UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

***EARLY ALGEBRA*: AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE ESTUDANTES DO 4º E 5º ANO FRENTE A PROBLEMAS QUE ALUDEM À ÁLGEBRA**

LÍGIA SOUSA BASTOS

ILHÉUS – BA
2019

LÍGIA SOUSA BASTOS

EARLY ALGEBRA: AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE ESTUDANTES DO 4º E 5º ANO FRENTE A PROBLEMAS QUE ALUDEM À ÁLGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática.

Professora Orientadora: Dra. Vera Lúcia Merlini

ILHÉUS – BA
2019

B327 Bastos, Lígia Sousa.
Early álgebra : as estratégias de resolução de estudantes do 4º e 5º ano frente a problemas que aludem à álgebra / Lígia Sousa Bastos. – Ilhéus : UESC, 2019.
171f. : il.
Orientadora : Vera Lúcia Merlini.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática.
Inclui referências e apêndices.

1. Álgebra – Estudo e ensino. 2. Matemática – História. I. Merlini, Vera Lúcia. II. Título.

CDD - 512

LÍGIA SOUSA BASTOS

***EARLY ALGEBRA*: AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE ESTUDANTES DO 4º E 5º ANO FRENTE A PROBLEMAS QUE ALUDEM À ÁLGEBRA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática, aprovado em 01 de Fevereiro de 2019, pela banca examinadora constituída pelas professoras doutoras:

BANCA EXAMINADORA

____

Professora Dra. Vera Lúcia Merlini
Universidade Estadual de Santa Cruz
Orientadora

____

Professora Dra. Sandra Maria Pinto Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz
Examinadora Interna

____

Professora Dra. Ana Virginia de Almeida Luna
Universidade Estadual de Feira de Santana
Examinadora Externa

Dedico este trabalho ao meus pais, Valdomiro e Evandes e à minha irmã Lêda por tanto me apoiarem nesta caminhada. Ao meu namorado Joaby, por ser amigo, companheiro e refúgio nos momentos mais difíceis. E aos meus bichinhos, Bile e Nininha, por estarem sempre comigo e, sem entender, esperarem a minha chegada e me proporcionarem tantos risos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me conceder a oportunidade de trilhar novos caminhos e me dar força, mesmo de onde já não tem mais de onde tirar, para chegar ao objetivo.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram nas decisões que tomo na vida e fazerem de tudo para que eu pudesse chegar aos meus objetivos.

À minha irmã, minha companheira, minha amiga, enfim, a ela por muitas vezes, sem tempo e mesmo de longe se fazer tão presente para me ouvir e me aconselhar e me incentivar nesta caminhada.

Ao meu namorado Joaby que caminhou comigo nesta jornada, me suportou com lamentos e reclamações mesmo tendo todo o fardo do mestrado para carregar também.

À minha orientadora Professora Dra. Vera Lúcia Merlini por ter sido tão paciente comigo, por ter sido tão compreensiva em muitos momentos que precisei, pelas horas seguidas de orientação (até por telefone) que se dedicou a mim.

À professora Dra. Sandra Magina que tanto me ajudou nesta caminhada, com orientações, sugestões e com muito incentivo na feitura deste trabalho.

À professora Dra. Ana Virgínia por ter dedicado tempo em ler meu trabalho desde a qualificação e ter contribuído tanto com sugestões, leituras e materiais.

Aos meus amigos e familiares Simone, Su, Taty, Robinho, Pri, Luzia e tantos outros (que não esqueço, mas não tenho como citar o nome de todos) que me incentivaram e tanto me ajudaram nesta caminhada.

Aos meus amigos de caminhada (Turma 9: Fabiano, Joaby e Vívian) que não era uma turma somente, era um grupo e estiveram juntos comigo nessa jornada me ensinando muito ao longo desses dois anos, a vocês um carinho especial.

Aos amigos Márcio, Vital e Graziele que tanto me incentivaram a entrar no mestrado e estiveram comigo na caminhada; aos amigos das outras turmas, Daiane e Martielle e todos os outros os quais conheci durante o mestrado e fizeram das aulas momentos de descontração e troca de conhecimentos.

Ao grupo RePARe que me proporcionou momentos de muitos conhecimentos e troca de experiências.

À Rafael e Cíntia que estavam sempre disponíveis em ajudar e proporcionavam momentos alegres no PPGEM.

À Eliane, Vanessa, Neuma, Fabiana, Dinorá, Otacionília (Neta) e a toda equipe da Escola Benvindo José da Silva a minha gratidão.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento desta pesquisa.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse chegar ao fim de mais essa jornada.

Muito obrigada!!!!!

EARLY ALGEBRA: AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE ESTUDANTES DO 4º E 5º ANO FRENTE A PROBLEMAS QUE ALUDEM À ÁLGEBRA

RESUMO

Este trabalho versa sobre a possibilidade da introdução de conceitos algébricos para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para compreender como os alunos reagem diante de situações que envolvem a Álgebra, tivemos como objetivo investigar as estratégias de resolução utilizadas por estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao lidarem com situações que envolvem sequências, equivalência e relação funcional. Desse modo, aplicamos um instrumento diagnóstico para oito alunos sendo quatro do 4º ano e quatro do 5º ano, utilizando o método clínico piagetiano na realização de uma entrevista semiestruturada no momento da aplicação do instrumento diagnóstico. Além disso, as entrevistas eram videogravadas e a aplicação do teste aconteceu de duas maneiras distintas: utilizando apenas papel e lápis e utilizando material manipulativo. A análise dos dados consistiu na observação tanto das respostas escritas no caderno de questões quanto na observação dos vídeos gravados no momento em que os alunos respondiam ao teste. Esses dados nos revelaram que os alunos conseguem resolver problemas relacionados à Álgebra no que se refere às três vertentes da *Early Algebra*. Por isso, tivemos resultados positivos no que tange à resolução de problemas envolvendo sequências, equivalência e relação funcional. A partir desses dados, concluímos que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental conseguem identificar padrões e regularidades, generalizam situações em certa medida, compreendem a equivalência e usam algumas propriedades, como também resolvem problemas relacionados às funções, sobretudo as lineares. A partir dos resultados podemos afirmar que não podemos tardar a introdução dos conceitos algébricos, mesmo que sejam alunos dos anos mais elementares da Educação Básica. Além disso, essa introdução possibilita que esses alunos tenham mais facilidade na compreensão da Álgebra propriamente dita nos anos subsequentes da escolaridade básica.

Palavras-chave: *Early Algebra*; Anos iniciais do Ensino Fundamental; Instrumento diagnóstico; Método clínico piagetiano.

