e meninos, de tal forma, que as duplas percebessem a recomposição do todo, a partir das médias parciais. Na Figura 29, apresentamos a resolução da Dupla referente ao cálculo da média geral.

Figura 29 - Cálculo da média a partir das somas parciais de grupos realizado pela Dupla 5

$\text{Número_de_estudantes} = \text{Número_de_meninas} + \text{Número_de_meninos} = \underline{15} + \underline{8} = \underline{23}$
$\text{Soma_vacinas_estudantes} = \text{Soma_vacina_meninas} + \text{Soma_vacina_meninos} = \underline{56} + \underline{19} = \underline{75}$
$\text{Média_geral} = \frac{\text{Soma_vacinas_estudantes}}{\text{Número_de_estudantes}} = \frac{75}{23} = 3,26$

Fonte: Material produzido na pesquisa.

Na solução desta situação, para o cálculo da “Média_geral”, a Dupla 2 não percebeu que inverteu o valor da “soma_vacina_estudantes” pelo valor do “número_de_estudantes”, ou seja, inverteu o valor do numerador pelo denominador e o do denominador pelo numerador, mas apresentou o resultado final correto; com relação as demais duplas, todas calcularam o valor da “Média_geral” corretamente.

Destacamos que esse foi o primeiro encontro relativo à análise estatística dos dados coletados. Com relação às intervenções feitas pela professora Maria, ocorreram, a maior parte, no início do encontro quando os estudantes começaram a responder a sequência na primeira tarefa. A partir da segunda tarefa, as duplas responderam a maior parte individualmente.

No segundo encontro, também, relativo à análise dos dados estatísticos, as duplas começaram a responder a terceira tarefa que tinha como objetivo o cálculo da média “ponderada” a partir de uma tabela de distribuição de frequência, ou seja, as duplas calcularam o valor relativo da média quando os dados estão agrupados em uma tabela de distribuição de frequência. Destacamos que deixamos pronto o arcabouço da TDF.

Porém, ao iniciar a solução da segunda tarefa, a Dupla 1 solicitou ajuda da professora, pois não entenderam como proceder para a construção da TDF. A professora Maria orientou que seria necessário utilizar e contar, no banco de dados entregue no papel A4, a quantidade de estudantes que tomaram zero vacina, uma vacina, duas vacinas e assim sucessivamente, em seguida deveriam anotar na segunda coluna da tabela a quantidade de estudantes que tomaram cada vacina. Na terceira coluna, relativa ao cálculo da porcentagem, a professora orientou para as duplas utilizarem o mesmo procedimento que utilizaram na construção da Tabela 1, ou seja, para as duplas calcularem a porcentagem por meio da regra de três simples.

Na Figura 30, apresentamos a solução da Dupla 1. Esta subtarefa tinha como objetivo ajudar na compreensão do procedimento do cálculo da média, quando os dados estão agrupados em uma TDF, pois ao multiplicar obtemos as somas parciais, abreviando e simplificando o cálculo da média.

Figura 30 – Protocolo para o cálculo da média a partir da TDF realizado pela Dupla 1

a) Construa a Tabela de Distribuição de Frequência (TDF). Para isso, conte quantos estudantes tomaram 0 vacinas e registre na TDF; conte quantos tomaram 1 vacina e registre na TDF e, assim sucessivamente. Depois, calcule a porcentagem de estudantes que tomaram 0, 1, ...6 vacinas e registre na TDF.

Tabela 2: Número de vacinas completas tomadas pelos estudantes

Nº de vacinas	Nº de estudantes	%
0	2	8,69
1	1	4,34
2	4	17,39
3	4	17,39
4	7	30,43
5	4	17,39
6	1	4,34
Total	23	99,97

i. Quanto por cento dos estudantes não tomaram nenhuma vacina? 8,69

ii. Quanto por cento dos estudantes tomaram 6 vacinas? 4,34

iii. Analisando essa tabela, o que podemos concluir?

A maior parte dos alunos tomaram 4 vacinas

Fonte: material produzido na pesquisa (2018).

Após a construção da TDF, as duplas responderam três itens que complementavam o entendimento. Como podemos verificar, após a intervenção da professora, a dupla realizou corretamente o que foi solicitado, menos no terceiro item da subtarefa. Nos dois primeiros itens, a Dupla 1 respondeu corretamente, pois necessitava apenas localizar os dados na tabela e transcrever a resposta, no terceiro item, a dupla precisava fazer a leitura e interpretação dos dados da tabela, e neste item, a dupla não respondeu corretamente, o que, de certa forma, podemos inferir que a dupla não consegue fazer observações quando os dados estão apresentados em uma tabela. Porém, pela resposta da dupla é possível perceber que possuem o entendimento da moda, por ser a maior quantidade de vacinas tomadas.

Com relação as respostas das demais duplas, as Dupla 9 e 12 e um estudante das Duplas 3, 7, 11 e 13 não responderam a sequência a partir dessa tarefa. Destacamos que as duplas reclamaram do tempo disponibilizado para a resolução da sequência, segundo as duplas o tempo disponibilizado foi insuficiente. Com relação a porcentagem total, apenas a Dupla 2 fez o arredondamento.

Após a construção da TDF as duplas construíram um gráfico de barras a partir da dados da tabela. Deixamos pronto o arcabouço do gráfico. Durante a construção, as duplas tiveram dificuldades e solicitaram a ajuda da professora. Assim, a professora Maria, ajudou as duplas individualmente explicando o procedimento. A seguir, apresentamos o diálogo da Dupla 7 com a professora Maria. Apresentamos esse diálogo, pois selecionamos os mais audíveis, por conta do barulho em sala de aula.

Dupla 7: Professora, como a gente responde essa questão?

Professora Maria: Vocês não preencheram a tabela nesta questão (sinalizando com o dedo a questão) com a quantidade de estudante?

Dupla 7: Sim, preenchemos.

Professora Maria: Então. Olhando a tabela quantos estudantes tomaram 0 vacinas?

Dupla 7: Dois.

Professora Maria: E quantos estudantes tomaram uma vacina?

Dupla 7: Um estudante.

Professora Maria: Então, nessa barra aqui do zero (sinalizando com dedo o gráfico), vocês vão pintar até que número?

Dupla 7: Até o dois.

Professora Maria: E na barra do um?

Dupla 7: Até o um.

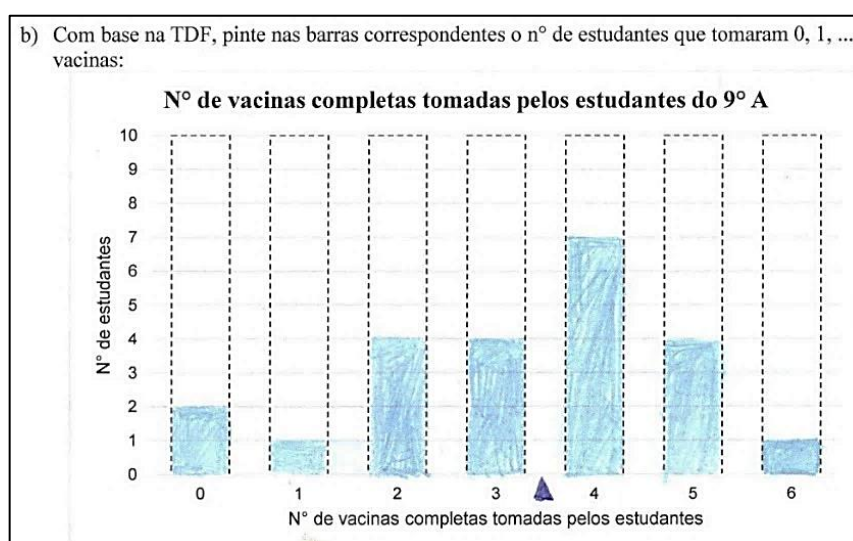
Professora Maria: Vocês entenderam como é para pintar?

Dupla 7: Sim, só é ir olhando a tabela e ir pintando aqui. Igual ao outro gráfico.

Professora Maria: Isso.

Após a intervenção da professora, a dupla realizou corretamente a construção do gráfico, como podemos ver na Figura 31, assim como as outras duplas, com exceção de 4 duplas que não responderam a sequência de ensino a partir da terceira tarefa.

Figura 31 – Construção do gráfico de barras a partir da TDF realizada pela Dupla 7



Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Na Figura 31, podemos observar que na base do gráfico tem um triângulo. Esse triângulo tinha por objetivo representar a média como o “fiel da balança”.

Após a construção do gráfico de barras, as duplas calcularam a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes. Para calcular a média, as duplas verificaram, a partir do gráfico, a quantidade de estudantes que tomaram zero vacina, uma vacina, duas vacinas, até as seis vacinas. Durante a resolução a Dupla 5, sinalizou que estava com dúvidas e solicitou a ajuda da professora. A dupla fez o seguinte questionamento para a professora:

Dupla 5: Professora, aqui é preciso calcular a porcentagem? (a dupla estava se referindo ao segundo questionamento da tarefa)

Professora Maria: Para responder vocês precisam observar o gráfico da questão anterior. Observando no gráfico, quantos estudantes tomaram zero vacinas?

Dupla 5: Dois estudantes.

Professora Maria: Então, quantas vacinas eles tomaram?

Dupla 5: Nenhuma.

Professora Maria: Observando novamente o gráfico, quantos estudantes tomaram uma vacina?

Dupla 5: Um estudante.

Professora Maria: Entenderam?

Dupla 5: Sim, entendemos.

A professora Maria aproveitou a explicação que foi feita para a Dupla 5, e chamou a atenção das demais duplas. Após a intervenção, todas as duplas responderam corretamente, com exceção das duplas e dos estudantes que não responderam a sequência. Na Figura 32, apresentamos a solução da Dupla 5.

Figura 32 – Solução da Dupla 5 para o cálculo do número de vacinas completas tomadas e da média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes

c) Com base no gráfico

i. Quantos estudantes tomaram 0 vacinas? 2 Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? nenhuma

ii. Quantos estudantes tomaram 1 vacinas? 1 Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? uma

iii. Quantos estudantes tomaram 2 vacinas? 4 Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? oito

iv. Quantos estudantes tomaram 3 vacinas? 4 Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? doze

v. Quantos estudantes tomaram 4 vacinas? 7 Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? trinta e sete

vi. Quantos estudantes tomaram 5 vacinas? 4 Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? vinte

vii. Quantos estudantes tomaram 6 vacinas? 3 Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? dezoito

d) Qual é o número total de vacinas completas que os estudantes tomaram? Para isso, some os resultados parciais encontrados nos itens de "i" a "vii": 75

e) Qual é a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes? Para isso divida o total encontrado em d), pelo número total de estudantes:

$$\frac{75}{23} = 3,26$$

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Podemos perceber que a dupla respondeu corretamente o que foi solicitado. Na solução do último item, a dupla, realizou o cálculo por meio de uma fração para calcular a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes, ou seja, a dupla responde utilizando o comando que foi indicado na tarefa.

Após as duplas terem calculado o número de vacinas e a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes, construíram uma tabela a partir das somas parciais

referentes aos dados anteriores. Apresentamos na Figura 33, as respostas da Dupla 6, que respondeu corretamente. O que nos chamou a atenção foi o esquema utilizado pela dupla para calcular o produto (número de vacinas pelo número de estudantes), pois a dupla apresenta o cálculo produto por produto. Esse esquema foi utilizado apenas por essa dupla.

No item “g”, a dupla reproduz corretamente o que foi solicitado, porém, sua resposta final não está correta, ou seja, o resultado da divisão está errado. Essa resposta, nos leva a inferir que a dupla não tinha conhecimento da primeira propriedade da média, que nesse caso, é: a média só poderia assumir um valor entre zero e seis ($0 \leq \text{Média} \leq 6$). Assim, concordamos com Silva Junior (2018, p. 118) ao afirmar que esse “tipo de erro é muito comum, mas o professor deve ficar atento para saná-lo”.

