**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ**

# Funções Trigonométricas ou Função Trigonométrica:

## Uma análise histórica e institucional no Ensino Médio

Leticia Santos Meneses
Orientador: Afonso Henriques

**Ilhéus – BA**
**Fevereiro 2019**

M543 Meneses, Leticia Santos.

Funções trigonométricas ou função trigonométrica: uma análise histórica e institucional no ensino médio / Leticia Santos Meneses. – Ilhéus, BA: UESC, 2019.

106f. : il.

Orientador: Afonso Henriques.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Inclui referências.

1. Funções trigonométricas. 2. Livros didáticos. 3. Praxiologia. 4. GeoGebra (Software). 5. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.

CDD 516.24

LETICIA SANTOS MENESES

"Funções Trigonométricas ou Função Trigonométrica: Uma Análise Histórica e Institucional no Ensino Médio"

Dissertação submetida ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM, em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

**APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA**
**EM 19/06/2019**

Prof. Dr. Afonso Henriques
Presidente da banca

Profª Drª Larissa Pinca Sarro Gomes
(Examinadora interna).

Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva
(Examinadora Externa)

Ilhéus, Bahia, 19 de junho de 2019.

## DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho ao meu pai que sempre esteve ao meu lado me apoiando para seguir em busca dos meus objetivos. Dedico também ao meu companheiro que sempre me incentivou, e ao meu orientador que junto a mim adicionou forças que contribuíram para a elaboração e o desenvolvimento desse trabalho. Ao Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC), pelas contribuições proporcionadas à esse trabalho durante as nossas reuniões. Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

## RESUMO

As *Funções Trigonométricas* são consideradas como objetos de estudos matemáticos que encontram espaço na formação dos recursos humanos, desde as instituições da Educação Básica, em especial do Ensino Médio, ao Ensino Superior, mostrando-se, portanto, como um dos saberes indispensáveis nas propostas institucionais que contam com o ensino e aprendizagem da Matemática. Contudo, pouco se sabe sobre as suas origens, principalmente, o porquê de levar o nome "*Funções Trigonométricas*" e não "Função Trigonométrica", como ocorre com os outros tipos de funções que têm uma lei ou representação única para todas as funções de mesma classe. Assim, buscando compreender as origens destes objetos do saber, o referido porquê, as suas evoluções epistemológicas e, o seu lugar atual nas Instituições da Educação Básica (IEB), realizamos uma análise histórica e institucional de referência em torno desses objetos do saber, motivada pelo meu percurso acadêmico na minha formação inicial nesta instituição e, pelos seguintes questionamentos embrionários: como surgiram as *Funções Trigonométricas*? Porque são assim, designadas? Qual é a evolução epistemológica que se pode encontrar na literatura referente às *Funções Trigonométricas*? Quais são os domínios de conhecimentos que são favorecidos nesta epistemologia? Além disso, sabemos também, com base na experiência vivenciada durante a minha formação inicial, da existência de meios tecnológicos, que podem contribuir potencialmente na aprendizagem de alunos, a citar, o ambiente computacional *GeoGebra*. Daí o seguinte questionamento: quais são as potencialidades dos ambientes papel/lápis e computacional *GeoGebra* capazes de favorecerem a organização de uma Sequência Didática sobre *Funções Trigonométricas*, que possa ser útil na análise de praxeologias de alunos no Ensino Médio? Para responder estes questionamentos, mergulhamos os nossos estudos no quadro teórico constituído pela Teoria Antropológica do Didático, a Abordagem Instrumental e pela Teoria de Registros de Representação Semiótica, seguindo a Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD) como metodologia de pesquisa, na sua dimensão Interna. Os resultados obtidos são, inicialmente, notáveis na consolidação da minha qualificação, enquanto mestranda, na área da pesquisa e, nas contribuições no processo de aquisição de conhecimentos de *Funções Trigonométricas*, sua história e, do seu espaço nas instituições mediante a utilização possível da nossa Sequência Didática por um certo Professor no ensino e aprendizagem desses objetos de saber, na Educação Básica, em especial no Ensino Médio.



**Palavras-chave:** *Funções Trigonométricas*, Livro Didático, Praxeologia, GeoGebra.

# ABSTRACT

The *Trigonometric Functions* are considered as objects of mathematical studies that find space in the formation of the human resources, from Institutions of Basic Education, especially of the High School, to the Higher Education, being, therefore, as one of the indispensable knowledge in the institutional proposals, which count on the teaching and learning of Mathematics. However, little is known about its origins, especially why it is called "*Trigonometric Functions*" rather than "Trigonometric Function", as with other types of functions that have a law or single representation for all functions of the same class. Thus, in order to understand the origins of these objects of knowledge, the aforementioned why, their epistemological evolutions, and their present place in the Institutions of Basic Education (IBE), we performed a historical and institutional analysis of reference around these objects of knowledge, motivated by my academic course in my initial formation in this institution and by the following embryonic questions: how did the *Trigonometric Functions* arise? Why are they designated? What is the epistemological evolution that can be found in the literature regarding the *Trigonometric Functions*? What domains of knowledge are favored in this epistemology? Besides that, we also know, based on experience during my initial formation, the existence of technological means, which may potentially contribute to student learning, to cite, the *GeoGebra* computing software. Hence, the following question: what are the potentialities of the paper/pencil and computational *GeoGebra* ambient able to favor the organization of a Didactic Sequence on *Trigonometric Functions*, that can be useful in the analysis of praxeologies of students in High School? In order to answer these questions, we immerse our studies in the theoretical framework constituted by the Anthropological Theory of Didactics, the Instrumental Approach and by The Theory of Semiotic Representation Registers, following the Institutional Analysis & Didactic Sequence (IA&DS) as a research methodology, in its Internal Dimension. The results obtained are initially notable in the consolidation of my qualification as a research master, and in the contributions in the process of acquiring knowledge of *Trigonometric Functions*, their history and their space in the institutions through the possible use of our Didactic Sequence by a certain Teacher in the teaching and learning of these objects of knowledge, in Basic Education, especially in High School.

**Keywords**: Trigonometric Functions, Didactic Book, Praxeology, GeoGebra.

# Lista de Figuras

# Lista de Quadros

# Sumário

# Lista de Siglas

| | |
|---|---|
| AI | Análise Institucional |
| AI&SD | Análise Institucional & Sequência Didática |
| CD | Contra Domínio |
| CDI I | Cálculo Diferencial e Integral I |
| CLIMA | Curso de Licenciatura em Matemática |
| D | Domínio |
| DE | Dispositivo Experimental |
| ED | Engenharia Didática |
| FT | Funções Trigonométricas |
| GPEMAC | Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional |
| IEB | Instituição de Educação Básica |
| IES | Instituição de Ensino Superior |
| JRA | Janela de Registro Algébrico |
| JRG | Janela de Registro Gráfico |
| JRN | Janela de Registro Numérico |
| LD | Livro Didático |
| LDC | Livro Didático Complementar |
| LDR | Livro Didático de Referência |
| OCNEM | Orientações Curriculares para o Ensino Médio |
| SAI | Situações de Atividades Instrumentais |
| SCCP | Sistema de Coordenadas Cartesianas Plana |
| SD | Sequência Didática |
| TAD | Teoria Antropológica do Didático |
| Tec | Técnicas |
| TRRS | Teoria de Registro de Representação Semiótica |

# 1. INTRODUÇÃO

O meu interesse de realizar uma pesquisa na área de Educação Matemática, envolvendo *Funções Trigonométricas,* doravante também designadas objeto matemático de referência, surgiu a partir de minhas reflexões e angústias sobre as dificuldades encontradas na realização de tarefas ou problemas que envolvem esse objeto, durante a minha trajetória acadêmica, até aqui percorrida. Por se tratar de um assunto complexo abordado desde a Educação Básica ao Ensino Superior, leva-me a buscar mais conhecimento sobre este objeto tão importante na Matemática, bem como em outras áreas de conhecimentos, tais como: Física, Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharias, entre outros. Além disso, esse objeto é essencial na formação acadêmica de recursos humanos, em particular, dos futuros profissionais em Matemática.

A principal dificuldade encontrada durante a minha formação inicial, na relação com as *Funções Trigonométricas,* se deu inicialmente no estudo de Introdução ao Cálculo, no Curso de Licenciatura em Matemática (CLIMA), no momento de resolução de problemas envolvendo este objeto, tanto no tratamento algébrico de seus elementos, quanto na conversão destes para o registro gráfico. Mais adiante outras dificuldades sugiram durante a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I), principalmente, na análise do comportamento de curva de equações conhecidas ou de gráficos de funções na vizinhança de um ponto sob o eixo das abcissas, no cálculo de Limites de funções utilizando a definição deste objeto (Limite). A disciplina CDI I é, no referido curso, ofertada simultaneamente com a Informática Aplicada ao Cálculo, que é também uma disciplina prevista na grade curricular deste curso (CLIMA).

Durante o desenvolvimento desta última disciplina, trabalhou-se com diversas funções matemáticas, em particular, as *Funções Trigonométricas.* No tratamento de cada função, o Professor, além de mobilizar as técnicas do ambiente papel/lápis, utilizava o ambiente computacional *GeoGebra.* Com efeito, as referidas dificuldades começaram a ser superadas a partir da utilização deste ambiente computacional. Será que o tipo de dificuldades que encontrei nos primeiros anos da formação inicial só pode ser superada utilizando-se este ambiente? Sabemos que as *Funções Trigonométricas* são também objetos de estudo propostos na Educação Básica. Quais são as organizações matemáticas propostas na Educação Básica sobre estas funções? Além das dificuldades citadas acima, percebi ainda, durante o meu percurso de formação, desde a Educação Básica ao momento presente, que as *Funções Trigonométricas* não são apresentadas, nos Livros Didáticos (LD), juntamente com as suas origens e os meus Professores também não colocavam em evidência tais origens, nem na Educação Básica quanto menos no CLIMA. Com efeito, pouco eu sabia sobre este objeto, principalmente, o porquê de levar o nome "*Funções Trigonométricas*" e não "*Função Trigonométrica*", como ocorre com os outros tipos de funções que têm uma lei ou representação única para todas as funções de mesma classe, a exemplo de funções de grau dois.

Assim, desenvolvemos uma análise histórica, buscando compreender as origens destes objetos do saber, o referido porquê, as suas evoluções epistemológicas e, o seu lugar atual nas Instituições da Educação Básica (IEB). Neste âmbito, emergiram alguns questionamentos: como surgiram as *Funções Trigonométricas*? Porque são assim, designadas? Qual é a evolução epistemológica que se pode encontrar na literatura referente às *Funções Trigonométricas*? Quais são os domínios de conhecimentos que são favorecidos nesta epistemologia? O que os documentos oficiais recomendam relativamente ao ensino e aprendizagem deste objeto?

Além do interesse e dificuldades manifestadas acima, vale sublinhar, com base nas experiências vivenciadas durante a minha formação inicial, que existem meios tecnológicos, que podem contribuir potencialmente na aprendizagem de alunos, a citar, o ambiente computacional *GeoGebra*. Contudo, nem sempre estes meios são explorados pelos Professores de Matemática nas suas práticas efetivas em sala de aula e, consequentemente pelos alunos na Educação Básica. Daí o seguinte questionamento: quais são as potencialidades do ambiente computacional *GeoGebra* capazes de favorecerem a organização de uma Sequência Didática sobre *Funções Trigonométricas*, que possa ser útil na análise de praxeologias de alunos no Ensino Médio?

Com base nessa problemática, apresentamos a seguir os nossos objetivos e questões diretrizes da nossa pesquisa.

## 1.1 Objetivo Geral

Realizar uma análise epistemológica e institucional de referência visando a organização de uma Sequência Didática sobre *Funções Trigonométricas*, que possa ser útil na análise de praxeologias de alunos no Ensino Médio.

Para isso, desmembramos esse objetivo, considerando os seguintes objetivos específicos:

### 1.2 Objetivos Específicos

1. Desenvolver uma análise histórica sobre *Funções Trigonométricas*, buscando compreender a origem/evolução epistemológica deste objeto matemático;
2. Analisar os documentos oficiais enquanto elementos institucionais em torno de *Funções Trigonométricas*;
3. Analisar as potencialidades do ambiente computacional *GeoGebra* referentes ao estudo de *Funções Trigonométricas*;
4. Organizar uma SD visando à análise de práticas institucionais de alunos dos anos finais das IEB.

Tendo o interesse de aprofundar os nossos conhecimentos sobre o estudo de *Funções Trigonométricas* no contexto de Educação Matemática e, levando em consideração os objetivos específicos, juntamente com o objetivo geral, bem como as nossas inquietações apresentadas na introdução deste Dissertação, nos colocamos as seguintes questões diretrizes da nossa pesquisa:

### 1.3 Questões de Pesquisa

1. Como surgiram as *Funções Trigonométricas* e, porque são assim, designadas?
2. Qual é a evolução epistemológica que se pode encontrar na literatura referente às *Funções Trigonométricas*?
3. Qual é o modelo praxeológico proposto nos LD para o estudo de *Funções Trigonométricas* com olhar na instituição de referência?
4. Quais são as potencialidades do *software GeoGebra* (tecnologia) relativas ao estudo de *Funções Trigonométricas* com olhar na instituição de referência?
5. Como organizar uma Sequência Didática visando à análise de práticas institucionais de alunos dos anos finais das IEB?

Para tentar responder estes questionamentos, buscamos embasamento na Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1995), que segundo Silva (2017), permite o entendimento de fenômenos educacionais, favorecendo o estudo de objeto de saberes, relações pessoais, pessoas e instituições. Dada a dimensão instrumental que envolve questões tecnológicas na relação de sujeitos com objetos do saber, compreendemos os elementos teóricos da Abordagem Instrumental, proposta por

Rabardel (1995). Além disso, tendo em vista que o acesso aos objetos do saber passa, necessariamente, pela manipulação de ostensivos e não-ostesivos[1], buscamos compreender os elementos da Teoria de Registro de Representação Semiótica, que foi introduzida em estudos de funcionamento do pensamento por Duval (1993). Como metodologia de pesquisa, percorremos a Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD), na sua dimensão Interna.

Imerso nesta metodologia, organizamos a nossa Dissertação em sete capítulos. Neste primeiro, como introdução, apresentamos as nossas considerações iniciais destacando a nossa problemática em torno do estudo de *Funções Trigonométricas*. Destacamos os objetivos, geral e específicos, e as questões de pesquisa que almejamos responder ao longo de nossa pesquisa.

No segundo capítulo, apresentamos um estudo histórico acerca da evolução epistemológica de *Funções Trigonométricas*. Assim, buscamos, inicialmente, revisitar o contexto histórico relativo ao nosso objeto matemático, visando compreender a gênese, o desenvolvimento e, o aparecimento do conceito de *Funções Trigonométricas*.

No terceiro capítulo, apresentamos o aporte teórico composto pela Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1989), pela Teoria de Representação Semiótica, desenvolvida por Duval (2003) e Abordagem Instrumental de Rabardel (1995). Estas três teorias constituem o nosso Quaro Teórico de referência que sustenta as nossas investigações e nos forneceu subsídios para realização das análises institucionais, e se articulam naturalmente ao longo desta Dissertação.

No quarto capítulo, apresentamos a metodologia utilizada para o desenvolvimento desta pesquisa, a saber Análise Institucional & Sequência Didática, em sua dimensão interna. Para isso, apresentamos os elementos teóricos proporcionados por essa metodologia e discorremos sobre o nosso percurso metodológico.

No quinto capítulo, apresentamos a análise institucional que realizamos em torno dos elementos institucionais que escolhemos na instituição de referência, notadamente: As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM), o Livro Didático (LD) e a ferramenta tecnológica que utilizamos na Pesquisa Interna, a saber, o ambiente computacional *GeoGebra*, com objetivo de compreender melhor as propostas institucionais acerca de *Funções Trigonométricas*, destacando a praxeologia deste objeto de estudo.

[1] Explicaremos os conceitos de ostensivos e não-ostensivos no capítulo 3, seção 3.1.3.

No sexto capítulo, apresentamos a nossa Sequência Didática (SD), organizada em três sessões: a primeira corresponde aos conhecimentos prévios no ensino da Matemática nas IEB, acerca de Plano Cartesiano, conceito de Função, e Círculo Trigonométrico; na segunda apresenta-se tarefas que relacionam gráficos de *Funções Trigonométricas*, com as suas respectivas representações no Registro Algébrico, ou seja, identificar e representar *Funções Trigonométricas* a partir dos gráficos correspondentes. A terceira sessão envolve a utilização do *software GeoGebra* na realização de tarefas tratadas nas duas primeiras sessões. Toda nossa SD foi organizada com base nos conhecimentos mobilizados pela pesquisadora na análise institucional apresentada no quinto capítulo, respeitando-se as etapas 5 e 6 da segunda fase da AI & SD discutidas no quarto capítulo.

No sétimo capítulo, sendo o último, apresentamos as nossas reflexões, considerações e perspectivas, buscando responder, explicitamente, as questões de pesquisas propostas na introdução.

# 2. ANÁLISE HISTÓRICA

Neste estudo histórico nos interessamos, apresentar a análise da gênese e do desenvolvimento da trigonometria que realizamos, bem como o aparecimento do conceito de *Funções Trigonométricas*. Começamos, de antemão, em compreender um dos caminhos ou procedimentos que se pode adotar para realizar uma análise epistemológica de objetos de saber. Nesse aspecto, encontramos orientações na obra de Almouloud (2007) intitulada *Fundamentos da Didática da Matemática*, quando o autor sublinha que:

> A análise epistemológica apoia-se no desenvolvimento histórico do conceito. Assim, permite identificar as diferentes concepções sobre um determinado objeto, como também permite agrupá-las em classes pertinentes para que se possa fazer uma análise didática. (ALMOULOUD, 2007, p. 156).

Entendemos, portanto, que realizar uma análise epistemológica, significa desenvolver um estudo histórico do objeto do saber visado, como a "*Trigonometria*" ou as "*Funções Trigonométricas*". Isso, naturalmente, exige que o pesquisador tenha um acervo ou acesso a fontes confiáveis, que sejam capazes de proporcionar informações consistentes sobre o tema, como as obras literárias de História da Matemática (BOYER, 2012), Introdução à História da Matemática (EVES, 2011), as obras em periódicos, etc. Com efeito, nos colocamos o seguinte questionamento:

O que é **Trigonometria**?

Os estudos que realizamos nos permitiram encontrar no sentido literal que, o termo trigonometria significa medidas do triângulo. Ora, tendo o interesse em analisar o desenvolvimento da trigonometria em busca do que leva à origem das *Funções Trigonométricas* como conhecemos atualmente, achamos por bem, estudarmos as origens da **Trigonometria**, por acreditarmos que ambos os objetos estão relacionados entre si.

## 2.1 As origens da Trigonometria

Segundo EVES (2011), "as origens da trigonometria são obscuras". Na literatura encontramos três diferentes referências ao termo trigonometria, a saber: **Trigonometria Primitiva, Trigonometria Esférica e Trigonometria Moderna.**

A **Trigonometria Primitiva**, também conhecida como Trigonometria na Antiguidade, está relacionada com à astronomia[2] e, encontra-se em alguns problemas no

[2] Ciência [onde se] estuda a posição, os movimentos e a constituição dos corpos celestes. Disponível em: https://dicionariodoaurelio.com/astronomia acessado em 09 de maio de 2018.

papiro[3] Rhind. Na Figura 2.1, apresenta-se uma ilustração deste papiro. Medir distâncias é uma necessidade antiga da humanidade, facilmente atendida no caso de envolver pontos próximos.

Figura 2.1. Papiro Rhind

Fonte: "mundo matemático das caldas", página[4] acessada em 16/05/2019.

Basta verificar quantas vezes uma dada unidade de medida está contida no comprimento a ser medido. No entanto há situações, em que se deseja efetuar medidas envolvendo objetos que não são diretamente acessíveis. Para atender esta necessidade, desenvolveu-se o astrolábio: um dos mais antigos instrumentos científicos, que teria surgido no século III a.C. A sua invenção é atribuída ao matemático e astrônomo grego Hiparco.

Os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material passou para os gregos. Foi com essa astronomia primitiva, baseadas nas observações de dados provenientes das necessidades dos homens primitivos, assim como do universo, que estes chegaram a descobrir que a Terra é esférica, dando-se, por conseguinte, origem à **Trigonometria Esférica**.

A ideia da esfericidade do céu e a descoberta da forma esférica da Terra motivaram a criação de ferramentas para lidar com a geometria do círculo e da esfera. Segundo EVES (2011), Hiparco de Niceia (c. 180-125 a.C.) construiu uma tabela de cordas do círculo e, no século I d.C, Menelau de Alexandria criou a chamada **Trigonometria Esférica** e estudou sistematicamente as propriedades de triângulos esféricos. Ptolemeu estendeu os trabalhos de Hiparco e de Menelau, criando um procedimento para o "cálculo" de cordas cujas extremidades são correspondentes aos de

---

[3] Papiro (pelo latim papirus do grego antigo πάπυρος) é, originalmente, uma planta perene da família das ciperáceas cujo nome científico é Cyperus papyrus, por extensão é também o meio físico usado para a escrita (precursor do papel) durante a Antiguidade Antigo Egito, civilizações do Oriente Médio, como os hebreus e babilônios, e todo o mundo greco-romano). Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro acessado em 04 de maio de 2018.

[4] http://mundomatematicodocaldas.blogspot.com/2013/10/papiro-de-rhind.html, acessado em 16/05/2019.

arcos de um círculo. A divisão de um círculo em 360 graus era utilizada na Grécia, provavelmente, a partir de conhecimentos provenientes da astronomia e, foi celebrizada por Ptolemeu. Visando utilizar do sistema babilônico de frações sexagesimais, Ptolemeu dividiu cada grau em 60 partes, inicialmente, designadas *minutae primae* (primeiras pequenas partes do grau). Cada uma destas subdivisões, foram também decompostas em 60 partes, inicialmente, designadas *minutae secundae* (segundas pequenas partes do grau), de onde vem os nomes minutos e segundos empregados atualmente no cotidiano. Em seus cálculos, Ptolemeu utilizava 3, 8’30” como o valor de aproximação de π, escrito no sistema sexagesimal. No sistema decimal, este valor é equivalente a 3, 1416. Ptolemeu construiu, no *Almagesto*[5], uma tabela de cordas de arcos, com os ângulos variando de (1/2) ° a 180° em intervalos de (1/2)º. Esta tabela de cordas serviu de referência para os astrônomos por mais de mil anos.

A trigonometria de Ptolemeu aparece nos capítulos dez e onze do primeiro livro do *Almagesto*, como pré-requisito para o restante da obra. Segundo EVES (2011), o *Almagesto* foi a mais importante fonte de consulta para os astrônomos até o século VIII, época na qual o mundo começa a conhecer a matemática hindu. Foi com esta matemática com os Hindus que surgiu a mais importante contribuição para a trigonometria, a criação da precursora da função trigonométrica moderna, a função seno[6], além disso, os métodos de se obter tabelas trigonométricas foram aperfeiçoados. Mais do que isso, a Índia revolucionou a Trigonometria com um conjunto de textos denominados ***Siddhanta***, que significa sistemas de Astronomia.

Os astronômos da Índia compreenderam dos estudos de Hiparco e Ptolomeu, que como a corda era a maneira mais simples de relacionar um segmento de reta com um ângulo, observaram que em muitos casos era preciso utilizar apenas a metade da corda do dobro de um ângulo, isto é, estabeleceram uma correspondência entre a metade da corda de um círculo e a metade do ângulo central subentendido. O *Almagesto* de Ptolomeu, pois, conforme mostrado na Figura 2.2 (a), estabelece relações entre “as cordas de um círculo e os ângulos centrais correspondentes”, enquanto que, conforme na Figura 2.2 (b), o *Siddhanta* estabelece relações entre “a metade das cordas de um círculo e a metade dos ângulos centrais correspondentes”, relações essas chamadas por eles de *jiva*.

[5] *Almagesto* é o título em árabe pelo qual é conhecida a obra *Syntaxis mathematica* de Claudio Ptolomeu.

[6] Embora utilizamos a palavra seno, ela apenas aparecerá com os europeus. Os árabes modificaram para o seu idioma a palavra Jya em Jiba, fato que mais tarde daria o nome a palavra seno, por conta de um erro de tradução feito pelos europeus.

Figura 2.2: O conflito entre a trigonometria do *Almagesto*

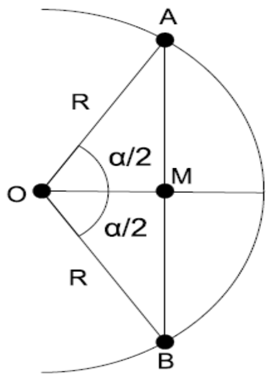

Fonte: Reprodução da Figura da OBMEP, disponível em < http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-brincando-com-trigonometria/#O2>

Em linguagem atual, para os matemáticos hindus, o comprimento da meia corda era calculado por $R\text{sen}(\alpha)$.

Por volta do ano de 500 d.C com Aryabhata autor de Aryabhatiya, pequeno livro escrito em versos sobre matemática e astronomia, surge o primeiro trabalho se referindo explicitamente ao seno como uma função de um ângulo, bem como a tabela *Jiva*, a tabela de meias cordas, conhecida atualmente como a tabela de senos. Pouco mais de cem anos após Aryabhata, esta tabela foi reportada no trabalho de Brahmagupta (628 d.C), o qual reproduziu o mesmo modelo.

O processo de obter as meias cordas é semelhante ao atual para obter o valor do seno, porém com uma diferença, a de que calculamos o seno como a razão entre a metade do segmento *AB*, conforme pode ser visto na Figura 2.3, e o raio do círculo (com raio unitário). Segundo Oliveira (2010), "não havia métodos determinados para calcular a tabela de cordas, contudo, para calcular o comprimento exato da corda de um ângulo arbitrário, os matemáticos hindus desenvolveram técnicas de aproximação".

Figura 2.3: Cálculo da Corda da diferença de Dois Arcos em notação moderna




Fonte: reprodução da figura 2.12, OLIVEIRA 2010

De acordo com Boyer (2003, p.147), os hindus usaram um raciocínio que em nossa linguagem, mostra que o seno de um ângulo pequeno é aproximadamente à medida em radianos do ângulo. Do século VI com Aryabhata ao século XII com Baskara foi possível encontrar técnicas cada vez mais sofisticadas para descobrir essas aproximações. Esses métodos antecederam algumas ideias que posteriormente seriam aprimoradas pelos europeus. Entretanto, foi a pela Arábia que a Trigonometria alcançou a Europa, onde se separa da Astronomia para se tornar um ramo independente da Matemática. Segundo Oliveira (2010, p. 47)

> "com os árabes, houve dois tipos de trigonometria: a geométrica grega das cordas como podemos localizar no Almagesto e a tabelas dos senos com os Hindus vinda dos Siddhantas. Porém, basearam-se praticamente na função seno influenciados pelas tabelas de meias-cordas dos hindus. Podemos encontrar no livro Sobre o movimento das estrelas de Al-Battani, a fórmula deduzida em termos do comprimento da sombra de um gnômon [7]vertical de altura *a* devido à elevação do Sol acima do horizonte. Ele expressou a fórmula da seguinte forma:
> $b = \frac{[a\ \text{sen}(90 - A)]}{\text{sen}A}$ em que são mostradas as funções seno e seno versor".

O seno versor de um ângulo constitui o seno do ângulo complementar, que depois será denominada como função cosseno.

Os árabes colaboraram para o desenvolvimento das funções tangente, co-tangente, secante e cossecante, no entanto, eles não nomearam desta maneira. Segundo Oliveira 2010, aos árabes "construíram essa teoria baseada no comprimento das sombras em relação à unidade de comprimento do gnômon devido a variação da altitude solar projetada". Como os árabes não tinham uma unidade de medida para a barra ou gnômon usado, eles utilizavam, repetidas vezes, um palmo ou a altura de um homem. A primeira tabela de tangentes e co-tangentes foi construída por volta de 860 por Al-Habash Hasib, baseado na relação entre o gnômon e a sombra. O tratamento dessas relações em função de um ângulo surge neste período. Um século após *Al-Battani, Abu'l-Wefa* construiu uma tabela de senos para ângulos que se diferiam por $(1/4)^{\circ}$ o mesmo que a precisão de oito casas decimais e encontrou uma versão mais simples para a fórmula apresentada por Al-Battani como

$$a = b \tan A$$

pois a função tangente era bastante conhecida na época. Além de Al-Habash Hasib, Abu'l-Wefa foi um dos que forneceu a tabela de tangentes e utilizou as seis *Funções Trigonométricas* comuns, como também estabeleceu relações entre elas. No entanto, essas tabelas só foram impressas no século XV por outros estudiosos.

[7] Relógio de sol.

Nesse novo caminho, a Trigonometria ganha um tratamento analítico com o matemático francês *François Viète* (1540-1603), que também desenvolveu métodos para determinar triângulos planos e esféricos. No início do século XVII, o matemático escocês *John Napier* (1550-1617) fez, também, contribuições para a trigonometria esférica.