ABSTRACT

This paper deals with the possibility of introducing algebraic concepts for students from the first years of elementary school. To understand how students react to situations involving Algebra, we aimed to investigate the strategies of resolution used by students in the 4th and 5th year of elementary school in dealing with situations involving sequences, equivalence and functional relationship. Thus, a diagnostic tool was applied to children aged four years and five years, using a Piagetian method of therapy in a semi-structured interview. In addition, the interviews were videotaped and the test was applied in two different ways: using only paper and pencil and using manipulative material. The analysis of the data consisted of the observation of both the written answers in the question book and the observation of the videos recorded at the time the students responded to the test. These data show that students can solve problems related to Algebra with regard to the three strands of *Early Algebra*. Therefore, we have had positive results regarding the resolution of problems involving sequences, equivalence and functional relation. From these data, we conclude that students in the early years of elementary school can identify patterns and regularities, generalize situations to a certain extent, understand equivalence and use some properties, as well as solve problems related to functions, especially linear ones. From the results we can say that we can not delay the introduction of algebraic concepts, even if they are students of the elementary years of Basic Education. In addition, this introduction makes it easier for students to understand Algebra in the subsequent years of basic schooling.

Keywords: Early Algebra; Early years of Elementary School; Diagnostic instrument; Piagetian clinical method.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC	**Base Nacional Comum Curricular**
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Consed	Conselho Nacional de Secretarias de Educação
EJA	Educação de Jovens e Adultos
MDF	Medium Density Fiberboard
MM	Material Manipulativo
NAS	Academia Nacional de Ciências
OA	Objeto de Aprendizagem
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
P&L	Papel e Lápis
RePARe	Grupo de Pesquisa Reflexão, Planejamento, Ação e Reflexão em Educação Matemática
TALE	Termo de assentimento Livre Esclarecido
TCLE	Temo de Consentimento Livre Esclarecido
Undime	União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação

Sumário

INTRODUÇÃO

Ao entrar[1] no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática ainda nas primeiras semanas, em conversa com minha orientadora, ela comentou que estava com um projeto novo e que o foco estava nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Até aquele momento ainda discutíamos sobre o projeto que apresentei para o programa quando fiz a seleção. No decorrer das primeiras semanas, aconteceu uma reunião do Grupo de Pesquisa Reflexão, Planejamento, Ação e Reflexão em Educação Matemática (RePARe) quando recebi a proposta de trabalhar no projeto de pesquisa intitulado *"A Early Algebra no Ensino Fundamental: mapeamento e diagnóstico*"*.*

De início fiquei um pouco assustada, mas aceitei a proposta e depois disso comecei a participar também das reuniões que eram destinadas à discussão do projeto. A partir daquele momento me senti desafiada, pois tratava-se de um trabalho voltado para os anos iniciais do Ensino Fundamental e eu conhecia muito pouco sobre esses anos. Considerei como um desafio pelo fato de ser Licenciada em Matemática e no geral recebemos a formação para trabalhar somente a partir dos anos finais do Ensino Fundamental. Além disso, até mesmo na minha experiência como professora, sempre tive certa dificuldade de trabalhar com alunos que saiam dos anos iniciais e, por isso sempre tive mais facilidade em trabalhar com alunos mais velhos.

Apesar de ser uma proposta desafiadora, a aceitei e comecei a pesquisar sobre a *Early Algebra* para conhecer seu foco, de que se tratava e conhecer a respeito de pesquisas realizadas na área. Nesse sentido, o que me ajudou muito a conhecer a área foi o "Grupo da *Early Algebra*", assim como sempre foi chamado. As reuniões aconteciam semanalmente e, a cada semana, geralmente, era discutido um texto sobre alguma pesquisa realizada e, posteriormente eram discutidos sobre os trabalhos que estavam sendo

[1] A introdução foi escrita em primeira pessoa do singular para ficar claro que essas são as colocações da autora dessa dissertação. No entanto, a partir do Capítulo I e escrita segue toda em primeira pessoa do plural, por entender que este trabalho foi escrito na parceria da autora com a orientadora.

realizados no grupo. Essas discussões me levaram a conhecer o tema, a área e também a compreender o que precisava para pensar sobre o meu trabalho.

A partir das discussões no grupo de pesquisa foi que comecei pensar sobre o meu trabalho. Além disso, a conversa com os colegas que estavam realizando pesquisas na mesma área me ajudavam muito, pois era uma troca de experiências entre iguais. Além disso, ao realizar as leituras sobre o tema minhas indagações e curiosidades só aumentavam. Com isso, me senti mais motivada a realizar a pesquisa e foi a partir disso que muitas ideias vinham à cabeça.

Em relação ao projeto, ele apresenta dois estudos distintos que se complementam, sendo que o primeiro deles, denominado por estudo (α), refere-se a um mapeamento das pesquisas brasileiras relacionadas ao tema nos últimos 10 anos. O segundo estudo (β) diz respeito a um diagnóstico a ser aplicado em estudantes do Ensino Fundamental e é exatamente nesse estudo que essa pesquisa está inserida.

A relevância dessa pesquisa

Ao buscar pelo tema, um dos primeiros textos que li foi a BNCC (BRASIL, 2017) que veio com uma novidade em relação aos outros documentos oficiais. Neste documento a introdução de noções de Álgebra é recomendada desde o primeiro ano do Ensino Fundamental. A partir da leitura da BNCC compreendi a necessidade de dar início às ideias da Álgebra desde os anos mais elementares da Educação Básica. Por assim ser, começaram a surgir questionamentos sobre: O que fazer? Como fazer? Onde será? Quem serão os alunos? Enfim, eram tantas perguntas. Diante disso, procurei me aproximar desse tema buscando leituras que me fizessem compreender melhor como seria a abordagem algébrica a estudantes tão jovens.

Na busca por trabalhos que tratassem a respeito do desenvolvimento do pensamento algébrico, procurei por estudos nacionais e internacionais. Sobretudo os internacionais, uma vez que a pesquisa a respeito deste tema aqui no Brasil ainda está dando os primeiros passos. Posso afirmar isso a partir da pesquisa de Rodrigues e Pires (2017) em que os autores fazem um mapeamento de teses e dissertações a respeito do ensino de Álgebra no Ensino Fundamental no Brasil. Esse mapeamento foi feito com trabalhos publicados de 2008 a 2015 e, neles as pesquisas versavam sempre sobre a formação de professores e sobre o ensino nos anos finais do Ensino Fundamental. Entre as pesquisas, foi detectada apenas uma delas que tratava do ensino de Álgebra nos anos iniciais.

A pesquisa de Rodrigues e Pires (2017) me ajudou a entender a dimensão da necessidade em estudar o tema. Outra pesquisa que também colaborou com a minha busca por mais pesquisas foi a de Ferreira (2017) que traz uma análise dos documentos oficiais brasileiros no que tange ao ensino de Álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Após essa busca, fui procurar por algumas pesquisas que os referidos autores comentam em seus trabalhos, como também tive conhecimento de outras pesquisas que tratavam do tema.