Figura 33 – Solução da Dupla 6 referente à construção da TDF a partir das somas parciais

f) Registre na TDF os produtos parciais:

Nº de vacinas	Nº de estudantes	Produto (Nº de vacinas x Nº de estudantes)
0	2	$2 \times 0 = 0$
1	1	$1 \times 1 = 1$
2	4	$2 \times 4 = 8$
3	4	$3 \times 4 = 12$
4	7	$4 \times 7 = 28$
5	4	$5 \times 4 = 20$
6	1	$6 \times 1 = 6$
Total	23	75

g) Qual é a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes? Para isso divida o total do produto pelo número de estudantes:

$$\text{Média} = \frac{\text{Soma dos produtos}}{\text{numero_de_estudantes}} = \frac{75}{23} = 8,6$$

h) Marque na base do gráfico de barras, com um triângulo, o valor da média.

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

No item “h”, as duplas representaram a média por meio de um triângulo na base do gráfico de barras, conforme apresentamos na Figura 31. Essa representação para a média tinha como objetivo a compreensão dos estudantes que a média pode ser representada como o “fiel da balança”, ou seja, o ponto de equilíbrio entre os dados como descrevemos na seção do objeto matemático e estatístico (seção 2.2).

Durante a resolução, as duplas não entenderam como deveriam desenhar o triângulo na base do gráfico. Então, a professora Maria explicou como as duplas deveriam construir o triângulo. Assim, a professora desenhou o gráfico no quadro e explicou da seguinte forma.

[...] no item g) vocês encontraram o valor da média, agora vocês voltam no gráfico de barras [...] e observem qual eixo está representado o número de vacinas, o horizontal ou vertical? Aí, vocês vão marcar com um triângulo. Observem que as barrinhas que estão aqui, não é? (indicando as barras do gráfico feito no quadro). Aí digamos que ... a média deu um, então esse triângulo aqui em baixo é o número médio de vacinas, um

(a professora desenhou o triângulo na base do gráfico, com média igual a um). Então, como o um está aqui em baixo, eu desenho o triângulo. Mas observem que a média que vocês encontraram não é um, então vocês observem o valor que vocês encontraram e marquem no gráfico com o triângulo. (MARIA, 04/10/2018).

Após a explicação da professora, a Dupla 7 solicitou que professora fosse até a carteira da dupla e fez o seguinte questionamento:

Dupla 7: Professora como assim?

Professora Maria: Olha, qual foi o valor da média que vocês encontraram na letra g?

Dupla 7: 3,26.

Professora Maria: Esse valor está entre quais números inteiros?

Dupla 7: Não sei.

Professora Maria: Vocês sabem sim. Pense que esse valor, seja dinheiro, ou seja, três reais e alguns centavos, então entres quais desses números aqui, ele vai estar?

Dupla 7: Entre o número três e o número quatro.

Professora Maria: Então, onde vou desenhar o triângulo?

Dupla 7: Vou desenhar entre o três e o quatro.

Após a intervenção da professora, as duplas responderam o que foi solicitado. As Duplas 2, 5, 6, 7, 8 e 10 e um estudante das Duplas 4 e 13 desenharam corretamente o triângulo; um estudante das Duplas 3 e 11 representaram a média por meio de três triângulos em locais diferentes, o que podemos inferir que esses estudantes não compreenderam essa representação para a média; os demais estudantes, como esclarecemos anteriormente, não responderam a sequência.

Esta tarefa, construção do triângulo na base do gráfico de colunas, foi a última realizada pelas duplas no quinto encontro, sendo também dedicado à análise estatística dos dados. Esse tipo de representação para a média, por meio de um triângulo, é apresentado por Cobo (2003), como descrevemos na revisão de literatura.

O sexto encontro foi o último dedicado à quarta fase do ciclo investigativo PPDAC, a Análise dos dados. Nesse encontro, apenas as Duplas 2, 4, 5, 6 e um estudante das Duplas 11 e 13 finalizaram toda a SE, as demais duplas continuaram respondendo as tarefas anteriores. Destacamos, que as demais duplas reclamaram do tempo que foi disponibilizado para responderem a sequência. De acordo com as duplas, foi disponibilizado pouco tempo e, por esse motivo, não conseguiram terminar.

A penúltima tarefa solicitava a interpretação da média. Verificamos que nenhuma dupla conseguiu interpretar a média. Na Figura 34 apresentamos a resposta da Dupla 5 e verificamos que eles sinalizaram aspectos pontuais dos dados, que lhes chamaram a atenção, e que as demais duplas responderam de forma similar.

Figura 34 – Interpretação da média da Dupla 5

4. Interpretando a média

a) Interprete a média do número de vacinas completas tomadas pelas meninas:

De 15 meninas, apenas 1 tomou todas as vacinas.

b) Interprete a média do número de vacinas completas tomadas pelos meninos:

De 8 meninos nenhum tomou todas as vacinas.

c) Interprete a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes:

De 23 estudantes, apenas 1 tomou todas as vacinas.

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Esses resultados são similares aos resultados relatados por Strauss e Bichler (1988) e Cazorla (2003), que expõem as dificuldades dos participantes para interpretar os dados, confundindo com outras medidas, ressaltando o algoritmo ou aspectos pontuais dos dados.

Após a Dupla 5 ter terminado de responder todas as tarefas, a professora solicitou que a dupla ajudasse as demais. Lembrando que nas duas últimas tarefas a professora não ajudou diretamente as duplas, apenas pediu para as mesmas justificarem com suas próprias palavras sobre o que entenderam para o conceito de média em cada tarefa.

Na Figura 35 apresentamos a resposta de um estudante da Dupla 13, referente à última tarefa da sequência de ensino. A tarefa focava a percepção das duplas sobre qual procedimento lhes ajudou na compreensão da média, ou seja, qual dos três procedimentos que foram utilizados para calcular a média as duplas acharam mais fácil.

Figura 35 – Percepção da compreensão a partir do cálculo procedimental da Dupla 13

5. Percepção da compreensão a partir do cálculo procedimental

a) Qual das maneiras de encontrar a média lhe pareceu mais fácil?

() A partir dos dados brutos
 (x) A partir das somas parciais
 () A partir da TDF

Por que? *pela visualização dos dados fica mais fácil de entender*

b) Qual das maneiras de encontrar a média lhe ajudou na compreensão da média?

() A partir dos dados brutos
 (x) A partir das somas parciais
 () A partir da TDF
 () Nenhuma, continuo não compreendendo o significado da média

Por que? *é mais fácil de obter os resultados.*

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

No Quadro 13 sistematizamos as respostas das duplas, algumas duplas não responderam; um estudante da Dupla 11 escreveu: “Nenhuma, continuo não compreendendo o significado da média”.

Quadro 13 – Resposta das duplas referente à quinta tarefa

Q5a (mais fácil)	Por que?	Q5b (ajudou na compreensão)	Por que?
A partir dos dados brutos (Dupla 5 e um estudante da dupla 6)	Porque calculando os dados, chegamos ao resultado melhor (Duplas 5)	A partir das somas parciais	Porque a partir das somas parciais, achamos as médias.
	Pois foi mais fácil dividir a quantidade de alunos pelos dados brutos (um estudante da dupla 6)	A partir das somas parciais	Pois me ajudou a entender melhor o assunto.
A partir da TDF (Duplas 2 e um estudante da dupla 6)	Mostra a quantidade de alunos que tomaram a vacina (Duplas 2)	A partir das somas parciais	Elas calculam o número de vacinas e o número de estudantes que tomaram.
	Pois todos os cálculos precisam dos resultados dela (um estudante da dupla 6)	A partir da TDF	Pois já tinha as informações necessárias para a resposta.
A partir das somas parciais (Dupla 13)	Pela visualização dos dados fica mais fácil de entender	A partir das somas parciais	É mais fácil de obter os resultados.

Fonte: Construção do autor.

No Quadro 13 percebemos que alguns estudantes preferem os dados brutos, outros os dados em TDF e outros, as somas parciais para calcular a média, porém, a maioria sinalizou as

somas parciais para ajudar na compreensão da média, embora verificamos que nenhum estudante conseguiu interpretar a média.

Durante a realização da sequência de ensino, verificamos como as duplas responderam as tarefas, a exemplo da Dupla 2 na resolução da primeira tarefa. Assim, concordamos com Santana (2010) ao afirmar que é necessário que o professor conheça os esquemas utilizados pelos estudantes ao resolverem as situações propostas, pois, quando o professor passa a conhecer os esquemas dos estudantes, pode contribuir para um melhor entendimento e aprendizado dos conceitos propostos nas tarefas.

Com base nos conteúdos propostos pela BNCC e pelo PCN (Ensino Fundamental, anos finais), os estudantes, desse nível de ensino, devem ter em sua matriz curricular o estudo das medidas de tendência central, neste caso, especialmente, a média. Porém, como percebemos, nas respostas das duplas, é possível notar que os estudantes ainda não possuem total domínio do conceito e propriedade da média e do algoritmo da operação de divisão, que é essencial para o entendimento da mesma.

Com relação ao letramento estatístico, Gal (2002), foi possível perceber que os estudantes se posicionaram de forma crítica frente as informações estatísticas e ampliaram seus conhecimentos matemáticos e estatísticos.

4.2 Fechando o ciclo investigativo PPDAC

Como apresentamos na metodologia, desenvolvemos nossa sequência de ensino em sete encontros. O último encontro, foi dedicado à quinta e última fase do ciclo investigativo PPDAC, a Conclusão. Nesse encontro, a professora Maria iniciou conversando com os estudantes sobre a sequência de ensino e explicou que era o último dia do “projeto”. Assim, a professora Maria fez o seguinte questionamento:

Professora Maria: Pessoal, para começar... No primeiro dia, teve a palestra e, logo depois, nós formulamos uma pergunta. Quem lembra qual foi a pergunta?

Estudante 1 da Dupla 5: Como está, a situação, de imunização, através da vacinação, dos estudantes do 9º ano? (o estudante lê no caderno a questão)

Após, o estudante ter lido a pergunta, a professora Maria escreveu no quadro, a questão, e pediu para que todos lessem e os questionou:

Professora Maria: Pelo o que a gente viu... O que vocês acham... Vamos responder a essa pergunta. Como é que tá de fato?

A maioria dos estudantes começaram a falar ao mesmo tempo, então a professora pediu silêncio e solicitou que falassem um de cada vez.

Estudante 1 da Dupla 8: A maioria da sala tomou de quatro a cinco vacinas, mas tinha alunos, têm alunos, que não tomaram!

Estudante 2 da Dupla 4: Eu achei que está regular, porque de todos os alunos apenas um tomou todas as vacinas.

Professora Maria: Alguém quer acrescentar mais alguma coisa?

Após a professora ter feito esse questionamento, fez em seguida outro questionamento.

Professora Maria: E além de vacinação, o que mais que durante esse questionário (a professora estava se referindo a Atividade 1) que vocês responderam, além de vocês “ver” e responder a essa pergunta (a professora estava se referindo a questão de investigação elaborada). O que foi mais apontado naquele questionário?

Os estudantes começaram a falar ao mesmo tempo, coisas do tipo: “o tanto de vacinas tomadas”, “soma”, “o índice de vacina” entre outros. Porém, alguns estudantes responderam:

Estudante 2 da Dupla 2: Estatística.