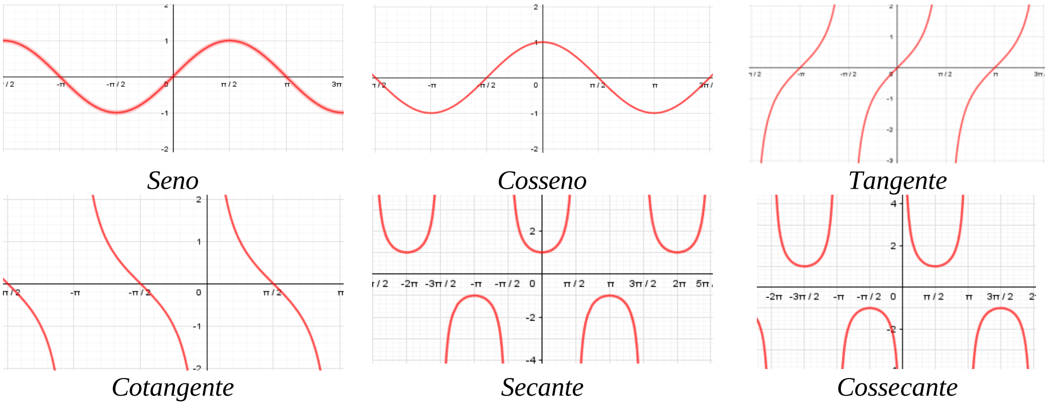
No século XVIII, a trigonometria recebeu contribuições importantes do matemático inglês *Isaac Newton* (1643-1727) e do matemático suíço *Leonhard Euler* (1707-1783). Particularmente, *Euler* fundou a **Trigonometria Moderna**, introduziu a notação atual das *Funções Trigonométricas* e estabeleceu a relação da função exponencial com as *Funções Trigonométricas*, o que permitiu inseri-las no campo dos números complexos. Com os trabalhos de *Euler*, a trigonometria toma a sua forma atual, que se concentra no estudo da trigonometria no triângulo retângulo, equações e inequações trigonométricas, transformações trigonométricas e *Funções Trigonométricas* reunidas por: função seno, função cosseno, função tangente, função cotangente, função cossecante e função secante.

Deste modo, podemos concluir que as *Funções Trigonométricas* são assim designadas, por se tratarem de objetos matemáticos construídos ou descobertos separadamente entre si, sequencialmente em momentos distintos com base nas necessidades do homem ao longo dos anos, formando um conjunto de tipos de funções com diferentes representações algébricas e, não uma classe específica de função com uma representação comum, como ocorreu por exempla para o caso de funções polinomiais.

Assim, as funções denominadas *seno*, *cosseno*, *tangente*, *secante*, *cossecante* e *cotangente*, representadas, atualmente no registro algébrico por: $f(x)$=sen($x$), $g(x)$=cos($x$), $h(x)$=tg($x$), $i(x)$=cot($x$), $j(x)$=sec($x$) e $k(x)$=csc($x$), respectivamente[8], onde $x$ é um número real e, graficamente, conforme mostrado na Figura 2.4, são designadas trigonométricas porque derivaram dos estudos relacionados à trigonometria do triângulo retângulo, mostrada na Figura 2.3, em momentos distintos e, sucessivos, das suas respectivas histórias de existência, enquanto objetos matemáticos do saber sábio.

[8] Obs. Vale sublinharmos que, apesar de concentrarmos na história, as nomenclaturas das seis *Funções Trigonométricas*, não nos deparamos, nas referências que tivemos acesso, com essas representações algébricas de cada uma delas, empregadas atualmente, no ensino e aprendizagem desse grupo de funções.

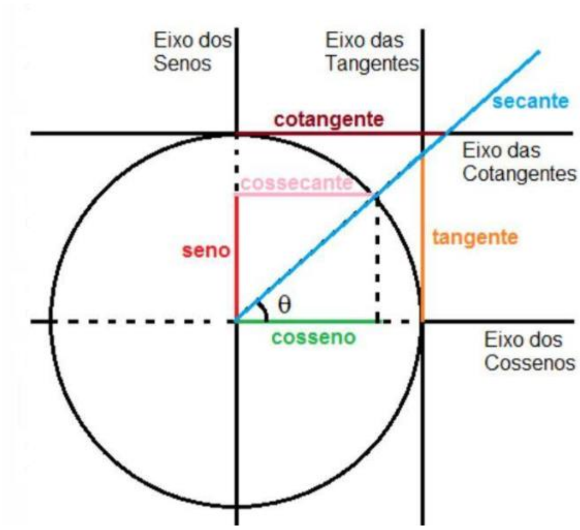
Figura 2.4: Visualização dos gráficos de *Funções Trigonométricas*




Fonte: produção dos autores

Na Figura 2.5, o argumento ou ângulo de referência, em radianos, é um número real relacionado a variável *x* da função trigonométrica, correspondente.

Figura 2.5: Visualização da trigonometria do triângulo retângulo




Fonte: Produção dos autores

Mais adiante nos deteremos ao estudo dessas funções no contexto atual, a partir da análise institucional mediante os livros didáticos adotados na Instituição de Referência deste trabalho, com víeis no Quadro teórico que apresentamos a seguir.

# 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentaremos o aporte teórico no qual nossa pesquisa está fundamentada. Iniciaremos pela Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1995), que segundo Silva (2017), permite o entendimento de fenômenos educacionais, favorecendo o estudo de objeto de saberes, de relações pessoais, de pessoas e de instituições. Além disso, tendo em vista que o acesso aos objetos do saber passa, necessariamente, pela manipulação de objetos ostensivos e não-ostesivos, buscamos compreender os elementos da Teoria de Registro de Representação Semiótica, que foi introduzida em estudos de funcionamento do pensamento por Duval (1993). Por fim, dada a dimensão instrumental que envolve questões tecnológicas na relação de sujeitos com objetos do saber, compreendemos os elementos teóricos da Abordagem Instrumental, proposta por Rabardel (1995).

## 3.1. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Chevallard (1992), é fundamentada no estudo do homem diante dos saberes. O ponto de partida desta teoria é que tudo é "objeto". Chevallard destaca, porém, quatro tipos de objetos específicos, chamados de noções fundamentais, a saber: Objeto, relação pessoal, Pessoa e Instituição, identificados por **O**, R(**X,O**), **P**, e **I**, respectivamente, onde **X** é um indivíduo relacionado a Pessoa P, conforme apresentamos adiante.

A primeira noção fundamental é a do **Objeto**. "Tudo é objeto", incluindo pessoas. Chevallard define **Objeto** como sendo qualquer entidade, material ou não, que existe para, pelo menos, um indivíduo. Por exemplo, uma Função Trigonométrica é um tipo de objeto, ou especificamente, um objeto do saber matemático.

Sublinha-se nessa teoria que um **Objeto O** do saber existe quando uma pessoa ou uma instituição o reconhece como existente. Essa existência permite estabelecer a relação pessoal de um indivíduo **X** com **O**, e a relação institucional de **I** com **O**. Fazendo um paralelo com a sala de aula, existem objetos de saber que não são ainda conhecidos pelos alunos (indivíduos) em um determinado momento. No entanto, estes são conhecidos pelo Professor (Pessoa). A relação dos alunos com **O** se estabelece a partir do momento em que o Professor intervém com este objeto diante dos alunos que passaram a estabelecer a relação com o referido objeto **O**.

O segundo conceito é o de relação pessoal de um indivíduo **X** com um objeto **O** e denotado por R(**X,O**). Essa relação é definida como sendo todas as interações que o indivíduo **X** pode estabelecer com o objeto **O**. Por exemplo, a relação pessoal de um aluno com uma Função Trigonométrica, só pode ser estabelecida quando esse aluno entra na instituição onde sobrevive este objeto.

O terceiro conceito fundamental apresentado por Chevallard (2009) é o de **Pessoa**. O autor inicia este conceito diferenciando dois estágios: indivíduo e Pessoa, que entendemos como descrito a seguir.

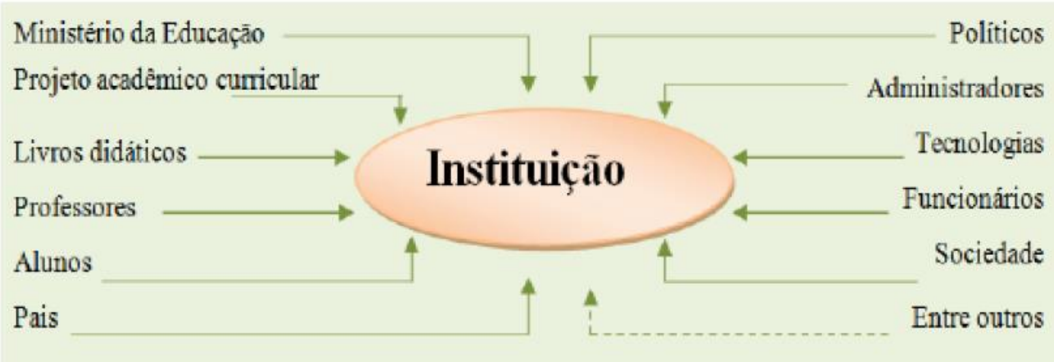
O indivíduo **X** é o que nasce a partir da sua existência. Ao passo que a **Pessoa P** é o conjunto de todas as relações pessoais existentes para **X** com os objetos **O**, com os quais este interage. É por meio das várias relações que o indivíduo tem com diferentes objetos do saber que se constitui a **Pessoa**. Na medida em que o tempo passa, a **Pessoa** muda (evolui), dependendo das suas relações pessoais ao longo do tempo, enquanto que o indivíduo permanece invariante.

A quarta noção é **Instituição**. Segundo Chevallard (1998), uma **Instituição** é um dispositivo social, "total" constituído no mínimo com uma “microinstituição”, que impõe aos seus sujeitos as formas de fazer e de pensar que são próprias de cada instituição.

Por exemplo, uma Universidade é, certamente, uma Instituição, que possui microinstituições, tais como os cursos que funcionem nesta Universidade. Para avançarmos ainda mais sobre o conceito de Instituição I, devemos entendê-la não como uma estrutura homogênea, mas, sim, heterogênea, no sentido em que existem várias relações de pessoais de **X** com **O** que emergem em **I**. A **Instituição I** se relaciona com o objeto **O** por meio de suas características próprias; por exemplo, a noção de porcentagem para uma instituição financeira, pode representar taxas e lucros, enquanto para a engenharia civil pode representar proporcionalidade entre partes de uma mistura. Chevallard (ano) sublinha ainda que, dados um objeto **O**, uma Instituição **I** e uma posição p em **I**, a relação institucional para **O** na posição p, denotada por $R_I$ (p, O), é a relação de um indivíduo X, que ocupa a posição p em I com o objeto O que deve ser, idealmente, aquele dos sujeitos de I na posição p.

Para Henriques, Nagamine e Nagamine (2012), uma instituição, assim definida por Chevallard, é constituída, pelo menos, por um dos elementos institucionais apresentados na Figura 3.1. Os autores afirmam ainda que toda pesquisa em Educação se desenvolve em uma determinada instituição que contem, ao menos, um desses elementos, mesmo que o pesquisador não especifique ou evoque o termo instituição.

Figura 3.1: Elementos Institucionais




Fonte: Henriques, Nagamine e Nagamine (2012, p. 1263)

Nessas condições, uma Instituição de Referência e/ou Aplicação, escolhida pelo pesquisador, com base em seu objetivo e em sua problemática, deve conter ao menos um desses elementos institucionais. Henriques, Nagamine, Nagamine (2012) sublinham, ainda, que:

> [Conforme a Figura 3.2], a Educação Básica, como um todo, é uma instituição, as suas partes [primeiro segmento da educação, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Educação Profissionalizante de Nível Médio, etc.] também o são [considerados como microinstituições], podendo ser caracterizadas como instituições de referência e/ou de aplicação. O termo referência é sugestivo, na medida em que, identifica o local institucional da realização/aplicação da pesquisa. Uma Instituição do Ensino Superior (IES) por sua natureza é uma instituição no contexto descrito acima. As suas partes, tais como os cursos, também são instituições [ou microinstituições]. Com efeito, podemos falar sobre relações e reconhecimento de objetos nas instituições, no contexto descrito por CHEVALLARD (1999) (HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE, 2012, p. 1264).

Figura 3.2: Educação Básica e suas partes enquanto instituição

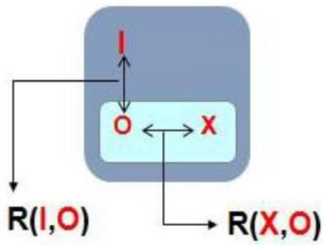

Fonte: HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE, 2012, p. 1263

Além de mencionar os conceitos fundamentais, nesta citação, os autores se interessam com as noções de relações e reconhecimento de objetos nas instituições. Assim, para compreendermos melhor esses conceitos avançamos com os estudos complementares diante dessa teoria que apresentamos a seguir.

### 3.1.1 Relação Pessoal e Relação Institucional

A relação pessoal de X com O, denotada por R(X, O), e a relação institucional de I com O, R(I, O) apresentadas mais acima podem ser esquematizadas como mostrado na Figura 3.3.

Figura 3.3: Relações entre os elementos primitivos




Fonte: Reprodução de Marques 2016

Assim, entendemos que a relação entre indivíduo e objeto ou entre instituição e objeto, existe na medida em que o referido objeto seja reconhecido por **X** ou por **I**. Algumas relações entre sujeitos, objetos e instituição são permeadas por intencionalidades diversas, tanto por parte dos sujeitos como por parte das instituições perante os objetos em jogo nessa relação.

Na sala de aula, podemos identificar vários fenômenos didáticos (por exemplo: contrato didático, gestão do tempo), que ocorrem devido a essas intencionalidades, mediante as relações entre alunos e Professores diante do saber a ser ensinado.

Assim, considerando as referidas relações, podemos destacar as "*Funções Trigonométricas*", como objeto O do saber, sendo X um aluno uma instituição I de Ensino Médio onde sobrevive o objeto O. Desse modo, tanto as relações pessoais quanto institucionais de X com as *Funções Trigonométricas* podem aparecer no processo ensino-aprendizagem se os documentos oficiais institucionalizam esse objeto de saber e os alunos dessa instituição I tiverem estabelecido relações com esse objeto O.

Por falar em local onde espera-se que o objeto do saber sobreviva, cabe entendermos sobre os conceitos de *habitat* e *nicho*, provenientes da ecologia, constituindo uma vertente da TAD, denominada *ecologia de saberes*. Nessa abordagem, o *habitat* é definido como o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. O *nicho* ecológico descreve o lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema ou praxeologia dos objetos com os quais interage.

Em relação às *Funções Trigonométricas* podemos afirmar que um *habitat* é o Livro Didático, pois é um lugar de vida deste objeto matemático. Quanto ao *nicho*, podemos caracterizar o *nicho estrutural*, no sentido que as *Funções Trigonométricas* vêm completar um programa de estudo, reforçando uma coerência a partir da essência e da evolução história apresentada anteriormente no segundo capítulo. Também serve para modelar situações periódicas como o ciclo menstrual, por exemplo, que podemos caracterizar como *nicho aplicativo* de *Funções Trigonométricas*.

Além da noção de ecologia de saberes, encontramos também na TAD o conceito de organização praxeológica, ou simplesmente Praxeologia que apresentamos a seguir.

### 3.1.2 Modelo Praxeológico

Entendemos que o conceito de praxeologia tem as suas essências nas relações abordadas mais acima. Pois, como lhe sublinham Henriques, Attie e Farias (2007, p. 62):

> Uma relação institucional é em particular, diretamente ligada as atividades institucionais que são solicitadas aos alunos. Ela e, de certa maneira, caraterizada por diferentes tipos de tarefas que os alunos devem efetuar e por razoes que justificam tais tipos de tarefas. A relação institucional a um objeto (R(I,O)) é, portanto, descrita por um conjunto de práticas sociais que funcionam numa instituição envolvendo esse objeto do saber. [...] o saber matemático, enquanto forma particular do conhecimento, é fruto da ação humana institucional, é algo que se produz, se utiliza, se ensina ou, de uma forma geral, que transita nas instituições.

Nesse âmbito, constatamos nas nossas leituras, que Chevallard coloca em cena a noção de organização praxeológica ou simplesmente praxeologia, como conceito de referência, para se estudar as práticas institucionais relativas a um objeto do saber tais como as práticas em Matemática. A organização Praxeologia é, portanto, entendida como um modelo para análise da ação humana institucional, descrito em termos de quatro noções, que também, podemos designar como teoria de quatro **T**, que são:

[01] **Tarefa**,
[02] **Técnica**,
[03] **Tecnologia** e
[04] **Teoria**.

Para entendermos o significado de **tarefa**, é fundamental compreendermos a distinção entre **tarefa**, **tipo de tarefa** e **gênero de tarefa**.

**[01]** Uma **Tarefa**, denotada pela letra ***T***, é um exercício, um exemplo ou um problema, elaborada com um enunciado em precisão, sem ambiguidades, podendo ou não ser identificada em uma determinada praxeologia.

Sublinha-se, nessa teoria que, toda **tarefa** está contida em um **tipo de tarefa** que faz parte de um **gênero** de tarefas. O **gênero** é uma palavra isolada formulada no infinitivo, como, por exemplo, a palavra *esboçar, representar, fornecer, calcular*, *determinar*, etc. O **tipo de tarefa** é uma família de tarefas ou bloco de tarefas do mesmo tipo. Exemplo, *esboçar o gráfico de uma função* é, um **tipo de tarefa** do **gênero** *esboçar*. Ao passo que e*sboçar o gráfico da função f, dada por f*(*x*)= **sen**(*x*), no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, é uma **tarefa T** do **tipo** e*sboçar o gráfico de uma função*. Entendemos, assim, que a tarefa é conceitualmente específica formulada com um enunciado em precisão iniciado com verbo no infinitivo (o **gênero**).

Podemos esquematizar essas três noções conforme mostrado na Figura 3.4.

Figura 3.4: Gênero de Tarefa, Tipo de Tarefa e Tarefa


Fonte: Produção dos autores

Toda tarefa necessita de uma técnica para atender o(s) seu(s) objetivo(s), buscando-se, portanto, o(s) resultado(s) esperado(s).

**[02]** Uma **técnica** (**τ**) é uma maneira de fazer ou realizar as **tarefas T**. Segundo Chevallard (1998), uma praxeologia relativa a um **tipo de tarefa** necessita, em princípio, de uma técnica **τ**. No entanto, essa técnica **τ** pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas **T** deste tipo. Considerando o exemplo citado acima, uma técnica que pode ser empregada para esboçar o gráfico da função *f* é o traçado de sistema de coordenadas planas, técnica ponto-a-ponto ou interpretação global da função seno, levando em consideração o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

**[03] Tecnologia,** identificada por (**θ**), é um discurso racional (o *logos*) que tem por objetivo de justifica a técnica **τ,** garantindo que esta permite realizar as tarefas **T** do mesmo tipo, cujo primeiro objetivo consiste em assegurar que a técnica permita que se cumpra bem os objetivos da tarefa **T**. O segundo objetivo da tecnologia consiste em explicar, isto é, em expor por que ela funciona bem na realização desse tipo de tarefa.

**[04]** A **teoria** (Θ), sendo a quarta noção do modelo praxeológico, tem como objetivo de justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar acessível o discurso tecnológico. Passa-se então a um nível superior de justificação, explicação, produção, retomando com relação à tecnologia o papel que esta tem em relação à técnica.

Em uma instituição I qualquer, uma **teoria** (Θ) dá conta de várias **tecnologias** (θ), e cada uma delas deverá justificar e tornar inteligíveis as várias **técnicas** (τ), que corresponderão a realização de outras tantas **tarefas** (T).

As quatro noções: tarefa (T), técnica (τ) tecnologia (θ) e teoria (Θ) constituem uma organização praxeológica completa [T/τ/θ/Θ], que pode ser decomposto em dois blocos: o saber-fazer (praxe), [T/τ] e o ambiente tecnológico-teórico (logos), [θ/Θ].

Nessa organização, a implementação de uma técnica para realizar-se um tipo de tarefa se traduz pela manipulação de objetos ostensivos a partir dos não-ostensivos, dos quais trataremos a seguir.

### 3.1.3 Objetos ostensivos e não-ostensivos

Encontramos na TAD um modelo epistemológico que estabelece uma distinção dentro dos elementos que compõem uma organização praxeológica (ou praxeologia), os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias. Esses elementos “são feitos” de objetos ostensivos e não-ostensivos. Os objetos ostensivos são aqueles que são perceptíveis, que se veem, que se tocam, que se ouvem, etc., ou seja, são objetos materiais ou dotados de certa materialidade, como as escrituras, os grafismos, os sons, os gestos, etc. De um modo geral, os objetos ostensivos são aqueles que podem ser “manipulados”, apesar de serem sons, gestos, discursos, etc.

Por exemplo, escrever $\boldsymbol{f(x)=\mathrm{sen}(x)}$**,** pode ser visto como uma simples manipulação de objetos ostensivos, assim como escrever $\boldsymbol{f(\pi)=0}$. Mas, última relação não poderia efetuar-se, intencionalmente, sem a intervenção de certos objetos não-ostensivos específicos, tais como o conceito de função seno, do cálculo do valor funcional, e do seno de um ângulo, em particular o ângulo $x = \pi$.

Os objetos não-ostensivos são aqueles que existem institucionalmente, desde que lhes sejam atribuídos uma determinada existência. Porém, esses objetos não podem ser percebidos nem se mostram por si mesmos. São entendidas como as ideias, os conceitos, as crenças, etc. Estes só podem ser “externados”, ‘invocados’ ou ‘evocados’ por meio da manipulação de certos objetos ostensivos correspondentes.

Entendemos, com base nestas definições que, os objetos não-ostensivos só são acessíveis através das representações dos objetos ostensivos correspondentes. Este aspecto de representação vai ao encontro com as ideias discutidas pelo francês Raymond Duval (1993) na sua Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS), estabelecendo-se assim, um link ou relação com a TAD. Com efeito, acreditamos que esta relação vai permitir-nos precisar as representações dos elementos matemáticos que sustentam a existência de *"Funções Trigonométricas"* enquanto objeto de estudo envolvido na nossa pesquisa. Assim, para compreendermos melhor a proposta de Raymond Duval sobre TRRS, apresentamos a seguir os estudos que realizamos referentes a esta teoria.

## 3.2. TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Do ponto de vista matemático, vários conceitos se destacam na ecologia de *Funções Trigonométricas*, em todo o seu *habitat*, notadamente os conceitos de gráfico de uma função, expressões algébricas, valor funcional, tabela de valores, entre outros. Podemos, contudo, nos questionar sobre o acesso a estes conceitos na compreensão de fenômenos emergentes na sua praxeologia. Para responder esse questionamento, encontramos fundamentos na Teoria de Registros de Representação Semiótica proposta por Duval (1993).

Para conduzirmos a apresentação desta teoria, destacamos no Quadro 3.1, os seus elementos teóricos que identificamos nas obras do autor, assim como nos trabalhos de seus sucessores ou pesquisadores que se utilizam desta teoria.

Quadro 3.1: Elementos teóricos e técnicas de tratamento de gráficos na TRRS.

| **Elementos teóricos** | |
|---|---|
| **[1].** Objeto; | **[6].** Regras de conformidade; |
| **[2].** Representação semiótica; | **[7].** Formação de uma representação; |
| **[3].** Registro de representação; | **[8].** Tratamento de uma representação; |
| **[4].** Sistema semiótica; | **[9].** Conversão de uma representação; |
| **[5].** Signo; | **[10].** Coordenação; |
| **Técnicas** | |
| **[11].** Ponto-a-ponto; | |
| **[12].** Extensão de traços já efetuados; | |
| **[13].** Interpretação global de propriedades das figuras. | |

Fonte: Produção dos autores

Constatamos nesta teoria que o **objeto** [01] de estudo de referência considerado por Duval, é um objeto institucional tal como evidenciado por Chevallard na TAD. Contudo, sublinha-se nesta TRRS que todo e qualquer objeto do saber, em particular, matemático, só é acessível por meio de suas representações intrínsecas aos ostensivos correspondentes. Segundo Henriques Attie e Farias (2007, p. 67),

> Esse termo, representação, tem, às vezes, o seu significado de certa forma distorcido dentro da área. De fato, o termo é muitas vezes utilizado naturalmente sob sua forma verbal, na qual representar assume o significado de “simbolizar”, ou até mesmo “descrever”.

Um enunciado em língua materna, um conjunto de números, uma equação algébrica, uma figura pictográfica, por exemplo, são representações semióticas [2] que revelam sistemas semióticos [4] diferentes.

Segundo Duval (2011), toda a aprendizagem passa necessariamente pela utilização dos registros de representação [3]. Para o autor, os registros são sistemas semióticos [4] que nos permitem acessar objetos inacessíveis pela percepção e, sublinha, sistematicamente que:

> Um registro [3] é um sistema semiótico [4] cognitivamente criador. Isso quer dizer que, para considerar um sistema semiótico [4] como um registro [3], é preciso identificar as operações de produção de representações que ele permite executar de maneira original e específica. (DUVAL, 2011, p.83)

Podemos entender por operações de produções de representações pelos quais se refere o autor, como regras de conformidades [6] e signos [5] que permitem identificar e representar um dado objeto [1] de saber em um sistema ou registro.

Esse entendimento leva-nos a destacar as produções de representações podem ressaltar aspectos diferentes de um mesmo objeto [1]. Portanto, dispor de várias representações semióticas para o mesmo objeto possibilita maior compreensão da sua ecologia, já que pode haver uma relação de complementaridade entre as diferentes representações. Duval sublinha que, o mais importante do que procurar a melhor representação para um objeto matemático, é buscar a variedade de registros e, mais importante ainda, trabalhar a passagem da representação de um objeto, de um registro para o outro, o que será posteriormente designado por conversão [9]. Só assim, afirma o pesquisador, que se reconhece um mesmo objeto matemático em diferentes representações, ou seja, realizar transformações de representações em diferentes registros.

Henriques & Almouloud (2016), apoiados nas obras de Duval (1993) apresentam a seguinte definição.

> Uma representação semiótica é uma representação construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. A sua significação é determinada, por um lado, pela sua forma no sistema semiótico, e, por outro lado, pela referência do objeto representado. Henrique & Almouloud (2016, p. 467).

Os autores defendem ainda que, dentre os registros de representação que se podem pensar em Matemática, quatro são predominantes. Eles apresentam esses registros em um diagrama ilustrativo mostrado na Figura 3.5, como forma de colaborar no pensamento sobre o tratamento [8] ostensivo de objetos matemáticos e suas possíveis representações nos diferentes registros.

Figura 3.5: Possíveis registros de representação de um objeto matemático

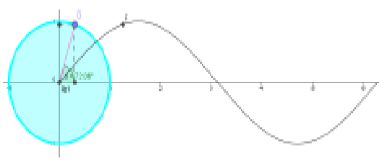

Fonte: Henriques e Almouloud (2016, p. 468)

Além disso, encontramos no artigo destes autores, uma definição de registros [3] que colabora com mesma apresentada anteriormente por Duval, tangendo. Porém o termo signo, quando sublinham que “Um registro de representação [3] é um sistema [4] dotado de signos [5] que permitem identificar uma representação de um objeto [1] de saber”. Relativamente aos signos, os autores Henriques & Almouloud (2016, p. 468), apresentam a seguinte definição para signo.

> Um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico, como as regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para o registro algébrico, as figuras geométricas (pontos, segmentos/ retas/curvas, planos e superfícies) para o registro gráfico, os números, as operações aritméticas, para o registro numérico e, de um modo geral as regras de conformidade.

Essas últimas, são regras a respeitar na formação [7] de uma representação semiótica. Assim, percebemos, conforme esquematizado na Figura 3.5, um dado objeto de saber pode ser representado em diferentes registros constituídos com diferentes signos e regras de conformidade. Um sujeito que venha a pensar uma Função Trigonométrica específica, que seja a função seno por exemplo, pode lhe externar em ao menos três registros, conforme mostrado no Quadro 3.2.

**Quadro 3.2:** Resultado da representação da função seno de *x* em diferentes registros.

| Representação da função f na Língua Materna | Representação da função f no registro algébrico | Representação da função f no registro gráfico |
|---|---|---|
| f de x igual a seno de x, para todo x pertencente ao intervalo fechado de extremidades 0 e 2π. | $f(x)=sen(x)$, $\forall x \in [0, 2\pi]$ |  |

Fonte: Produção dos autores

É possível observamos que cada registro de representação destacada no Quadro 3.2 é dotada com as próprias signos e regras de conformidades, tais como regras gramaticais para o registro da língua materna, regras de formação da expressão da função seno no registro algébrico e, as regras de representação da função seno no registro gráfico. Duval (1995) coloca em evidência três atividades cognitivas, fundamentais, ligadas aos registros de representação, que são *formação* [7], *tratamento* [8] e *conversão* [9], que encontramos em Henriques & Almouloud (2016, p. 469), com as seguintes definições:

> [7] a *formação* de uma representação semiótica é baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido". [8] O **tratamento** de uma representação é a transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro. [9] A **conversão** de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro. Henriques & Almouloud (2016, p. 469)

Poder transitar e/ou entender um mesmo objeto em diferentes registros é, portanto, uma capacidade atrelada a conversão da representação de um objeto [1] do saber. A passagem de uma ideia externada na linguagem materna para a representação correspondente no registro algébrico é um exemplo de *conversão*. A operação ou transformação de um objeto dentro do próprio registro no qual a representação é um *tratamento*. Por exemplo, a passagem da função $f$ de duas variáveis, dada por $f(x,y)=\text{sen}(x+y)$ para a função $g$, também de duas variáveis dada por $g(x,y)=\text{sen}(x)\cos(y)+\text{sen}(x)\cos(y)$ é um *tratamento* da função $f(x,y)$ no registro algébrico, não havendo, portanto, a *conversão* da $f$ em outro registro.