Nessa busca me deparei com os estudos de Teixeira (2016), que realizou uma intervenção de ensino com 29 estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental. Ele realizou um pré-teste, cinco encontros em que fez a intervenção de ensino e dois pós-teste, o primeiro 15 dias após o término da intervenção e outro, 66 dias depois dessa intervenção. O pesquisador teve resultados relevantes do ponto de vista do desempenho dos estudantes. Os resultados encontrados apontam que é possível trabalhar com conceitos relacionados à álgebra já nos anos iniciais.

Outro estudo relevante é o de Civinski (2015) que aplicou um produto educacional a 82 estudantes do 3º ao 6º ano do Ensino Fundamental com idades entre 8 e 12 anos. Esse produto educacional consistiu em jogos que tinham como objetivo o de compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico desses estudantes no que diz respeito às regularidades e padrões e nas várias interpretações do símbolo de igualdade. As atividades, em sua maioria, foram aplicadas no segundo semestre do ano e foram consideradas principalmente as atividades aplicadas para as turmas de 3º, 4º e 5º anos. O interesse por essas turmas está relacionado com o objetivo de compreender o pensamento algébrico desses estudantes tão jovens ao se depararem com noções intuitivas da Álgebra. Também considerou importante o fato de que esses estudantes não tinham contato com a simbologia e, por isso, a importância de observar as interpretações do símbolo de igualdade feitas por eles.

Corrobora com essas ideias os resultados encontrados por Luna e Souza (2013), apontando que o ensino da Álgebra deve ser iniciado já nos primeiros anos do Ensino Fundamental, pois assim seriam desenvolvidos alguns aspectos da álgebra o que ajudaria o estudante a resolver situações-problema com mais significado.

Isso posto, considerando que estudantes dos anos iniciais podem compreender, mesmo que intuitivamente, conceitos algébricos e as recomendações feitas pela BNCC (BRASIL,2017), julgo importante trazer aspectos de como eles pensam ao se defrontar com situações que envolvam tais conceitos.

O interesse em pesquisar os anos iniciais do Ensino Fundamental está relacionado diretamente às propostas da BNCC (BRASIL, 2017) que sugere trabalhar o pensamento algébrico com os estudantes mais jovens. Essa base argumenta que desde cedo eles possuem essas habilidades em resolver problemas relacionados com a Álgebra e essas habilidades são naturais. Resultados de estudos (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2016; BRIZUELA, 2006; KAPUT, 1999) apontam que crianças tão jovens, com idade correspondente às dos anos iniciais do Ensino Fundamental das escolas brasileiras, conseguem raciocinar algebricamente perante situações que lhe são propostas mesmo não sabendo que estão resolvendo problemas de cunho algébrico. Esses estudos se reportam ao pensamento algébrico referenciado na BNCC (BRASIL, 2017) como sendo um tema discutido no cerne da *Early Algebra*[2].

Os resultados de pesquisas sinalizam positivamente para iniciar esses trabalhos com algumas noções de Álgebra já nos anos iniciais. Contudo, fico instigada em saber como os alunos pensam e agem ao se defrontar com situações envolvendo Álgebra. Dessa forma, a minha pesquisa está relacionada ao Estudo Beta do Projeto *A Early Algebra no Ensino Fundamental: mapeamento e diagnóstico*.

Objetivo e Questão de pesquisa

Após ter sinalizado a relevância do tema posto aqui para ser discutido é necessário que, no delinear dessa pesquisa seja apresentado objetivo que impulsionou este estudo e a pergunta que o guiou. Assim sendo, apresento o objetivo desse estudo qual seja o de **investigar as estratégias de resolução**

[2] Esse termo *Early Algebra* será amplamente discutido no Capítulo 1.

utilizadas por estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao lidarem com situações que envolvem sequências, equivalência e relação funcional.

De acordo com o objetivo deste trabalho tenho como interesse maior responder à seguinte questão de pesquisa: **quais as estratégias de resolução utilizadas por estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao lidarem com situações que envolvem sequências, equivalência e relação funcional?**

A respeito do termo pensamento algébrico que é mencionado no decorrer deste texto, devo deixar claro que, por razões do projeto o qual este estudo está inserido, aqui será abordado fazendo menção sempre ao termo *Early Algebra*. Este termo está em concordância com o termo pensamento algébrico, mas por algumas singularidades o que chamo de *Early Algebra* é tratado por alguns autores por pré-álgebra ou álgebra precoce. Vale ressaltar que neste estudo será usado o termo pensamento algébrico que está intimamente ligado à *Early Algebra*.

Por considerar o pensamento algébrico como o cerne da *Early Algebra*, no Capítulo II deste trabalho ele será amplamente discutido. A respeito da sua concepção existem vários autores que o concebem (LINS; GIMENEZ; 1997; BLANTON; KAPUT, 2005; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Levo em consideração as várias concepções a respeito do referido termo e compreendo que ele é de extrema relevância para o que será discutido em torno dessa pesquisa.

Na discussão sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental é preciso que eles estejam em contato com situações ligadas a Álgebra propriamente dita. Por isso, no que tange a *Early Algebra*, levo em consideração três vertentes que dela que levam os conceitos algébricos no seu bojo. As três vertentes que considero na *Early Algebra* são a sequência, a equivalência e a relação funcional. É a partir da apresentação de situações com essas três vertentes é que julgo ser possível compreender como os alunos tão jovens podem desenvolver o pensamento algébrico.

Em relação às três vertentes da *Early Algebra*, vale ressaltar que são os meios em que se fundamenta grande parte dos problemas matemáticos. Essas três vertentes elas se entrelaçam e suas diferenças são tênues e, trazem à tona as generalizações, que é algo importante no raciocínio algébrico. A partir do que os alunos apresentam ao lidarem com problemas relacionados a Álgebra é que será possível compreender como eles pensam.

O trajeto dessa dissertação

Para atingir o objetivo e responder à questão de pesquisa, tive a necessidade de organizar o estudo, trilhando um determinado caminho o qual trago nesse momento.

Esse estudo inicia por essa introdução a qual trouxe o projeto que deu origem à pesquisa, algumas das recomendações da BNCC (BRASIL, 2017) e alguns resultados dos estudos relacionados ao tema. Tendo por base o projeto de pesquisa no qual estou inserida, trouxe ainda o objetivo e a questão que norteia o presente estudo.