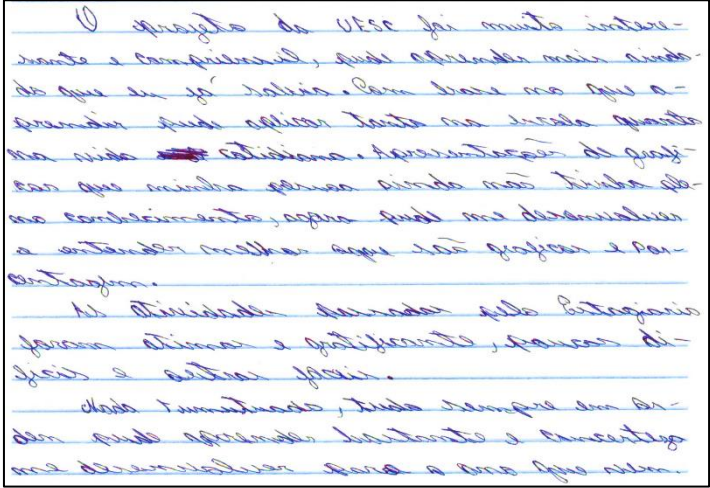
Professora Maria: Estatística... O que mais?

Estudante 1 da Dupla 1 e Estudante 2 da Dupla 7: Média.

Também, existiram respostas do tipo: gráficos, tabelas, conta e porcentagem. A partir das afirmações dos estudantes, a professora explicou que todos esses conceitos estatísticos foram utilizados para responder à questão de investigação. Após a explicação, a professora solicitou que os estudantes escrevessem sobre o que acharam do “projeto” desenvolvido e solicitou que entregassem ao pesquisador. A seguir, apresentamos alguns relatos dos estudantes.

Na Figura 36 apresentamos o relato de um dos estudantes da Dupla 11, que afirmou que os conhecimentos adquiridos possibilitaram ampliar seus conhecimentos e utilizá-los na escola e na vida cotidiana. O estudante também abordou o trabalho desenvolvido com os gráficos, e também com porcentagem. Em sua narrativa é possível identificar que ele não possuía total domínio dos conceitos, e a sequência contribuiu para o entendimento e ampliação os mesmos.

Figura 36 – Relato do Estudante 2 da Dupla 11 referente à sequência de ensino

	<p>Transcrição (feita pelo autor)</p> <p>O projeto da UESC foi muito interessante e compreensível, pude aprender mais ainda do que eu já sabia. Com base no que aprendi pude aplicar tanto na escola quanto na vida cotidiana. Apresentações de gráficos que minha pessoa ainda não tinha pleno conhecimento, agora pude me desenvolver e entender melhor o que são gráficos e porcentagem. As atividades passadas pelo estagiário foram ótimas e gratificante, poucas difíceis e outras fáceis. Nada tumultuado, tudo sempre em ordem pude aprender bastante e com certeza me desenvolver para o ano que vem.</p>
---	--

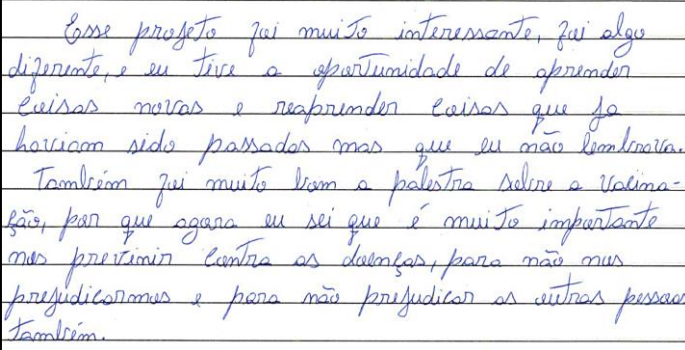
Fonte: material produzido na pesquisa (2018).

Nesta e em outras transcrições é possível perceber que os estudantes cometeram erros de Português, porém, não discutimos com eles esses erros, mas que merecem ser discutidos por se tratar de erros relacionados à primeira língua adotada em nosso País.

O estudante também destaca a organização da sequência. Segundo esse estudante, as tarefas foram sempre organizadas sequencialmente. A última afirmação do estudante, destacamos, a realização da sequência como base no PPDAC. Ao elaborar sequências de ensino, tomando como base esse ciclo, e envolver ativamente o estudante em um processo de investigações estatísticas, poderá possibilitar um melhor entendimento dos conceitos estatísticos trabalhados.

Antes de apresentarmos o relato de outro estudante, destacamos aqui o papel do letramento estatístico (GAL, 2002) no que se refere às mudanças nas posturas dos estudantes, ao afirmarem que não só apreenderam novos conteúdos ou ampliaram seus conhecimentos matemáticos e estatísticos, como, também, a necessidade para o cuidado com a saúde e a importância da vacinação para uma melhor expectativa de vida. Essas afirmações também foram destacadas pelo Estudante 1, da Dupla 1, como podemos ver na Figura 37.

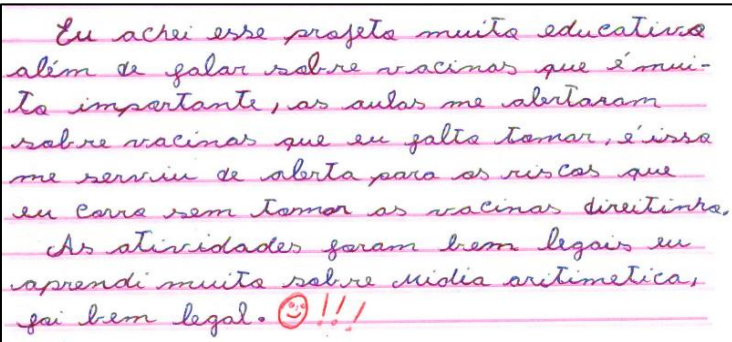
Figura 37 – Relato do Estudante 1 da Dupla 1, referente à sequência de ensino

	<p>Transcrição (feita pelo autor)</p> <p>Esse projeto foi muito interessante foi algo diferente, e eu tive a oportunidade de aprender coisas novas e reaprender coisas que já haviam sido passadas, mas que eu não lembrava.</p> <p>Também foi muito bom a palestra sobre a vacinação, por que agora eu sei que é muito importante nos prevenir contra as doenças, para não nos prejudicarmos e para não prejudicar as outras pessoas também.</p>
---	---

Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

Esse relato, Figura 37, mostra a o quão importante foi iniciarmos a sequência com uma palestra, pois foi um primeiro momento de aprendizagem para esses estudantes. Além disso, o estudante deixa claro a importância para a prevenção da sua saúde por meio da vacinação e, depois da palestra, aprendeu que é necessário se prevenir, pois, assim, está se protegendo e protegendo as pessoas ao seu redor. Esse relato vai ao encontro do relato do Estudante 2, da Dupla 10, como podemos ver na Figura 38.

Figura 38 – Relato do Estudante 2 da Dupla 10, referente à sequência de ensino

	<p>Transcrição (feita pelo autor)</p> <p>Eu achei esse projeto muito educativo, além de falar sobre vacinas que é muito importante, as aulas me alertaram sobre vacinas que eu falto tomar, e isso me serviu de alerta para os riscos que eu corro sem tomar as vacinas direitinho.</p> <p>As atividades foram bem legais eu aprendi muito sobre média aritmética, foi bem legal.</p>
---	---

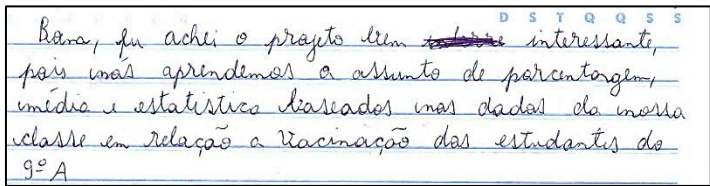
Fonte: Material produzido na pesquisa (2018).

O relato desse estudante, Figura 38, e dos demais, nos mostram como é importante o professor discutir problemas sociais por meio dos conteúdos que estão sendo discutidos em sala de aula, seja nas aulas de Matemática, Ciências, Geografia entre outras disciplinas, o que é recomendado pelos PCN (BRASIL, 1997, 1988) e a BNCC (BRASIL, 2018), como discutimos no Capítulo I. Além disso, podemos ver, a conscientização do estudante ao afirmar que descobriu, por meio dessa sequência, que não tinha tomado todas as vacinas e precisa tomar.

Destacamos, também, na fala desse estudante, que a sequência proporcionou aprendizado dos conteúdos estatísticos, que nesse caso foi a média.

Na Figura 39, no relato do Estudante 1, da Dupla 6, podemos verificar que o estudante relata a importância do ensino de Estatística, por meio de dados reais do qual ele está inserido. Além disso, destaca conteúdos matemáticos e estatísticos que a sequência possibilitou no aprendizado. A afirmação desse estudante vai ao encontro do que Lopes (2008) afirma sobre a necessidade dos professores desenvolverem, em suas práticas pedagógicas, situações para que os estudantes realizem atividades por meio da coleta e organização de dados de seus contextos. Segundo essa autora, “a aprendizagem da estocástica só complementar a formação dos alunos se for significativa, se considerar situações familiares a eles, que sejam contextualizadas, investigadas e analisadas” (LOPES, 2008, p. 59).

Figura 39 – Relato do Estudante 1 da Dupla 6 referente à sequência de ensino

	<p>Transcrição (feita pelo autor)</p> <p>Bom, eu achei o projeto bem interessante, pois nós aprendemos o assunto de porcentagem, média e estatística baseados nos dados da nossa classe em relação a vacinação dos estudantes do 9º A.</p>
--	--

Fonte: material produzido na pesquisa (2018).

Destacamos o ciclo investigativo PPDAC e o letramento estatístico no que se refere ao desempenho dos estudantes nos conceitos elementares de Estatística e na sua conscientização sobre a importância da vacinação. Ao analisarmos o desenvolvimento da sequência, podemos concluir que o trabalho com um tema transversal, contextualizado com uma problemática real, que em nosso caso foi a vacinação e seus benefícios para a saúde, permitiu que os estudantes apreendessem ou retomassem conteúdos que haviam estudado e não se lembravam, ou não tinham estudado em algum ano letivo anterior, e, a tomada de consciência com relação às doenças que podem ser prevenidas pela vacinação.

CAPITULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, tivemos como objetivo investigar os limites e potencialidades de uma sequência de ensino, baseada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, para a ampliação do conceito de Média Aritmética, no Ensino Fundamental. Para alcançarmos esse objetivo, realizamos por meio de uma sequência de ensino, baseada no ciclo investigativo PPDAC e no letramento estatístico, uma intervenção com estudantes de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental.

Estruturamos nosso texto em Introdução, quatro capítulos e as Considerações finais. Na Introdução, refletimos sobre a inserção do ensino da Estatística na Educação Básica e sobre o problema social que a humanidade voltou a enfrentar, que neste caso, foi o retorno de doenças, que são controladas via vacinação.

No primeiro capítulo, discutimos o contexto em que nosso objeto matemático e estatístico, média, está inserida no ensino de Estatística, com base nas orientações curriculares oficiais do Brasil. Para dar sentido aos conceitos e procedimentos de Estatística, recorreremos às fases da investigação científica, preconizadas por Wild e Pfannkuch (1999), que postulam o PPDAC; ao sentido do ensino para a formação cidadã, para o qual recorreremos ao letramento estatístico, postulado por Gal (2002); e, as possíveis interações entre o letramento e o ciclo investigativo na abordagem de conteúdos estatísticos, por meio do tema transversal “Imunização humana via vacinação”.

O segundo capítulo foi dedicado à Teoria dos Campos Conceituais (TCC), ancorados nos aportes de Vergnaud (1996) e da primeira aproximação do campo conceitual da média aritmética postulada por Cazorla, Santana e Utsumi (2019), explicitando as Situações (S), os Invariantes (I) e as representações (R). Finalizamos este capítulo com uma revisão de estudos correlatos, buscando extrair destes os diversos aspectos do conceito de média, os esquemas envolvidos em sua apreensão, invariantes e suas representações.