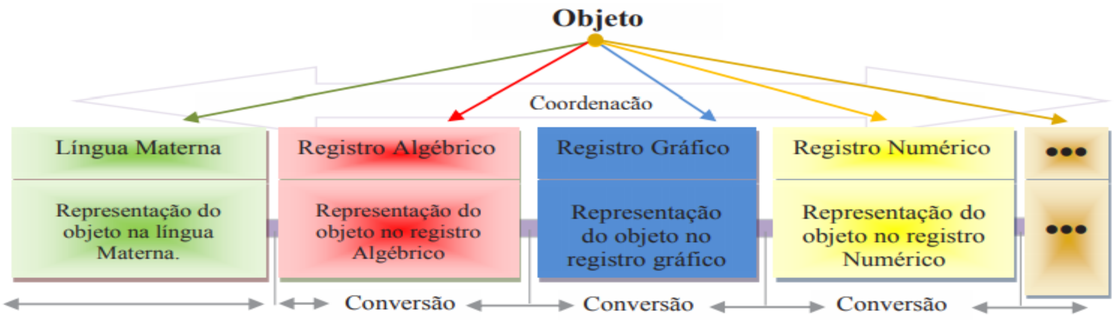
O décimo, sendo o último elemento teórico previsto no Quadro 3.1, referece a *coordenação* [10]. Segundo Henriques & Almouloud (2016)

> "A coordenação é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos. A coordenação aparece como a condição fundamental para todo tipo de aprendizagem". Henriques & Almouloud (2016, p. 470).

Os autores sublinham, dando referência a Figura 3.5 em conformidade com a Figura 3.6 e, em concordância com a definição de coordenação que:

> Os registros são sistemas inertes que acomodam as representações de objetos de saberes que, por sua vez, são dinâmicas, na medida em que elas podem, com base nas definições de tratamento e conversão, sofrer transformações no mesmo ou entre diferentes registros. Henriques & Almouloud (2016, p. 470).

Figura 3.6. Conversão e coordenação de representações de um objeto entre registros




Fonte: Henriques e Almouloud (2016, p. 470).

Constatamos também nas nossas leituras que Duval (1988) interessou-se com a representação de objetos matemáticos no registro gráfico. Em um dos seus trabalhos, que levam o "*Graphiques et équations: l'articulation de deux registres*", podemos ler:

> a leitura de representações gráficas pressupõe a discriminação das variáveis visuais pertinentes e a percepção das variações correspondentes das expressões algébricas. Essa leitura e um procedimento de interpretação global que supõe uma atitude contraria a pratica de associar um ponto a um par ordenado. DUVAL (1988, p. 235).

O autor, distingue, porém, três técnicas de tratamento ou representação de objetos matemáticos, tais como as *Funções Trigonométricas*, em concordância com as estratégias adotadas pelo sujeito (Pessoa X), a saber:

A técnica [11] *ponto-a-ponto*;
A técnica [12] *extensão de traços já efetuados*;
A técnica [13] *interpretação global de propriedades das figuras*.

O autor Duval destaca esta última [13] como a técnica sistemática para se evidenciar as variáveis visuais que devem ser consideradas na análise e interpretação dos objetos visados no registro gráfico. Concordamos com o autor, a pesar da primeira técnica parecer a mais utilizada na introdução de processos de representação de funções, quando se associa os pontos do plano a pares ordenadas.

Mas, certamente a interpretação global pode-se apresentar mais eficiente, principalmente quando se queira integrar os ambientes computacionais de aprendizagem, como o *GeoGebra* no processo ensino-aprendizagem de objetos matemáticos. Por hipótese, esse tipo de ambiente favorece a mobilização de objetos matemáticos nos diferentes registros semióticos. Com efeito, nos interessamos, neste trabalho, com aprendizagem das ferramentas do *software* ou ambiente computacional *GeoGebra* relativamente ao estudo de *Funções Trigonométricas*, enquanto objeto matemático de referência. Neste âmbito, encontramos fundamentação na Abordagem Instrumental proposta por Rabardel (1985) que apresentamos a seguir.

### 3.3. ABORDAGEM INSTRUMENTAL

A abordagem Instrumental é uma teoria que foi desenvolvida por Pierre Rabardel (1995), a partir dos trabalhos em ergonomia cognitiva. Segundo Salazar (2009) "a ergonomia cognitiva refere-se a processos mentais, tais como percepção, memória, raciocínio e resposta motora conforme afetem a relação entre seres humanos e outros elementos de um sistema" (SALAZAR, 2009, p. 63).

Escolhemos esta abordagem, pois, a mesma nos oferece elementos teóricos apropriados ao estudo da ação do sujeito, mediada por um instrumento, que discutimos ao longo da sua apresentação. O ponto de partida dessa abordagem é a ideia de que uma ferramenta não é, automaticamente, um instrumento eficaz e prático. Uma agulha, por exemplo, é um objeto sem significado, salvo quando se tem algo (apropriado ao instrumento) para costurar, transformando-a assim em um instrumento útil. Henriques, Attie e Farias (2007) afirmam que, "[...] algumas ferramentas são mais apropriadas do que outras, dependendo do tipo de utilização a que se propõe". Uma colher, por exemplo, é mais adequada e eficaz na tarefa tomar sopa, do que um garfo. Este conceito aplica-se também a qualquer outro objeto que se apresenta como uma ferramenta, em particular, o computador ou um *software*. Pois, o primeiro é proposto com potencialidades que permite a visualização de gráficos de funções de uma ou duas variáveis, o que não acontece com o segundo (Logo).

Além disso, entende-se, nesta abordagem, que o processo de aprendizagem no qual uma ferramenta (ou artefato) torna-se progressivamente um instrumento eficaz e prático é chamado **gênese instrumental**, que é um processo complexo, aliado às características do artefato, aos conhecimentos do sujeito que vai utilizar este artefato, suas experiências anteriores e suas habilidades. Rabardel (1995), afirma que o instrumento não é algo dado e sim construído a partir da gênese instrumental. Para o autor, um instrumento é uma entidade mista, constituída por dois elementos, a saber: o **artefato** e **esquemas de utilização** associados, resultantes de uma construção própria do sujeito.

Neste contexto, entende-se que **artefato** pode ser um meio material, como uma agulha ou uma colher, conforme exemplos supracitados, ou um meio simbólico, como uma linguagem simbólica (linguagem algébrica, símbolos vetoriais etc.). **Esquemas de utilização,** por sua vez, são gerados a partir da necessidade do sujeito, tendo em vista seus conhecimentos e o meio em que ele está inserido. O **instrumento** consiste do artefato acrescido de um ou vários esquemas de utilização desse artefato, esquemas esses construídos pelo sujeito.

A gênese instrumental envolve dois processos de aprendizagem designados **instrumentalização** e **instrumentação**. O primeiro consiste na manifestação e desenvolvimento dos diferentes componentes do artefato, ou seja, trata de um progressivo reconhecimento das potencialidades e entraves do artefato por parte do sujeito; e **instrumentação**, que consiste na manifestação e evolução de esquemas de utilização.

Imersos nesta Abordagem, buscamos compreender as funcionalidades de ferramentas tecnológicas dos ambientes de aprendizagem, notadamente o ambiente papel/lápis e o computacional GeoGebra, quando consideramos no tratamento de "*Funções Trigonométricas*" como objeto do saber. Aproveitamos o ensejo para apresentar as definições que encontramos em Henriques (2014) sobre estes ambientes. Para o autor:

> Um ambiente **PAPEL/LÁPIS** é um espaço usual de estudo constituído por ferramentas como: papel, lápis, caneta, borracha, etc. O quadro, o piloto ou giz também se enquadram nesse ambiente. Um ambiente **COMPUTACIONAL** é um espaço virtual de estudo constituído de ferramentas como: o computador, o *software*, a *internet*, a calculadora, e de um modo geral as tecnologias digitais. Henriques (2014, p. 69).

Acreditamos que essas definições se integram na Abordagem Instrumental, ao se preocuparem com alguns elementos teóricos considerados nessa abordagem, tais como as ferramentas. Ora, a ideia central nessa abordagem consiste no fato em que as ferramentas não são automaticamente instrumentos eficazes e práticos, fato que levou Rabardel (1995) a distinguir o artefato/ferramenta do instrumento.

Rabardel (1995 apud HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007) destaca três categorias de esquemas de utilização:

> - *Esquemas de uso*: correspondentes às atividades relativas à gestão das características e propriedades específicas do *artefato*;
> - *Esquemas de ação instrumental*: correspondentes às atividades para as quais o *artefato* é um meio de realização;
> - *Esquemas de atividades coletivas instrumentais*: correspondentes à utilização simultânea ou conjunta de um instrumento num contexto de atividades, respectivamente, compartilhadas ou coletivas. (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p.54).

Percebemos, portanto, que os esquemas estão sempre presentes nas atividades instrumentais realizadas pelo sujeito utilizando determinadas técnicas instrumentais. Por exemplo, escrever o nome L@VIM[9] utilizando ambiente papel/lápis. Para realizar esta tarefa, pode-se escolher o deslizamento da ponta de uma caneta sobre um papel. Neste

[9] Laboratório de Visualização Matemática

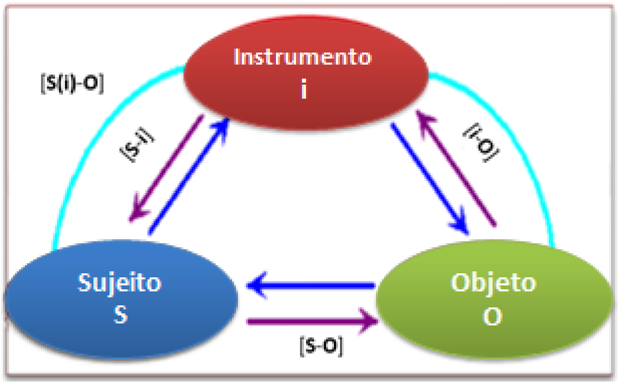
caso, deslizamento é um esquema de uso e a escolha do deslizamento da caneta sobre o papel é a gestão das características e propriedades do artefato (caneta).

Desse modo, entendemos que os esquemas estão sempre presentes nas atividades instrumentais construídas ou realizadas pelo sujeito utilizando determinadas técnicas instrumentais. Henriques, Attie e Farias (2007), sublinham que

> Para a análise de atividades instrumentais Rabardel, (1995) e Verillon, (1996) propõem o modelo de Situações de Atividades Instrumentais (SAI), delineando as relações entre o sujeito e o objeto sobre o qual ele age. O objetivo essencial é evidenciar a multiplicidade de interações que intervêm nas atividades instrumentais. (HENRIQUES, ATTIE e FARIAS, 2007, p. 54)

Além disso, encontramos em Henriques (2012) o referido modelo mostrado na Figura 3.7, observando-se as referidas relações entre o Sujeito e o Objeto mediadas por um instrumento, descritas mais adiante.

Figura 3.7: Modelo SAI teórico




Fonte: HENRIQUES (2012)

A partir desse modelo é possível identificar duas dimensões no processo de gênese instrumental: a instrumentação e a instrumentalização. A instrumentação consiste na relação entre sujeito e Instrumento (S-I), nela o Sujeito desenvolve técnicas de utilização da ferramenta. Portanto, é no processo de instrumentação que se desenvolve os esquemas de utilização e de ação instrumental os quais permitiram destacar as potencialidades e entraves do GeoGebra e explorar as suas ferramentas. A instrumentalização consiste na relação entre Instrumento e Objeto (I-O), nela o Sujeito atribui à ferramenta uma possibilidade de uso do instrumento para modificar suas propriedades funcionais a fim de resolver seu problema.

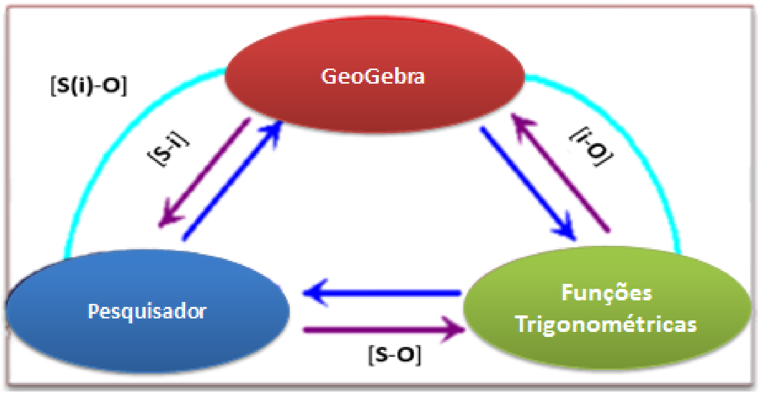
Entendemos, portanto, que os conceitos de instrumentação e instrumentalização contribuem na maneira como o instrumento intervém na relação do sujeito com o seu objeto de estudo. Para analisar os recursos do ambiente computacional *GeoGebra* durante a Pesquisa Interna, a fim de compreender como os seus recursos podem contribuir no estudo de *Funções Trigonométricas*.

Em relação aos entraves que podemos encontrar durante a análise de um software, Trouche (2002 apud HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007) distingue três deles que são frequentes na *gênese instrumental*, a saber:

> *Entraves internos* (no sentido de entraves físico-eletrônicos) ligados de maneira intrínseca ao material: trata-se de informações que podem ser acessíveis ou não, mas que o *sujeito* não pode alterar utilizando as únicas funcionalidades do *artefato*; não aparecem nem como objetivo, nem como resultado, ao longo da realização de um exercício.
>
> *Entraves de comandos* ligados a existência e a forma, ou seja, a sintaxe, dos diferentes comandos: trata-se de informações que são acessíveis na interface e que o sujeito pode utilizar ou alterar com certos limites, para obter um resultado.
>
> *Entraves de organização*, ligados a organização do teclado e do monitor, ou seja, a estruturação das informações e dos comandos disponíveis: trata-se também neste caso, de informações que são acessíveis na interface e que o sujeito pode utilizar ou alterar com certos limites para obter um resultado; elas aparecem como elementos de uma técnica de realização de um tipo de exercício. (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 56-57).

Para adaptar o modelo teórico SAI à nossa pesquisa, destacamos "as *Funções Trigonométricas*" como objeto **O**, o sujeito **S** é um aluno do Ensino Médio, e o instrumento **i**, é o software *GeoGebra*, por ser uma ferramenta que pode ser utilizada estudo de Funções Trigonométrica, por conter potencialidades que permitem a representação desse tipo de funções no registro gráfico e conversão correspondente no registro algébrico (lei expressão da função), podendo ser visualizadas simultaneamente na janela de álgebra e a janela gráfica desse ambiente computacional. Assim, na Figura 3.8 apresenta-se o modelo teórico SAI aplicado ao nosso trabalho.

Figura 3.8: Modelo SAI adaptado para este trabalho




Fonte: Produção dos autores

Segundo Henriques, Attie e Farias (2007), o estudo das práticas dos objetos do saber, em particular *Funções Trigonométricas* e a utilização de um software como o *GeoGebra*, na instituição onde vive esse objeto, torna-se essencial. Nesse caso, é fundamental que os alunos tenham mobilizado a relação [S-i] (a instrumentação, descrita anteriormente), uma vez que a instrumentalização que incide na relação do artefato com o objeto O, é fluente neste ambiente. Pois, como sublinhado anteriormente, o *GeoGebra* é implementado com potencialidades que permitem o estudo de conceitos de *Funções Trigonométricas,* conforme veremos também mais adiante durante a análise deste artefato enquanto elemento institucional, em conformidade com a metodologia adotada que apresentamos a seguir.

# 4. METODOLOGIA

Apresentamos nesta parte do nosso trabalho a metodologia de pesquisa que trilhamos na estrutura organizacional, realização e desenvolvimento da nossa pesquisa.

## 4.1 ANÁLISE INSTITUCIONAL & SEQUÊNCIA DIDÁTICA (AI&SD) COMO METODOLOGIA DE PESQUISA

Baseada na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e na Engenharia Didática[10] (ED), respectivamente, a Análise Institucional e a Sequência Didática, constituem uma metodologia de pesquisa proposta por Henriques (2016), organizada em oito etapas, desenvolvidas em duas fases, tendo quatro etapas cada fase. Nesta constituição, a TAD contribui com os conceitos de análise institucional, organização praxeológica e de ecologia do saber. Ao passo que, a ED contribui com a estrutura, organização e análise sequencial de atividades de ensino.

Nos apropriamos dessa metodologia para conduzirmos a nossa pesquisa, no entanto nos concentramos apenas nas seis primeiras etapas. Como esta Dissertação consiste numa proposta de Sequência Didática não haverá aplicação e consequentemente, não haverá análise *à* posteriori. Com efeito, para proporcionar ao leitor do nosso trabalho, uma compreensão melhor acerca desta metodologia, apresentamos inicialmente as definições dos dois conceitos que a constitui, conforme proposto pelo autor, notadamente a definição de Análise Institucional (AI) e a de Sequência Didática (SD), bem como a organização das oito etapas em um quadro que resume o percurso de investigação nesta metodologia. Com referência neste quadro, apresentaremos as descrições de cada fase evidenciando, originalmente, o funcionamento dessa metodologia. Tendo compreendido todas etapas, posteriormente apresentaremos o nosso percurso com base nessa metodologia.

### 4.1 Análise Institucional, o que é?

Em toda pesquisa, principalmente em Educação Matemática, mesmo que não se evoque o termo instituição, é realizada análises institucionais. Segundo Henriques,

[10] A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise sequencial de atividades de ensino (ARTIGUE, 1988 apud HENRIQUES, 1999, apud SILVA 2017).

Nagamine, Nagamine (2012), uma análise institucional é:

> Um estudo realizado em torno de elementos institucionais, a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as relações institucionais e pessoais a objetos do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou praxeologias desses objetos que intervém no processo ensino/aprendizagem. (HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE, 2012, p.1268).

Neste sentido, Henriques e Serôdio (2013) completam que:

> A análise institucional como metodologia de pesquisa, fornece ferramentas para identificarmos as condições e exigências que determinam, numa instituição, as referidas práticas institucionais em torno de objetos de estudos, [...]. (HENRIQUES; SERÔDIO, 2013, p.3).

O encadeamento do ensino do objeto de estudo "*Funções Trigonométricas*" que obedece a ordem de apresentar a Função Seno, seguida da Função cosseno e em seguida a Função Tangente, por exemplo, é uma exigência institucional que pode ser comprovada pela organização praxeológica deste objeto nos Livros Didáticos, em geral. Henriques, Nagamine e Nagamine (2012) explicam que uma instituição é constituída pelo menos por um dos elementos que eles apresentam no Quadro 4.1 e afirmam que:

> Uma *instituição de referência* é correspondente à instituição de realização e/ou aplicação da pesquisa em questão, seja de ensino ou não. A explicitação dessa instituição pelo pesquisador deve satisfazer, pelo menos, um desses elementos. (HENRIQUES, NAGAMINE, NAGAMINE, 2012, p.1263, grifo dos autores).

Quadro 4.1: Elementos constituintes de uma instituição


Fonte: HENRIQUES, (2016, p. 3)

Henriques (2016) afirma que "em geral, no desenvolvimento de qualquer pesquisa em Educação, pensamos em uma instituição constituída, pelo menos, com um desses elementos". Assim, a escolha de uma instituição de aplicação e/ou de referência pelo pesquisador depende somente da problemática de sua pesquisa. Para proporcionarem um entendimento melhor sobre os conceitos de instituição de referência e de aplicação, Henriques e Serôdio (2013) trazem as seguintes definições:

> Uma instituição de referência é, portanto, a instituição na qual o Pesquisador identifica os elementos institucionais que pretende analisar. Se a pesquisa envolver um experimento aplicado na instituição, então esta é também de aplicação. Contudo, o termo aplicação não se restringe necessariamente aos experimentos aplicados no contexto de estudo de práticas efetivas dos estudantes, ou dos alunos em torno de objetos de saber numa instituição. Uma análise das relações possíveis entre os conteúdos/conhecimentos

desenvolvidos em diferentes instituições, por exemplo, também se enquadra nessa aplicação. (HENRIQUES; SERÔDIO, 2013, p.4, grifo dos autores).

Assim, essas as duas noções, conforme definidas pelos autores, nos auxiliaram na tomada de decisão em relação à escolha da instituição de referência. Esta escolha deve-se ao fato das *Funções Trigonométricas*, enquanto objetos de estudo, encontrarem espaço nessa instituição, favorecendo assim o desenvolvimento de uma Sequência Didática (SD) em torno desse Objeto do Saber. Daí o interesse pela compreensão do que é SD.

## 4.2. Sequência Didática (SD)

Na busca de aprofundar os nossos conhecimentos sobre a **Sequência Didática**, encontramos em Henriques (2016) uma discussão sobre o assunto e o autor compreende a SD como um dos aspectos da **Engenharia Didática** e apresenta a seguinte definição:

> Sequência Didática é um esquema experimental formado por situações, problemas ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por **sessões de aplicação** a partir de um estudo preliminar [análise institucional] em torno de um Objeto do Saber e de uma **análise matemática/didática**, caracterizando os objetivos específicos de cada situação, problema ou tarefa [tendo uma praxeologia completa]. (HENRIQUES 2016, p. 4, grifo nosso)

A referida análise matemática/didática, contemplam as estratégias e resoluções de situações possíveis, a forma de controle e os resultados esperados na realização de cada situação, pré-requisitos e competências, que são parte da análise a priori. Essa análise é desenvolvida com base na praxeologia do objeto de estudo, que na nossa pesquisa, consiste nas *Funções Trigonométricas*. As referidas sessões de aplicação constituem um ou vários dispositivos experimentais, que devem ser organizados no âmbito da pesquisa interna, contendo as tarefas propostas ao público alvo na pesquisa externa. Cada sessão é composta de um dispositivo experimental, contendo uma Sequência Didática constituída de tarefas proposta aos alunos. É um instrumento didático de investigação que permite analisar as práticas institucionais do público alvo em torno do Objeto do Saber de referência da pesquisa, em particular, as Funções Trigonométrica. A AI&SD como metodologia de pesquisa é organizada em duas fases esquematizadas conforme apresentamos na Figura 4.2.

Figura 4.2: Fases da Análise Institucional & Sequência Didática


Fonte: HENRIQUES (2016, p. 4)

Segundo Henriques (2014)

> A PESQUISA INTERNA, é uma sondagem realizada pelo pesquisador individualmente, ou por um grupo de pesquisadores sem intervenção de sujeitos externos. É o momento no qual o pesquisador procura compreender melhor o seu objeto de estudo. Ele conjectura, problematiza, formula hipóteses, questiona-se, define o quadro teórico, os objetivos, descreve o percurso metodológico da sua pesquisa e analisa os elementos institucionais específicos e apresenta resultados parciais (Henriques, 2014, p. 68)

Enquanto que

> A PESQUISA EXTERNA é uma sondagem que envolve sujeitos externos como público alvo. É o momento no qual o pesquisador aplica os estudos desenvolvidos na pesquisa interna. Esta aplicação pode ou não envolver seres humanos. Contudo, aplicação de uma sequência didática para o estudo de práticas efetivas de estudantes de uma instituição, por exemplo, é uma pesquisa externa. (Henriques, 2014, 68.)

A nossa Dissertação é desenvolvida apenas na dimensão interna nessa metodologia (AI&SD), em que cada fase é organizada com quatro etapas dispostas no Quadro 2, que visa, segundo Henriques (2016), orientar e situar o pesquisador no desenvolvimento de trabalhos acadêmicos-científicos.

Quadro 4.2: Etapas do percurso metodológico da AI&SD

<table>
<tr><th colspan="2">Análise Institucional & Sequência Didática</th></tr>
<tr><td colspan="2">Fase I: Definições e Análises Preliminares</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1ª ETAPA</td><td>Tomada de decisões iniciais</td></tr>
<tr><td>Definição do tema/assunto da pesquisa. Apresentação da problemática e/ou de questões da pesquisa em torno do tema/assunto (Objeto do Saber de referência). Definição dos objetivos gerais e específicos, bem como do referencial ou quadro teórico de base da pesquisa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2ª ETAPA</td><td>Identificação de instituições</td></tr>
<tr><td>Identificação de uma instituição que seja de:<br>• Referência,<br>• Aplicação, ou<br>• Referência e Aplicação.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3ª ETAPA</td><td>Escolha de elementos institucionais</td></tr>
<tr><td>Identificação e escolha dos elementos institucionais que se pretende analisar a partir daqueles apresentados no Quadro 4.1, eventualmente acrescidos de outros, com olhar no objeto de estudo ou do ensino visado, sem perca de vista das etapas precedentes.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4ª ETAPA</td><td>Estudo e apresentação da análise institucional de referência</td></tr>
<tr><td>Estudo de cada um dos elementos institucionais escolhidos na 3ª Etapa e apresentação de análises correspondentes com base nas definições dispostas na 1ª Etapa. Apresentação de considerações e reflexão sobre a implementação de possíveis propostas, soluções ou contribuições em torno da problemática nas instituições envolvidas na 2ª Etapa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase II: Organização, análises e aplicação de uma Sequência Didática</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| 5ª ETAPA | **Organização de uma SD**<br>Organização de uma SD contendo ao menos uma sessão de aplicação de um dispositivo experimental constituído de tipo de tarefas propostas na praxeologia dos objetos de estudo envolvidos na pesquisa ou construídos com base nesta praxeologia analisada na 4ª Etapa. |
| 6ª ETAPA | **Análise à priori**<br>Realização e apresentação de análise matemática/didática de cada tarefa, proposta no dispositivo experimental, considerando os conhecimentos que se pretende investigar sobre o objeto em jogo, com referências na sua praxeologia. |
| 7ª ETAPA | **Aplicação da sequência**<br>Negociação com os elementos da instituição de aplicação, descrição das suas condições e realização do experimento (aplicação) propriamente dito. |
| 8ª ETAPA | **Análise à posteriori**<br>Realização da análise das práticas efetivas dos sujeitos da pesquisa e validação. |
| AI&SD | |

Fonte: Henriques (2016)

Assim, visando apresentar o percurso metodológico que trilhamos, retomamos as etapas consideradas no Quadro 4.2, com as suas respectivas descrições, para justificar cada escolha que realizamos baseada nesta metodologia.

### 4.3 Percurso Metodológico

Como proposto no Quadro 4.2, a primeira etapa da Pesquisa Interna é constituída com os seguintes elementos:

| | |
|---|---|
| 1ª ETAPA | **Tomada de decisões iniciais**<br>Definição do tema/assunto da pesquisa. Apresentação da problemática e/ou de questões da pesquisa em torno do tema/assunto (Objeto do Saber de referência). Definição dos objetivos gerais e específicos, bem como do referencial ou quadro teórico de base da pesquisa. |

Nesta etapa, definimos o nosso tema da pesquisa, apresentamos a problemática, as questões de pesquisa, os objetivos que compõe o capítulo da Introdução neste trabalho. Em seguida apresentamos a análise histórica acerca das *Funções Trigonométricas* e o quadro teórico que compõe os capítulos 2 e 3, respectivamente.

| | |
|---|---|
| 2ª ETAPA | **Identificação de instituições**<br>Identificação de uma instituição que seja de:<br>• Referência,<br>• Aplicação, ou<br>• Referência e Aplicação. |

Motivados pelas discussões apresentadas na 1ª ETAPA, identificamos nesta, o Ensino Médio como instituição de referência. Escolhemos o Ensino Médio por ser um lugar de vida conceitual, pois *Funções Trigonométricas* é um Objeto do Saber reconhecido institucionalmente.