No Capítulo I, trago todo o subsídio teórico que se faz necessário à pesquisa. Apesar de não ser uma teoria consolidada, a bagagem teórica que é trazida no referido capítulo diz muito a respeito à Álgebra e ao pensamento algébrico que considero o cerne da *Early Algebra*. Neste capítulo é discutido também o que os autores consideram e, de certo modo, concebem por *Early Algebra* e qual o seu foco. Além disso, é feita uma explanação sobre a *Early Algebra* na perspectiva da escola, que faz referência às orientações dos documentos oficiais brasileiros a respeito do ensino de Álgebra para os anos iniciais.

Em relação ao Capítulo II, nele é apresentada a *Early Algebra* na perspectiva da matemática. Este capítulo também ajudará a embasar todo esse estudo no que diz respeito à Álgebra para os alunos pequenos no que tange à sequência, à equivalência e à relação funcional. Apesar de ser necessário antes deixar claro os conceitos e as definições matemáticas importantes para que seja possível compreender de que maneira pretende-se atingir os estudantes dos anos mais elementares da educação básica. Além disso, trago também os estudos correlatos que auxiliarão no processo de análise dos dados obtidos.

O Capítulo III traz os Procedimentos Metodológicos. Foi nele que desenhei todo o estudo, apresentando a escola envolvida como também os sujeitos de pesquisa. Detalho o instrumento diagnóstico que foi utilizado e apresentado aos estudantes e que, por consequência dessa aplicação, resultou na obtenção dos dados. Em seguida, trago os procedimentos de obtenção dos dados e, posteriormente, da análise, a qual contou apenas com a qualitativa.

O Capítulo IV apresenta a Análise dos Dados. Essa análise foi apenas a qualitativa, pelo fato de a amostra ser pequena e dar a possibilidade de realizar uma análise mais detalhada dos dados obtidos. Ela foi organizada de forma que os dados foram categorizados a partir das principais características que eles apresentaram. Para melhor organizar as informações analisadas, o capítulo foi dividido em quatro seções de modo que na primeira são discutidas as principais formas de registros dos alunos; na segunda traz os resultados a respeito da vertente sequência; na terceira traz os resultados da vertente equivalência; e na quarta traz os resultados da vertente relação funcional.

Finalmente, mas não menos importante, apresento as Considerações Finais a respeito da pesquisa realizada. Nela trago as considerações referentes aos resultados obtidos e discuto a partir deles sobre o objetivo da pesquisa. Desse modo, com base nos dados respondo à questão de pesquisa e, por fim, apresento indicativos de futuras pesquisas a respeito do tema discutido que possam dar continuidade ao estudo.

CAPÍTULO I

1. O QUE A ÁLGEBRA PODE REVELAR PARA SEU ENSINO E AS IMPLICAÇÕES DA *EARLY ALGEBRA*

Há alguns anos, pesquisadores como Brizuela (2006), Blanton (2007), Booth (1995), Thompson (1995), Carraher e Schliemann (2006) têm se preocupado com as questões relativas à aprendizagem da álgebra. A atenção dada por eles não está apenas no período em que se inicia a abordagem da álgebra no Ensino Fundamental com a introdução das equações. Os pesquisadores têm dado importância principalmente à introdução de conceitos algébricos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, visto que pesquisas apontam que estudantes deste nível de ensino conseguem compreender alguns conceitos e estabelecer algumas relações.

O que os pesquisadores argumentam é que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde que o trabalho com a Álgebra seja feito adequadamente. Mas, antes, será feita uma discussão a respeito da história da Álgebra, abrangendo as suas concepções para, por fim, ser discutido o que se compreende por pensamento algébrico. A partir dessas discussões é que será feita uma abordagem do que se compreende por *Early Algebra* e serão colocados quais são os seus propósitos para o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais da escolaridade.

1.1 Um pouco da história do desenvolvimento da Álgebra

A Álgebra é considerada como uma grande resolutora de problemas na matemática, como também em outras áreas. Essa forma de caracterizar a Álgebra tem suas origens na história de seu desenvolvimento. A história pode mostrar que ela veio justamente com o caráter de resolver problemas e, mais tarde, foi ganhando formas diferentes de se expressar sem perder a sua utilidade. No que tange ao seu desenvolvimento, em alguns aspectos, a Álgebra somente aperfeiçoou as suas formas de utilização. O que aconteceu foi que, por vezes, nesse desenvolvimento ela expandiu seu conhecimento para novos campos. Entretanto, outras vezes aperfeiçoou apenas o conhecimento para a mesma finalidade.

Para efeito de esclarecimento, a história da Álgebra é dividida em dois grandes momentos: a Álgebra Clássica ou Elementar e a Álgebra Moderna ou Abstrata (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993). O período da Álgebra Clássica pode ser considerado até o momento em que são publicados dois resultados importantes sobre a teoria das equações algébricas. A partir de meados do século XIX, a Álgebra começa a se desenvolver em relação à estrutura e se iniciam trabalhos para o estudo de grupos, anéis, espaços vetoriais e corpo. Esses trabalhos nessas áreas constituíram o que pode ser considerado o cerne da Álgebra Moderna (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009).

No entanto, a História da Matemática classifica o desenvolvimento da Álgebra em função de três fases da evolução da sua linguagem. Essas fases são classificadas em Álgebra retórica, Álgebra sincopada e Álgebra simbólica (EVES, 2004). Na primeira fase, conhecida como Álgebra retórica, os problemas e as resoluções para eles eram escritos puramente em língua natural sem abreviações ou fazendo uso de outros símbolos. A Álgebra em sua fase sincopada já fazia uso de abreviações de quantidades e operações que apareciam com mais frequência nas expressões. Esse tipo de linguagem teve grande desenvolvimento com Diofanto de Alexandria, que utilizava “abreviações para incógnitas, potências da incógnita até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos” (EVES, 2004, p. 2009). A última fase do desenvolvimento da linguagem algébrica foi a denominada Álgebra simbólica. Esse tipo de linguagem fazia uso de símbolos para expressar, por completo, expressões de problemas e suas resoluções. Essa nova forma de escrita algébrica foi inserida por François Viète no século XVI (EVES, 2004). Foi com Viète que se introduziu o uso das vogais para quantidades constantes, e consoantes para quantidades incógnitas. Além disso, Viète também fazia uso dos sinais + e – (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993).

Tudo o que se desenvolveu na Álgebra e na sua escrita ao longo dos séculos, resulta no que se tem hoje e que é usado naturalmente como se sempre tivesse existido. No entanto, através de algumas fases a própria história mostra, como a Álgebra se desenvolveu. O resultado que se tem hoje é o que é posto nos currículos de ensino de matemática e que são implementados nos Ensinos Fundamental e Médio, aqui no Brasil.

O que foi abordado sobre os aspectos históricos do desenvolvimento da Álgebra serve de subsídio para compreender o trabalho da Álgebra propriamente dita. Por isso, no subtítulo a seguir, será exposto o que se entende por Álgebra e atividade algébrica.