No terceiro capítulo, apresentamos o percurso metodológico da pesquisa, descrevendo, inicialmente, o contexto em que está inserido esse trabalho; os aspectos relacionados ao delineamento do estudo, os participantes, os procedimentos, os instrumentos e a sequência de ensino.

No quarto capítulo, apresentamos os resultados e analisamos as resoluções apresentadas pelos estudantes ao resolverem as tarefas propostas na sequência de ensino e dos diálogos que surgiram.

Retomando a nossa questão de pesquisa: Quais são as limitações e potencialidades de uma sequência de ensino, baseada no ciclo investigativo e no letramento estatístico, para a ampliação do conceito de Média Aritmética no Ensino Fundamental?

Para responder a essa questão, dividimos a análise de nossa sequência de ensino em duas partes: a primeira, referente à Cobertura Vacinal, em que as duplas analisaram a situação dos estudantes por vacina; e, na segunda, as duplas analisaram a situação de vacinação dos estudantes, a partir da análise da variável “Número de vacinas completas que o estudante tomou”.

Buscamos identificar quais os esquemas as duplas fizeram uso para responderem as tarefas propostas na sequência de ensino e, pudemos perceber, que em muitas questões, as duplas utilizaram de diferentes esquemas. Em geral, as duplas utilizaram o algoritmo da divisão e recorreram à representação de frações para encontrar o valor da média nas tarefas; foi possível perceber que nenhuma dupla explicitou o algoritmo da média, porém, utilizaram a divisão e a fração; fizeram uso do agrupamento de parcelas iguais ao adicionar os termos; e, perceberam que se tem a soma do número de vacinas das meninas e meninos, não é necessário recalcular a soma para cada estudante.

Ao analisarmos as produções das duplas, pudemos verificar que conseguiram realizar e extrair informações corretamente dos gráficos, construir a TDF de dupla entrada, encontrar a frequência absoluta e calcular a frequência relativa, ampliando o conhecimento estatístico. Os estudantes igualmente se inseriram no processo do ciclo investigativo, valorizando a importância da coleta, tratamento e análise de dados, conhecimentos que podem fazer a diferença para suas vidas, conseguindo fazer uma leitura do contexto em que vivem e nos quais podem agir e mudar para melhor suas vidas e a do seu entorno, como é proposto pelo letramento estatístico.

Verificamos que na última fase do ciclo investigativo PPDAC, a Conclusão, os estudantes tomaram consciência da importância da vacinação, em especial, quando: verificaram que apenas um estudante havia tomado todas as vacinas, identificaram que a cobertura vacinal contra a Meningite era a mais preocupante, pois apenas um dos 23 estudantes havia tomado a vacina, identificaram que a segunda pior cobertura vacinal era para o Tétano, pois apenas oito estudantes haviam se vacinado, relataram a importância da vacinação para sua saúde e para o cuidado da saúde das pessoas à sua volta, e quando eles descobriram que não tinham tomado

todas as vacinas e manifestaram que era necessário se prevenir, por meio da vacinação, e tomar as doses que faltavam.

Nesse sentido, entendemos que essa sequência contribuiu para a tomada de consciência e de ação no cuidado com a saúde dos adolescentes.

Como limitação, quanto à ampliação do conceito de média, verificamos que essa não conseguiu gerar condições necessárias para explorar diversas situações, propriedades e representações desse conceito; sinalizamos um maior tempo necessário para a realização da sequência, principalmente para a análise dos dados estatísticos, pois tratar um número volumoso de dados, no ambiente papel e lápis, se constitui numa tarefa enfadonha e que pode desmotivar os estudantes, tirando o foco dos conceitos estatísticos a serem trabalhados. Nesse sentido, trabalhar com dados reais exige um planejamento prévio e, se possível, o uso de recursos de informática que pode auxiliar no tratamento dos dados. Também sinalizamos que o professor poderá utilizar o mesmo banco de dados, durante todo ano letivo, trabalhando por etapas as variáveis quantitativas colhidas, em especial o cálculo das medidas de tendência central.

Além disso, a natureza dos dados gerados limitou explorar outras propriedades da média, como por exemplo, o trabalho com números negativos e com valores discrepantes, dentre outros. Observamos, ainda, que tínhamos coletado dados da Idade, Peso, Altura e calculado o IMC, porém optamos por não trabalhar essas variáveis, devido ao grande volume de dados e limitação do tempo. Como estratégia, deixamos esses dados para serem trabalhados posteriormente, quando o professor for abordar as variáveis contínuas, a construção da TDF em intervalos de classe e o histograma.

Nesse sentido, destacamos, ainda, a necessidade de combinar estratégias de ensino, a fim de abranger os diversos aspectos deste campo conceitual e sua apropriação, trabalhando diversas situações interessantes que os próprios livros didáticos trazem, que permitem a conversão de representações e exploração de outras propriedades da média.

Nossa sequência de ensino tem uma característica importante, a de potencializar ao estudante ver que aquele conteúdo, muitas vezes considerado maçante, é útil para sua vida, e que aquelas estatísticas frias da cobertura vacinal, veiculadas nos jornais, têm relação com sua ação e dizem respeito a ele também, contribuindo para sua leitura de mundo e evidenciando sua responsabilidade.

Além disso, como apontamos no Capítulo I, percebemos, nesse trabalho, que é possível o professor de Matemática, com base nos conteúdos de Estatística, desenvolver atividades com seus estudantes na perspectiva interdisciplinar e transdisciplinar.

Com relação à contribuição desse trabalho para a produção de conhecimento da área da Educação Matemática e Estatística, acreditamos que foi possível discutir possibilidades do trabalho com investigação estatística com dados reais dos estudantes, envolvendo-os em um processo de coleta, análise e conclusão com base nos dados coletados, além de despertar para a conscientização do cuidado com sua saúde e das pessoas a sua volta e o aprendizado de conteúdos estatísticos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. C. **Solução de situações de comparação multiplicativa e a criatividade matemática**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2017.

ALVES, T. A. S. **Conhecimentos de professores de matemática da educação básica sobre o ensino de medidas de tendência central**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, SP, 2016.

AMARAL, F. M. **Validação de Sequência Didática para (Re)Construção de conhecimentos Estatísticos por Professores do Ensino Fundamental**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

AMORIN, D. Renda domiciliar per capita fica em R\$ 1.373 em 2018, diz IBGE. **UOL**, Rio de Janeiro, 27 de fev. de 2019. Disponível em: <https://economia.uol.com.br/noticias/estadao-conteudo/2019/02/27/renda-domiciliar-per-capita-fica-em-r-1373-em-2018-diz-ibge.htm?cmpid=copiaecola>. Acesso em: 21 ago. 2019.

ARAÚJO, J. R. A. **Atividades para o estudo das medidas de tendência central: uma proposta com o apoio do GeoGebra**. 2018. Dissertação (Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

BAHIA confirma primeiro caso de sarampo na cidade de Ilhéus. **Correio**, Bahia, 23 de nov. 2018. Disponível em: <https://www.correio24horas.com.br/noticia/nid/bahia-confirma-primeiro-caso-de-sarampo-na-cidade-de-ilheus/>. Acesso em: 01 abr. 2019.

BATANERO, C. **Significado y comprensión de las medidas de posición central**. UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, La Rioja, n. 25, p. 41-58, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio. Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, Secretaria da Educação Básica, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum da Educação**. MEC, 2018. Disponível em: basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 20 jun. 2019.

BRASIL perderá certificado de erradicação do sarampo após novo caso registrado. **G1**. Disponível em: <https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2019/03/19/brasil-perdera-certificado-de-erradicacao-de-sarampo-apos-novo-caso-registrado.ghtml>. Acesso em: 24 de mai. de 2019.

BRASIL é o 3º país com maior alta nos casos de sarampo; Unicef alerta para ameaça às crianças. **G1**. Disponível em <https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2019/02/28/brasil-e-o-3o-pais-com-maior-alta-nos-casos-de-sarampo-unicef-alerta-para-ameaca-as-criancas.ghtml>. Acesso em: 24 abr. 2019.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

CARVALHO, J. I. F. de. **Média Aritmética nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2011.

CAZORLA, I. M.; OLIVEIRA, M. S. Para Saber mais. *In*: CACORLA, I.; SANTANA, E. (Org.). **Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico**. Itabuna: Via Litterarum, 2010. p. 113-144.

CAZORLA, I.; SANTANA, E. **Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico**. 1ª edição. Itabuna. Via Litterarum. 2010.

CAZORLA, I. M.; UTSUMI, M. C. Reflexões sobre o ensino de estatística na Educação Básica. *In*: CAZORLA, I.; SANTANA, E. (Org.). **Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico**. Itabuna: Via Litterarum, 2010. p. 9-18.

CAZORLA, I. M. **Média aritmética**: um conceito prosaico e complexo. Anais do IX Seminário de Estatística Aplicada, Rio de Janeiro, 2003.

CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. R. S.; UTSUMI, M. C. O campo conceitual da média aritmética: uma primeira aproximação. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.xx, n.x, p.xxx-xxx, 2019. No prelo.

COBO, B. **Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria**. 2003. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, 2003.

COMO a Cambridge Analytica analisou a personalidade de milhões de usuários no Facebook. 1 vídeo (4:13 min). Publicado pelo canal BBC News Brasil, 2018. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=x1SnHHby0wA>>. Acesso em: 06 nov. 2018.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2016.

DAMIANI, M. F. et al. **Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica**. Cadernos de Educação, n.45, p.5767, 2014.

ESCOBAR, A. Por que o sarampo está voltando? **G1**. Disponível em: <https://g1.globo.com/bemestar/blog/ana-escobar/post/2019/04/22/por-que-o-sarampo-esta-voltando.ghtml>. Acesso em: 24 abr. 2019.

EUA registram 71 casos novos de sarampo em meio a programação de surto. **DCI**. Disponível em: <https://www.dci.com.br/mundo/eua-registram-71-casos-novos-de-sarampo-em-meio-a-propagac-o-de-surto-1.796147>. Acesso em: 24 abr. 2019.

EUGÊNIO, R. S. **Explorações sobre a média no software TinkerPlots2.0 por estudantes do Ensino Fundamental**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE, 2013.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 7ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GAL, Iddo. Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. In: **International Statistical Review**. Israel, 2002. p. 1 – 25.

GIORDANO, C. C. O desenvolvimento do letramento estatístico por meio de projetos: um estudo com alunos do Ensino Médio. 2016. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, 2016.

LABOISSIÈRE, P. Doenças erradicadas voltam a assustar: veja os desafios da vacinação. **Agência Brasil**. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2018-07/doencas-erradicadas-voltam-assustar-veja-os-desafios-da-vacinacao>. Acesso em: 24 abr. 2019.

LABOISSIÈRE, P. Se pararmos de vacinar, doenças voltarão forte, alerta ministério. **Correio**. Disponível em: <https://www.correio24horas.com.br/noticia/nid/se-pararmos-de-vacinar-doencas-voltarao-mais-forte-alerta-ministerio/>. Acesso em: 24 set. 2018.

LEITE, D. J. L. L. **Média Aritmética Ponderada: Um estudo detalhado da influência dos pesos no posicionamento da média. Propriedades e Aplicações**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco, 2014.

LEMOES, M. P. F. **O desenvolvimento profissional de professores do 1º ao 5º ano do ensino fundamental em um processo de formação para o ensino e a aprendizagem das medidas de tendência central**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2011.

LISTA de países por PIB nominal per capita. **Wikipédia**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_de_pa%C3%ADses_por_PIB_nominal_per_capita. Acesso em: 21 ago. 2019.