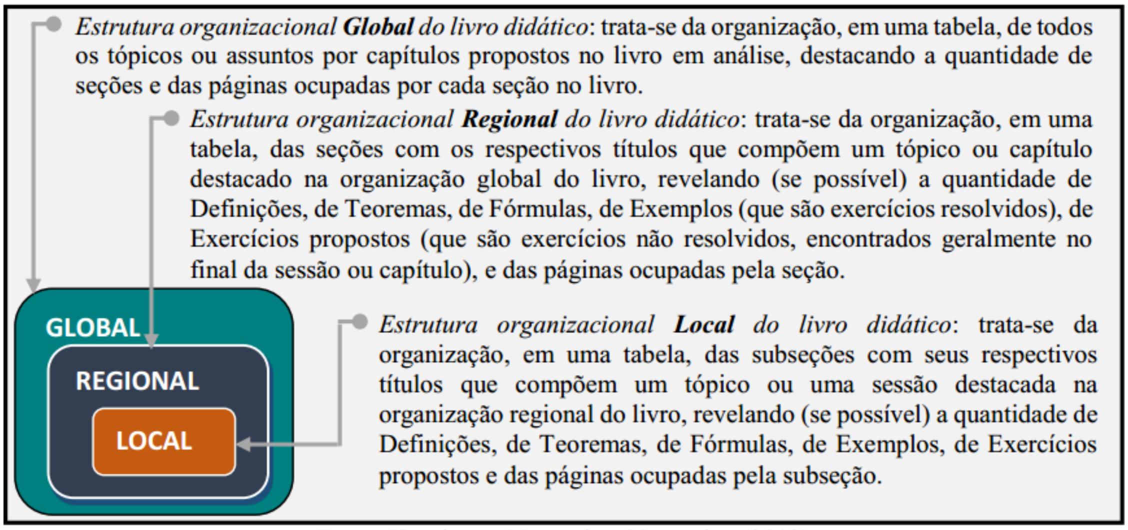
| | |
|---|---|
| 3ª ETAPA | Escolha de elementos institucionais<br>Identificação e escolha dos elementos institucionais que se pretende analisar a partir daqueles apresentados no Quadro 4.1, eventualmente acrescidos de outros, com olhar no objeto de estudo ou do ensino visado, sem perca de vista das etapas precedentes. |

Baseados nos elementos institucionais apresentados no Quadro 1, escolhemos nesta etapa analisar os seguintes elementos: as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, um Livro Didático do Ensino Médio e, a tecnologia (*GeoGebra*). Escolhemos analisar o documento oficial supracitado pois buscamos encontrar as orientações contidas para o ensino de *Funções Trigonométricas* e quais as habilidades e competências que são exigidas para os alunos do Ensino Médio em relação ao nosso Objeto do Saber.

| | |
|---|---|
| 4ª ETAPA | Estudo e apresentação da análise institucional de referência<br>Estudo de cada um dos elementos institucionais escolhidos na 3ª Etapa e apresentação de análises correspondentes com base nas definições dispostas na 1ª Etapa. Apresentação de considerações e reflexão sobre a implementação de possíveis propostas, soluções ou contribuições em torno da problemática nas instituições envolvidas na 2ª Etapa. |

Nos dedicamos nesta etapa à apresentação das análises dos elementos institucionais que escolhemos na **3ª ETAPA**, evidenciando, assim o documento oficial OCNEM. Tal documento é caracterizado como elemento importantíssimo para existência e institucionalização do Objeto do Saber visado, *Funções Trigonométricas* na instituição de referência. Além deste, foi analisado também Livro Didático, seguindo o modelo de análise proposto por Henriques, Nagamine e Nagamine (2012).

Quadro 4.3: Modelo de análise de Livros Didáticos




Fonte: Henriques, Nagamine e Nagamine (2012).

Compreendemos que a análise do LD é um momento importante, pois permite o aprofundamento dos conhecimentos acerca do Objeto do Saber. Diante do modelo apresentado no Quadro 4.3 percebemos que ele concede ao pesquisador uma visão geral dos objetos contidos no LD em questão. Além disso, essa análise contribuiu para revelar e identificar o habitat e o nicho do objeto do saber em questão.

| 5ª ETAPA | Organização de uma SD |
|---|---|
| | Organização de uma SD contendo ao menos uma sessão de aplicação de um dispositivo experimental constituído de tipo de tarefas propostas na praxeologia dos objetos de estudo envolvidos na pesquisa ou construídos com base nesta praxeologia analisada na 4ª Etapa. |

Baseados nas análises realizadas na **4ª ETAPA**, organizamos uma Sequência Didática (SD), contendo três Dispositivos Experimentais (**DE**) composto, no total, de 10 tarefas elaboradas com base nos conceitos de *Funções Trigonométricas*. Este dispositivo poderá ser aplicado aos alunos do Ensino Médio, utilizando os ambientes papel/lápis e computacional GeoGebra.

| 6ª ETAPA | Análise à priori |
|---|---|
| | Realização e apresentação de análise matemática/didática de cada tarefa, proposta no dispositivo experimental, considerando os conhecimentos que se pretende investigar sobre o objeto em jogo, com referências na sua praxeologia. |

Nesta etapa, apresentamos a análise *a priori* da nossa SD, quando destacamos os objetivos, as estratégias e as resoluções possíveis das tarefas que compõem o **DE**, os resultados esperados, as variáveis didáticas, os pré-requisitos e as competências dos sujeitos envolvidos na pesquisa, necessárias na realização de cada tarefa proposta no **DE** com base na praxeologia de *Funções Trigonométricas*.

A aplicação da SD acontece na **7ª ETAPA** da metodologia. No entanto esta Dissertação não abrange a dimensão externa da metodologia. Todavia, a SD organizada na quinta etapa e trabalhada no âmbito de análise a priori na sexta, poderá ser aplicada posteriormente aos alunos das IEB. Assim, nesta Dissertação, deixamos estes trabalhos como perspectivas de pesquisas futuras.

Apresentamos no próximo capítulo a análise institucional acerca dos elementos escolhidos na 3ª ETAPA deste percurso metodológico.

# 5. ANÁLISE INSTITUCIONAL DE REFERÊNCIA

Dedicamos este capítulo à apresentação das análises dos elementos institucionais que escolhemos na 3ª ETAPA da AI&SD. Apresentamos tais análises, na ordem que aparecem no Quadro 5.1, que nos levaram a compreender as propostas dos documentos escolhidos, relativamente ao ensino-aprendizagem da Matemática sobre as *Funções Trigonométricas,* contribuindo efetivamente na elaboração de uma Sequência Didática (SD), visando o estudo das práticas institucionais dos alunos envolvidos nesta pesquisa sobre essas funções. O Quadro 5.1 apresenta a organização deste capítulo.

Quadro 5.1: Elementos Institucionais

| |
|---|
| 1. Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCNEM) |
| 2. Livro Didático (LD) |
| 3. Tecnologias |

Fonte: Produção dos autores

## 5.1. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCNEM)

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio foram elaboradas a partir de ampla discussão com as equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública e representantes da comunidade acadêmica. O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

Nesta análise estamos focando no Volume 2 que é referente à área de Ciências Exatas. Os autores do documento apresentam primeiro os conhecimentos de Biologia, seguidos dos conhecimentos de Física, Matemática e por fim Química.

Nas orientações referentes aos conhecimentos de Matemática, os autores apresentam questões de conteúdo, metodologia, utilização de tecnologia e organização curricular. Com foco no nosso objeto matemático, *Funções Trigonométricas*, analisamos a seção do documento referente às questões de conteúdo e por utilizarmos tecnologia na sequência didática que elaboramos para esta Dissertação, analisaremos também a seção referente às orientações acerca das tecnologias.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e Probabilidade. Isso não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles. No que se refere ao estudo das *Funções Trigonométricas*, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio. É preciso atenção à transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. As *Funções Trigonométricas* devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0º e 180º. Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às *Funções Trigonométricas*, aqui entendendo que, quando se escreve $f(x) = \text{sen}(x)$, usualmente a variável $x$ corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As *Funções Trigonométricas*, denominadas, **seno** e **cosseno** também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais *Funções Trigonométricas* pode e deve ser colocado em segundo plano.

Encontramos, portanto, neste elemento institucional ou documento oficial, sendo reforçado para o ensino, o resultado apresentado na conclusão da análise histórica, no que diz respeito a relação existente entre a trigonometria do triângulo retângulo e as *Funções Trigonométricas*.

Em relação à utilização de tecnologias para o ensino de Matemática, por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. Considerando a **Matemática para a Tecnologia**, deve-se pensar na formação que capacita para o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, dois instrumentos de trabalho bastante corriqueiros nos dias de hoje. Pensando na **Tecnologia para a Matemática**, há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o "pensar matematicamente", ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. São características desses programas:

> a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento;
> b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica;
> c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macro construções;
> d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Por fim, ressalta-se a intenção deste documento em subsidiar as discussões sobre as orientações curriculares para o ensino médio no que se refere à Matemática. Contudo, cada professor, junto com seus pares e seus alunos, deve definir o currículo de Matemática a ser colocado em ação, sempre buscando uma formação matemática que privilegie o essencial e o significativo. No tratamento desses conteúdos, deve-se buscar o equilíbrio na atenção aos diversos ramos da Matemática. Deve-se, igualmente, afastar-se da compartimentalização e procurar ampliar as ocasiões de articulação entre os diferentes temas, atendendo a requisitos de diversidade, e lembrar-se de que um mesmo conceito matemático pode ser abordado em mais de um dos blocos de conteúdo. Com objetivo de verificar tais articulações entre diferentes temas, apresentamos a seguir a análise do Livro Didático adotado na Instituição de Referência.

## 5.2 Análise do livro didático adotado na Instituição de Referência

Dedicamos esta parte do nosso trabalho a análise do terceiro elemento institucional que destacamos no Quadro 5.1, notadamente o Livro Didático (LD), pois, compreendemos que esse é um dos elementos ou recursos didáticos indispensáveis no processo de ensino aprendizagem. Para realizarmos esta análise nos baseamos no modelo praxeológico e nas estruturas organizacionais: global, regional e local, propostos por Henriques, Nagamine & Nagamine (2012) que apresentamos anteriormente na metodologia, evidenciando o lugar de vida conceitual do objeto do Saber *Funções Trigonométricas*.

Para a nossa análise, consideramos a obra composta de três volumes representados pelas imagens da Figura 5.2, destinados para o ensino da Matemática nas três séries do Ensino Médio, sendo um volume para cada série, escolhido pelos Professores de Matemática da instituição de referência da nossa pesquisa no triênio 2018-2020, período este que contempla o período de realização da nossa Dissertação.

Figura 5.2: Coleção Contato Matemática


Fonte: Dados da pesquisa

O nosso objeto de estudo, *Funções Trigonométricas*, encontra um habitat no segundo volume dessa coleção que reapresentamos no Quadro 5.6, destacando, além do título, a referência completa desse volume, doravante também denominado Livro Didático de Referência (LDR) da análise praxeológica, onde **P/n** indica o lugar ocupado pelas *Funções Trigonométricas* (FT), **P** indica o número de páginas ocupadas, exclusivamente, pelas FT e **n** o número total de páginas do LDR.

Quadro 5.6: Livro Didática de Referência (LDR) da análise praxeológica

| Referência do livro Título, autor, edição, volume editor, ano de edição | P/n |
|---|---|
| Sousa, Joamir Roberto de. #Contato Matemática, 2º ano / Joamir Roberto de Sousa, Jaqueline da Silva Ribeiro Garcia – 1ª ed – São Paulo: FTD, 2016. | 13/288 |

Fonte: Dados da pesquisa

Para a realização da análise de um LD, Henriques, Nagamine e Nagamine (2016) propõem o modelo que consiste em três estruturas organizacionais notáveis em um Livro Didático, a saber: global, regional e local que apresentamos anteriormente na Figura 4.5 (cf. capítulo da metodologia). Utilizando esse modelo, apresentamos a seguir a estrutura organizacional Global do Livro Didático que analisamos.

### 5.2.1 Estrutura Organizacional Global do Livro Didático

Conforme se pode observar na Tabela 5.1, que consiste na estrutura organizacional global do segundo volume #Contato Matemática, adotado pela Instituição de referência, o LDR da análise praxeológica de *Funções Trigonométricas,* é composto de 9 capítulos, 60 seções constituindo 288 páginas. Nessa estrutura, podemos imediatamente, visualizar os assuntos propostos em cada capítulo, a quantidade de seções e de páginas ocupadas por cada assunto. Com efeito, encontramos o habitat do nosso objeto de estudo no primeiro capítulo composto de 6 seções, ocupando 36 páginas do livro.

Tabela 5.1: Estrutura organizacional global

| Capítulo | Assuntos | Seções | Páginas |
|---|---|---|---|
| - | Apresentação/Sumário | - | 7 |
| 1 | Trigonometria | 6 | 36 |
| 2 | Matrizes e determinantes | 10 | 30 |
| 3 | Sistemas lineares | 5 | 22 |
| 4 | Análise combinatória | 8 | 28 |
| 5 | Probabilidade | 6 | 30 |
| 6 | Áreas de figuras planas | 5 | 22 |
| 7 | Geometria espacial de posição | 7 | 24 |
| 8 | Figuras geométricas espaciais | 13 | 64 |
| **Tópicos complementares** | | | |
| - | Acessando tecnologias | - | 9 |
| - | Ampliando seus conhecimentos | - | 2 |
| - | Respostas | - | 13 |
| - | Bibliografia consultada | - | 1 |
| Total | | 60 | 288 |

Fonte: Dados da pesquisa

Além dos assuntos propostos nos capítulos e dos tópicos complementares após apresentação do último capítulo, observamos que cada capítulo dessa obra traz a seguinte organização:

- Introdução do capitulo
- Apresentação do conteúdo
- Apresentação dos Exercícios resolvidos;
- Apresentação dos Exercícios propostos para os alunos

Para buscar a concretização de conceitos explorados no decorrer do capítulo, o livro é complementado por seções que abordam:

- Questões comentadas e resolvidas;
- Textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, para incentivar o aluno a desenvolver a competência de leitura.

Para melhor compreensão do habitat de FT, apresentamos a seguir a análise organizacional regional do LCR.

### 5.2.2. Estrutura Organizacional Global do Livro Didático

Ao iniciar a análise da estrutura organizacional regional deste livro percebemos que o autor não apresenta todas as *Funções Trigonométricas*, conforme apresentamos no capítulo 1, a saber: funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

Tabela 5.3: Estrutura organizacional regional de *Funções Trigonométricas*

| Seções | Título das seções | Def | Teo | Fór | Ex | Exp | Pág |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | Introdução | - | - | - | - | - | 2 |
| 1 | Trigonometria no triângulo retângulo | 1 | - | - | 5 | 18 | 8 |
| 2 | Seno, cosseno e tangente de um arco | - | - | - | 3 | 12 | 6 |
| 3 | *Funções Trigonométricas* | 2 | - | - | 5 | 17 | 12 |
| 4 | Fórmulas de transformação | - | - | 6 | 2 | 8 | 2 |
| 5 | Relações trigonométricas | - | - | 2 | 2 | 12 | 2 |
| 6 | Equações trigonométricas | - | - | - | 1 | 8 | 2 |
| | | - | - | - | - | - | 2 |
| TOTAL | | 3 | - | 8 | 18 | 75 | 36 |
| Def: Definições, Teo: Teoremas, Fór: Fórmulas, Ex: Exemplos, Exp: Exercícios propostos, Pág: Páginas | | | | | | | |

Fonte: Dados da pesquisa

Como podemos observar na tabela 5.2. O autor se restringe apenas a apresentar em '*Funções Trigonométricas*' apenas duas definições, a saber: definição da função seno e definição da função cosseno. Deste modo, não realizamos a análise organizacional local porque o referido livro não é capaz de nos dar o suporte necessário para a organização de uma Sequência Didática (SD) com base nas seis *Funções Trigonométricas*.

Para tentarmos suprir a ausência observada durante a análise do LDR, preferimos analisar outro livro, então buscamos informações acerca de livros utilizados em triênios anteriores ao do LD analisado. No entanto, não foi possível encontrar, num intervalo de 10 anos, LD utilizado na instituição de referência, que constasse as seis *Funções Trigonométricas*. Deste modo, decidimos direcionar  análise a um LD que apresentamos no Quadro 5.7, e denominamos Livro Didático Complementar (LDC), utilizado por escolas particulares, localizadas na região de influência da UESC, no mesmo triênio considerado no livro anterior, onde conforme vemos, imediatamente, a partir da sua Estrutura Organizacional Global (cf. Tabela 5.3), em concordância com o Quadro 5.7 que P/n indica o lugar ocupado pelas *Funções Trigonométricas* (FT), onde P representa o número de páginas ocupadas exclusivamente por esse objeto do saber (FT) e n o número total de páginas do livro.

Quadro 5.7: Referência completa do LDC

| Referência do livro Título, autor, edição, volume editor, ano de edição | P/n |
|---|---|
| Matemática: Paiva / Manoel Paiva - 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2015. Obra em 3v. Bibliografia. 1. Matemática  (Ensino médio) I. Título. | 58/272 |

Fonte: Dados da pesquisa

### 5.2.3. Estrutura Organizacional Global do Livro Didático

O volume do livro escolhido é composto por três partes (assim o autor denomina), verificando em todas encontramos o habitat de *Funções Trigonométricas* na parte I. Observando a Tabela 5.3, que consiste na estrutura organizacional global da parte I, do volume adotado pela Instituição de referência, é possível notarmos que essa obra é composta de 5 capítulos, 20 seções ocupando 272 páginas. Com essa estrutura, podemos imediatamente, visualizar os assuntos propostos em cada capítulo, a quantidade de seções e de páginas ocupadas por cada assunto. Com efeito, encontramos o *habitat* do nosso objeto de estudo no quinto capítulo composto de 4 seções, ocupando 58 páginas do livro.

Tabela 5.3: Estrutura organizacional global do LDC

| Capítulo | Assuntos | Seções | Páginas |
|---|---|---|---|
| - | Apresentação/Organização desde livro/Sumário geral | - | 19 |
| 1 | Sequências | 3 | 53 |
| 2 | Trigonometria no triângulo retângulo | 2 | 23 |
| 3 | A circunferência trigonométrica: seno, cosseno e tangente. | 6 | 58 |
| 4 | Outras razões trigonométricas, adoção de arcos e resolução de triângulos. | 5 | 38 |
| 5 | *Funções Trigonométricas.* | 4 | 58 |
| **Tópicos complementares** | | | |
| - | Respostas | - | 22 |
| Total | | 60 | 288 |

Fonte: Dados da pesquisa

Além dos assuntos propostos nos capítulos e os tópicos complementares após apresentação do último capítulo, observamos que cada capítulo dessa obra traz a seguinte organização:

- Introdução do capitulo
- Objetivos
- Apresentação do conteúdo
- Apresentação dos Exercícios resolvidos;
- Apresentação dos Exercícios propostos para os alunos
- Questões comentadas e resolvidas;
- Textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, para incentivar o aluno a desenvolver a competência de leitura;
- Análise da resolução.

Constatamos que o autor da obra se preocupa com a apresentação de situações contextualizadas e interdisciplinares, permitindo conexões de conceitos matemáticos com algumas situações do cotidiano dos alunos e com outras áreas do conhecimento, indo assim, ao encontro com as ideias preconizadas nos OCNEM. Além disso, o autor reforça as ideias desses documentos oficiais no que se refere ao papel formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático.

Para compreendermos melhor as ecologias (*habitat* e nicho) das *Funções Trigonométricas*, proposto pelo autor dessa obra apresentamos, a seguir, a sua estrutura organizacional regional, destacado no quinto capítulo.

### 5.2.4. Estrutura Organizacional Regional do Livro Didático

Apresentamos na Tabela 5.3 a estrutura organizacional regional do livro didático que analisamos, relativamente ao estudo de *Funções Trigonométricas*, destacando as seções, onde se discutem os temas envolvidos na nossa investigação.

Tabela 5.3: Estrutura organizacional regional de *Funções Trigonométricas*

| Seções | Título das seções | Def | Teo | Fór | Ex | Exp | Pág |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | | - | - | - | - | - | 1 |
| 1 | As funções seno e cosseno | 2 | - | - | 15 | 11 | 13 |
| 2 | Movimentos periódicos | - | - | - | 2 | 5 | 6 |
| 3 | Outras *Funções Trigonométricas* | 4 | - | - | 13 | 9 | 15 |
| 4 | *Funções Trigonométricas* inversas | 3 | - | - | 16 | 22 | 12 |
| - | Exercícios complementares | - | - | - | - | 67 | 8 |
| - | Pré-requisitos para o capítulo 6 | - | - | - | - | 2 | 1 |
| - | Matemática sem fronteiras | - | - | - | - | 2 | 1 |
| - | Análise da resolução | - | - | - | 1 | - | 1 |
| TOTAL | | 9 | - | - | 47 | 118 | 58 |
| Def: Definições, Teo: Teoremas, Fór: Fórmulas, Ex: Exemplos, Exp: Exercícios propostos, Pág: Páginas | | | | | | | |

Fonte: Dados da pesquisa

Em concordância com a estrutura organizacional global apresentada na Tabela anterior, é possível vermos com essa estrutura que o quinto capítulo da obra em análise é organizado, regionalmente, com 4 seções, das quais centraremos as nossas análises na primeira e na terceira. Assim, apoiando-nos no modelo de análise de LD proposto por Henriques, Nagamine & Nagamine (2012), evidenciamos a quantidade de Definições, dos Exemplos (que são exercícios resolvidos), dos Exercícios Propostos e o Número de Páginas ocupadas por cada uma destas seções na obra.

Contudo, esta organização regional não é suficiente para emergir a praxeologia inerente a cada um dos objetos de estudos propostos em cada uma das seções. Assim, com o interesse de aprimorar a nossa análise, apresentamos a seguir a estrutura organizacional Local da primeira e da terceira seção destacadas na Tabela 5.3.

### 5.2.5. Estruturas Organizacionais Locais de *Funções Trigonométricas*

Conforme se pode observar na Tabela 5.3, a Estrutura Organizacional Regional revela duas seções (1 e 3) onde o autor da obra apresenta, localmente, os conceitos matemáticos de referência envolvidos, explicitamente, na nossa pesquisa, denominados na Estrutura Organizacional Global como *Funções Trigonométricas*. Com base nesse destaque, apresentamos a análise local de cada uma dessas seções, revelando, inicialmente, a sua estrutura organizacional local. Essa análise nos permitirá destacar efetivamente, a praxeologia de cada um dos objetos propostos nesse livro, para o ensino e a aprendizagem de *Funções Trigonométricas* na Instituição de Referência.

O autor inicia o capítulo com um breve texto relacionando fenômenos periódicos com *Funções Trigonométricas*. Além disso, o autor apresenta uma ilustração de discotecagem, e explica matematicamente o porquê de um DJ[11] consegue tocar por horas, sobrepondo o fim de uma música ao começa da outra, sem pausas ou mudança de ritmos, justificado por movimentos periódicos.

Acreditamos que a intenção do autor do LD com essa introdução, é de buscar evidenciar o reconhecimento, no contexto social, de diferentes significados e representações dos conceitos matemáticos apresentados neste capítulo.

Aprofundamos a seguir a análise do capítulo, investigando como o autor apresenta os conteúdos em cada seção.

### 5.2.6 Estrutura Organizacional Local da seção 1 - as funções seno e cosseno

Apresenta-se na Tabela 5.4 um recorte regional que restringe localmente o estudo de funções denominados seno e cosseno.

Tabela 5.4: Estrutura organizacional local da seção 1 - as funções seno e cosseno

| Seção | Título da seção | Def | Teo | Fór | Ex | Exp | Pág |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | As funções seno e cosseno | 2 | - | - | 15 | 11 | 13 |
| TOTAL | | 2 | - | - | 15 | 11 | 13 |
| Def: Definições, Teo: Teoremas, Fór: Fórmulas, Ex: Exemplos, Exp: Exercícios propostos, Pág: Páginas | | | | | | | |

Fonte: Dados da pesquisa

[11] **DJ** é uma sigla em inglês que significa *disc jockey*, ou em português: disco jóquei. Um DJ é um artista responsável por transmitir música (muitas vezes da sua autoria) na rádio, televisão ou em qualquer local onde se ouça música (boates, discotecas, etc.).

Observando essa tabela podemos ver que o ensino das Funções denominadas seno e cosseno, é proposto, apenas, com 2 definições, 15 exemplos (que são exercícios resolvidos pelo autor), 11 exercícios propostos e, ocupa 13 páginas do livro.

O autor apresenta, também no início da seção, os objetivos que pretende alcançar com a praxeologia desse objeto, a saber:

- Identificar as funções seno e cosseno;
- Representar graficamente funções que envolvem seno e cosseno;
- Analisar as funções seno e cosseno segundo sua periodicidade, sinal, raízes e conjunto imagem.

Além disso, o autor apresenta, imediatamente, um exemplo relacionando uma roda gigante ao círculo trigonométrico. No mesmo exemplo ele apresenta dois gráficos, solicitando ao leitor observar que o gráfico se repete após um ponto que satisfaz a lei ou expressão correspondente completar uma volta.

Acreditamos que a abordagem apresentada pelo autor nessa seção, pode contribuir significativamente no despertar do interesse dos alunos sobre o estudo de objetos matemáticos, pois ao trazer situações concretas, o mesmo demonstra a importância de conceitos matemáticos e as suas relações com outras áreas do conhecimento, revelando uma praxeologia modelada de *Funções Trigonométricas*.

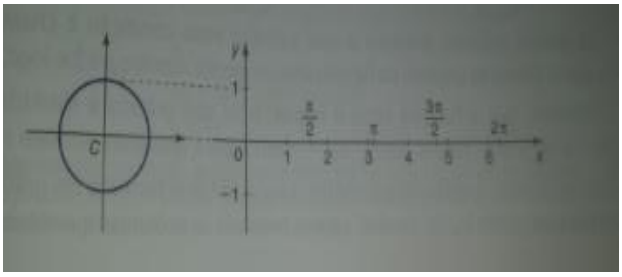
Entendemos, portanto, que esta seja uma introdução sucinta para o conceito de periodicidade. O autor divide esta seção em subseções. Na primeira subseção apresenta-se, apenas, as definições de função seno e cosseno, identificando os conjuntos Domínio e Imagem de cada função. Com efeito, na página 195, podemos ler:

"Desse modo, definimos as funções $f(x)$=sen($x$) e $g(x)$=cos($x$):

- A função é a que associa cada número real $x$ a um único número real $y$ tal que $y$=sen $x$.
- A função cosseno é a que associa cada número real x a um único número real $y$ tal que: $y$=cos $x$."

Na subseção seguinte, denominada "O gráfico da função seno", o autor utiliza um método de esboçar o gráfico, que ele denomina "método geométrico". Para aplicar esse método nesse esboço do gráfico da função seno, considera o sistema de coordenadas cartesianas plano, realizando duas representações desse sistema em espaços distintos do mesmo plano, conforme mostrado na Figura 5.3. Em um destes, ele constrói uma circunferência, de raio medindo uma unidade de comprimento, centrada na origem. Em outro, ele relaciona o eixo das abscissas como o eixo dos cossenos e o eixo das ordenadas como o eixo dos senos, de sorte que a unidade destes eixos seja igual a medida do raio da circunferência, que o autor designa de circunferência trigonométrica.

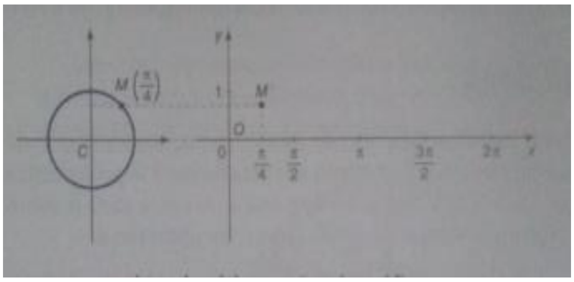
Figura 5.3: Passo 1 método geométrico



Fonte: LDC, p. 195

A seguir, o autor marca no plano cartesiano os pontos ($x$,$y$), tais que $y$=sen($x$). Por exemplo, transporta-se o seno do arco de medida π/4 para o eixo Oy como ordenada do ponto M', cuja abscissa é π /4. Assim o ponto M' deve pertencer ao gráfico da função seno de $x$, conforme mostra-se na Figura 5.4.

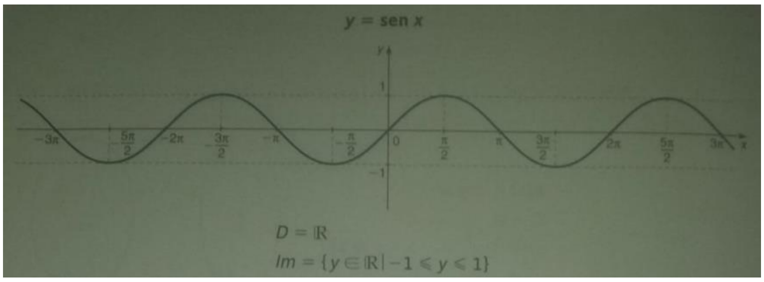
Figura 5.4: Passo 2 método geométrico



Fonte: LDC, p. 196

A partir daí, repete-se o procedimento obtendo vários pontos do gráfico. Então, considerando os infinitos pontos da circunferência que devem ser um dos vértices de triângulos retângulos de um dos lados sobre o eixo-$x$ (trigonométrica do triângulo retângulo), o autor conclui a construção do gráfico, conforme Figura 5.5, sem justificar como obtém a extensão do gráfico para os valores negativos do eixo-$x$, e muito menos para valores do ângulo considerado, associado aos valores de $x$, com $x > 2\pi$.

Figura 5.5: Passo 3 método geométrico




Fonte: LDC, p. 196

O autor finaliza a apresentação do conteúdo abordando os conceitos de período e função ímpar, que já foram definidos em capítulos anteriores e, após apresenta sete exemplos, que não analisamos aqui.