1.2 A Álgebra e suas concepções

Antes de discutir o que vem a ser atividade algébrica, é preciso compreender o que é a Álgebra. No entanto, essa área tão importante da matemática não tem uma definição precisa. Desse modo, o que é feito aqui é uma discussão do que se entende por Álgebra e, para compreendê-la é preciso também entender onde ela se concentra. Por isso, são trazidos alguns autores que, de certo modo, conceituam a Álgebra a partir do que ela estuda.

Num estudo sobre a Álgebra, Lins e Gimenez (1997) defendem que a ela pode ser caracterizada pelos seus elementos de estudo. Esses elementos se constituem em funções, equações e outros tópicos que são discutidos como relacionados a ela. No entanto, os autores dizem ainda que, apesar de se ter um consenso do que são os elementos ligados à Álgebra, ainda existem dúvidas sobre certos elementos que não são considerados como algébricos e que poderiam ser considerados como tal. Nesse sentido, os referidos autores indicam que existem mais elementos da Álgebra do que se tem conhecimento.

Nessa discussão a respeito da Álgebra e do seu desenvolvimento, principalmente no sentido do uso do símbolo, Usiskin (1995) traz uma reflexão importante para a discussão sobre os diferentes usos de variáveis dentro da referida área. Nessa discussão, Usiskin (1995) traz as diferentes abordagens do uso dessas variáveis dentro da Álgebra e define as suas concepções como aritmética generalizada, meio de resolver certos problemas, estudo de relações e estrutura. Tendo conceituado a álgebra dessa maneira, o autor faz as seguintes relações com o uso de variáveis:

- Aritmética generalizada: nessa concepção, considera-se que a álgebra é fundamental para traduzir e generalizar, de modo que isso seja possível por meio da generalização de modelos;
- Meio para resolver certos problemas matemáticos: aqui, mais do que traduzir e generalizar, é necessário simplificar e resolver no sentido de que faz uso de incógnitas e constantes;
- Estudo de relações: trata-se da relação entre grandezas, onde as variáveis, de fato, variam, pois aqui as variáveis não são mais consideradas como incógnitas e sim como variáveis, de modo que uma variável pode ser considerada como um argumento ou um parâmetro;
- Estrutura: nessa concepção, a variável é compreendida como algo mais que sinais arbitrários no papel.

Nessa discussão, e a partir de seus estudos a respeito das concepções da álgebra, Usiskin (1995) chega a afirmar que ela não pode ser considerada apenas como aritmética generalizada, pois ela é bem mais ampla. Usiskin (1995) afirma ainda que, apesar de a álgebra fornecer meios para resolver certos problemas e fornecer meios para desenvolverem e analisarem relações, a álgebra é ainda a fonte para caracterizar e compreender as estruturas matemáticas (USISKIN, 1995).

Concordando com a concepção de Álgebra para Usiskin (1995), Kieran (1995) considera que “A álgebra muitas vezes é chamada de ‘aritmética generalizada’. Essa expressão sugere que as operações aritméticas são generalizadas a expressões envolvendo variáveis.” (p. 104). Essa autora considera a aritmética como o primeiro passo para a atividade algébrica. No entanto, Kieran (1995) afirma ainda que o que distingue, principalmente, a álgebra da aritmética é a diferenciação das operações usadas para resolver uma equação e as operações da própria equação.

O que Usiskin (1995) e Kieran (1995) tem em comunhão de ideias é que a Álgebra pode ser considerada como aritmética generalizada. Além disso, concordam que a Álgebra está para além disso, pois a aritmética é como ponto de partida para a compreensão da Álgebra em termos de sua estrutura.

Do mesmo modo, Lins e Gimenez (1997) comungam também da mesma concepção de Usiskin (1995) e Kieran (1995) quando afirmam que aritmética e álgebra não estão separadas uma da outra, pelo contrário, elas se completam.

Nessa abordagem, aritmética e álgebra só mudam de foco e de tratamento (LINZ; GIMENEZ, 1997). Por assim entender que álgebra e aritmética não se encontram completamente desligadas uma da outra, e, apesar de não existir um consenso do que seja Álgebra, Lins e Gimenes (1997) trazem uma definição do que seja Álgebra para eles. Assim, eles a consideram como “um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade.” (LINS; GIMENEZ, 1997).

Sendo assim, a partir do que Lins e Gimenez (1997) consideram como álgebra, eles trazem também o que consideram como atividade algébrica e, por fim, caracterizam-na. Desse modo, os autores afirmam que a “atividade algébrica consiste no processo de produção de significado” (LINS; GIMENEZ, 1997). Por isso, na caracterização da atividade algébrica, os autores deixam evidente que essa atividade depende de “conteúdos”. Esses conteúdos são os tópicos relacionados à Álgebra. O que os autores afirmam é que a atividade algébrica depende do que é produzido e que tenha um significado e que sejam estabelecidas fronteiras para a álgebra, de modo que a atividade produzida seja classificada como algébrica ou não pela pessoa que a examina.

Para melhor compreender a caracterização da atividade algébrica, é preciso compreender também o que é produzir significado. Para isso, primeiro é preciso entender o que é significado. Segundo Lins e Gimenez (1997) “significado é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto”. Desse modo, para os autores, produzir significado é justificar sobre um determinado objeto.

A caracterização da atividade algébrica se faz necessária para, posteriormente, compreender o que vem a ser distinguido pelos autores por pensamento algébrico. A discussão a respeito do que se considera por pensamento algébrico será feita no item a seguir, pois, além do que se considera por Lins e Gimenez (1997), são discutidos e confrontados os pontos de vista de outros estudiosos do assunto.

1.3 O que é designado por Pensamento Algébrico?

Para chegar a um consenso do que seja pensamento algébrico, antes é preciso retomar um pouco da história da própria matemática e associá-la ao seu desenvolvimento. Sendo assim, a Educação Algébrica, não só no Brasil, considerava a relação de subordinação entre pensamento algébrico e linguagem algébrica. Para essa concepção de Educação Algébrica, não seria possível desenvolver o pensamento algébrico se não por meio da compreensão da linguagem algébrica, sobretudo a simbólica. Por isso, o ensino-aprendizagem da álgebra, por muito tempo, foi condicionado ao ensino de técnicas de manipulação de símbolos para se obter um resultado (FIORENTINI, MIORIN, MIGUEL, 1993).

Por isso, desde muitos anos, muitos autores (BOOTH, 1984; KIERAN, 1992; KAPUT, 1999; KIERAN, 2004; KAPUT, BLATON, 2005) têm se preocupado com o ensino da Álgebra e buscado, por meio de estudos, compreender como esse trabalho tão árduo pode se tornar um pouco mais flexível. Desse modo, ao retomar a história, é possível perceber que a Álgebra, assim como as outras áreas da matemática e das ciências, se desenvolveu por um processo natural respondendo às necessidades da humanidade em resolver seus problemas. Sendo assim, o ensino dela deve ser tratado também com a naturalidade necessária para que não se tenha espaço para certos obstáculos no ensino da Álgebra, que é sempre colocado como o desenvolvimento de técnicas de se manipular símbolos sem se compreender o significado que estão por trás deles.