LÔBO, W. S.; CAZORLA, I. M. Ensino de Estatística e o cuidado com a saúde do adolescente. **Educação Matemática em Revista** – RS. 20(1), p. 120-129, 2019.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 11. Ed. São Paulo: Pedagógica e Universitária, 1986.

MAGINA, S. et al. **Concepções e concepções alternativas de média**: Um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental. In: Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. especial 2, p. 59-72, 2010. Editora UFPR.

MELO, M. C. M. **Fazendo média**: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. 2010. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE, Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2010.

OLIVEIRA, J. P. **Aprendizagem em estatística numa perspectiva transdisciplinar**: Uma possibilidade? 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2018.

ONZE estados estão com índices de vacinação contra pólio e sarampo abaixo da média nacional. **Ministério da Saúde**. Disponível em: <http://www.saude.gov.br/noticias/agencia-saude/44233-onze-estados-estao-com-indices-de-vacinacao-contrapolio-e-sarampo-abaixo-da-media-nacional>. Acesso em: 11 jun. 2019.

PINHEIRO, E. M.; KAKEHASHI, T. Y.; ANGELO, M. O uso de filmagem em pesquisas qualitativas. **Revista Latino-Americana de Enfermagem**, Ribeirão Preto, v. 13, n. 5, p. 717-722, 2005.

Produto Interno Bruto. **IBGE**. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/pib.php>. Acesso em: 30 ago. 2019.

QUEIROZ, L. Cai número de filhos por família no Brasil. **GGN**. Disponível em: <https://jornalggm.com.br/noticia/cai-numero-de-filhos-por-familia-no-brasil>. Acesso em 30 nov. 2018.

RENDA per capita. **Wikipédia**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Renda_per_capita. Acesso em: 24 maio. 2019.

RIBEIRO, A. Taxa de Fecundidade. **Brasil Escola**. Disponível em: <https://brasilestola.uol.com.br/geografia/taxa-fecundidade.htm>. Acesso em: 06 de abr. 2019.

RONDERO, C. FONT, V. **Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética**. Enseñanza de las Ciencias, 33(2), 29-49. 2015.

SANTANA, E. R. S. **Estruturas Aditivas**: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANTANA, M. S. **A educação estatística com base num ciclo investigativo**: um estudo do desenvolvimento do letramento estatístico de estudantes de uma turma do 3.º ano do ensino médio. 2011. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, MG, 2011.

SANTANA, E. R. S.; CAZORLA, I. M. Desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática. **Projeto de pesquisa**. Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia, Brasil, 2018.

SANTOS, W. D. **Letramento Estatístico nos Livros de Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, 2017.

SILVA JUNIOR, A. V. **Efeitos do ciclo investigativo PPDAC e das transformações de representações semióticas no desenvolvimento de conceitos estatísticos no ensino fundamental**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2018.

STRAUSS, S. BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 1, p. 64-80, 1988.

Taxa de fecundidade. **Wikipédia**. Disponível em:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Taxa_de_fecundidade. Acesso em: 06 abr. 2019.

WILD, J. C.; PFFANKUCH, M. Statistical Thinking in Empirical Enquiry. In: **International Statistical Review** (1999) 67, 3, 223-265, Printed in Mexico.

VERGNAUD, G. **Multiplicative structures**. In: Lesh R., Landau M.(eds.), Acquisition of mathematics concepts and operations processes (1983) (pp. 127-174). New York: Academic.

_____. A Teoria dos Campos Conceituais. In BRUN, J. **Didática das matemáticas**. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VIGNÉ, J. MPF pede que escolas cobrem carteiras de vacinação de alunos. **Correio**. Disponível em: <https://www.correio24horas.com.br/noticia/nid/mpf-pede-que-escolas-cobrem-carteira-de-vacinacao-de-alunos/>. Acesso em: 01 abr. 2019.

VÍRUS. **Toda Biologia.com**. Disponível em:
<https://www.todabiologia.com/microbiologia/virus.htm>. Acesso em: 24 maio. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – GUIA DA SEQUÊNCIA DE ENSINO CARTÃO DE VACINAÇÃO (CV)

Cartão de Vacinação: a importância da vacina na saúde humana

O Cartão de Vacinação (CV) é uma sequência de ensino que tem por objetivo discutir sobre a importância da imunização na saúde dos estudantes, que são incentivados a realizar o levantamento de dados percorrendo as fases do Ciclo Investigativo PPDAC (Problema, Planejamento, Dados, Análise e Conclusão), utilizando os conceitos e procedimentos estatísticos. Recomendamos que esta sequência seja desenvolvida, em parceria, com o professor de Ciências ou Biologia.

Objetivos:

- Despertar a conscientização da vacinação para a prevenção de doenças.
- Identificar a importância da investigação científica com uso da estatística.
- Coletar, analisar e interpretar os dados da investigação.

Conceitos:

- Tabelas de distribuição de frequência
- Gráficos de barras, setores e diagrama de pontos.
- Medidas de tendência central: média, mediana e moda.
- Tipos de variável: qualitativa nominal, quantitativa discreta e quantitativa contínua.

Tempo estimado:

- 5 encontros de 2 horas aula.
 - 1º encontro: Formulação do problema de investigação
 - 2º encontro: Planejamento do desenvolvimento da pesquisa.
 - 3º encontro: Tratamento dos dados
 - 4º encontro: Análise de dados
 - 5º encontro: Comunicação

A depender do andamento do trabalho a formulação do problema e o planejamento podem ser realizados em um único encontro, assim como a análise de dados e a comunicação.

Materiais:

- Modelos de cartão de vacinação da criança;
- Ficha 1 para coleta de dados;
- Fita adesiva larga, para afixar o cartaz na parede;
- Piloto;
- Cartaz em papel madeira (pardo ou craft) para organizar os dados da turma em tamanho grande;
- Papel quadriculado¹⁴, régua, compasso e transferidor;
- Calculadora;
- Laboratório de informática¹.

Fase 1: A formulação do problema de investigação

¹⁴ Caso exista possibilidade de uso em sala de aula, ver orientações específicas.

No 1º encontro, o professor precisa contextualizar sobre a importância da vacinação na saúde humana, uma vez que em pleno século 21, doenças que já estavam erradicadas no Brasil, estão voltando, a exemplo, da febre amarela, o sarampo, a pólio, dentre outras. Nesta fase, o professor de Matemática pode trabalhar em parceria com o professor de Ciências ou Biologia ou com o apoio de um profissional de saúde.

Aqui, o professor deve discutir com os estudantes sobre quais as doenças podem ser prevenidas por meio da vacinação, questionando se eles tomaram as vacinas obrigatórias, no intuito de tomar conhecimento sobre a situação da imunização. Questionar, indagando sobre como eles podem saber se estão imunizados ou não. Neste momento, espera-se que os estudantes indiquem o cartão de vacinação, como fonte para se observar a imunização.

Professor, neste momento, seria interessante trazer diversos modelos de Cartão de Vacinação, discutir sobre as doenças e como elas estão dispostas no CV, como por exemplo, o Sarampo está incluída na Tríplice.

Nesse contexto, o professor, juntamente com seus alunos, deve elaborar a questão de investigação. Por exemplo: **qual a situação, de imunização, através da vacinação, dos estudantes da turma?**

Para contextualizar, o professor de Matemática pode solicitar aos estudantes que investiguem na internet, nos livros e revistas o que é a vacina, que doenças podem ser prevenidas, quais vírus e quais bactérias etc. Pode solicitar aos estudantes que conversem com seus avós ou pessoas mais velhas se elas sofreram ou conhecem alguém que sofreu com o Sarampo, a Caxumba (Papera), perguntar se no bairro tem alguém que teve poliomielite. Outros tópicos interessantes para discussão, podem ser a gripe espanhola, a gripe suína, o Ebola, a Dengue, o HPV etc.

Assim, o professor deve concluir este encontro com a designação de uma atividade de investigação a ser realizada pelos estudantes e trazerem para a próxima aula, as leituras e reflexões solicitadas, bem como a descrição do seu cartão de vacinação. Solicitar aos estudantes que tiverem celulares que tirem foto e tragam para a aula.

Fase 2: O planejamento

No 2º encontro, com base nos textos e reflexões trazidas pelos estudantes, incentivá-los a conjecturar o que pode explicar a volta de doenças tidas como erradicadas (tais como, pais que se negam a vacinar seus filhos, vírus e bactérias mais resistentes, vacinas vencidas etc.).

Como são muitas vacinas, com doses diferentes, que devem ser tomadas de acordo a idade e isto é bastante complexo, sugerimos focar algumas vacinas. Como no momento atual no Brasil algumas doenças estão voltando, como por exemplo a Febre Amarela e o Sarampo (Tríplice) podemos trabalhar estas duas, além disso, como a maioria dos estudantes é adolescente, sugerimos trabalhar também com Meningite, HPV, Tétano e Hepatite B. Todavia, dependendo das doenças que estejam voltando e do país ou local, pode-se trabalhar outras vacinas.

Assim, o professor deve, em conjunto com os estudantes, discutir como podem coletar os dados do cartão. Como o CV é um documento oficial sugerimos que se construa um Instrumento para que o estudante transcreva os dados do seu cartão. Aqui sugerimos um modelo – Ficha 1.

Ficha 1 – Modelo de instrumento de coleta de dados do Cartão de Vacinação

GPMEC **Carteira de vacinação da criança** **GPMEC**
 NOME: _____
 ESCOLA: _____ TURMA: _____
 IDADE: ____ ANOS ALTURA: ____ CM PESO: ____ KG IMC: _____ SEXO: M F

VACINA	ANTITETÂNICA	TRIPLÍCE VIRAL	HPV	MENINGITE	FEBREAMARELA	HEPATITE B
1ª DOSE	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____
2ª DOSE	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____
3ª DOSE	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____

OBS: _____

Fonte: Santana e Cazorla (2018).

Nesta fase de planejamento, o professor e os estudantes devem combinar se este modelo será adotado ou se vão fazer modificações. Neste caso devem criar ou reformar esta ficha. Depois devem combinar como será o processo de preenchimento da Ficha de coleta de dados.

Nesta fase, o professor também deve discutir como vão ser registrados os dados quando os estudantes retornarem com as Fichas preenchidas.

No final deste encontro, o professor deve entregar o modelo da Ficha 1 para que os estudantes levem para casa e preencham com os dados de sua CV, transcrevendo a data que foi tomada a dose das vacinas e trazerem para a próxima aula. Solicitar aos estudantes que não sabem seu peso (massa corporal) e altura que passem na Farmácia do seu Bairro ou no Posto de Saúde e colem esses dados.

Fase 3: Coletando os dados

A coleta de dados, refere-se ao preenchimento dos dados na Ficha 1, a partir dos dados do CV do estudante, será realizada pelos estudantes em casa, preenchendo os dados de forma autônoma, o que pode de alguma maneira interferir na fidedignidade dos dados. Este é um risco e deve ser conversado com os estudantes, pois o estudante pode se sentir constrangido de não ter tomado as vacinas ou estarem incompletas e por vergonha pode colocar datas aleatórias. Nesse sentido, seria muito importante o professor falar da ética na pesquisa, da importância da coleta de dados fidedignos e de tomar conhecimento sobre a sua situação de imunização.

No 3º encontro, de posse da Ficha 1 preenchida e trazida pelos estudantes, o Professor, deve conduzir a organização dos dados visando seu tratamento.