Observamos que na abordagem do conteúdo, o autor utiliza uma técnica que ele denomina método geométrico, e na apresentação de exemplos ele utiliza a técnica de elaborar tabela de valores. Além disso, o autor denomina uma equação, em especial a equação trigonométrica representada por $y$=sen($x$), como sendo função. O que é, conceitualmente, um equívoco. Nesse âmbito, concordamos com Henriques (2019), quando sublinha:

> [...] três termos nos incomodam no enunciado deste exemplo, a saber: "**gráfico de equação**", "**retas** $x = -1$ **e** $x = 1$" e "**Determine**", com base em duas teorias apresentadas anteriormente e na nossa concepção sobre o conceito de função e de equação. <u>No primeiro termo</u>, atribuímos a menção "**gráfico**" à "**função**" e vice-versa e, não à "**equação**", porque uma equação nem sempre resulta em um gráfico, no sentido de que todo elemento do domínio da função tenha uma única imagem, ou seja um valor funcional. Para isso, é suficiente considerar a equação dada por $x^2 + y^2 = a^2$ sendo, no registro gráfico, uma **curva** que não é um **gráfico**. Pois, para todo valor de $x$ no intervalo fechado de extremidades -$a$ e $a$ possui duas imagens. Portanto, a menção "**equação**" deve ser atribuída a "**curva**" no registro gráfico. Assim, é inconveniente evocar o termo **gráfico**, quando nos referimos a **equação**. Estamos querendo mostrar que se deve estabelecer uma coerência conceitual entre as noções em pauta, inclusive as superfícies, [...]. (HENRIQUES, 2019.p. 118).

A referida inconveniência ou mesmo equívoco, acontece inúmeras vezes na apresentação na praxeologia do autor, no livro em análise. Assim, a função em questão, deve ser representada considerando a notação $f(x)$=sen($x$) em vez de $y$=sen($x$) que denota uma equação.

Chamamos atenção ao exemplo 5, quando o autor escreve:

> "Esboçar o gráfico da função y = sen(π/2+$x$)", pois este exemplo é utilizado com duas finalidades: apresentar o conceito de translação horizontal e iniciar a subseção subsequente, pois para qualquer valor de $x$, temos sen(π/2+$x$) = cos($x$). De fato: a partir da relação trigonométrica
> $$sen(a+b) = sen(a).\cos(b) + \cos(a).sen(b)$$
> tem-se, fazendo $a = \frac{\pi}{2}$ e $b = x$, que:
> $$sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).sen(x)$$
> ou equivalentemente:
> $$sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$
> já que $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
> Portanto, podemos concluir que o gráfico da função $f(x)$=sen(π/2+$x$) é o mesmo que o gráfico da função $g$ = cos($x$).

Podemos observar que o autor mobiliza três registros simultaneamente: o registro algébrico da função seno, o registro gráfico e a língua materna, realizando, por conseguinte, a conversão da função $f$ de $x$ igual seno $x$, entre esses registros.

Assim, é observável que o autor busca, por meio de diferentes registros de representação, a compreendido do conteúdo tratado de forma que seja claramente possível.

Dando continuidade aos nossos estudos apresentamos a abordagem realizada pelo autor na subseção que ele denomina *O gráfico da função cosseno*, a qual apresenta apenas um gráfico e finaliza a subseção com seis exemplos, mobilizando cinco técnicas para traçar o gráfico da função cosseno no quinto exemplo. Deste modo, o autor aproveita as técnicas e as representações já utilizadas na resolução do exercício para apresentar o gráfico desta função.

Essa subseção é sucedida pela apresentação da subseção intitulada *Períodos das funções seno e cosseno*, onde o autor justifica os cálculos utilizados para encontrar os períodos de funções do tipo:

$$f(x) = a + b\mathrm{sen}(mx + q)$$
$$g(x) = a + b\cos(mx + q),$$

onde observamos que o autor mobiliza apenas o registro algébrico para apresentar o conteúdo. Em seguida, apresenta dois exemplos e onze exercícios propostos, concluindo assim o estudo das funções seno e cosseno.

A título de ilustrarmos a praxeologia mobilizada pelo autor na realização das tarefas correspondentes aos exemplos, escolhemos o exercício resolvido número 11, localizado na página 202 que reproduzimos na primeira coluna do Quadro 5.8 e, rescrita no contexto de **Tarefa**, na segunda coluna.

Quadro 5.8: Reprodução e reescrita do exercício nº 11. p. 202

<table>
<tr><th>Exercício resolvido no livro</th><th colspan="3">Reescrita, no contexto de tarefa</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Esboçar o gráfico da função y=|cos x|.</td><td rowspan="3">T1</td><td colspan="2">Considerar a função f de x dada por f(x)=|cos x| para realizar as seguintes subtarefas:</td></tr>
<tr><td>St1</td><td>Analisar a expressão da função f para decidir sobre o comportamento de f no registro gráfico.</td></tr>
<tr><td>St2</td><td>Representar a função f no registro gráfico</td></tr>
</table>

Fonte: PAIVA, p. 202.

Destacamos 4 **Técnicas** (Tec) mobilizadas pelo autor referentes a praxeologia da Tarefa T1, associada ao exercício resolvido em questão, a saber:

**Tec1:** Considerar a função *g(x)=cos x*, como função auxiliar;

**Tec2:** Considerar a condição de que se cos $x \geq 0$, então $|\cos x| = \cos(x)$;

**Tec3:** Considerar a condição de que se cos $x < 0$, então $|\cos x| = -\cos(x)$;

**Tec4:** Traçar o gráfico da função f($x$) = |cos $x$|.

**Tecnologia**: Primeiro, o autor constrói o gráfico da função auxiliar $g(x) = \cos(x)$. Em seguida, considera-se que, quando $\cos(x) \geq 0$, então $|\cos x| = \cos(x)$. Graficamente, isso significa que os pontos do gráfico auxiliar que tiverem a ordenada positiva ou nula permanecem inalterados. Considerar a condição de que, quando $\cos(x) < 0$, então $|\cos x| = -\cos(x)$. Graficamente, isso significa que os pontos do gráfico auxiliar que tiverem ordenada negativa, devem ser transformados nos pontos simétricos aos do gráfico de $g(x)$ em relação ao eixo das abcissas. Por fim, o autor apresenta a função $f(x) = |\cos x|$, no registro gráfico.

**Teoria**: *Funções Trigonométricas*/função cosseno.

Podemos, então, notar que essa tarefa constitui, uma praxeologia completa **(Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria)**, na medida em que o autor evidencia os conhecimentos tecnológico-teóricos sobre os quais se apoia para explicar o que acontece com o gráfico da função $f(x) = |\cos x|$ bem como a sua representação no registro gráfico.

#### 5.2.7 Estrutura Organizacional Local da seção 3 - Outras *Funções Trigonométricas*

Conforme sublinhamos anteriormente, a nossa análise local de *Funções Trigonométricas* compreende também o recorte regional que restringe localmente o estudo dos objetos designados pelo autor da obra por *Outras Funções Trigonométricas*, que apresentamos na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Estrutura organizacional local da seção 3 - Outras *Funções Trigonométricas*

| Seção | Título da seção | Def | Teo | Fór | Ex | Exp | Pág |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Outras *Funções Trigonométricas* | 4 | - | - | 13 | 9 | 15 |
| TOTAL | | 4 | - | - | 13 | 9 | 15 |
| Def: Definições, Teo: Teoremas, Fór: Fórmulas, Ex: Exemplos, Exp: Exercícios propostos, Pág: Páginas | | | | | | | |

Fonte: Dados da pesquisa

A leitura dessa tabela nos permite ver que o ensino de Outras *Funções Trigonométricas* é proposto com 4 definições, 13 exemplos (que são exercícios resolvidos pelo autor), 9 exercícios propostos e, ocupa 15 páginas do livro.

O autor visa proporcionar uma continuidade ao estudo de *Funções Trigonométricas*, apresentando a praxeologia das funções tangentes, cotangente, cossecante e secante. Com efeito, nas páginas 213, 220, 222 e 225 podemos ler:

- “A função tangente é a que associa cada número real x, com $x \neq \pi/2 + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, a um único número real y tal que: $y = \text{tg}\, x$.
- A função cotangente é a que associa cada número real x, com $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, a um único número real y tal que: $y = \text{cotg}\, x$.
- A função secante é a que associa cada número real x, com $x = \pi/2 + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, a um único número real y tal que: $y = \text{cosec}\, x$.
- A função tangente é a que associa cada número real x, com $x = \pi/2 + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, a um único número real y tal que: $y = \sec x$.”

Os objetivos da seção são identificar, representar e analisar cada função segundo sua periodicidade, raízes e conjunto imagem.

O autor inicia o conteúdo com um exemplo e em seguida apresenta a definição de função tangente e utiliza o método geométrico para esboçar o gráfico. Após, o autor apresenta quatro exemplos, seguidos de uma subseção que ele denomina o período da função tangente e mais um exemplo antes de definir função cotangente. As subseções seguintes têm a mesma estrutura: definição da função - apresentação do gráfico - exemplos. O autor finaliza a seção com exercícios propostos.

De modo análogo a apresentação anterior, selecionamos, nesse local, o exercício resolvido número 19 que reproduzimos e reelaboramos no Quadro 5.9.

Quadro 5.9: Reprodução e reescrita do exercício nº 19. p. 216

<table>
<tr><th>Exercício resolvido no livro</th><th colspan="3">Reescrita, no contexto de tarefa</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Esboçar o gráfico da função y=tg(2x)</td><td rowspan="2">T2</td><td colspan="2">Considerar a função f de x dada por f(x)=tg(2x) para realizar a seguinte subtarefa:</td></tr>
<tr><td>St1</td><td>Representar a função f no registro gráfico</td></tr>
</table>

Fonte: PAIVA, p. 216

Aqui também, destacamos 4 **Técnicas** (Tec) mobilizadas pelo autor referentes a praxeologia da **Tarefa** T2, associada ao exercício resolvido em questão, a saber:

**Tec1:** Construir uma tabela com valores de referências;

**Tec2:** Determinar assíntotas verticais;

**Tec3:** Esboçar o gráfico referente a um período da função em questão;

**Tec4:** Deduzir o gráfico completo da função tangente de dois *x*.

**Tecnologia**: O autor constrói uma tabela, atribuindo a variável *x* alguns valores, calculando os valores correspondentes para *y*, para determinar alguns pontos de referência para o esboço do gráfico de um período da função em questão. Considerando $x = -\pi/4$ e

$x = \pi/4$, o autor mostra que a função $f(x)=tg(2x)$, não é definida para esses valores, logo duas assíntotas verticais passam pelos pontos de abcissa - $\pi/4$ e $\pi/4$. Em seguida, o autor fornece a representação da função $f(x)=tg(2x)$, no registro gráfico, considerando um período desta função. A partir daí, pode-se deduzir, então, o gráfico completo, que será formado por infinitas repetições do período já determinado.

**Teoria**: *Funções Trigonométricas*/função tangente.

De modo análogo a análise da T1 apresentada na seção anterior, podemos, então, notar que essa Tarefa T2, também constitui, de fato, uma praxeologia completa **(Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria).**

Conseguimos identificar que o autor se apropria de uma praxeologia usual, em algumas partes da sua abordagem do assunto, mas também da praxeologia modelada. Em outras partes. Além disso, podemos concluir, após análises realizadas na estrutura organizacional **global**, **regional** e **local** deste **LD**, que as *Funções Trigonométricas* encontram um espaço na instituição de referência (Ensino Médio), na medida em que o referido **LD** é institucionalizado a partir da escolha realizada por essa instituição com base nas orientações do Ministério da Educação, tornando-se uma obra de interesse de pesquisas em Educação Matemática. Com efeito, as análises que acabamos de realizar nessa obra acerca de *Funções Trigonométricas* revelam uma completude, entre a praxeologia usual e a modelada de forma completa. Ou seja, apresentam-se (**Teoria, Tecnologia, Técnica e Tarefa**) e (**Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria**), nessas ordens, respectivamente.

É sabido da existência de meios tecnológicos que podem contribuir potencialmente nas organizações, mobilização e na aprendizagem de alunos de objetos de saberes nessas praxeologias, a citar, o ambiente computacional *GeoGebra*. Como sublinhado anteriormente na introdução, o *software GeoGebra* me auxiliou na superação de algumas dificuldades referentes a minha aprendizagem dos objetos de estudo de referência desta Dissertação. Visando aprofundar, mais ainda os meus conhecimentos em torno da utilização dos recursos tecnológicos proporcionados por esse ambiente, e responder o questionamento que nos colocamos no início deste trabalho, nos declinamos na apresentação da análise que realizamos acerca deste *software* que utilizaremos durante a elaboração da nossa SD.

## 5.3. A tecnologia enquanto elemento institucional

Dedicamos esta seção à apresentação da análise do *software GeoGebra*, sendo a tecnologia escolhida enquanto elemento institucional envolvido na nossa pesquisa, com o objetivo de identificar as suas potencialidades, bem como os seus entraves relativos ao estudo de *Funções Trigonométricas*.

Para a realização da análise dos recursos do ambiente computacional *GeoGebra* e, compreender como estes podem auxiliar no estudo das relações possíveis entre os registros algébrico, numérico e gráfico de tarefas que envolvam a Teoria de *Funções Trigonométricas*, ressaltamos as considerações propostas por Henriques, Attie e Farias (2007) que apresentam duas dimensões para a utilização de um ambiente computacional, que são: a *instrumentação* e a *instrumentalização*, bem como as *técnicas instrumentais* que podem ser executadas nesse ambiente. Estes autores reforçam ainda que "é necessário analisar os comandos disponíveis no *software* e as suas sintaxes".

Entendemos que a utilização dos comandos e das sintaxes é fundamental para a *gênese instrumental*, pois além de possibilitar a realização de tarefas matemáticas no ambiente computacional, potencializa as práticas usuais do ambiente papel/lápis.

Vale sublinhar que a escolha do *GeoGebra* se deu devido as justificativas já apresentadas na introdução desta dissertação. Acreditamos que outros *softwares* podem auxiliar no desenvolvimento de estudo de *Funções Trigonométricas*, mas não houve acesso, por parte da pesquisadora, a tais *softwares* durante a formação inicial.

Assim, analisamos as ferramentas disponíveis no ambiente computacional *GeoGebra* que podem atender ao desenvolvimento, manipulações e visualizações de *Funções Trigonométricas* nos diferentes registros de representação.

No site do Instituto *GeoGebra* São Paulo, sublinha-se que o *GeoGebra:*

> O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina Ggeometria, Áálgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculos numa única aplicação. Esse software tem recebido vários prêmios na Europa e no EUA. (https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html, acessado em 09/01/2019)

Ainda nesse mesmo site, lemos que:

> o *GeoGebra* foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de **300000** downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo. (https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html, acessado em 09/01/2019)

Assim, acreditamos que o *GeoGebra* pode contribuir significativamente para uma melhor apreensão conceitual de objetos do saber, pois conforme assinalado na Teoria de

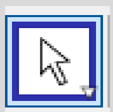
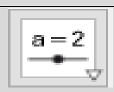
Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), para que o aluno compreenda melhor um determinado objeto matemático é preciso mobilizar o mesmo em pelo menos dois registros de representação. Observando a interface do *GeoGebra* que apresentamos na Figura 5.6, esse *software* favorece essa mobilização. Ele é composto por um Menu principal e um menu de ferramentas, uma janela referente ao Registro Algébrico (JRA), uma janela de Registro Numérico (JRN) uma janela de Registro Gráfico (JRG) e uma linha de comandos. Constatamos que o GeoGebra dispõe de recursos para estudo de objetos da Geometria Espacial, no entanto, por não ser foco do nosso estudo, não apresentamos nada que relacione tais recursos.

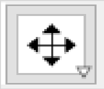
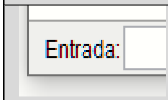
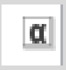
Figura 5.6: Imagem da Interface inicial do GeoGebra


Fonte: Dados da pesquisa

A título de apresentação de uma análise restrita aos interesses da pesquisa, reunimos no Quadro 5.10 as ferramentas desse *software* com as suas respectivas potencialidades que utilizamos na exploração, conjecturas e teste de hipóteses durante a realização do nosso trabalho com base nos esquemas de uso e de atividades instrumentais desenvolvidas por Rabardel (1995), permitindo assim a mobilização das relações sujeito e instrumento [S-i], sujeito e objeto mediado pelo instrumento [S(i)-O].

Quadro 5.10: Ferramentas utilizadas com as suas respectivas potencialidades

| Ferramenta | Nome da Ferramenta | Potencialidades |
|---|---|---|
|  | **Mover** | Permite selecionar, arrastar ou mover um ou vários objetos, previamente construídos, a partir da manipulação direta com mouse. Tais objetos podem ser: gráficos de funções, curvas ou superfícies de equações conhecidas ou desconhecidas; Seletores, pontos, etc. |
|  | **Controle Deslizante** | Utilizada na janela de visualização gráfica, permite construir seletores enquanto representantes de variáveis |

| | | |
|---|---|---|
| | | didáticas e a manipulação dos valores dessas variáveis de forma dinâmica. |
|  | **Mover Janela De Visualização** | Permite arrastar o “plano cartesiano virtual” na janela de visualização gráfica. |
|  | **Linha De Comando Ou Entrada De Instruções** | Permite a entrada de instruções fornecidas pelo usuário ao *software*, utilizando-se, ou não, um comando. |
|  | **Alpha** | Permite a inserção de símbolos matemáticos ou letras do alfabeto grego necessárias na entrada de instruções fornecidas ao *software*. |

Fonte: Produção dos autores

Assim, o ambiente computacional *GeoGebra* traz elementos que podem facilitar a aprendizagem de *Funções Trigonométricas*. A possibilidade de manipulação e visualização dos objetos matemáticos nos diferentes registros de representação, nos permite inferir que esse ambiente pode contribuir significativamente para a apreensão conceitual de *Funções Trigonométricas*, dependendo da forma como o Professor integra esses recursos em sala de aula, que pode trazer relevantes contribuições com mais rapidez do que no ambiente papel/lápis, que demanda maior tempo para a realização das referidas representações.

Na análise do Livro Didático da instituição de referência acerca do nosso objeto em estudo, *Funções Trigonométricas* (**FT**), pudemos identificar o *habitat* e as praxeologia desenvolvidas nesse elemento institucional. Uma das técnicas evidenciadas para a compreensão de conceitos de **FT** no registro gráfico, foi a mobilização de dados correspondentes no registro numérico (em forma de tabela), evidenciando-se assim, a mobilização de pelo menos dois registros de representação de um mesmo objeto matemático. Considerando o ambiente computacional *GeoGebra* e o processo de *gênese instrumental*, pelo qual também passou o Pesquisador na pesquisa interna, podemos garantir que o *software* possibilita a visualização de *Funções Trigonométricas* nos registros algébrico e gráfico, bem como, as suas manipulações nesses registros. A título de ilustração, apresentamos a seguinte tarefa.

Quadro 5.11. Tarefa T3 para análise de potencialidade de *GeoGebra* para FT

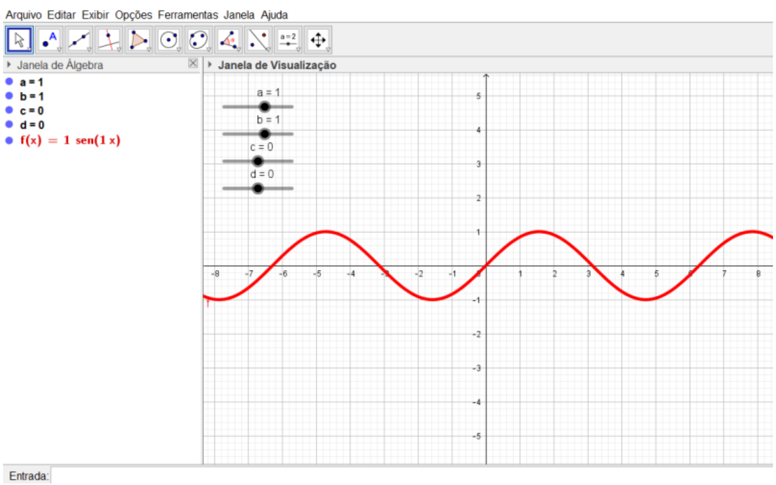
| | | |
|---|---|---|
| T3 | Considerar a função trigonométrica $f$ de $x$ dada no registro algébrico, por $f\ (x) = a * \text{sen}\ (b * x + c) + d$, em que $a$, $b$, $c$, e $d$ são vaiáveis didáticas que assumem diferentes valores reais, para realizar as seguintes subtarefas, utilizando o *software GeoGebra*. | |
| | St1 | Acessar o *software GeoGebra*. |
| | St2 | Construir seletores, representantes das variáveis didáticas consideradas na T2. |

| | | |
|---|---|---|
| | St3 | Entrar na linha de comandos com a expressão da função *f* de *x* fornecida na T2. |
| | St4 | Utilizar o mouse para manipular cada seletor construído na St2 e observar o que acontece para cada caso. |
| | St5 | Fornecer uma descrição do resultado obtido em cada caso da realização da St4. |

Fonte: Produção dos autores

Apresentamos na Figura 5.7 um dos resultados obtidos, uma vez concluída a realização de todas as subtarefas de T2. Escolhemos a função *seno*, a título de experimentação das potencialidades do *software* referentes as ferramentas apresentadas no Quadro 5.10 no estudo de FT.

Figura 5.7: Tarefa executada




Fonte: Produção dos autores

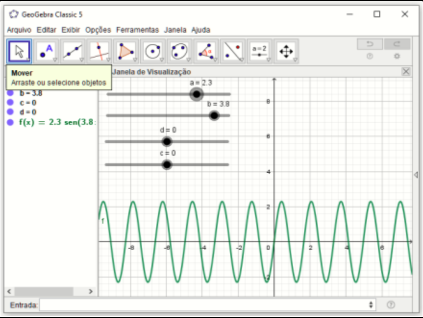
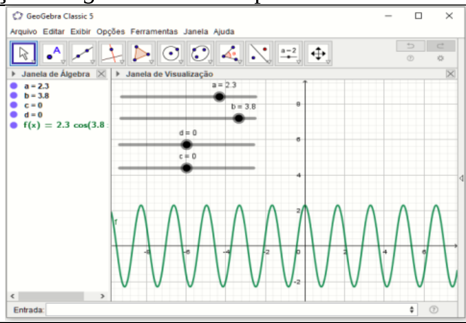
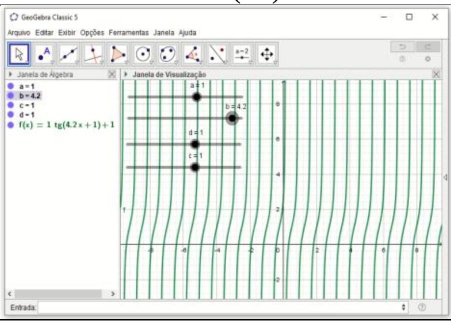
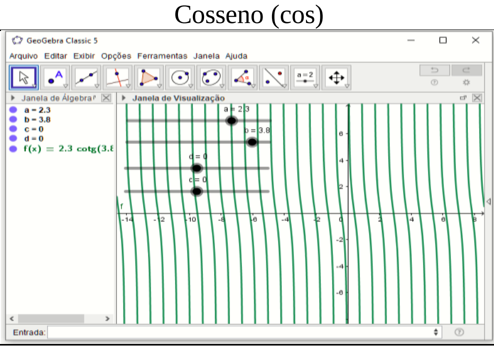
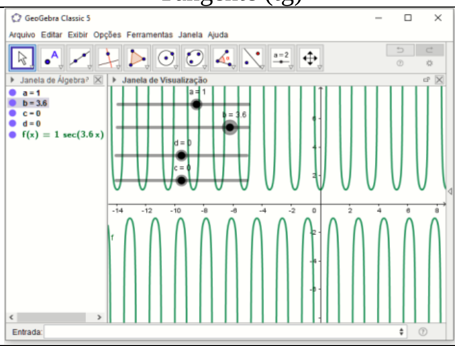
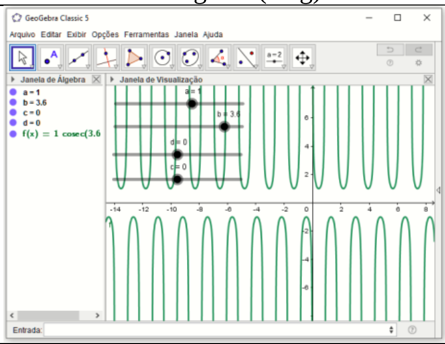
Ao manipularmos os controles deslizantes obtidos na figura 5.7, é possível identificar na JRA e JRG algumas propriedades como a amplitude, a imagem, o período, os deslocamentos horizontal e vertical, entre outras relacionadas com a função seno. Com base nessa observação, podemos perceber as modificações ocorridas ao gráfico, percorrendo-se assim a classe das funções *seno*. Assim, com utilização do ambiente computacional *GeoGebra*, o aluno depara-se com essa classe de funções. Pode lidar com a função cuja a expressão é dada por *a**sen(*x*), em que *b*=1 e, as demais variáveis didáticas assumindo valores iguais a zero. Tal aluno poderá compreender rapidamente o significado que é dado à variável didática *a* quando esse é atribuído a amplitude ou a imagem da função durante a sua apresentação no bloco *lôgos* organizacional do seu ensino.

O mesmo fenômeno pode ser observado com as demais variáveis didáticas, onde *b* está associado à quantidade de ciclos (períodos) da função. Quando a variável didática *c* assume valores positivos, o gráfico sofre um deslocamento horizontal para a esquerda e quando assume valores negativos o deslocamento horizontal é para a direita.

A manipulação do controle deslizante referente a variável didática *d*, permite observar que quando esta variável assume valores positivos, o gráfico da função sofre um deslocamento vertical para cima em relação a função sen($x$), enquanto que ao assumir valores negativos o deslocamento vertical é para baixo, modificando assim a imagem da referida função.

Evidenciamos que o procedimento acima pode ser executado com qualquer Função Trigonométrica e, para tanto, basta a St3 de T3, com a nomenclatura da *Função Trigonométrica* desejada, seja cos, tg, cot, sec ou csc (cf. Quadro 5.12).

Quadro 5.12. Visualização de gráficos de *Funções Trigonométricas* a partir da T3

| | |
|---|---|
|  |  |
| Seno (sin) | Cosseno (cos) |
|  |  |
| Tangente (tg) | Cotangente (cotg) |
|  |  |
| Secante (sec) | Cossecante (cosec) |

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, evidenciamos que o ambiente computacional *GeoGebra* potencializa, quando bem utilizado, a compreensão de propriedades que no ambiente papel/lápis demandaria maior tempo para ocorrer.

Apresentamos no capítulo seguinte, a Sequência Didática que organizamos com base nas análises desenvolvidas até agora, bem como a análise *a priori* das tarefas propostas ao público alvo da nossa pesquisa.

# 6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dedicamos este capítulo a apresentação da Sequência Didática elaborada, contendo três Dispositivos Experimentais **(DE)**, a análise *a priori* (6ª Etapa da **AI&SD**), de cada tarefa proposta nestes dispositivos que serve como instrumento de coleta de dados referentes as práticas efetivas dos alunos envolvidos na pesquisa, enfatizando as possíveis estratégias e técnicas de realização dessas tarefas, que foram elaboradas com base na praxeologia do objeto matemático de referência (*Funções Trigonométricas*), visando as suas possibilidades de tratamento nos ambiente computacional GeoGebra. Deste modo, nos baseamos em toda a análise institucional realizada na 4º ETAPA e apresentada no capítulo anterior para elaborar as tarefas da nossa SD. Além disso, observamos um trabalho correlato para estabelecer uma comparação da nossa SD com a àquela que foi elaborada em Silva (2017). Escolhemos este trabalho por apresentar o mesmo objeto matemático, o mesmo quadro teórico (exceto por uma teoria) e a mesma metodologia. Assim, antes de apresentar a análise *à priori*, apresentamos uma breve comparação entre os trabalhos supracitados.

## 6.1 Apresentação do Dispositivo Experimental (DE)

A nossa **SD** é composta de três **DE** e, que poderá ser aplicada com alunos do Ensino Médio, em três sessões distintas.

A primeira sessão dispõe de três tarefas cujos objetivos visam sondar os conhecimentos acerca de conteúdos preliminares ao estudo de *Funções Trigonométricas*. A segunda sessão é composta por seis tarefas, em que cada tarefa corresponde à uma Função Trigonométrica, explorando amplitude, periodicidade, deslocamento vertical e deslocamento horizontal. A terceira sessão dispõe de apenas uma tarefa, dividida em duas subtarefas, **St1** e **St2**, em que espera-se observar as práticas efetivas dos alunos do Ensino Médio, quando for aplicada a SD, em relação à utilização do ambiente computacional *GeoGebra*. Podendo aqui fazer uma relação com o trabalho elaborado em Silva (2017), percebemos que a SD é composta por apenas um DE em sessão única, contendo duas tarefas. A primeira tarefa (**T1**) foi organizada com três subtarefas identificadas por **St1**, **St2** e **St3**, envolvendo os termos amplitude, período, deslocamento horizontal e vertical tendo como objeto de estudo a Função Trigonométrica **seno**.