Em relação ao pensamento algébrico, muitos autores têm buscado conceituá-lo. Muitas das concepções defendidas por alguns autores seguem a mesma linha, já outros autores diferem um pouco de opinião. Por isso, serão apresentadas aqui algumas concepções do que pode ser caracterizado como pensamento algébrico.

Kaput (1999) defende que o ensino da Álgebra seja iniciado desde cedo e, para isso, é necessário um grande empenho, pois essa mudança depende de professores e de todo um currículo, e mudanças desse tipo só acontecem a longo prazo. Por isso, o autor salienta ainda que essas mudanças na sala de aula podem começar através de generalizações que podem ser expressas com linguagens cada vez mais formais. Essas generalizações podem ser iniciadas na aritmética, através da modelagem, da geometria, como também em todas as áreas da matemática. O autor defende ainda que esse trabalho deve ser iniciado desde os primeiros anos da escolaridade.

Por considerar necessária essa mudança, no que concerne ao ensino da Álgebra, Kaput (1999) defende cinco diferentes formas do pensamento algébrico: (1) Álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições; (2) Álgebra como manipulação sintática de formalismos; (3) Álgebra como o estudo das estruturas abstratas e das relações; (4) Álgebra como o estudo das funções, relações e variação conjunta de duas variáveis; (5) Álgebra como um conjunto de linguagens na modelagem matemática e no controle de fenômenos.

Para Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico é a forma que alunos generalizam as ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares e estabelecem essas generalizações a partir de um discurso argumentativo cada vez mais formal de acordo com a idade. As generalizações partem de um processo natural, ou seja, a depender da idade e da experiência do aluno. Sendo assim, a generalização pode ser expressa a partir de palavras ou de símbolos.

O que os referidos autores têm em comum é o fato de considerarem que o cerne do pensamento algébrico está na generalização. A essas formas de generalização os autores concordam que se trata de um processo natural e que podem ser expressas de diferentes formas. Além disso, concordam que deve ser iniciado desde cedo, ainda nos primeiros anos da escolaridade. Essa caracterização de pensamento algébrico considerada pelos autores supracitados não se diferencia muito do que é colocado por outros autores. No entanto, influenciados por outros aspectos Ponte, Branco e Matos (2009) e Lins e Gimenez (1997) diferem um pouco de opinião.

Para Ponte, Branco e Matos (2009) o pensamento algébrico valoriza não somente os objetos estudados, mas também as relações estabelecidas entre esses objetos, de maneira que se possa representar e raciocinar sobre essas relações tanto de modo geral quanto abstrato (PONTE, BRANCO, MATOS 2009). Destarte, os autores consideram que uma das formas privilegiadas para desenvolver o raciocínio é identificar regularidades num determinado conjunto de objetos.

Por assim considerar o pensamento algébrico, Ponte, Branco e Matos (2009) o dividiram em três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas. Cada uma das três vertentes é identificada por funções diferentes do pensamento algébrico e uma não mais importante que a outra. Ao contrário disso, elas se complementam. Segundo os autores, as vertentes fundamentais do pensamento algébrico são divididas e caracterizadas em:

Quadro 2.1 - Vertentes Fundamentais do Pensamento Algébrico

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009).

Lins e Gimenez (1997) caracterizam o pensamento algébrico a partir do que ele possibilita no que eles consideram como formas de produzir Álgebra. Para eles, o pensamento algébrico é uma dessas formas de produzir álgebra e possuem três características que eles chamam de fundamentais. Elas são:

> 1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso *aritmeticismo*);
> 2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou geométricos (chamamos a isso *internalismo*); e,
> 3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso *analiticidade*). (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 151)

E para sistematizar o que vem a ser pensamento algébrico, Lins e Gimenez (1997) completam:

> Pensar algebricamente é pensar dessa forma; é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com (1), (2) e (3). (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 151)

Dessa forma, para Lins e Gimenez (1997), um projeto para a educação algébrica deve considerar dois objetivos importantes. Esses objetivos são essencialmente 1) que os alunos possam produzir significado em termos de álgebra e, 2) que eles possam "desenvolver a capacidade de pensar algebricamente" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 152).

Ponte, Branco e Matos (2009) se aproximam de Lins e Gimenez (1997) no sentido de que consideram que o pensamento algébrico desenvolve a capacidade de estabelecer relações entre números e operações, no que diz respeito tanto às propriedades da aritmética quando às propriedades que envolvem incógnitas e variáveis. Nesse sentido, os autores possuem uma visão mais voltada para o que Usiskin (1995) discute como as concepções da Álgebra. Por isso, a visão desses autores se distancia um pouco do que Kaput (1999) e Blanton e Kaput (2005) consideram como pensamento algébrico. No entanto, todos esses autores possuem um consenso de que uma das principais características do pensamento algébrico é a generalização e a possibilidade de resolver problemas por meio de modelagem, sejam esses modelos expressos nas diversas formas de linguagem.

A partir do que foi exposto por todos esses autores, no que diz respeito ao pensamento algébrico, vamos considerar pensamento algébrico como sendo a forma de estabelecer relações entre objetos e generalizar, além de resolver problemas e/ou modelar situações que possam ser traduzidas nas mais diferentes formas de linguagem (língua natural, por meio de desenhos, da geometria e da própria linguagem algébrica).

Assim, concordamos também com o que Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) afirmam quando asseguram que o pensamento algébrico é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas na matemática, mas também em diversas áreas do conhecimento.

Os autores mencionados no parágrafo anterior também defendem a ideia de que o ensino e a aprendizagem da álgebra devem ser iniciados desde os anos iniciais. Além disso, consideram que o objetivo fundamental nos anos iniciais deve ser a capacidade de perceber regularidades e expressar o que foi identificado por meio das diversas formas de linguagem, de modo que as ideias possam expressar ideias de generalização.

De acordo com o que foi exposto a respeito do que alguns autores consideram por pensamento algébrico, surge o interesse em começar desde cedo o ensino da álgebra. Por isso, a seguir será discutido o que se compreende por *Early Algebra*.

1.4 A *Early Algebra*

A justificativa para que as atividades com a álgebra comecem desde cedo está em pesquisas que apontam que crianças conseguem resolver problemas com ênfase na álgebra mesmo ainda muito jovens. De acordo com isso, Schliemann e Carraher (2016) afirmam que crianças que estão estudando os anos que equivalem aos anos iniciais do Ensino Fundamental, aqui no Brasil, conseguem compreender e usar regras e princípios, e fazer representações algébricas.