Uma forma prática de organizar os dados em tabelas, o professor pode solicitar aos estudantes que levantem a mão na sistematização das variáveis. Por exemplo, se estiver sistematizando a variável Idade, pode desenhar o arcabouço da tabela no quadro e proceder com a contagem. Para saber quantos estudantes tem 12 anos, ele solicita a turma que todos os que tem 12 anos levantem a mão, faz a contagem e registra na tabela o respectivo valor e assim sucessivamente:

Exemplo de sistematização dos dados para construir as tabelas de distribuição

Idade (anos)	Nº de estudantes	%
14		
15		
16		
17		
18		
Total		

Quadro 1 – Legenda e natureza das variáveis em estudo

Nome da variável	Tipo	Natureza	Valores/categorias (legenda)	Observação
Sexo	Dado bruto	Qualitativa, nominal	F = Feminino M = masculino	
Idade	Dado bruto	Quantitativa, Discreta	10, 11, 12 ...	Se tomada em anos completos
Peso	Dado bruto	Quantitativa, contínua	Valores entre 40 e 90 kg	Depende da faixa etária
Altura	Dado bruto	Quantitativa, contínua	Valores entre 140 e 190	Depende da faixa etária
IMC	Dado secundário	Quantitativa, contínua	Valores entre 16 e 50	Índice de Massa Corpórea
Antitetânica	Dado bruto	Qualitativa, nominal	1 = Sim e completa 0 = Não ou incompleta	
Tríplice	Dado bruto	Qualitativa, nominal	1 = Sim e completa 0 = Não ou incompleta	
HPV	Dado bruto	Qualitativa, nominal	1 = Sim e completa 0 = Não ou incompleta	
Meningite	Dado bruto	Qualitativa, nominal	1 = Sim e completa 0 = Não ou incompleta	
Feb. Amar.	Dado bruto	Qualitativa, nominal	1 = Sim e completa 0 = Não ou incompleta	
Hepatite B	Dado bruto	Qualitativa, nominal	1 = Sim e completa 0 = Não ou incompleta	
Nº de vacinas	Dado secundário	Quantitativa, Discreta genuína	0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6	

Outra opção pode ser imprimir a Ficha 2, já com a relação alfabética dos estudantes (igual à da lista de chamada), com os outros campos em branco, e entregar uma cópia para cada estudante. Esta opção é muito trabalhosa, mas tem a vantagem que cada estudante fica de posse do banco de dados de todos os respondentes.

Conceitos a serem trabalhados:

- Variável
- Dados
- Tipos de variável de acordo a sua natureza (nominal, discreta, continua)
- Tabela de distribuição de frequência (simples e de dupla entrada)
- Gráfico de barras simples, lado a lado e empilhada
- Medidas de tendência central (Media e Moda)

Agora estamos prontos para a análise dos dados, onde os dados serão tratados, isto é, a partir dos dados brutos dispostos no banco de dados procedemos com a construção de tabelas, gráficos e as medidas de tendência central.

Fase 4: A análise dos dados

Com os dados coletados, os estudantes devem analisá-los. Nesse momento é preciso que o professor esteja atento para os conceitos estatísticos a serem trabalhados. Sugerimos que diante das variáveis apresentadas no modelo do cartão de vacinação ou no cartaz feito no papel madeira, o professor apresente e discuta com os estudantes os conceitos estatísticos que estão sendo trabalhados e como eles devem ser tratados a fim de fornecer informações estatísticas relevantes.

Com o intuito de subsidiar o professor, colocamos aqui um banco de dados de uma Turma do 8º ano, com os dados de vacina fictícios (Quadro 2). Os nomes também são fictícios. Caso o professor deseje trabalhar os dados por sexo, sugerimos que a lista de chamada seja

organizada por sexo, primeiro todas as meninas (ordem alfabética), depois todos os meninos (ordem alfabética).

Quadro 2 – Banco de dados base para o tratamento de dados

Nome	Gênero	Idade	Peso	Altura	IMC	AntiT	TRI	HPV	Menin	Famar	HepB	Nvacinas
Angelina	F	15	43	162	16,38	1	1	0	0	1	1	4
Camily	F	14	44	159	17,40	1	1	1	1	0	0	4
Crislana	F	14	51	163	19,95	1	1	1	0	1	0	4
Erika	F	15	50	170	17,30	0	0	0	1	1	0	2
Gilmara	F	14	49	153	20,93	1	1	0	0	1	1	4
Grasiely	F	15	68	168	24,09	0	1	1	1	0	0	3
Iara	F	14	39	141	19,61	1	1	0	0	0	0	2
Kauane	F	14	58	170	20,06	1	1	1	1	0	0	4
Leidiane	F	17	50	140	25,51	0	0	0	0	0	0	0
Luiza	F	18	65	165	23,87	1	1	0	1	0	0	3
Maiara	F	16	43	150	19,11	0	0	0	1	1	0	2
Maiza	F	15	73	155	30,38	0	1	0	0	1	0	2
Maria	F	17	50	160	19,53	1	0	0	1	0	0	2
Marimar	F	18	48	159	18,98	1	1	0	0	0	0	2
Suelene	F	16	46	157	18,66	1	0	1	1	0	0	3
Adailton	M	17	60	171	20,51	0	1	0	0	0	0	1
Alan	M	14	43	158	17,22	1	1	0	1	1	0	4
Alexandro	M	16	70	182	21,13	1	1	0	0	0	0	2
Diego	M	16	65	185	18,99	0	1	0	1	1	0	3
Elian	M	17	70	175	22,85	1	1	0	1	0	0	3
Emerson	M	16	50	170	17,30	1	1	0	0	0	0	2
Eslan	M	17	70	181	21,36	0	0	0	1	0	0	1
Franciel	M	14	41	155	17,06	1	0	0	1	0	0	2
Gabriel	M	15	62	174	20,47	1	1	0	0	1	1	4
Guilherme	M	14	50	172	16,90	1	0	0	1	1	0	3
Isac	M	14	64	160	25,00	1	1	0	1	0	0	3
João	M	18	73	190	20,22	1	1	0	0	0	0	2
Marcos	M	15	50	165	18,36	1	1	0	0	1	0	3
Ronaldo	M	15	55	176	17,75	1	1	0	0	1	1	4
Thassio	M	15	70	193	18,79	0	1	0	1	0	0	2
Vinicius	M	17	69	185	20,16	1	1	0	0	1	1	4
Vitor	M	15	53	174	17,50	0	1	0	0	1	1	3

Professor, na construção das tabelas, gráficos e no cálculo da média, é importante estar atento ao tratamento adequado para o tipo de variável. Apresentamos a seguir de forma bem sucinta, um pouco sobre os possíveis conceitos estatísticos que podemos trabalhar com esta sequência.

Professor, segundo as normas científicas, as tabelas não devem ter linhas dentro do corpo, nem devem ser fechadas nos lados. Assim, como os gráficos devem conter título e fonte. Outro ponto importante, é observar a natureza da variável que está sendo trabalhada, pois, a escolha do gráfico para representar um conjunto de dados é consoante ao tipo de variável.

Tratamento das variáveis qualitativas

Para as variáveis qualitativas, neste caso nominais, o professor pode construir a Tabela de Distribuição de Frequência (TDF) e o gráfico de barras. Também pode encontrar a Moda, que é a categoria mais frequente. Para a construção do gráfico de barras para a cobertura vacinal¹⁵ (% de estudantes que tomaram a vacina) sugerimos que todos os seis gráficos tenham a mesma escala, isto é, 100%, a fim de estabelecer comparação na cobertura das seis vacinas.

Tabela 1 – Distribuição dos estudantes, do 8º A, por sexo

Gênero	Nº de estudantes	%
Feminino	15	46,9
Masculino	17	53,1
Total	32	100,0

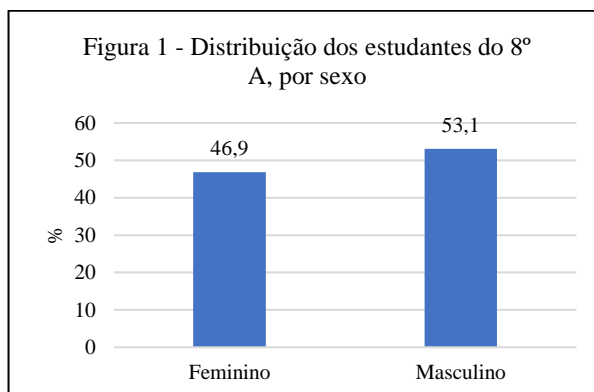


Tabela 2 – Situação da vacina Antitêntano dos estudantes do 8º A

Antitêntano	Nº de estudantes	%
Sim	22	68,8
Não	10	31,3
Total	32	100,0

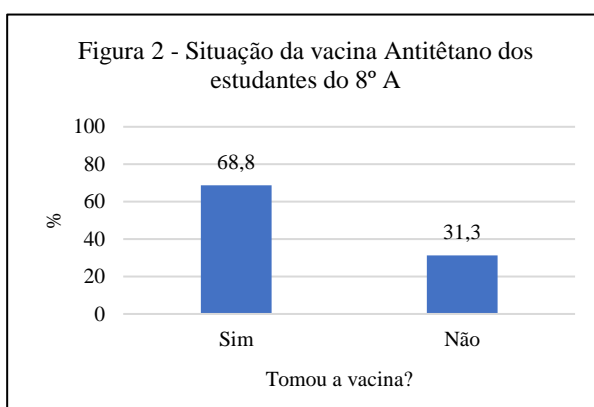
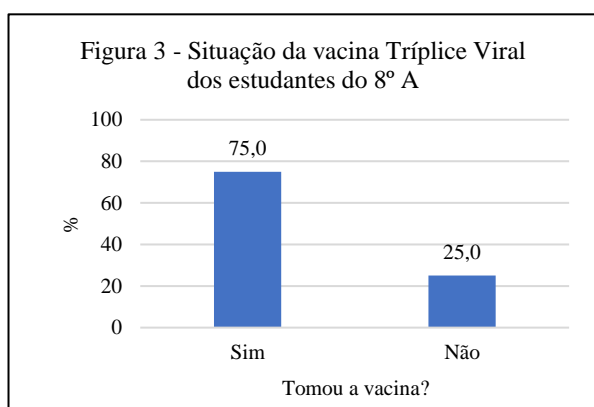


Tabela 3 – Situação da Tríplice Viral dos estudantes do 8º A

Tríplice Viral	Nº de estudantes	%
Sim	24	75,0
Não	8	25,0
Total	32	100,0



¹⁵ Cobertura vacinal: Percentual de crianças imunizadas com vacinas específicas, em determinado espaço geográfico, no ano considerado.