A segunda tarefa (**T2**) proposta por Silva(2017) foi organizada com quatro subtarefas (**St1, St2, St3** e **St4**), visando investigar as relações possíveis existentes entre a frequência medida captada pelo *Smartphone* por meio do aplicativo *DaTuner* e a representação da Função Trigonométrica **seno**, **cosseno** ou **tangente** no registro algébrico, por meio da leitura da frequência do som, dessa função, produzido no ambiente computacional *GeoGebra*, para análise experimental do período da função correspondente.

Percebemos então, que Silva (2017) não aborda todas as seis *Funções Trigonométricas*, enquanto a nossa SD explora conhecimentos acerca de todas as *Funções Trigonométricas*. Salientamos que, para a análise *a priori* das tarefas propostas nesse **DE**, utilizamos as ferramentas do ambiente computacional *GeoGebra* apresentadas no capítulo anterior, mobilizando a praxeologia do objeto matemático de referência (*Funções Trigonométricas*), bem como as técnicas do ambiente papel/lápis.

Apresentamos nos Quadros 6.1, 6.2 e 6.3 os DE referentes a cada uma das sessões da nossa SD.

Quadro 6.1: DE **SESSÃO I**

<table>
<tr><td colspan="3">Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC<br>Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET<br>Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dispositivo experimental para análise das práticas dos alunos do Ensino Médio, relativas aos conceitos de Funções Trigonométricas utilizando o ambiente papel/lápis.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nome (opcional):</td><td>Data: ___/____/______</td></tr>
<tr><td colspan="3">SESSÃO I</td></tr>
<tr><td rowspan="4">T1</td><td colspan="2">Lembrar de suas aulas de Matemática para realizar as seguintes subtarefas de T1:</td></tr>
<tr><td>St1</td><td>Fornecer, na língua materna, a definição do sistema de coordenadas cartesiana plana.</td></tr>
<tr><td>St2</td><td>Representar o resultado obtido na St1 no registro gráfico.</td></tr>
<tr><td>St3</td><td>Fornecer a definição de função.</td></tr>
<tr><td>T2</td><td colspan="2">Observar o círculo trigonométrico apresentando no Visor Cartesiano que está em suas mãos para preencher a segunda coluna do Quadro 1, de referências de dados, com a expressão trigonométrica (Et) correspondente a cada segmento identificado por $Et_i$, nesse Visor, sendo $\boldsymbol{i}$ um índice inteiro, com $1 \leq \boldsymbol{i} \leq 6$.</td></tr>
</table>

**Quadro 1:** Referência de dados de expressões trigonométricas

| Identificação da expressão | Expressão trigonométrica |
|---|---|
| ***$Et_1$*** | |
| ***$Et_2$*** | |
| ***$Et_3$*** | |
| ***$Et_4$*** | |
| ***$Et_5$*** | |
| ***$Et_6$*** | |

**T3** Utilizar cada expressão trigonométrica, que você apresentou na realização de T2, como expressão de uma função trigonométrica $f_i(\theta)$, sendo $\boldsymbol{i}$ um índice inteiro, com $1 \leq \boldsymbol{i} \leq 6$, para realizar as seguintes subtarefas:

**St1** Preencher o Quadro 2 com base nessas informações.

**Quadro 2:** Referência de dados de *Funções Trigonométricas*

| Identificação da função | Função trigonométrica | Domínio da função | Contra Domínio da função | Imagem da função |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

**St2** Justificar os resultados fornecidos na terceira, na quarta e na quinta coluna do Quadro 2.

Fonte: Produção dos autores

Quadros 6.2: DE **SESSÃO II**

Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM

Dispositivo experimental para análise das práticas dos alunos do Ensino Médio, relativas aos conceitos de *Funções Trigonométricas* utilizando o ambiente papel/lápis.

| Nome (opcional): | Data: ___/_____/__________ |
|---|---|

**SESSÃO II**

| | |
|---|---|
| **T1** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G1** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |
| **T2** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G2** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |
| **T3** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G3** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |

| | |
|---|---|
| **T4** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G4** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |
| **T5** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G5** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |
| **T6** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G6** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |

Fonte: Produção dos autores

Quadro 6.3. DE **SESSÃO III**

| | | |
|---|---|---|
| PPGEM<br>GPEMAC | Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC<br>Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET<br>Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM | IN ALTUM |
| Dispositivo experimental para análise das práticas dos alunos do Ensino Médio, relativas aos conceitos de *Funções Trigonométricas* utilizando o ambiente computacional *GeoGebra*. | | |
| Nome (opcional): | Data: ___/____/__________ | |
| **SESSÃO III** | | |
| T1 | Considerar a função trigonométrica *f* de *x* dada no registro algébrico, por $f\ (x) = a * \text{sen}\ (b * x + c) + d$, em que *a*, *b*, *c*, e *d* são vaiáveis didáticas que assumem diferentes valores reais, para realizar as seguintes subtarefas, utilizando o *software GeoGebra*. | |
| | St1 | Acessar o *software GeoGebra*. |
| | St2 | Construir seletores, representantes das variáveis didáticas consideradas na T1. |
| | St3 | Entrar na linha de comandos com a expressão da função *f* de *x* fornecida na T1. |
| | St4 | Utilizar o mouse para manipular cada seletor construído na St2 e observar o que acontece para cada caso. |
| | St5 | Fornecer uma descrição do resultado obtido em cada caso da realização da St4. |

Fonte: Produção dos autores

### 6.2. Análise *a priori* das tarefas que compõem o Dispositivo Experimental

Como vimos na metodologia, a análise a priori possibilita-nos estudar as condições de realização, a caracterização dos objetivos específicos e a explicitação das técnicas institucionais de realização matemática de cada uma das tarefas propostas no Dispositivo Experimental (DE), colocando em evidência as estratégias, as soluções possíveis, as variáveis didáticas, resultados esperados, pré-requisitos e competências. Assim, com base nesses conhecimentos, apresentamos nesta parte do nosso trabalho, as análises de cada tarefa que compõe o nosso DE apresentado no Quadro 6.1 Para isso, optamos por retomar, inicialmente, o enunciado de cada tarefa, na ordem natural e, proceder com a respectiva análise.

Conforme se pode observar no Quadro 6.1 a primeira tarefa que compõe o DE é proposta com o seguinte enunciado:

| | | |
|---|---|---|
| **T1** | Lembrar as suas aulas de Matemática no Ensino Médio para realizar as seguintes subtarefas de T1: | |
| | **St1** | Fornecer, na língua materna, a definição do sistema de coordenadas cartesianas plana, que aprendeu no Ensino Médio. |
| | **St2** | Representar o resultado obtido na **St1** no registro gráfico. |
| | **St3** | Fornecer a definição de FUNÇÃO matemática, que aprendeu no Ensino Médio. |

**Objetivo de T1:** Analisar e compreender os conhecimentos dos alunos do Ensino Médio sobre o sistema de coordenadas, na Língua Materna e no registro gráfico, bem como a definição de função, de um modo geral, sem especificarmos o conjunto de validade, utilizam o ambiente Papel/lápis.

Como se pode observar, a T1 é composta de três subtarefas e, este objetivo cobre o nosso interesse nas três cujas análises apresentamos a seguir.

**Análise a priori da St1 de T1:**

Conforme se pode observar no quadro acima, a subtarefa St1 de T1 é proposta com o seguinte enunciado:

| | |
|---|---|
| **St1** | Fornecer, na língua materna, a definição do sistema de coordenadas cartesianas plana, que aprendeu no Ensino Médio. |

O Sistema de Coordenadas Cartesianas Plana, doravante identificado ainda por SCCP e, também conhecido com o sistema ortogonal, é um dos conceitos fundamentais ou de base em Geometria Analítica e de referência para o tratamento de funções com valores reais, inclusive complexas e, encontra vários *nichos* nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Numérico, Geometria Diferencial, Equações Diferenciais, entre outros domínios ou subáreas de Matemática em que as *Funções Trigonométricas* têm um *habitat*. Esse conceito permite identificar a posição de diversos elementos, como pontos, curvas, gráficos, no plano os contém.

Mas, qual é a definição ensinada na instituição de referência (IEB) sobre SCCP? Nos livros analisados (cf. Capítulo 5), referentes aos estudos de *Funções Trigonométricas*, não encontramos definição alguma sobre SCCP. Todavia, no primeiro volume da coleção que contempla estes livros apresenta-se uma descrição deste objeto, quando o autor escreve: um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas é formado por dois eixos perpendiculares, O$x$ e O$y$, entre si no ponto O.

Como não encontramos uma definição nos livros analisados nem nos demais livros da coleção, apresentamos uma definição formal para SCCP. Para nós,

> Um SCCP é um conjunto constituído por um plano, duas retas numéricas orientadas, desde plano, que se intersectam ortogonalmente em um ponto chamado origem, sendo uma das retas horizontal e a outra vertical.

Esse sistema permite estabelecer uma correspondência entre os pontos do plano com pares ordenados de números reais. As duas retas orientadas referidas nessa definição são chamadas de eixos (um horizontal e outro vertical). O horizontal é dito eixo das abscissas, que representamos por eixo-$x$ e, o vertical é dito eixo das ordenadas, que denotamos por eixo-$y$.

**Variáveis didáticas:** Segundo Henriques (2014, p.35), "as variáveis didáticas são dados ou conhecimentos de uma determinada situação que estão aos cuidados do Professor/pesquisador. Quando tais variáveis assumem diferentes valores, modificam a situação". Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha do sistema de coordenadas cartesianas no plano, pois, escolhendo-se outro sistema de coordenadas, a exemplo do sistema de coordenadas polares, modifica-se a definição, e consequentemente a situação. Podemos também destacar a inclinação dos eixos, como variáveis didáticas, uma vez que a rotação dos eixos modifica cada situação colocada em jogo no tratamento de problemas.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de conjunto, de retas graduadas de números reais, retas orientadas, ortogonalidade de retas, posição relativa ou inclinação de retas, plano e pares ordenados de pontos no plano coordenado. Assim, o sujeito, em especial o estudante, deve desenvolver competências sobre esses saberes preliminares, adquiridos nas aulas de Geometria Analítica e de funções no Ensino Médio, para ser capaz de realizar essa tarefa, mobilizando, por conseguinte, as técnicas instrumentais do ambiente papel/lápis.

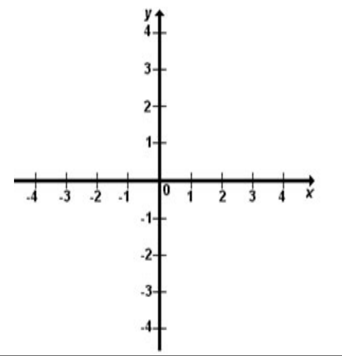
**Análise a priori da St2 de T1:**

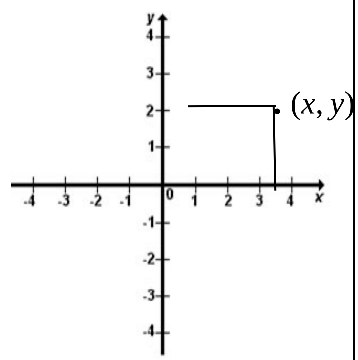
Conforme apresentado do Quadro 6.2 a St2 de T1 é proposta com o seguinte enunciado.

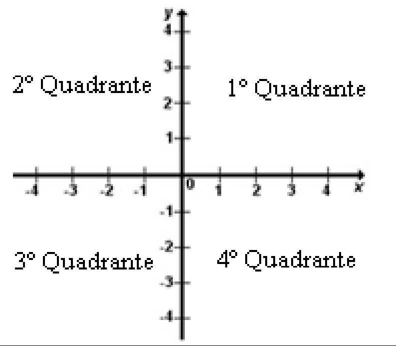
| | |
|---|---|
| **St2** | Representar o resultado obtido na **St1** no registro gráfico. |

A definição descrita na Língua Materna na realização da St1, pode ser convertida para a representação correspondente no registro gráfico. Assim, conforme mostrado na Figura 6.1(a), traçamos os referidos eixos, inicialmente, por escolha, o eixo das abscissas, horizontalmente e em seguida o eixo das ordenadas, verticalmente, sendo (0,0) o par ordenado do plano correspondente a origem do SCCP.

Figura 6.1: Sistema de coordenadas cartesianas plano.






| (a) SCCP com os eixos graduados com os números inteiros | (b) SCCP com um par ordenado. | (c) SCCP com identificação dos Quadrantes |
|---|---|---|

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme se pode observar na Figura 6.1 (b), as coordenadas cartesianas são representadas por pares ordenados ($x$, $y$) de números reais, onde $|x|$ indica a distância entre par em questão e o eixo-$y$, ao passo que $|y|$ indica a distância entre esse par e o eixo-$x$. Além disso, podemos sublinhar que, os dois eixos coordenados decompõem o plano que os contém, em quatro sub-planos chamados Quadrantes, contados no sentido anti-horário, descritos como segue:

1º Quadrante – Sub-Plano constituintes de pares ordenados ($x$, $y$), tais que $x > 0$ e $y > 0$;

2º Quadrante – Sub-Plano constituintes de pares ordenados ($x$, $y$), tais que $x < 0$ e $y > 0$;

3º Quadrante – Sub-Plano constituintes de pares ordenados ($x$, $y$), tais que $x < 0$ e $y < 0$;

4º Quadrante – Sub-Plano constituintes de pares ordenados ($x$, $y$), tais que $x > 0$ e $y < 0$;

Assim, diz-se que qualquer ponto que não pertence aos eixos, é localizado em um dos quatro quadrantes. Lembramos que o SCCP é um dos conjuntos ou visor que é muito utilizado na representação de funções no registro gráfico, que têm como conjunto domínio, um subconjunto do eixo-$x$ e, a imagem um subconjunto do eixo-$y$.

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha do sistema de coordenadas cartesianas plano, pois, escolhendo-se outro sistema de coordenadas, a exemplo do sistema de coordenadas polares, modifica-se a definição de SCCP, e consequentemente a situação em análise.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de plano, retas orientadas, ortogonalidade de retas, posição relativa ou inclinação de retas, retas graduadas de números reais, pares ordenados de pontos no plano coordenado e quadrantes. Os alunos devem mobilizar esses conhecimentos inerentes a estes pré-requisitos, pois não é suficiente saber apenas sobre a existência de tais objetos sem mobilizá-los, seja explícita ou implicitamente para ter-se um conhecimento, sistematicamente, instalado no nosso álbum intelectual.

**Análise a priori da St3 de T1:**

Lembramos que a terceira subtarefas de T1 é proposta com o seguinte enunciado:

| | |
|---|---|
| **St3** | Fornecer a definição de FUNÇÃO matemática, que aprendeu no Ensino Médio. |

A definição de função é um dos mais importantes conceitos na Matemática, pois a sua utilização ocupa um espaço significativo em diversos domínios da própria Matemática, bem como em outras ciências. Ela permite por exemplo, o tratamento de tabela de preços de produtos em uma loja. Outro exemplo é valor de conta de luz, que depende da quantidade de energia consumida.

Ora, no volume 2 da coleção dos LD analisados sobre *Funções Trigonométricas*, não encontramos uma definição formal que apresentasse o conceito funções com valores reais em um único discurso teórico-tecnológico. No entanto, no primeiro volume da referida coleção é apresentada uma descrição, que entendemos como definição, quando o autor diz:

> Sejam A e B conjuntos não vazios, uma relação *f* de A em B é função se, e somente se, qualquer elemento de A, está associado, através de *f*, a um único elemento de B. (Paiva, v. 1 p. 36)

Percebemos que o autor utiliza o conceito de relação para definir função, sem que este seja apresentado previamente na sua organização praxeológica.

Para contribuirmos na reflexão deste objeto de saber tão importante em Matemática e, por entender que deve existir uma única definição para o conceito de função, apresentamos no nosso discurso teórico-tecnológico a seguinte definição.

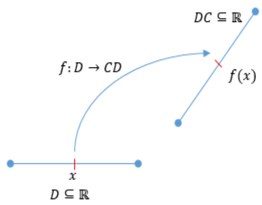
> **Definição 01**: Uma FUNÇÃO matemática é uma correspondência que associa cada elemento de um conjunto, chamado Domínio, a um e único elemento de outro conjunto chamado Contradomínio.

Se os conjuntos Domínio que identificamos por D e Contradomínio por CD, são subconjuntos de números reais, então nos referimos a uma função de uma variável real. Adotando uma letra do alfabeto, digamos a letra *f*, para representar a referida função e, a letra *x* os elementos do conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, então a Definição 01 se restringe e esse tipo de funções. Assim, tem-se a seguinte definição:

> **Definição 02**: Uma FUNÇÃO *f* de uma variável real, é uma correspondência que associa cada elemento *x* do conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$,, chamado Domínio, a um e único elementos *f*(*x*) do conjunto $DC \subseteq \mathbb{R}$ chamado Contradomínio.

Em termos de registros de representação semiótica, pode destacar as descrições indicadas no Quadro 6.4:

Quadro 6.4: Representação da definição de uma variável nos diferentes registros

| **Definição de Função de uma variável real** | | | |
|---|---|---|---|
| **Língua Materna** | **Registro Algébrico** | **Registro Gráfico** | **Registro Numérico** |
| Conforme a descrição apresentada na Definição 02. | $f: D \to CD$ <br> $x \mapsto f(x)$ |   | Considerar uma função específica $f$ com expressão algébrica bem definida no registro algébrico e listar alguns valores funcionais de CD a partir dos valores correspondentes do conjunto D. |

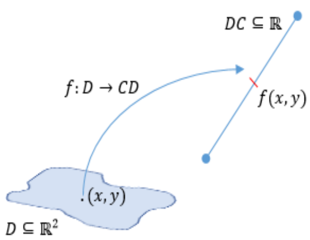
Fonte: Dados da pesquisa

Se os conjuntos Domínio (D) e Contradomínio (CD) são subconjuntos do plano e de números reais, respectivamente, isto é, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $CD \subseteq \mathbb{R}$, então nos referimos a uma função de duas variáveis reais. Adotando uma letra do alfabeto, digamos a letra *f*, para representar a referida função e, o par (*x*, *y*) de letras como representante de elementos do conjunto $D$, então a Definição 01 se restringe e esse tipo de funções. Assim, tem-se a seguinte definição:

> **Definição 03**: Uma FUNÇÃO *f* de duas variáveis reais, é uma correspondência que associa cada elemento ou para (*x*, *y*) do conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, chamado Domínio, a um é único elementos *f*(*x*,*y*) do conjunto $DC \subseteq \mathbb{R}$ chamado Contradomínio.

Em termos de registros de representação semiótica, pode destacar as descrições indicadas no Quadro 6.4:

Quadro 6.4: Representação da definição duas variáveis nos diferentes registros

| **Definição de Função de uma variável real** | | | |
|---|---|---|---|
| **Língua Materna** | **Registro Algébrico** | **Registro Gráfico** | **Registro Numérico** |
| Conforme a descrição apresentada na Definição 03. | $f: D \to CD$ <br> $x \mapsto f(x,y)$ |   | Considerar uma função específica $f$ com expressão algébrica bem definida no registro algébrico e listar alguns valores funcionais de CD a partir de valores correspondentes do conjunto D. |

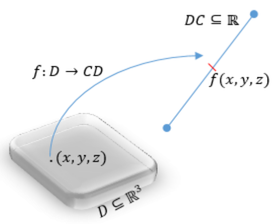
Fonte: Dados da pesquisa

Se os conjuntos Domínio (D) e Contradomínio (CD) são subconjuntos do espaço tridimensional e de números reais, respectivamente, isto é, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ e $CD \subseteq \mathbb{R}$, então nos referimos a uma função de três variáveis reais. Adotando uma letra do alfabeto, digamos a letra *f*, para representar a referida função e, o terno (*x*, *y*, *z*) de letras como representante de elementos do conjunto $D$, então a Definição 01 se restringe e esse tipo de funções. Assim, tem-se a seguinte definição:

> **Definição 04**: Uma FUNÇÃO $f$ de três variáveis reais, é uma correspondência que associa cada elemento ou terno ($x$, $y$, $z$) do conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^3$, chamado Domínio, a um é único elementos $f(x,y,z)$ do conjunto $DC \subseteq \mathbb{R}$ chamado Contradomínio.

Em termos de registros de representação semiótica, pode destacar as descrições indicadas no Quadro 6.6:

Quadro 6.6: Representação da definição duas variáveis nos diferentes registros

| Definição de Função de uma variável real | | | |
|---|---|---|---|
| **Língua Materna** | **Registro Algébrico** | **Registro Gráfico** | **Registro Numérico** |
| Conforme a descrição apresentada na Definição 04. | $f: D \to CD$<br>$x \mapsto f(x, y, z)$ |  | Considerar uma função específica $f$ com expressão algébrica bem definida no registro algébrico e listar alguns valores funcionais de CD a partir de valeres correspondentes do conjunto D. |

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, sucessivamente. Logo a definição de função é única, o que diferencia é o tipo de funções, com base nos tipos de conjuntos de definições considerados. Vale ainda sublinharmos que o conjunto imagem assim como o CD de qualquer que seja a função real, independentemente da sua ordem (uma, duas, três, etc. $n$ variáveis, com $n \in \mathbb{N}$) é um subconjunto dos números reais.

Relativamente a subtarefa St3 de T1 em questão, espera-se dos alunos a mobilização da Definição 01, referente a funções de uma variável real.

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão a variável é única. Todavia, tendo-se em mente os tipos de funções, ou seja, as ordens de funções, podemos destacar como variáveis didáticas a escolha dessa ordem. Com efeito, o estudante poderá apresentar a definição de uma função específica, como a função afim por exemplo.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de conjunto e de correspondência/relação.

A segunda tarefa (T2) do nosso DE é proposta com o seguinte enunciado.

| | |
|---|---|
| **T2** | Observar o círculo trigonométrico apresentando no Visor Cartesiano que está em suas mãos para preencher a segunda coluna do Quadro 1, de referências de dados, com a expressão trigonométrica ($Et$) correspondente a cada segmento identificado por $Et_i$, nesse Visor, sendo $\boldsymbol{i}$ um índice inteiro, com $1 \leq \boldsymbol{i} \leq 6$. |

**Quadro 6.7:** Referência de dados de expressões trigonométricas

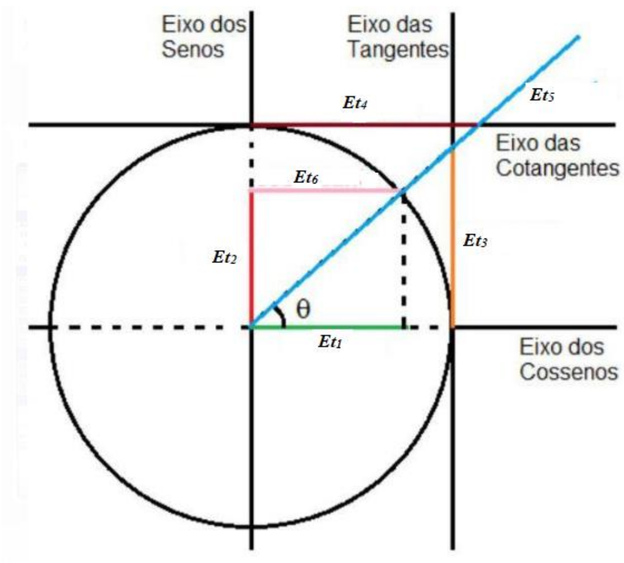
| Identificação da expressão | Expressão trigonométrica |
|---|---|
| $Et_1$ | |
| $Et_2$ | |
| $Et_3$ | |
| $Et_4$ | |
| $Et_5$ | |
| $Et_6$ | |

**Objetivo de T2:** Analisar a leitura que os alunos realizam sobre círculo trigonométrico apresentando em um Visor Cartesiano e, a conversão de cada segmento identificado por $Et_i$ para a expressão trigonométrica correspondentes no registro algébrico. Isto é, obter do estudante, a expressão trigonométrica associada a cada segmento identificado no círculo trigonométrico modelado em um Visor Cartesiano.

**Análise *a priori* de T2:**

Observando o Círculo Trigonométrico apresentando no Visor Cartesiano indicado Figura 6.2, deve-se analisar com referências no bloco teórico-tecnológico de trigonometria, o nome atribuído à cada segmento destacado $Et_i$.

Figura 6.2 Visor Cartesiano - Círculo Trigonométrico




Fonte: Dados da pesquisa

Os eixos indicados no Visor atuam também como elementos auxiliares para o estudante identificar cada expressão trigonométrica esperada. Assim, o Quadro 6.7 pode ser completado conforme o resultado apresentado no Quadro 6.8.

**Quadro 6.8:** Expressões trigonométricas

| Identificação da expressão | Expressão trigonométrica |
|---|---|
| $\boldsymbol{Et_1}$ | cos(α) |
| $\boldsymbol{Et_2}$ | sen(α) |
| $\boldsymbol{Et_3}$ | cotg(α) |
| $\boldsymbol{Et_4}$ | sec(α) |
| $\boldsymbol{Et_5}$ | tg(α) |
| $\boldsymbol{Et_6}$ | cossec(α) |

Fonte: Dados da pesquisa

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha do Círculo Trigonométrico.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de expressões trigonométricas que deverão ser identificadas pelos alunos a partir da manipulação de um Visor Cartesiano.

Conforme se pode observar no Quadro 6.1, a terceira tarefa que compõe o DE é proposta com o seguinte enunciado:

**T3** Utilizar cada expressão trigonométrica, que você apresentou na realização de T2, como expressão de uma função trigonométrica $f_i(\alpha)$, sendo $\boldsymbol{i}$ um índice inteiro, com $1 \leq \boldsymbol{i} \leq 6$, para realizar as seguintes subtarefas:

**St1** Preencher o Quadro 2 com base nessas informações.

**Quadro 2:** Referência de dados de *Funções Trigonométricas*

| Identificação da função | Função trigonométrica | Domínio da função | Contra Domínio da função | Imagem da função |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

**St2** Justificar os resultados fornecidos na terceira, na quarta e na quinta coluna do Quadro 2.

**Objetivo de T3:** Apresentar cada expressão trigonométrica identificada na realização de T2 como expressão de uma função trigonométrica. Isto é, representar a função trigonométrica associada a cada expressão trigonométrica mobilizada no círculo trigonométrico.

**Análise *a priori* de St1 T3:**

Observando o Quadro 2, de referências de dados, é possível perceber as relações entre as expressões trigonométricas e *Funções Trigonométricas* correspondentes. Ao identificar as funções correspondentes podemos completar a tabela conforme apresentamos no Quadro 6.9.

Quadro 6.9: Referências de dados completo

| Identificação da função | Função trigonométrica | Domínio da função | Contra Domínio da função | Imagem da função |
|---|---|---|---|---|
| ***Et1*** | $f_1(\alpha) = \cos(\alpha)$ | D = {α; $\alpha \in \mathbb{R}$} | CD = {$y$; $y \in \mathbb{R}$} | Im = {$y \in \mathbb{R}$; $-1<y<1$} |
| ***Et2*** | $f_2(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$ | D = {α; $\alpha \in \mathbb{R}$} | CD = {$y$; $y \in \mathbb{R}$} | Im = {$y \in \mathbb{R}$; $-1<y<1$} |
| ***Et3*** | $f_3(\alpha) = \text{cotg}(\alpha)$ | D = {$\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq c\pi$, $c \in \mathbb{Z}$} | CD = {$y$; $y \in \mathbb{R}$} | Im = {$y$; $y \in \mathbb{R}$} |
| ***Et4*** | $f_4(\alpha) = \sec(\alpha)$ | D = {$\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + c\pi$, $c \in \mathbb{Z}$} | CD = {$y$; $y \in \mathbb{R}$} | Im = { $y \in \mathbb{R}$; $y<-1$ou $1<y$} |
| ***Et5*** | $f_5(\alpha) = \text{tg}(\alpha)$ | D = {$\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + c\pi$, $c \in \mathbb{Z}$} | CD = {$y$; $y \in \mathbb{R}$} | Im = {$y$; $y \in \mathbb{R}$} |
| ***Et6*** | $f_6(\alpha) = \text{cossec}(\alpha)$ | D = {$\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq c\pi$, $c \in \mathbb{Z}$} | CD = {$y$; $y \in \mathbb{R}$} | Im = { $y \in \mathbb{R}$; $y<-1$ou $1<y$} |

Fonte: Produção dos autores

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha do conjunto Domínio, Contradomínio e, consequentemente, do conjunto Imagem de cada função.

**Pré-requisitos e competências:** Para a realização desta tarefa é necessária a mobilização de conhecimentos referentes aos conceitos de expressão, relações entre expressão e função, Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função, restrições do Domínio, notações de conjuntos e funções, bem como a definição de função.