Assim, os autores mencionados acima afirmam ainda que "desde os oito anos, as crianças podem ter acesso a ideias e representações algébricas, produzir, interpretar e inter-relacionar vários tipos de representações que, em geral, somente são introduzidas ao fim da escola primária." (SCHIIEMANN; CARRAHER, 2016).

A *Early Algebra* surge a partir da preocupação em compreender como acontece o desenvolvimento do raciocínio algébrico em crianças que não tiveram ainda o contato com os conceitos algébricos. A *Early Algebra* teve seu início, aproximadamente, no ano de 2006 com a publicação da Academia Nacional de Ciências (NAS) que, através de uma petição, organizou um documento que tinha como objetivo a proposta para a melhoria do ensino da álgebra nos Estados Unidos. Esse encontro teve a participação de, aproximadamente, 50 pessoas, que foram organizadas em cinco grupos, a saber: (1) Early Algebra (Pré-álgebra); (2) Introductory Algebra (Álgebra Introdutória); (3) Intermediate Algebra (Álgebra Intermediária); (4) Algebra for Teachers (Álgebra para Professores); (5) College Algebra (Álgebra Universitária). Os participantes desses grupos analisaram o que havia proposto para o ensino de álgebra até aquele momento e, posteriormente, sugeriram orientações futuras para a melhoria do ensino e da aprendizagem dessa área (KATZ, 2007). Foi a partir dessa conferência que surgiu o termo *Early Algebra*, que muitos pesquisadores mencionam como pré-álgebra.

De acordo com Katz (2007), durante essa conferência, os estudiosos discutiram que era necessário que os estudantes, iniciantes no processo educativo, tivessem uma melhor preparação para a matemática que se tornava cada vez mais complexa. Eles discutiram que esses estudantes precisam estar acostumados a pensar, de modo a atingir a matemática na sua estrutura mais profunda. À forma de compreender essa necessidade da matemática para os níveis mais elementares foi denominada de *Early Algebra*.

A *Early Algebra* não deve ser entendida como um complemento do currículo escolar, mas deve ser entendida como uma forma de produzir significado, a fim de trazer compreensão e profundidade ao conhecimento matemático (KATZ, 2007). Por isso, segundo o referido autor, o propósito dela é dar meios para que alunos iniciantes no processo de aprendizagem da matemática, possam desenvolver suas habilidades na exploração de situações. A partir dessa exploração, que esses alunos tenham condições de justificar suas ideias usando argumentos cada vez mais consistentes.

O que Katz (2007) afirma é que crianças que tiverem contato com situações que envolvam a álgebra, desde os primeiros anos da escolaridade, poderão estar mais bem preparadas para compreenderem a Álgebra mais formal nos anos posteriores de estudo.

O autor afirma ainda que muitas pesquisas foram desenvolvidas para compreenderem o que estudantes do início da escolaridade são capazes de fazer em termos de Álgebra. O que as pesquisas apontam é que esses estudantes são capazes de descrever e justificar relações aritméticas; desenvolver uma visão algébrica da relação de igualdade; usar meios de representação adequados para representar as relações entre quantidades; identificar e usar símbolos nas relações funcionais; construir argumentos para justificar problemas que exigem o raciocínio com generalizações; aprendem a comparar quantidades abstratas e conseguem estabelecer relações entre essas medidas.

Nessa discussão, Katz (2007) aborda também que os professores precisam estar preparados para trabalhar com a *Early Algebra*, mas de uma forma que esse trabalho não seja feito tratando-a como um tópico isolado. É preciso que haja a compreensão de que o trabalho com a *Early Algebra* deve ser um contínuo, de maneira que leve as crianças a experimentarem momentos ricos de discussão sobre a Álgebra. Mas, para isso, o currículo precisa se adequar dando condições para que essa forma de ensino seja implementada.

Após essa discussão a respeito da origem e dos compromissos que ficam evidenciados no termo *Early Algebra*, é possível tomar como alicerce o que Carraher, Schliemann e Schwartz (2007) afirmam sobre ela. Para eles, a *Early Algebra* está voltada para a abordagem da Álgebra nos anos iniciais da escolaridade básica, e que pode ser feita de forma gradual ano após ano. Por isso, defendemos a ideia de que *Early Algebra* não se configura como algo novo nos currículos de matemática, ela tem o compromisso de fazer refletir sobre a necessidade de introduzir noções de Álgebra nos anos iniciais a partir de situações que podem se apresentar puramente através da aritmética. Sendo assim, é necessário tirar a venda dos olhos e olhar para situações que antes apareciam somente como operações e regras que se apresentavam para os alunos e, agora apresentar essas situações numa abordagem diferente acrescentando a elas as ideias intuitivas de Álgebra que existem por trás delas.

Como afirma Thompson (1995), é comovente imaginar a matemática que crianças são capazes de aprender, se forem estimuladas de maneira correta através de formas adequadas às suas necessidades.

1.5 A perspectiva da *Early Algebra* na Escola

Nessa seção é feita a discussão a respeito do que os documentos oficiais brasileiros abordam a respeito do ensino de Álgebra. Para compor essa seção são elencados dois documentos importantes quais sejam o PCN (1997, 1998) e a BNCC (2017). Para fazer uma explanação a respeito desses documentos, antes foi feito comentário geral do que são eles e o que os compõem, bem como são divididos. Isso foi necessário para efeito de compreensão dos documentos e do conteúdo neles apresentados.

Cabe ressaltar também o fato de que, após a publicação da BNCC (2017), o PCN (1997, 1998) perdeu um pouco da sua importância. No entanto, foi necessário discuti-lo pelo fato de que, dos documentos oficiais anteriores, ele já apontava para a necessidade do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais da escolaridade PCN (BRASIL, 1997). Além disso, na nossa pesquisa nos reportamos a estudos que tratam do assunto desde a década de 1990. Por isso, a importância de trazer tal documento que já mencionava sobre o ensino da Álgebra nos anos iniciais e, que só teve sua abrangência e foi dada a importância devida na BNCC (2017). Portanto, a última seção vai fazer uma análise entre os dois documentos e apontar os avanços de um para o outro.

1.5.1 O que orientam os PCN

Ao longo do tempo, na história da educação brasileira, foram publicados documentos que serviram para guiar o trabalho escolar. Nesse sentido, em 1997, foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que servem justamente para orientar o trabalho docente. Esse documento que é direcionado para a área da Matemática é um instrumento que pretende estimular a busca coletiva de soluções para o ensino dessa área. Soluções que precisam transformar-se em ações cotidianas que efetivamente tornem os conhecimentos matemáticos acessíveis a todos os alunos.