Tabela 4 – Situação da vacina HPV dos estudantes do 8º A

HPV	Nº de estudantes	%
Sim	5	15,6
Não	27	84,4
Total	32	100,0

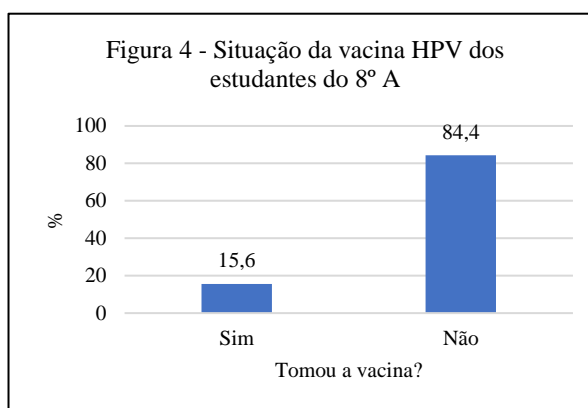


Tabela 5 – Situação da vacina Meningite dos estudantes do 8º A

Meningite	Nº de estudantes	%
Sim	16	50,0
Não	16	50,0
Total	32	100,0

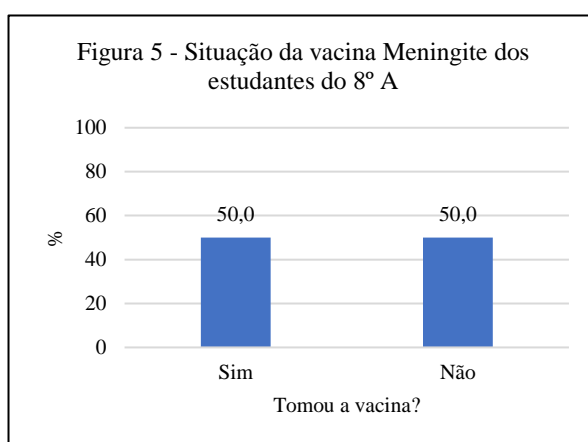


Tabela 6 – Situação da vacina Febre Amarela dos estudantes do 8º A

Febre Amarela	Nº de estudantes	%
Sim	14	43,8
Não	18	56,3
Total	32	100,0

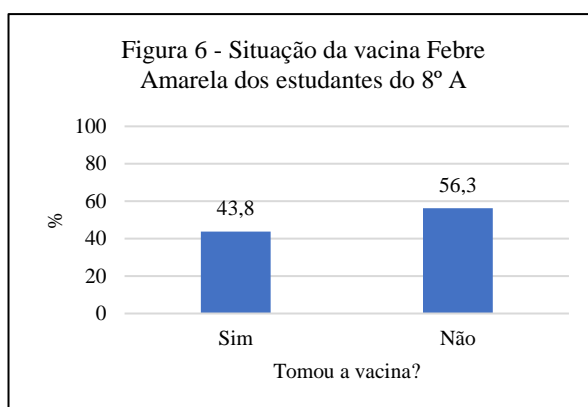
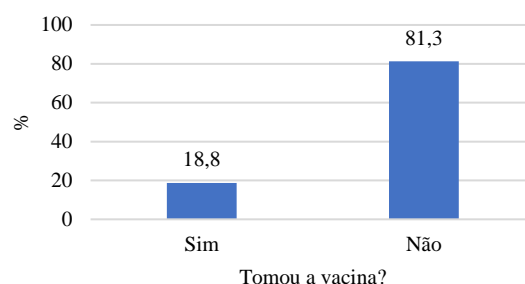


Tabela 7 – Situação da vacina Hepatite B dos estudantes do 8º A

Hepatite B	Nº de estudantes	%
Sim	6	18,8
Não	26	81,3
Total	32	100,0

Figura 7- Situação da vacina Hepatite B dos estudantes do 8º A



Exemplo do tratamento das variáveis quantitativas

No caso das variáveis “Idade” e “Número de vacinas”, que tomam poucos valores, podem ser organizados em uma TDF e em gráfico de barras, como mostramos a seguir.

Tabela 8 – Distribuição dos estudantes, do 8º A, por idade

Idade	Nº de estudantes	%
14	9	28,1
15	9	28,1
16	5	15,6
17	6	18,8
18	3	9,4
Total	32	100,0

Figura 8 - Distribuição dos estudantes do 8º A, por idade

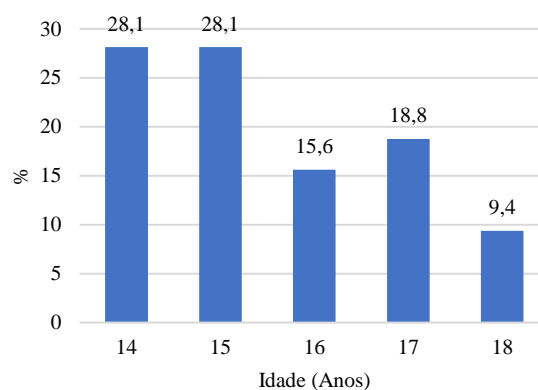
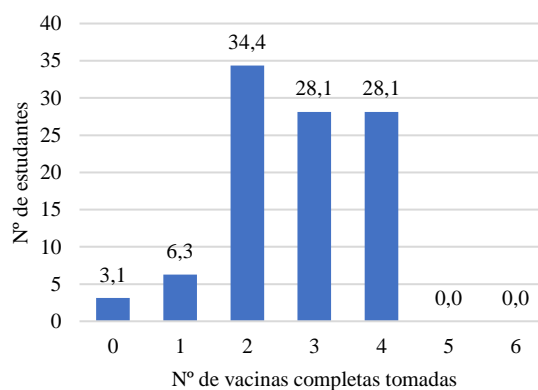


Tabela 9 –Número de vacinas completas tomadas pelos estudantes do 8º A

Nº de vacinas	Nº de estudantes	%
0	1	3,1
1	2	6,3
2	11	34,4
3	9	28,1
4	9	28,1
5	0	0,0
6	0	0,0
Total	32	100,0

Figura 9 - Número de vacinas completas tomadas pelos estudantes do 8º A



Nas variáveis quantitativas podemos calcular a Média, para o qual temos duas possibilidades:

$$\text{Média} = \frac{\text{Soma dos valores da variável}}{\text{número de dados}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Para facilitar os cálculos podemos realizar a soma por coluna e registrar na última linha, como mostramos a seguir. De posse da soma basta dividir por 32 que é o número de dados.

Exemplo da soma dos valores das variáveis quantitativas

Nome	Idade	Peso	Altura	IMC	Nº de vacinas completas
Angelina	15	43	162	16,38	4
...					
...					
Vitor	15	53	174	17,50	3
Soma	497	1792	5338	643,33	87
Média	15,5	56,0	167	20,1	2,7

No caso das variáveis “Idade” e “Número de vacinas” que tomam poucos valores e já estão organizados em uma TDF, a média também pode ser calculada como a média ponderada, a partir da razão entre a soma do produto dos valores da variável pela sua respectiva frequência e o número de dados.

$$\text{Média} = \frac{\text{Soma } (x_i * f_i)}{\text{número de dados}} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i * f_i}{n}$$

Exemplo de como calcular a média a partir do produto dos valores de variável com a sua frequência.

Idade (X)	Nº de estudantes (f)	Produto (X*f)	Nº de vacinas (X)	Nº de estudantes	%
14	9	126	0	1	0
15	9	135	1	2	2
16	5	80	2	11	22
17	6	102	3	9	27
18	3	54	4	9	36
Soma	32	497	5	0	0
	Média	15,5	6	0	0
			Soma	32	85
				Média	2,9

Fase 5: A conclusão

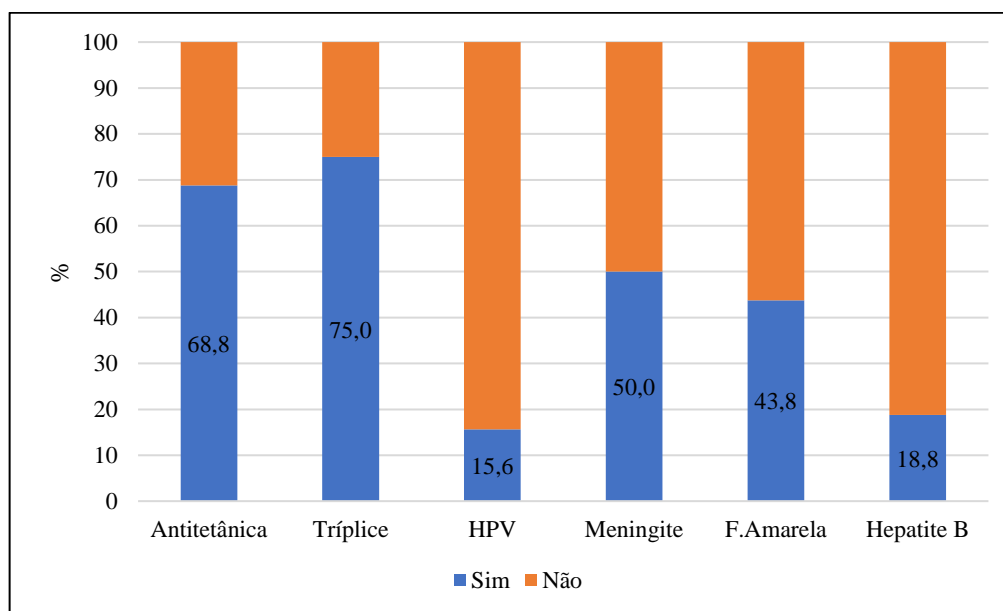
Professor, nesta fase, é preciso estar atento para a necessidade de responder à questão de investigação ou a problemática posta e a partir das informações estatísticas e concluir o ciclo investigativo (PPDAC). É preciso estar atento para que os estudantes apresentem conclusões baseadas nos dados e não usar a própria opinião ou utilizar-se do que diz o senso comum para responder a questão de investigação, mas despertar no estudante a interpretação dos dados, a leitura das informações geradas a partir dos dados coletados.

Retomando a questão de pesquisa:

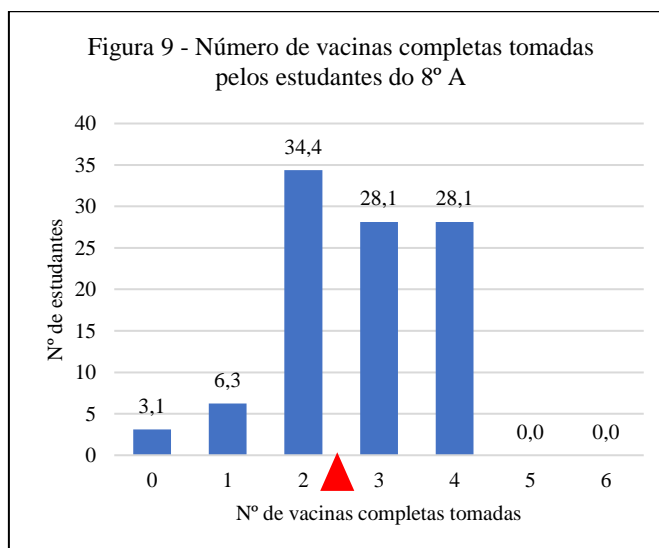
qual a situação, de imunização, através da vacinação, dos estudantes da turma?

Para responder essa pergunta podemos analisar as Figuras 2 a 7 e podemos sintetizar a cobertura vacinal das seis vacinas estudadas com um gráfico de barras empilhadas, conforme Figura 10, onde pode-se observar que em nenhuma vacina tem-se 100% dos estudantes vacinados e que a situação é mais grave nas vacinas HPV e a Hepatite B.

Figura 10 – Cobertura vacinal¹⁶ dos estudantes do 8º A



Isso é corroborado quando se analisa o número de vacinas completas tomadas pelos estudantes, que varia de zero a seis, sendo que o número médio é 2,9, isto é, em média eles tomaram pouco menos de metade das seis vacinas, como podemos rever na Figura 9, a seguir:



Também pode-se caracterizar os estudantes quanto a sua idade e sexo, neste caso verifica-se que 46,9% dos estudantes são do sexo feminino e suas idades variam de 14 a 18 anos, com média igual a 15,5 anos.

¹⁶ Cobertura vacinal: Percentual de crianças imunizadas com vacinas específicas, em determinado espaço geográfico, no ano considerado.

Quanto ao peso, altura e IMC podemos ver que o peso médio foi de 56 Kg, altura 167 cm e o IMC médio de 20,1, isto é, em média os estudantes da turma estão dentro da faixa de normalidade.

O que fazer numa situação dessa? Com relação a imunização, a escola deve mobilizar imediatamente o Posto de Saúde ou o a assessoria da Saúde Escolar e proceder a vacinação dos estudantes. Quanto ao IMC os estudantes estão dentro dos padrões de normalidade.

APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DE ENSINO CARTÃO DE VACINAÇÃO

Nome do estudante 1: _____ Nome do estudante 2: _____

PARTE I: Cobertura Vacinal, analisando a situação dos estudantes por vacina.