**Análise *a priori* de St2 T3:** Lembramos que a terceira subtarefas de St2 T3 é proposta com o seguinte enunciado:

| | |
|---|---|
| **St2** | Justificar os resultados fornecidos na terceira, na quarta e na quinta coluna do Quadro 2. |

Para encontrar os conjuntos referentes aos Domínios das *Funções Trigonométricas* basta considerar indeterminações. Como a função seno e a função cosseno pode ser aplicadas a qualquer valor real, os Domínios são determinados pelo conjunto D = {α; $\alpha \in \mathbb{R}$}. No caso das funções tangente e secante, podemos analisar considerando a igualdade: $\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$ e $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Então, tais funções não estão definidas quando o denominador for zero, ou seja, não podem ser determinadas para cosx=0. Desse modo, o conjunto que determina o Domínio das funções tangente e secante é $D = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + c\pi,\ c \in \mathbb{Z}\}$. No caso das funções cotangente e cossecante, podemos analisar considerando a igualdade: $\text{cotgx} = \frac{\text{cosx}}{\text{senx}}$ e $\text{cosecx} = \frac{1}{\text{senx}}$. De forma análoga, tais funções não estão definidas quando o denominador for zero, ou seja, não podem ser determinadas para sen=0. Desse modo, o conjunto que determina o Domínio das funções tangente e secante é $D = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \neq c\pi,\ c \in \mathbb{Z}\}$.

O Contradomínio é determinado pelo conjunto correspondente aos elementos que são associados. No caso das *Funções Trigonométricas*, a imagem pode assumir qualquer valor real a depender da expressão que determina cada função, portanto o conjunto que determina todos os Contradomínios é $CD = \{y;\ y \in \mathbb{R}\}$.

Os valores que o seno ou cosseno pode assumir para qualquer valor de x podem variar apenas entre -1 e 1, portanto a imagem da função seno é igual a imagem da função cosseno, que é o conjunto $Im = \{y \in \mathbb{R};\ -1<y<1\}$. No caso das funções tangente e cotangente, o conjunto que representa a imagem é $\mathbb{R}$, pois para qualquer número real escolhido sempre haverá um correspondente do conjunto Domínio. No caso das funções secante e cossecante, o conjunto imagem é dado por $Im = \{\ y \in \mathbb{R};\ y<-1 \text{ou } 1<y\}$, pois não há valores correspondentes no conjunto Domínio que estejam relacionados à valores do intervalo (-1,1).

**Variáveis Didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha de como justificar os conjuntos obtidos ao completar o Quadro 2. Utilizar igualdades trigonométricas, por exemplo, pode ser um caminho para encontrar as indeterminações do Domínio, pois escolhas diferentes modificam a situação.

Conforme apresentamos, a nossa SD está dividida em três sessões. Assim, apresentamos a seguir, as análises de cada tarefa que compõe o DE propostas na segunda sessão, conforme indicado no Quadro 6.2, onde a primeira tarefa desta sessão é proposta com o seguinte enunciado:

| | |
|---|---|
| **T1** | Analisar os elementos apresentados no **Visor Cartesiano** que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G1** notável nesse Visor, justificando a sua resposta. |

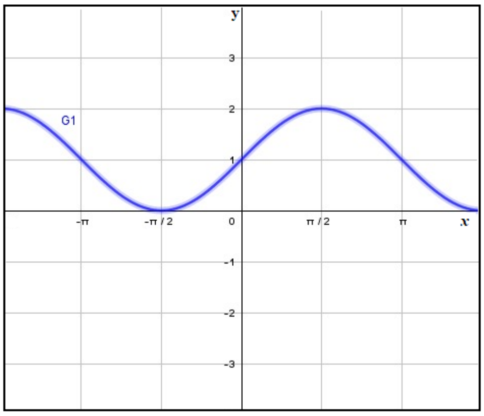
**Objetivo de T1:** Analisar a leitura que os alunos realizam sobre os gráficos de *Funções Trigonométricas* e a conversão correspondente destes gráficos para a função correspondente no registro algébrico. Isto é, obter do estudante, a função associada a cada gráfico.

Este objetivo nos remete, portanto, a análise das práticas efetivas dos alunos da instituição de aplicação quando utilizam o ambiente Papel/lápis na realização deste tipo de tarefa. Acreditamos que os alunos que mobilizem os conceitos de *Funções Trigonométricas* no Ensino Médio, terão a capacidade de atender este objetivo. Do contrário, mostrar-se-á que a passagem ou a transformação (conversão) de uma função trigonométrica, do registro gráfico para o registro algébrico, não é uma prática usual dos alunos na Instituição de referência desta Pesquisa.

**Análise *a priori* de T1:**

Observando o gráfico G1 sobre o Visor Cartesiano (cf. Figura 6.3), deve-se analisar o seu comportamento e posicionamento em relação ao eixo-*x* assim como em relação eixo-*y*, ou seja, no sistema de coordenadas modelado nesse Visor.

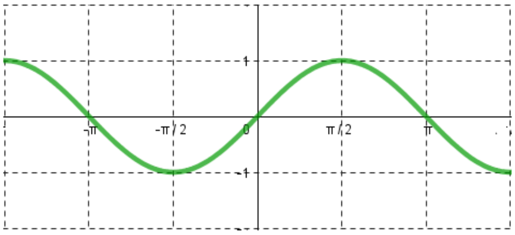
Figura 6.3: Visor cartesiano para o estudo a função **seno de *x***




Fonte: Produção dos autores

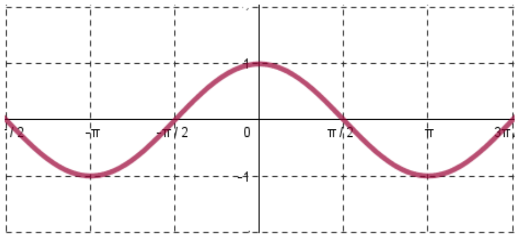
Com efeito, é possível conjecturar que este gráfico G1 simula a configuração ou comportamento do gráfico de uma função seno de *x* ou cosseno de *x*, que podemos representar por, $g_1(x)=a\text{sen}(bx)$ ou $g_2(x)=a\cos(bx)$, respectivamente, com $a$ e $b \neq 0$. Contudo, a representação de $g_1(x)$ e de $g_2(x)$ no registro gráfico, resulta no conjunto de pontos ou gráficos que apresentamos na Figura 6.4 e na Figura 6.5, respectivamente, sendo $a = 1$ e $b = 1$.

Figura 6.4: Visualização do gráfico de $g_1(x)$



Fonte: Produção dos autores

Figura 6.5: Visualização do gráfico de $g_2(x)$



Fonte: Produção dos autores

Portanto, nem o gráfico $g_1(x)$ e, nem o gráfico de $g_2$ retrata G1. Todavia, G1 pode ser obtido pela translação do gráfico $g_1(x)$ para cima ao longo do eixo-*y*, pois ambos são côncavos para baixo ou para cima no mesmo período ou subintervalo do domínio de $g_1(x)$. Essa propriedade de G1 e $g_1(x)$, não acontece ente G1 e $g_2(x)$. Portanto, a função geratriz de G1, que identificamos por $l(x)$, é dada por $l(x)=a+b\text{sen}(cx+d)$, com $a \in \mathbb{R}^*_+$.

Além disso, observando o G1 sobre o visor, é possível notar ainda que este intercepta o eixo-*y* no ponto (0, 1). Assim, tem-se que o valor funcional de *l* para *x* igual a zero, é um, ou seja, $l(0)=1$. Ou equivalentemente:

$$a + b\text{sen}(0) = 1.$$

Mas, sabendo-se que $\text{sen}(0) = 0$, tem-se que $a = 1$.

Conclui-se, portanto, que a função *l* que retrata o gráfico G1 é $l(x)= 1+a\text{sen}(x)$.

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha das próprias funções $g_1(x)$, $g_2(x)$ e $l(x)$ bem como as variáveis *a*, *b*, *c* e *d*. Os diferentes valores assumidos por essas variáveis modificam a situação em jogo, seja na translação, na deslocação, na compressão ou na expansão do G1.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de gráficos de *Funções Trigonométricas*, comportamento de uma função seno de *x* no registro gráfico; domínio e imagem de uma função seno de *x*; valor funcional de uma função seno de *x*, período da função seno de *x*; resolução de equações envolvendo expressões trigonométricas com os valores de variáveis matemáticas medidos em radiano. O sujeito, em especial o estudante deve desenvolver competências sobre esses saberes preliminares, seja implicitamente ou explicitamente, para ser capaz de realizar essa tarefa, mobilizando as técnicas instrumentais do ambiente papel/lápis na conversão de representações de *Funções Trigonométricas* do registro gráfico ao registro algébrico.

A segunda tarefa da sessão II do DE é semelhante à primeira e, foi proposta com o seguinte enunciado.

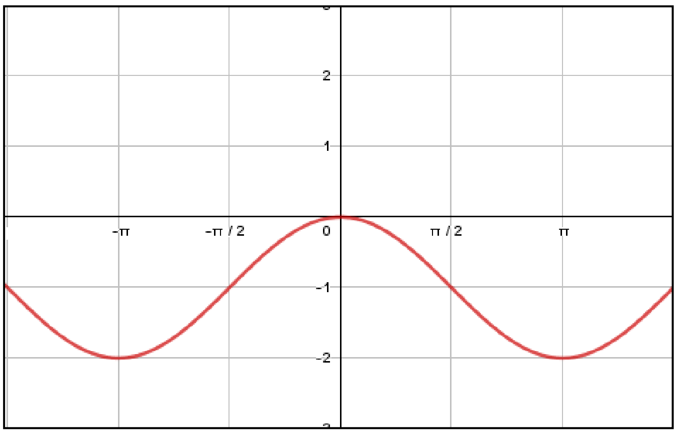
| | |
|---|---|
| **T2** | Analisar os elementos apresentados no **Visor Cartesiano**, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G2** notável nesse Visor, justificando a sua resposta. |

**Objetivo de T2:** Analisar a leitura que os alunos realizam sobre os gráficos de *Funções Trigonométricas* e a conversão correspondente destes gráficos para a função correspondente no registro algébrico. Isto é, obter do estudante, a função associada a cada gráfico.

**Análise *à priori* de T2:**

De forma análoga a situação anterior, observando o gráfico G2 sobre o Visor Cartesiano (cf. Figura 6.6), deve-se analisar o seu comportamento e posicionamento em relação ao sistema de coordenadas plano, modelado nesse Visor.

Figura 6.6: Visor cartesiano para o estudo da função **cosseno de *x***




Fonte: Produção dos autores

Assim, a partir da análise a priori de T1 podemos conjecturar também que o G2 pode ser gerado por uma função seno de *x* ou cosseno de *x*. Desse modo, verificamos pelas Figuras 6.4 e 6.5 que $g_2(x)$ tem o mesmo comportamento que G2. Portanto, G2 pode ser obtido pela translação do gráfico $g_2(x)$ para baixo ao longo do eixo-*y*, pois ambos são côncavos para baixo ou para cima no mesmo período ou subintervalo do domínio de $g_2(x)$. Assim, a função geratriz de G1, que identificamos por $m(x)$, é dada por $m(x)=a + b\cos(cx+d)$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Além disso, observando o G1 sobre o visor, é possível notar ainda que este intercepta o eixo-*y* no ponto (0, 0). Assim, tem-se que o valor funcional de *m* para *x* igual a zero, é menos um, ou seja, $m(0) = 0$. Ou equivalentemente:

$$k + a\cos(0) = 0.$$

Mas, sabendo-se que $\cos(0) = 1$, tem-se que $k = -1$.

Conclui-se, portanto, que a função *m* que retrata o gráfico G2 é $m(x)=a\cos(x)-1$.

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha das próprias funções $g_1(x)$, $g_2(x)$ e $m(x)$ bem como as variáveis *a*, *b, c* e *d*. Os diferentes valores assumidos por essas variáveis modificam a situação em jogo, seja na translação, na deslocação, na compressão ou na expansão do G2.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de gráficos de *Funções Trigonométricas*, comportamento de uma função cosseno de *x* no registro gráfico; domínio e imagem de uma função cosseno de *x*; valor funcional de uma função cosseno de *x*, período da função cosseno de *x*; resolução de equações envolvendo expressões trigonométricas com os valores de variáveis matemáticas medidos em radiano. O sujeito, em especial o estudante deve desenvolver competências sobre esses saberes preliminares, seja implicitamente ou explicitamente, para ser capaz de realizar essa tarefa, mobilizando as técnicas instrumentais do ambiente papel/lápis na conversão de representações de *Funções Trigonométricas* do registro gráfico ao registro algébrico.

A terceira tarefa da sessão II do DE é semelhante à primeira e, foi proposta com o seguinte enunciado.

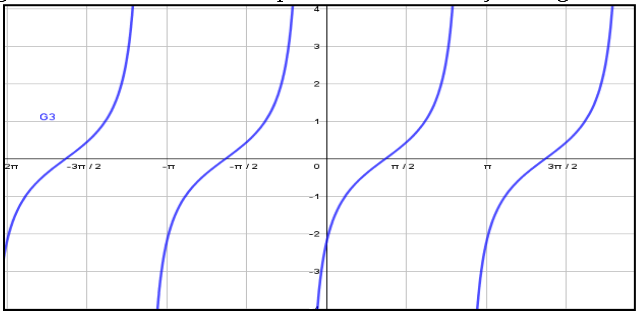
| | |
|---|---|
| **T3** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G3** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |

**Objetivo de T3:** Analisar a leitura que os alunos realizam sobre os gráficos de *Funções Trigonométricas* e a conversão correspondente destes gráficos para a função correspondente no registro algébrico. Isto é, obter do estudante, a função associada a cada gráfico.

**Análise *à priori* de T3:**

Observando o gráfico G3 sobre o Visor Cartesiano (cf. Figura 6.7), deve-se analisar o seu comportamento e posicionamento em relação ao eixo-*x* assim como em relação eixo-*y*, ou seja, no sistema de coordenadas modelado nesse Visor.

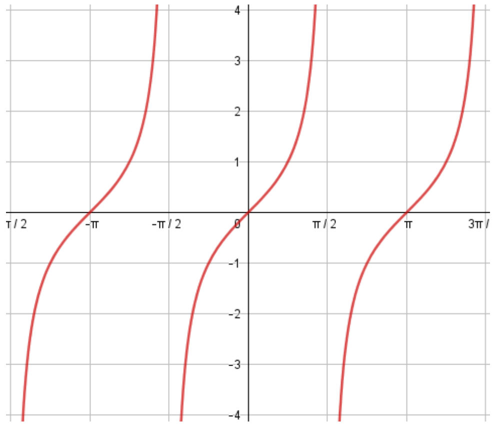
Figura 6.7: Visor cartesiano para o estudo a função tangente de x




Fonte: Produção dos autores

Com efeito, é possível conjecturar que este gráfico G1 simula a configuração ou comportamento do gráfico de uma função tangente de *x*, que podemos representar por, $h_1(x)=a\text{tg}(bx+c)+d$, com $a$ e $b \neq 0$. Quando as variáveis didáticas *c* e *d* assumem o valor zero, a representação da função $h_1$, no registro gráfico, resulta no conjunto de pontos que consistem no gráfico apresentado na Figura 6.8.

Figura 6.8: Visualização do gráfico de $h_1(x)$



Além disso, percebemos que a função geratriz de G3, que identificamos por $n(x)$, pode ser obtida pela deslocação de $h_1(x)$ pelo eixo-*x*. Observando o G3 é possível notar que este intercepta o eixo-*y* no ponto (0,-2), ou seja, $n(0)$=-2. Ou equivalente:

$$n(\text{x}) = \text{tg}(x + d)$$
$$n(0) = tg(\text{d}) = -2$$
$$\text{arctg}(-2) = -1.1$$
$$\text{Logo} \ \ \text{d} = 1.1, \text{então } n(\text{x}) = \text{tg}(x - 1.1).$$

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha das próprias funções $h_1(x)$ e $n(x)$ bem como os componentes *a, b, c* e *d*. Os diferentes valores assumidos por essas variáveis modificam a situação em jogo, seja na translação, na deslocação, na compressão ou na expansão do G3.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de gráficos de *Funções Trigonométricas*, comportamento de uma função tangente de $x$ no registro gráfico; domínio e imagem de uma função tangente de $x$; valor funcional de uma função tangente de $x$, período da função tangente de $x$; resolução de equações envolvendo expressões trigonométricas com os valores de variáveis matemáticas medidos em radiano. O sujeito, em especial o estudante deve desenvolver competências sobre esses saberes preliminares, seja implicitamente ou explicitamente, para ser capaz de realizar essa tarefa, mobilizando as técnicas instrumentais do ambiente papel/lápis na conversão de representações de *Funções Trigonométricas* do registro gráfico ao registro algébrico.

A quarta tarefa da sessão II do DE é semelhante à primeira e, foi proposta com o seguinte enunciado.

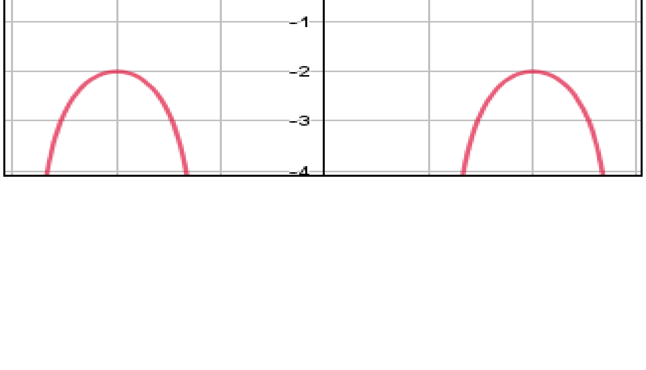
| | |
|---|---|
| **T4** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G4** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |

**Objetivo de T4:** Analisar a leitura que os alunos realizam sobre os gráficos de *Funções Trigonométricas* e a conversão correspondente destes gráficos para a função correspondente no registro algébrico. Isto é, obter do estudante, a função associada a cada gráfico.

**Análise *à priori* de T4:**

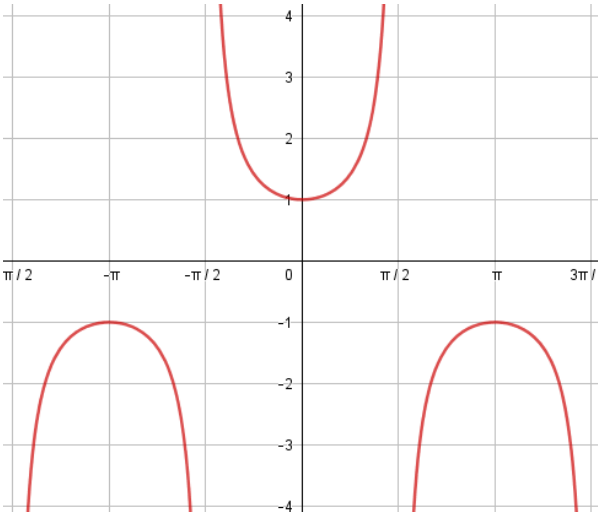
Observando o gráfico G4 sobre o Visor Cartesiano (cf. Figura 6.9), deve-se analisar o seu comportamento e posicionamento em relação ao eixo-$x$ assim como em relação eixo-$y$, ou seja, no sistema de coordenadas modelado nesse Visor.

Figura 6.9: Visor cartesiano para o estudo a função secante de x



Com efeito, é possível conjecturar que este gráfico G4 simula a configuração ou comportamento do gráfico de uma função tangente de $x$, que podemos representar por, $h_2(x)=a\sec(bx+c)+d$, com $a$ e $b \neq 0$. Quando as variáveis didáticas $c$ e $d$ assumem o valor zero, a representação da função $h_2$, no registro gráfico, resulta no conjunto de pontos que consistem no gráfico apresentado na Figura 6.10.

Figura 6.10: Função **secante de *x***




Fonte: Produção dos autores

Além disso, percebemos que a função geratriz de G4, que identificamos por $o(x)$, pode ser obtida pela expansão de $h_2(x)$. Observando o G4 é possível notar que este intercepta o eixo-*y* no ponto (0,2), ou seja, $o(0)=2$. Ou equivalente:

$$o(x) = a\sec(x)$$
$$o(0) = a\sec(0) = 2$$
$$o(0) = a \,.\, 1 = 2$$
$$\text{Logo } a = 2, \text{ então } o(x) = 2\sec(x)$$

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha das próprias funções $h_2(x)$ e $o(x)$ bem como as variáveis $a$, $b$, $c$ e $d$. Os diferentes valores assumidos por essas variáveis modificam a situação em jogo, seja na translação, na deslocação, na compressão ou na expansão do G4.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de gráficos de *Funções Trigonométricas*, comportamento de uma função secante de *x* no registro gráfico; domínio e imagem de uma função secante de *x*; valor funcional de uma função secante de *x*, período da função secante de *x*; resolução de equações envolvendo expressões trigonométricas com os valores de variáveis matemáticas medidos em radiano. O sujeito, em especial o estudante deve desenvolver competências sobre esses saberes preliminares, seja implicitamente ou explicitamente, para ser capaz de realizar essa tarefa, mobilizando as técnicas instrumentais do ambiente papel/lápis na conversão de representações de *Funções Trigonométricas* do registro gráfico ao registro algébrico.

A quinta tarefa da sessão II do DE foi proposta com o seguinte enunciado.

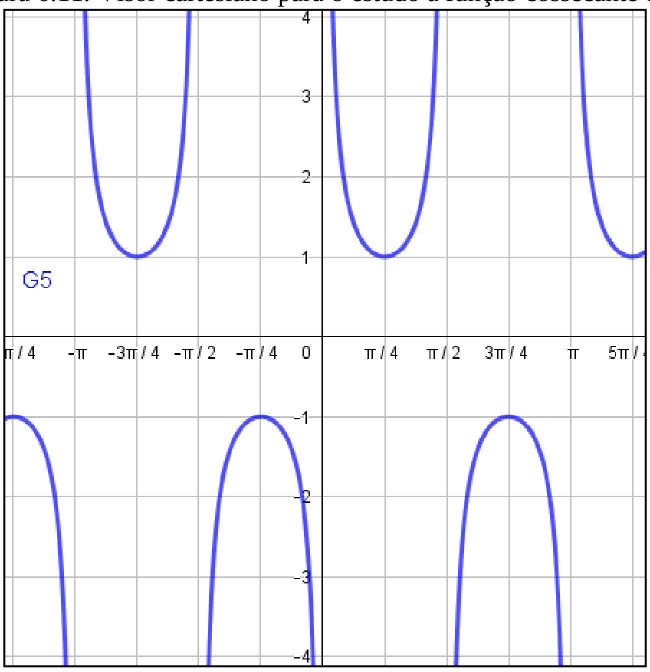
| | |
|---|---|
| **T5** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G5** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |

**Objetivo de T5:** Analisar a leitura que os alunos realizam sobre os gráficos de *Funções Trigonométricas* e a conversão correspondente destes gráficos para a função correspondente no registro algébrico. Isto é, obter do estudante, a função associada a cada gráfico.

**Análise *à priori* de T5:**

Observando o gráfico G5 sobre o Visor Cartesiano (cf. Figura 6.11), deve-se analisar o seu comportamento e posicionamento em relação ao eixo-*x* assim como em relação eixo-*y*, ou seja, no sistema de coordenadas modelado nesse Visor.

Figura 6.11: Visor cartesiano para o estudo a função cossecante de x

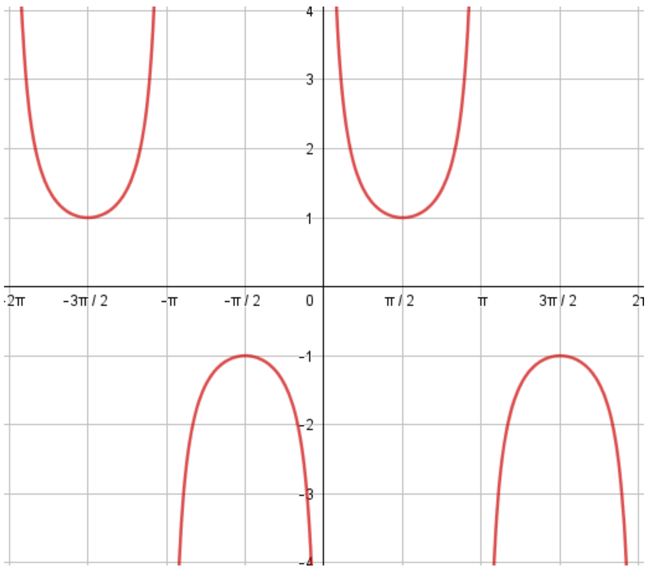


Fonte: Produção dos autores

Com efeito, é possível conjecturar que este gráfico G5 simula a configuração ou comportamento do gráfico de uma função cossecante de *x*, que podemos representar por,

$h_2(x)=a\text{cosec}(bx+c)+d$, com $a$ e $b \neq 0$. Quando c = d = 0, a representação de no registro gráfico resulta no conjunto de pontos que apresentamos na Figura 6.12.

Figura 6.12: Função **cossecante de *x***




Fonte: Produção dos autores

Além disso, percebemos que a função geratriz de G5, que identificamos por $p$(x), pode ser obtida pela compressão de $h_3(x)$. Observando G5 é possível notar que o ponto (π/4,1) pertence a função, ou seja, $o$(π/4)=1. Ou equivalente:

$$o(x) = \text{cosec}\,(c.x)$$
$$o(\pi/4) = \text{cosec}\,(c.\pi/4) = 1$$
$$\text{Mas, cosec}\,(\pi/2) = 1$$
$$\text{Logo } c.\pi/4 = \pi/2, \text{ então } c = 2.$$
$$\text{Desse modo, } o(x) = \text{cosec}\,(2x)$$

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha das próprias funções $h_3(x)$ e $p(x)$ bem como as variáveis *a*, *b*, *c* e *d*. Os diferentes valores assumidos por essas variáveis modificam a situação em jogo, seja na translação, na deslocação, na compressão ou na expansão do G5.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de gráficos de *Funções Trigonométricas*, comportamento de uma função cossecante de *x* no registro gráfico; domínio e imagem de uma função cossecante de *x*; valor funcional de uma função cossecante de *x*, período da função cossecante de *x*; resolução de equações envolvendo expressões trigonométricas com os valores de variáveis matemáticas medidos em radiano. O sujeito, em especial o estudante deve desenvolver competências sobre esses saberes preliminares, seja implicitamente ou explicitamente, para ser capaz de realizar essa tarefa, mobilizando as técnicas instrumentais do ambiente papel/lápis na conversão de representações de *Funções Trigonométricas* do registro gráfico ao registro algébrico.

A sexta tarefa da sessão II do DE foi proposta com o seguinte enunciado.

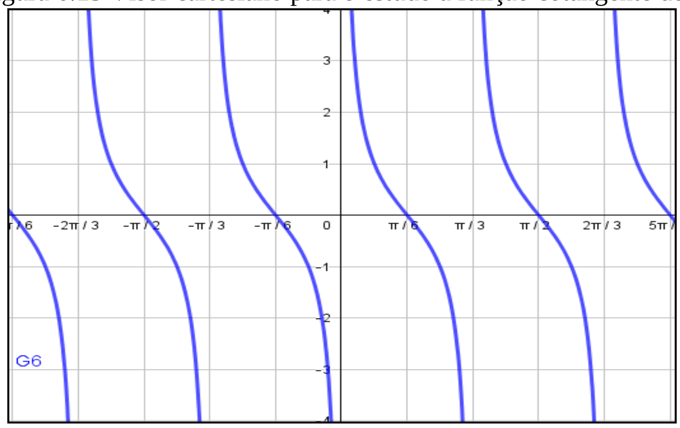
| | |
|---|---|
| **T6** | Analisar os dados apresentados no **Visor Cartesiano**, para estudo de *Funções Trigonométricas*, que está em suas mãos, para fornecer a função trigonométrica associada ao gráfico **G6** notável nesse visor, justificando a sua resposta. |

**Objetivo de T6:** Analisar a leitura que os alunos realizam sobre os gráficos de *Funções Trigonométricas* e a conversão correspondente destes gráficos para a função correspondente no registro algébrico. Isto é, obter do estudante, a função associada a cada gráfico.

### Análise *à priori* de T6:

Observando o gráfico G6 sobre o Visor Cartesiano (cf. Figura 6.13), deve-se analisar o seu comportamento e posicionamento em relação ao eixo-*x* assim como em relação eixo-*y*, ou seja, no sistema de coordenadas modelado nesse Visor.

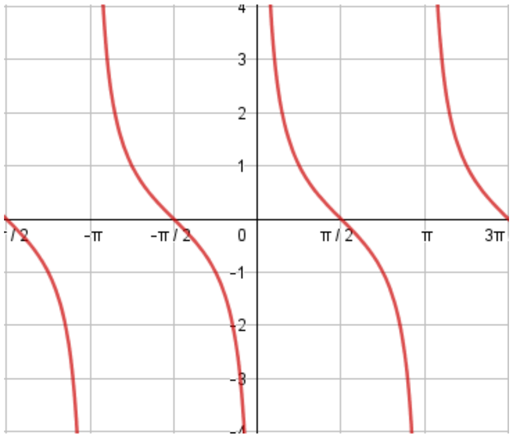
Figura 6.13 Visor cartesiano para o estudo a função cotangente de x




Fonte: Produção dos autores

Com efeito, é possível conjecturar que este gráfico G6 simula a configuração ou comportamento do gráfico de uma função cotangente de *x*, que podemos representar por, $h_4(x)=a\text{cotg}(bx+c)+d$, com $a$ e $b \neq 0$. Quando c = d = 0, a representação de no registro gráfico resulta no conjunto de pontos que apresentamos na Figura 6.14.

Figura 6.14: função **cotangente de *x***



Fonte: Produção dos autores

Além disso, percebemos que a função geratriz de G6, que identificamos por $q$(x), pode ser obtida pela compressão de $h_4(x)$. Observando G6 é possível notar que este intercepta o eixo-y no ponto (π/6, 1), ou seja, o(π/6)=0. Ou equivalente:

$$q(x) \ = \ \text{cotg}\ (x.c)$$
$$q(\pi/6) = \ \text{cotg}\ (\pi/6\,.\,\text{c}) \ = 0$$
$$\text{Mas, cotg}\ (\pi/2) \ = 0$$
$$\text{Logo}\ c.\pi/6 \ = \ \pi/2, \text{então} c \ = \ 3.$$
$$\text{Desse modo, } q(x) \ = \ \text{cotg}(3x).$$

**Variáveis didáticas:** Na tarefa em questão podemos destacar como variáveis didáticas a escolha das próprias funções $h_4(x)$ e $q(x)$ bem como as variáveis *a*, *b*, *c* e *d*. Os diferentes valores assumidos por essas variáveis modificam a situação em jogo, seja na translação, na deslocação, na compressão ou na expansão do G6.

**Pré-requisitos e competências:** A realização desta tarefa requer como pré-requisitos, os conceitos de gráficos de *Funções Trigonométricas*, comportamento de uma função cotangente de *x* no registro gráfico; domínio e imagem de uma função cotangente de *x*; valor funcional de uma função cotangente de *x*, período da função cotangente de *x*; resolução de equações envolvendo expressões trigonométricas com os valores de variáveis matemáticas medidos em radiano. O sujeito, em especial o estudante deve desenvolver competências sobre esses saberes preliminares, seja implicitamente ou explicitamente, para ser capaz de realizar essa tarefa, mobilizando as técnicas instrumentais do ambiente papel/lápis na conversão de representações de *Funções Trigonométricas* do registro gráfico ao registro algébrico.

Conforme já sublinhado, a nossa SD está dividida em três sessões. Assim, apresentamos a seguir, a análise da tarefa que compõe o terceiro DE, conforme indicado no Quadro 6.3, onde a primeira tarefa desta sessão é proposta com o seguinte enunciado:

| | | |
|---|---|---|
| T1 | Considerar a função trigonométrica *f* de *x* dada no registro algébrico, por $f\ (x) = a * \text{sen}\ (b * x + c) + d$, em que $a$, $b$, $c$, e $d$ são vaiáveis didáticas que assumem diferentes valores reais, para realizar as seguintes subtarefas, utilizando o *software GeoGebra*. | |
| | St1 | Acessar o *software GeoGebra*. |
| | St2 | Construir seletores, representantes das variáveis didáticas consideradas na T1. |
| | St3 | Entrar na linha de comandos com a expressão da função *f* de *x* fornecida na T1. |
| | St4 | Utilizar o mouse para manipular cada seletor construído na St2 e observar o que acontece para cada caso. |
| | St5 | Fornecer uma descrição do resultado obtido em cada caso da realização da St4. |

**Objetivo da T1:** Favorecer ao aluno, utilização do *GeoGebra*, quanto a representação de uma *Função Trigonométrica* que envolve as propriedades do **seno** (amplitude - variável didática *a*, período - variável didática *b*, deslocamento horizontal - variável didática *c* e deslocamento vertical - variável didática *d*), nos registros algébrico e gráfico, utilizando as técnicas do ambiente computacional *GeoGebra.*

**Análise *a priori* da St1 de T1:**

Lembramos que o *GeoGebra* não é, oficialmente institucionalizado, como objeto de estudo na instituição de referência. Assim, a aplicação possível deste dispositivo deve favorecer uma familiarização dos alunos ao *GeoGebra*. Com efeito, os alunos devem observar que ao acessar o *GeoGebra*, este retorna uma interface contendo: o Menu principal; a barra de ferramentas; a Janela de Registro Numérico/Algébrico; a Janela de Registro Gráfico e o campo de entrada, conforme mostrado na Figura 6.15.

Figura 6.15. Tela inicial do GeoGebra

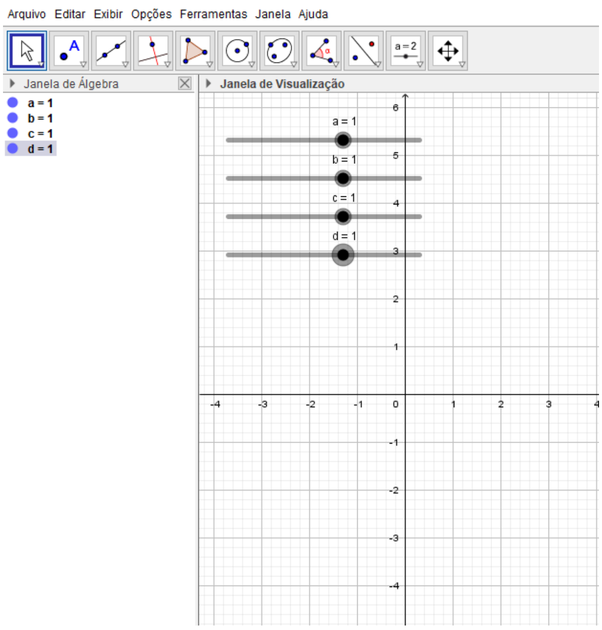

Fonte: Dados da pesquisa

**Analise *a priori* da St2 de T1:**

| | |
|---|---|
| St2 | Construir seletores, representantes das variáveis didáticas consideradas na T1. |

Para realizar essa subtarefa é necessário utilizar a ferramenta “Controle deslizante” disponível na barra de ferramentas e, clicar em qualquer posição da janela representante do registro gráfico no *GeoGebra*. Outra forma é inserir as variáveis didáticas, uma de cada vez, no campo de entrada e acionar a tecla “*Enter*”. Utilizando qualquer uma dessas técnicas, o resultado esperado para **St2** pode ser observado na Figura 6.16.

Figura 6.16. Construindo os seletores



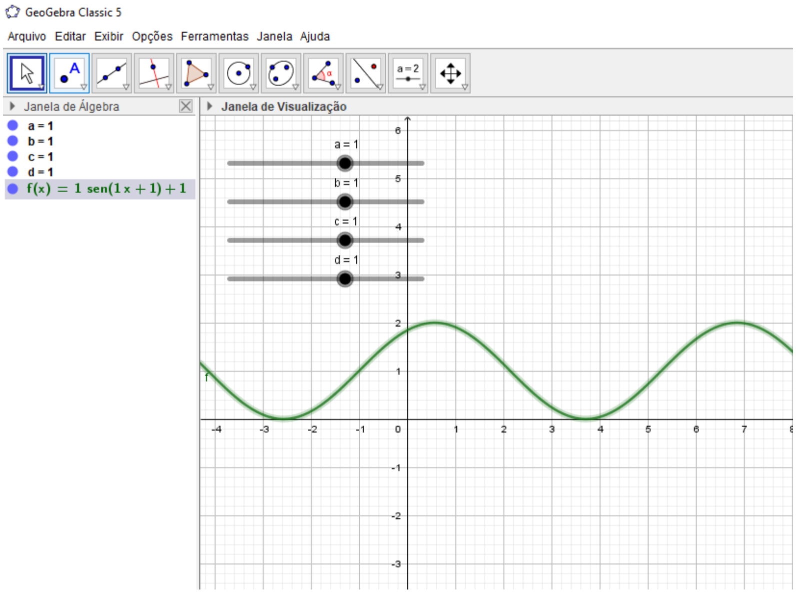

Fonte: Dados da pesquisa

**Análise *à priori* de St3 de T1:** Retomando o enunciado da subtarefa temos:

| | |
|---|---|
| St3 | Entrar na linha de comandos com a expressão da função *f* de *x* fornecida na T1. |

Para realizar essa subtarefa, deve-se entrar na *Linha de comandos* com a expressão da função *f* de *x* e, acionar a tecla *Enter*”. Procedendo desta forma, obtém-se o resultado apresentado na Figura 6.17 que consiste na visualização da função seno, na janela representante do Registro Gráfico, assim como na janela representante do Registro Algébrico (na JRA), onde vemos também que todos os seletores apresentam o mesmo valor.

Figura 6.17. Alterando controles deslizantes e eixo-*x*




Fonte: Dados da pesquisa

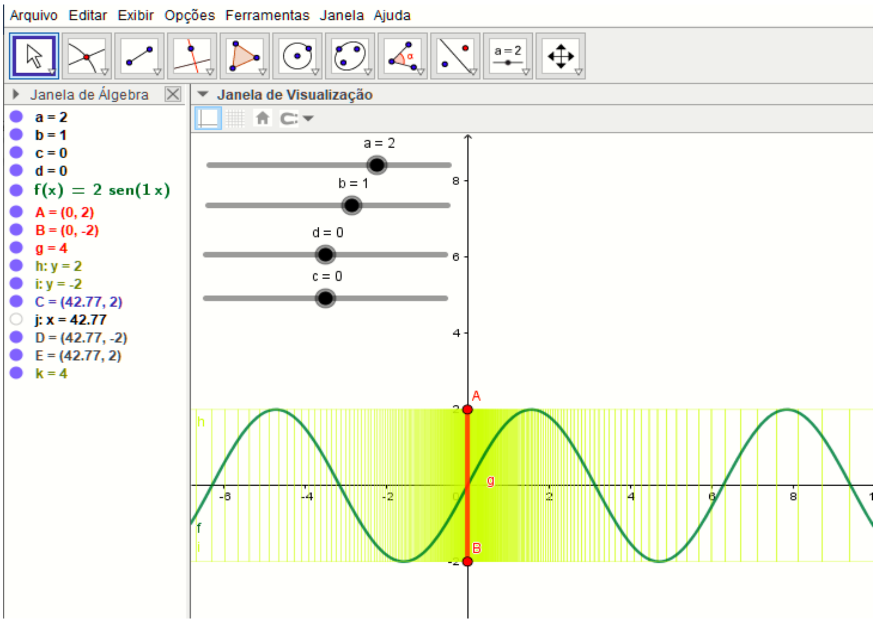
**Análise *à priori* de St4 e St5 deT1:** Conforme pode ser observado no Quadro 6.3, **St4** e **St5** foram elaboradas com os seguintes enunciados:

| | |
|---|---|
| St4 | Utilizar o mouse para manipular cada seletor construído na St2 e observar o que acontece para cada caso. |
| St5 | Fornecer uma descrição do resultado obtido em cada caso da realização da St4. |

Levando em consideração que a subtarefa 4 solicita que se observe e a subtarefa 5 solicita uma descrição do que acontece ao manipular cada seletor, é conveniente analisá-las simultaneamente, visto que estão correlacionadas de forma direta.

Temos que no registro algébrico, temos a partir da T1 que a função *f* de *x* é dada por *f*(*x*)=*a*sen(*bx* **c*)+*d*. Ora, observando o resultado obtido na realização da St3, vemos que essa função *f* se resume no registro algébrico na forma *f(x)=sen(x+1)+1*. (cf. Figura 6.17). Nesse caso, dizemos que todas as variáveis didáticas *a*, *b*, *c* e *d*, assumem o mesmo valor numérico, um. Manipulando os seletores *c* e d de sorte que assumam os valores numéricos iguais a zero, obtém-se a função na forma *f(x)=sen(x)*. é notável de forma dinâmica que, ao manipularmos o controle deslizante da variável didática *a* na janela de visualização é possível observarmos, simultaneamente, as mudanças na visualização dessa função nos registros algébrico e gráfico. Notamos que tanto para os valores negativos quanto positivos da variável *a*, promovem a variação, na imagem da função seno. Por exemplo, quando essa variável didática assume o valor numérico dois, visualiza-se no registro algébrico a função *f(x)=2sen(x)*. Consequentemente no registro gráfico, a imagem dessa função *f*, assume o intervalo [-2,2] (cf. Figura 6.18).

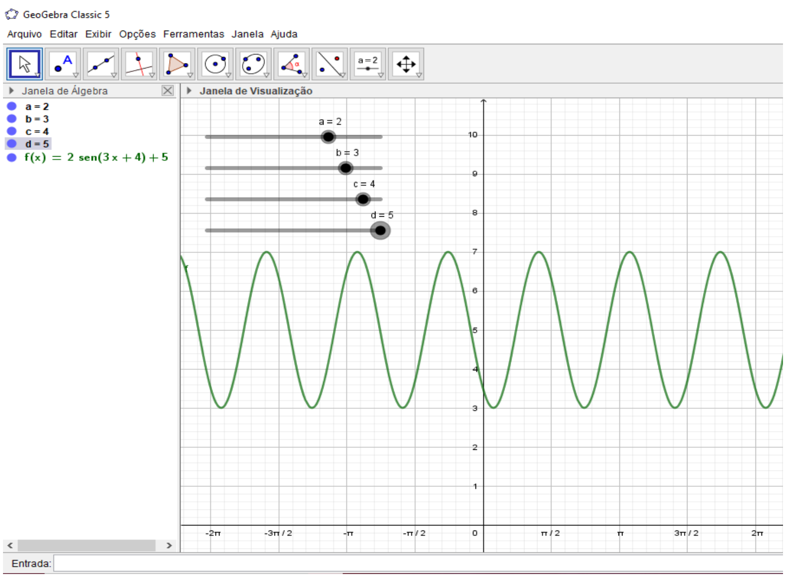
Figura 6.18. Resultado da Manipulação do valor da variável didática *a*




Fonte: Dados da pesquisa

Da mesma maneira, podemos observar as variações simultâneas no gráfico e no registro algébrico quando as demais variáveis didáticas assumem diferentes valores. Na Figura 6.19 outro resultado da função em questão, quando as variáveis didáticas *a*, *b*, *c* e *d* assumem os valores numéricos 2, 3, 4 e 5, respectivamente, considerabdo-se, neste caso a função *f(x)=2sen(3x+4)+5*, em que todas as variáveis são diferentes dos valores assumidos no início de **St4** de **T1**.

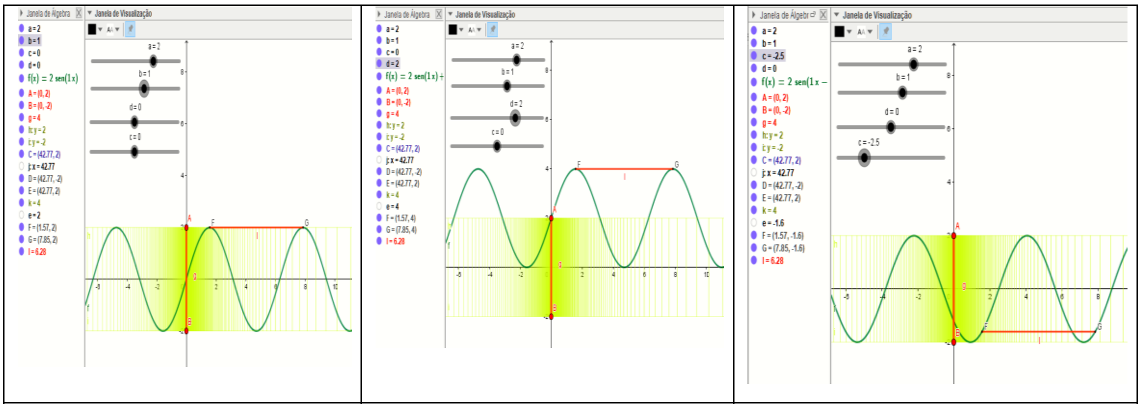
Figura 6.19. Resultado da manipulação dos valores das variáveis didáticas *a, b, c*,e *d*




Fonte: Dados da pesquisa

Como nos casos anteriores, seletores correspondentes as variáveis didáticas *a*, *b*, *c* e *d*, implementados no ambiente computacional *GeoGebra* e, localizam-se, sempre, na janela representante do registro gráfico. Os diferentes valores numéricos assumidos por essas variáveis podem alterar ou conservar, a amplitude, a imagem, o período, o deslocamento horizontal e vertical do gráfico da função seno, dependendo da ação exercida pelo sujeito (S) na relação com esse objeto (O) por mediação do instrumento (i) [S(i)-O] no desenvolvimento da *gênese instrumental*. Apresenta-se na Figura 6.20 um resultado possível da ação de S nessa relação [S(i)-O].

Figura 6.20: Resultado possível do sujeito S, que seja aluno ou Professor



| | | |
|---|---|---|
| (a) Destaque da Imagem e período da função *f*(*x*)=*a*sen(*bx* **c*)+*d* | (b) Deslocação ou translação vertical para cima com d=2, conservando o período. | (c) Deslocação horizontal para a esquerda fazendo c = -2, conservando o período. |

Fonte: Dados da pesquisa

Destacamos a seguir as variáveis, os pré-requisitos e competências consideradas essencial na realização desta tarefa por sujeitos S da Instituição de Referência.

**Variáveis Didáticas da T1:** Na tarefa em questão consideramos como variável didática, a *escolha da função*, porque essa variável *escolha* quando assume diferentes valores, isto é, escolhendo-se outras funções, modifica-se a situação a situação, e consequentemente, a mudança no desenvolvimento da *gênese instrumental*. Além disso, destacam-se também os controles deslizantes como variáveis didática, diferentemente do *x* que é uma variável matemática, pois esta não modifica a situação. Ao passo que os diferentes valores numéricos assumidos por cada variável didática *a*, *b*, *c* e *d*, modificam a situação que reflete na alteração da amplitude, da periodicidade, do deslocamento horizontal e/ou vertical e, ou na imagem da função seno.

**Pré-requisitos e Competências da T1:** Para o sujeito S, em particular o aluno desenvolver esta tarefa deve, inicialmente, estabelecer relação pessoal com o ambiente computacional *GeoGebra*, isto é a relação [S-i] do modelo SAI da ABIN (Abordagem Instrumental) deve existir. Mobilizar as técnicas instrumentais desse relativamente ao tratamento da Função Trigonométrica **seno** nos seus registros algébrico e gráfico, bem como os comandos e sintaxes específicas do *software*. Para o aluno desenvolver essa subtarefa deve mobilizar os conhecimentos acerca de *Funções Trigonométricas*, especificamente as propriedades da função **seno** destacadas também no Livro Didático, bem como manipular as representações da referida função no registro gráfico por meio do ambiente computacional *GeoGebra*.

Assim, concluímos parcialmente que a nossa participação na Pesquisa Interna com a apresentação de uma análise *a priori* das tarefas propostas nos dispositivos experimentais da **SD** se constitui como uma etapa que qualificação significativa na pesquisa, com reflexos importantes para o ensino, em especial de *Funções Trigonométricas*. Esta foi uma das etapas produtivas da metodologia da **AI&SD**, pois, acreditamos que a análise e a utilização de tecnologias (enquanto elemento institucional) no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, potencializa o aprender dos saberes visados na instituição de referência. Isto é, a utilização planejada de práticas desenvolvidas nos ambientes computacional e papel/lápis, mobilizando-se, pelo menos, dois registros de representação, é uma prática, capaz de auxiliar os sujeitos das instituições da Educação Básica, em especial, do 2º do Ensino Médio, a ensino e na aprendizagem de objetos matemáticos, como as *Funções Trigonométricas*.

Para proporcionarmos uma visão mais ampla do nosso trabalho, apresentamos a seguir, as considerações finais dessa Dissertação.

# 7. CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Nesta Dissertação tivemos como objetivo desenvolver uma análise histórica buscando compreender as origens, a evolução de *Funções Trigonométricas* e, uma análise institucional capaz de permitir a organização de uma Sequência Didática sobre este objeto matemático, nos ambientes papel/lápis e computacional *GeoGebra* podendo, em um dado momento posterior, ser aplicada para análise das práticas efetivas de alunos do Ensino Médio. Deste modo, nos propomos buscar respostas para as seguintes questões:

1. Como surgiram as *Funções Trigonométricas* e, porque são assim, designadas?
2. Qual é a evolução epistemológica que se pode encontrar na literatura referente às *Funções Trigonométricas*?
3. Qual é o modelo praxeológico proposto nos LD para o estudo de *Funções Trigonométricas* com olhar na instituição de referência?
4. Quais são as potencialidades do *software GeoGebra* (tecnologia) relativas ao estudo de *Funções Trigonométricas* com olhar na instituição de referência?
5. Como organizar uma Sequência Didática visando à análise de práticas institucionais de alunos dos anos finais das IEB?

Além destas perguntas, seguindo o objetivo geral desta Dissertação, nos comprometemos em responder a seguinte questão norteadora: Quais são as potencialidades dos ambientes papel/lápis e computacional GeoGebra para a organização de uma Sequência Didática sobre *Funções Trigonométricas*, que podem favorecer uma análise de praxeologias de alunos do Ensino Médio?

Para tanto, o nosso aporte teórico é composto pela Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1989), pela Teoria de Representação Semiótica, desenvolvida por Duval (2003) e Abordagem Instrumental de Rabardel (1995). Estas três teorias constituem o nosso Quaro Teórico de referência que sustenta as nossas investigações e nos forneceu subsídios para realização das análises institucionais. Como metodologia de pesquisa, percorremos a Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD), na sua dimensão Interna. Inicialmente apresentamos os elementos teóricos dessa metodologia e a descrição da instituição de referência.

A análise institucional contribuiu para compreendermos melhor o objeto de estudo proposto para o ensino-aprendizagem de *Funções Trigonométricas* na instituição de referência, dando ênfase nos problemas emblemáticos que nos motivaram a construção de tarefas utilizando o ambiente computacional *GeoGebra*.

Assim, realizamos uma análise histórica acerca da evolução epistemológica das *Funções Trigonométricas* buscando, principalmente, compreender o porquê de serem assim designadas, no plural e não Função Trigonométrica no singular. Esta análise nos consentiu concluir que a origem das *Funções Trigonométricas* está intimamente ligada à trigonometria do triângulo retângulo e com estudos astronômicos. Deste modo, a trigonometria avança e toma a sua forma atual, que se concentra no estudo da trigonometria no triângulo retângulo, equações e inequações trigonométricas, transformações trigonométricas e *Funções Trigonométricas* reunidas por: função seno, função cosseno, função tangente, função cotangente, função cossecante e função secante.

Deste modo, podemos concluir que as *Funções Trigonométricas* são assim designadas por ser uma reunião de tipos de funções e não um tipo específico de função. Portanto, as funções do tipo seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente se caracterizam trigonométricas porque derivam dos estudos relacionados à trigonometria.

Além da análise histórica, nesta Dissertação realizamos uma análise institucional acerca do objeto de estudo. A referida análise permitiu investigar as orientações curriculares acerca de *Funções Trigonométricas* estabelecidas para o Ensino Médio, entender o local de vida conceitual deste objeto do saber nos livros didáticos analisados e elaborar uma Sequência Didática que possa ser aplicada utilizando o ambiente papel/lápis e o ambiente computacional *GeoGebra*.

Os resultados obtidos nas análises do documento Oficial escolhido e do LD demonstram que as *Funções Trigonométricas* são institucionalizadas no Ensino Médio (instituição de referência), garantindo assim a sua aplicação nesta instituição e nas instituições subsequentes. Constatamos, portanto, que as primeiras técnicas de tratamento de amplitude, período, e deslocamentos de gráficos de uma *Função Trigonométrica* sobrevivem na instituição de referência, cujo o *habitat* desses objetos ocupa um espaço significativo no Livro Didático proposto para o ensino da Matemática nessa instituição.

Com efeito, a análise do LD nos permitiu encontrar a praxeologia de *Funções Trigonométricas* proposta nesse *habitat*, identificando assim, o tipo de tarefas destinadas aos alunos, as técnicas utilizadas pelo autor para realizar cada tipo de tarefa, as tecnologias e as teorias que sustentam as técnicas e as tarefas correspondentes. Ale disso, encontramos uma organização praxeológica completa, e pudemos constatar que o autor do LD analisado segue o modelo praxeológico usual.

Além disto, identificamos nesta organização problemas emblemáticos que se repetem frequentemente, conservando-se o tipo de enunciado e objetivos, variando-se unicamente o tipo de *Função Trigonométrica*. Tais tarefas podem ser tratadas, tanto com as técnicas do ambiente papel/lápis, quanto computacional *GeoGebra*.

Toda a análise histórica e institucional nos permitiu elaborar uma SD passível de aplicação com alunos do Ensino Médio. Acreditamos que a nossa SD, apresenta uma bagagem praxeológica riquíssima para a apreensão conceitual do nosso objeto de estudo, trazendo contribuições importantes para o campo da Educação Matemática. De tal modo, deixamos como perspectiva futura a aplicação de nossa SD para a análise das práticas efetivas dos alunos do Ensino Médio, assim como aprofundarmos o nosso conhecimento nesse domínio.

# 8. REFERÊNCIAS


ALMOULOUD, S. A. Fundamentos da Didática da Matemática. 1. ed. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BOYER, Carl B, História da Matemática, 2 ed. Editora Edgard Blucher, 2003.

BRASIL. **PCN +, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**, Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

CHEVALLARD, Y. **Approche Anthropologique du Rapport au Savoir et Didactique des Mathematics**. Recherches en Didactique des Mathématiques, V. 12, n°1, p.1-8, 2009.

CHEVALLARD, Y. **Concepts fondamentaux de La didactique: perspectives apportees par une approche anthropologique.** Recherches em Didactique des Mathématiques, v. 12, n. 1, pp. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. **La TAD face au professeur de mathématiques**, UMR ADEF, Toulouse, le 29 avril 2009.

CHEVALLARD, Y. **Le concept de rapport au savoir. Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel**. Seminaire de Grenoble. IREM d'Aix-Marseille, 1989.

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2)

DUVAL, R. **Gráficos e equações:** a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. REVEMAT, ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia A. (org.). **Aprendizagem em matemática: registro de representação semiótica**. Campinas-SP: Papirus, 2003. Cap. 1, p. 11-31.

DUVAL, R. **Sémiósis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Suisse: Peter Lang, 1995.

Eves, Howard. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

HENRIQUES, A. **Análise Institucional & Sequência Didática como metodologia de pesquisa.** In: Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, I, 2016, Bonito. Anais... Mato Grosso do Sul, 2016.

HENRIQUES, A. E SERÔDIO, R. **Intervenção de tecnologias e noções de registros de representação no estudo de integrais múltiplas na licenciatura em matemática.** Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM), UFSCar, São Carlos, SP, Brasil. 15-19 de julho de 2013.

HENRIQUES, A. NAGAMINE, C. M. L. NAGAMINE. **Reflexões sobre a Análise Institucional: O caso de ensino e aprendizagem de integrais múltiplas**. BOLEMA, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, dez. 2012.

HENRIQUES, A. **Reflexões sobre Análise Institucional e Sequência Didática: O caso do Ensino e Aprendizagem de Integrais Múltiplas**. Artigo elaborado junto ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas DCET – UESC, destinado ao processo de progressão de carreira do magistério superior (de adjunto a titular), Ilhéus, BA, 2011. Disponível em: http://sites. Google.com/site/gpemac/artigos. Acesso em 12 de agosto de 2017.

HENRIQUES, A., ALMOULOUD, **Saddo Ag**. **Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: Uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software *Maple***, Revista Ciência &Educação da UNES, Bauru (SP), 2016.

HENRIQUES, A., ATTIE, J. P., FARIAS, L. M. S. **Referências teóricas da didática francesa: Análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do *software* Maple**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, SP, v. 9, n. 1, p. 51-81, 2007.

HENRIQUES, A. **Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica – Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias.** Via Litterarum. Editora. 2019.

IMática, Blog. Disponível em: http://www.matematica.br/historia/prhind.html Acesso dia 17 de abril de 2019

MARQUES, S. A. S. S. **Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de Integrais Duplas e Triplas**. Dissertação de Mestrado. PPGEM/UESC. 2016.

Matematiquês, Blog. Disponível em: http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=32 Acesso em 03 de maio de 2018

Mol, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática** / Rogério S. Mol. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.

OBMEP. Blog da OBMEP. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/trigonometria-trigonometria-do-triangulo-retangulo/ Acesso em 03 de maio de 2018

OLIVEIRA, Jaqueline de, **Tópicos Selecionados de Trigonometria e sua História.** Trabalho de conclusão de curso, PUC-SP, 2010

PAIVA / Manoel Paiva - 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2015. Obra em 3v. Bibliografia. 1. Matemática (Ensino médio) I. Título.

RABARDEL, P. **Le Mathématicien, le Physicienet le Psychologue: Outilspour le calcul et le traçage de courbes** CNDP-DIE – Mars 1995.

RABARDEL, P. **Les hommeset les technologies: approche cognitive des instruments contemporains**. Paris, Armand Colin Editeur, 1995.

RABARDEL, P., VERILLON, P. **Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Though in Relation to Instrumented Activity.** European Journal of Psychology of Education, I.S.P.A., Vol. X, n˚ 1, 77-101, 1995.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese Instrumental na interação com o Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço.** 319f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC, São Paulo. 2009.

SILVA, Helder Lima. Estudo de *Funções Trigonométricas* em dois ambientes de aprendizagem no ensino médio / Dissertação de Mestrado – Ilhéus, BA: UESC, 2017.