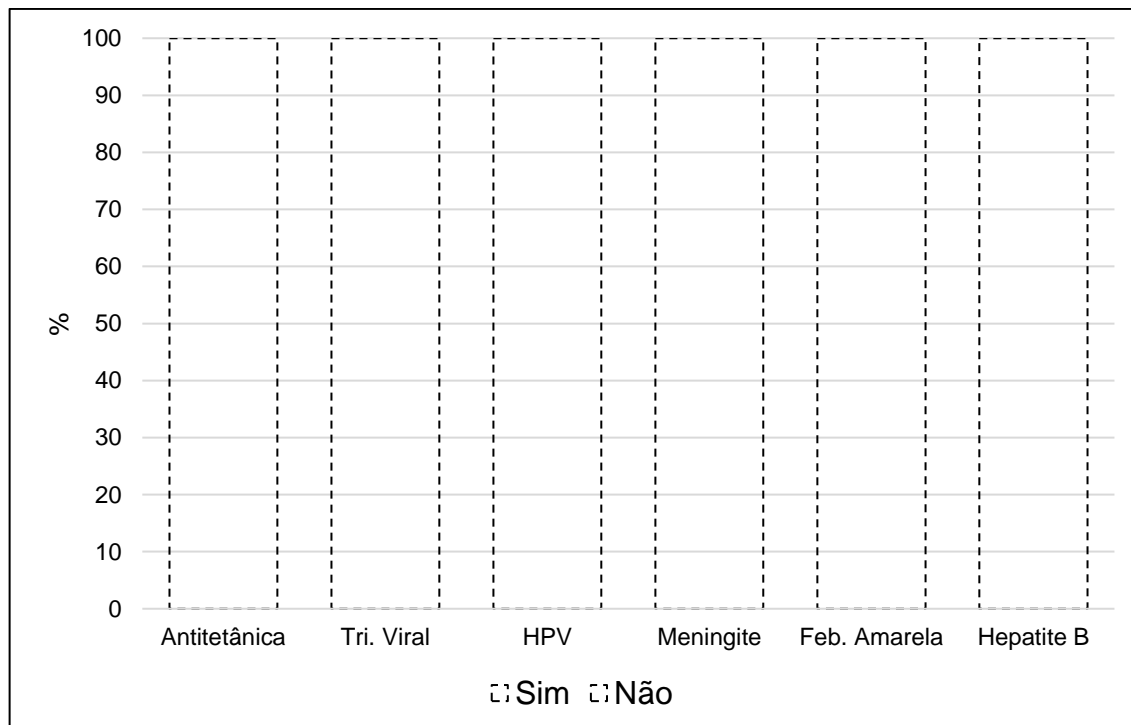
a) Conte o número de estudantes que tomaram as vacinas e registre na tabela a seguir

Tabela 1: Cobertura Vacinal dos estudantes do 9º A do Colégio _____ – _____, 2018

Vacinas	Nº de estudantes			Porcentagem		
	Sim	Não	Total	Sim	Não	Total
Antitetânica						100,0
Triple Viral						100,0
HPV						100,0
Meningite						100,0
Febre Amarela						100,0
Hepatite B						100,0
Total						100,0

b) Com base na Tabela 1, construa o gráfico de barras empilhadas com os dados da porcentagem. Utilize cores diferentes.

Figura 1: Cobertura vacinal dos estudantes do 9º A do Colégio _____ – _____, 2018



c) Observando o gráfico, como está a imunização, através da vacinação, dos estudantes do 9º ano A?

PARTE II: Analisando a situação de vacinação dos estudantes (a partir da análise da variável “número de vacinas que o estudante tomou”)

1. Calculando a média simples a partir dos DADOS BRUTOS

1.1 Para as MENINAS a partir dos DADOS BRUTOS

- i. Quantas meninas participaram da pesquisa? _____
- ii. Transcreva o número de vacinas que cada menina tomou:
- iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que as meninas tomaram:
- iv. Qual o total de vacinas, que as meninas tomaram? Explícite os cálculos.
- v. Qual é o número médio de vacinas tomadas pelas meninas? Para isso divida o valor encontrado em “iv” pelo número de meninas:

1.2 Para os MENINOS a partir dos DADOS BRUTOS

- i. Quantos meninos participaram da pesquisa? _____
- ii. Transcreva o número de vacinas que cada menino tomou.
- iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que os meninos tomaram:
- iv. Qual o total de vacinas, que os meninos tomaram? Explícite os cálculos.
- v. Qual é o número médio de vacinas tomadas pelos meninos? Para isso divida o valor encontrado em “iv” pelo número de meninos

1.3 Para todos os ESTUDANTES (MENINAS + MENINOS), a partir dos dados brutos

- i. Ao todo quantos estudantes participaram da pesquisa? _____
- ii. Transcreva o número de vacinas que os estudantes tomaram
- iii. Ordene de forma crescente o número de vacinas que os estudantes tomaram:
- iv. Quantas vacinas, ao todo, os estudantes tomaram? Para isso some o número de vacinas que todos os estudantes tomaram:
- v. Qual é o número médio de vacinas tomadas por todos os estudantes? Para isso divida o valor encontrado em “iv” pelo número total de estudantes da turma.

2. Calculando a média simples a partir das SOMAS PARCIAIS

Para todos os ESTUDANTES (MENINAS + MENINOS), a partir das SOMAS PARCIAIS

- a) Quantas meninas participaram da pesquisa? _____
- b) Quantos meninos participaram da pesquisa? _____
- c) Quantos estudantes participaram da pesquisa? (some os valores encontrados em (a) e (b)) _____
- d) Quanto foi o total de vacinas tomadas por todas as MENINAS _____
- e) Quanto foi o total de vacinas tomadas por todos os MENINOS _____

- f) Quanto foi o total de vacinas tomadas por todos os ESTUDANTES (some os valores encontrados em (d) e (e)) _____
- g) Divida o valor encontrado em (f) pelo valor encontrado em (c): _____
- h) Diante dos conceitos acima trabalhados, o que indica este quociente (divisão)? _____
- Número_de_estudantes = Número_de_meninas + Número_de_meninos = ____ + ____ = ____
- Soma_vacinas_estudantes = Soma_vacina_meninas+Soma_vacina_meninos = ____ + ____ = ____
- $$\text{Média_geral} = \frac{\text{Soma_vacinas_estudantes}}{\text{Número de_estudantes}} = \frac{\quad}{\quad} = \quad =$$

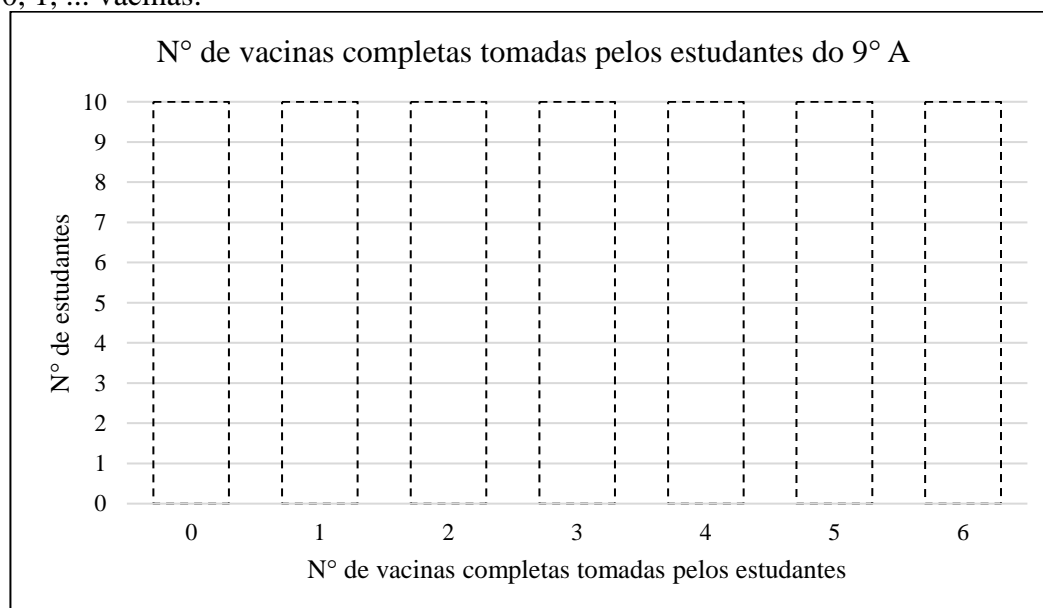
3. Calculando a média a partir da TDF (Média ponderada)

- a) Construa a Tabela de Distribuição de Frequência (TDF). Para isso, conte quantos estudantes tomaram 0 vacinas e registre na TDF; conte quantos tomaram 1 vacina e registre na TDF e, assim sucessivamente. Depois, calcule a porcentagem de estudantes que tomaram 0, 1, ...6 vacinas e registre na TDF.

Tabela 2: Número de vacinas completas tomadas pelos estudantes

Nº de vacinas	Nº de estudantes	%
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

- Quanto por cento dos estudantes não tomaram nenhuma vacina? _____
 - Quanto por cento dos estudantes tomaram 6 vacinas? _____
 - Analisando essa tabela, o que podemos concluir?
-
- b) Com base na TDF, pinte nas barras correspondentes o nº de estudantes que tomaram 0, 1, ... vacinas:



- c) Com base no gráfico
- i. Quantos estudantes tomaram 0 vacinas? _____ Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? _____
 - ii. Quantos estudantes tomaram 1 vacinas? _____ Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? _____
 - iii. Quantos estudantes tomaram 2 vacinas? _____ Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? _____
 - iv. Quantos estudantes tomaram 3 vacinas? _____ Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? _____
 - v. Quantos estudantes tomaram 4 vacinas? _____ Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? _____
 - vi. Quantos estudantes tomaram 5 vacinas? _____ Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? _____
 - vii. Quantos estudantes tomaram 6 vacinas? _____ Então, quantas vacinas ao todo tomaram esses estudantes? _____
- d) Qual é o número total de vacinas completas que os estudantes tomaram? Para isso, some os resultados parciais encontrados nos itens de “i” a “vii”:

- e) Qual é a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes? Para isso divida o total encontrado em d), pelo número total de estudantes:

- f) Registre na TDF os produtos parciais:

Nº de vacinas	Nº de estudantes	Produto (Nº de vacinas x Nº de estudantes)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

- g) Qual é a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes? Para isso divida o total do produto pelo número de estudantes:

$$\text{Média} = \frac{\text{Soma dos produtos}}{\text{numero_de_estudantes}} = \frac{\quad}{\quad} = \quad =$$

- h) Marque na base do gráfico de barras, com um triângulo, o valor da média.

4. Interpretando a média

- a) Interprete a média do número de vacinas completas tomadas pelas meninas:

- b) Interprete a média do número de vacinas completas tomadas pelos meninos:

- c) Interprete a média do número de vacinas completas tomadas pelos estudantes:

5. Percepção da compreensão a partir do cálculo procedimental

- a) Qual das maneiras de encontrar a média lhe pareceu mais fácil?

- A partir dos dados brutos
- A partir das somas parciais
- A partir da TDF


Por que?

b) Qual das maneiras de encontrar a média lhe ajudou na compreensão da média?


- A partir dos dados brutos
- A partir das somas parciais
- A partir da TDF
- Nenhuma, continuo não compreendendo o significado da média

Por que?

APÊNDICE E – FICHA DO CARTÃO DE VACINAÇÃO



Carteira de vacinação da criança




NOME: _____

ESCOLA: _____ TURMA: _____

IDADE: _____ ANOS ALTURA: _____ CM PESO: _____ KG IMC: _____ SEXO: M F

VACINA	ANTITETÂNICA	TRIPLÍCEVIRAL	HPV	MENINGITE	FEBRE AMARELA	HEPATITE B
1ª DOSE	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____
2ª DOSE	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____
3ª DOSE	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____	DATA ____/____/____



OBS.: _____