O que chama a atenção neste documento são as orientações que ele traz para cada componente curricular, em cada ciclo de ensino. Dessa forma, os PCN foram publicados para orientar tanto o trabalho com o Ensino Fundamental quanto com o Ensino Médio.

Mesmo que os PCN tenham sido publicados em 1997, a referida versão foi apenas para os anos iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, para o 1º ciclo (1ª e 2ª série que equivalem aos atuais 2º e 3º anos) e para o 2º ciclo (3ª e 4ª série que equivalem aos atuais 4º e 5º anos). Somente no ano seguinte é que foi publicada a versão para os anos finais do Ensino Fundamental. No que diz respeito ao componente curricular de Matemática, este documento é dividido em blocos que tratam dos conteúdos. Os conteúdos são divididos em Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Em relação ao bloco Números e Operações, o documento traz orientações e objetivos para o trabalho com cada série do Ensino Fundamental. É feita uma divisão no documento em que a 1ª parte diz respeito ao 1º ciclo e a 2ª parte diz respeito ao 2º ciclo. Esta seção discute apenas o que o documento traz em relação ao 2º ciclo, pois é nele que se concentra as orientações para os anos de estudo que nos propomos a pesquisar.

Uma vez que o nosso foco é a *Early Algebra* fomos procurar o que o referido documento traz a respeito. Como o termo de *Early Algebra* foi cunhado tão somente em 2006, procuramos por algum outro termo similar e o que encontramos foi o de pré-álgebra que está relacionado ao bloco Números e Operações. Em relação à Álgebra este documento aborda de modo sucinto, ele sugere que é possível que se desenvolva uma “pré-álgebra”, no entanto, as noções algébricas e o trabalho com a álgebra propriamente dita só serão desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental, ou seja somente no 3º e 4º ciclos (BRASIL, 1998). Mesmo que essas noções algébricas sejam desenvolvidas no 3º e 4º ciclo, no documento vai aparecer mesmo um item tratando da álgebra apenas para o 4º ciclo, que é o que diz respeito à 7ª e 8ª série. Novamente, no que diz respeito ao 1º e 2º ciclo fica restrito apenas às noções de Números e as operações, valorizando apenas o cálculo mental voltados somente para aritmética.

1.5.2 O que determina a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi publicada em 2017 em sua terceira versão e continua a ser questionado e modificado. No entanto, esse documento começou a ser discutido em anos anteriores e foram publicadas outras versões, sendo que a primeira delas foi disponibilizada em outubro de 2015 para que fosse discutida na comunidade até março de 2016 (BRASIL, 2017). Segundo o próprio documento, nesse período, para a construção e ajustes foram realizadas conferências e consultas públicas que tiveram a participação de mais de 12 milhões de contribuições. Para isso contou com participações individuais e de organizações, dentre elas os especialistas, as associações e a comunidade acadêmica (BRASIL, 2017). Finalizada essa etapa o documento foi aprimorado levando em consideração algumas dessas discussões e lançou a segunda versão para que de novo fosse apreciado.

Após publicada a segunda versão, a BNCC passou pela etapa de apreciação individual e coletiva de pessoas e de organizações responsáveis pela educação. Para que isso acontecesse, de acordo com o que consta no documento, foram organizados seminários nas secretarias das unidades federativas coordenados pelo Conselho Nacional de Secretarias de Educação (Consed) e pela União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime) (BRASIL, 2017). Após essa etapa, as informações obtidas e toda a discussão que foi gerada a partir desses encontros foram organizados e sistematizados de modo que consolidou na terceira versão da BNCC que foi a analisada neste estudo. O documento analisado, no seu conteúdo, consta apenas de orientações do ciclo da educação básica que vai da Educação Infantil até o Ensino Fundamental.

Conforme o documento, a BNCC (BRASIL, 2017) tem como função definir o que é essencial desenvolver para a aprendizagem de todos os alunos no decorrer das etapas e das modalidades da educação básica. Por isso, a base consta de orientações desde a Educação Infantil até os anos finais do Ensino Fundamental e foi dividida em áreas de conhecimento quais sejam (i) Área das Linguagens; (ii) Área da Matemática; (iii) Área das Ciências da Natureza; e (iv) Área das Ciências Humanas. O nosso foco está centrado na Área da Matemática que possui como componente curricular a própria Matemática.

Tal componente curricular possui cinco unidades temáticas sendo elas (i) Números; (ii) Álgebra; (iii) Geometria; (iv) Grandezas e Medidas; (v) e Probabilidade e Estatística. Essas unidades temáticas compõem tanto as orientações para os anos iniciais do Ensino Fundamental quanto para os anos finais. A unidade temática Álgebra será mais detalhada, pois é de nosso interesse ter um olhar maior para ela, sobretudo para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

A BNCC leva em consideração os diferentes campos que compõem a matemática e que foram observados em documentos oficiais brasileiros. Esses campos formam um conjunto que a BNCC (BRASIL, 2017) considera como “ideias fundamentais” e essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático (BRASIL, 2017), sendo que essas ideias são a equivalência, a proporcionalidade, a ordem, a interdependência, a variação, a aproximação e a representação.

Na unidade temática da Álgebra, a base traz em sua composição orientações relativas tanto para os anos iniciais do Ensino Fundamental quanto para os anos finais. A Base coloca em evidência o desenvolvimento do pensamento algébrico, sobretudo nos anos iniciais. Nessa unidade temática, o documento nos leva a entender que esse tipo de pensamento é importante para modelar situações matemáticas e compreendê-las fazendo uso de representações. Além disso, é possível modelar ou mesmo representar situações por meio de letras e símbolos (BRASIL, 2017). A Base chama a atenção para isso, pois espera-se que desenvolvendo o pensamento algébrico nos primeiros anos, nos anos finais desse ensino o aluno terá melhores condições de compreender os conceitos algébricos mais sofisticados como é caso do uso das expressões algébricas no 8º ano do Ensino Fundamental.

Situações que podem ser trabalhadas e desenvolvidas já nos anos iniciais, segundo a BNCC (BRASIL, 2017), estão relacionadas às ideias de regularidade, de generalização de padrões e às propriedades de igualdade. Nesse sentido, o documento chama a atenção para o uso de sequências recursivas e repetitivas tanto numéricas quanto icônicas, que tem seu foco na regularidade e generalização de padrões. Contudo, a Base ressalta ainda para o fato de que nesse ciclo de ensino não se faz necessário o uso das letras para representar regularidades e, uma generalização pode ser feita a partir da linguagem natural. No que se refere à relação de equivalência, a BNCC ressalta que não se deve limitar o uso da igualdade para representar tão somente os resultados de operações. O seu uso é ampliado no sentido de expressar quantidades equivalentes, o que permite que o estudante possa entender de maneira mais coerente o sinal de igualdade nas equações que serão vistas de maneira formal por volta do 7º ano da escola básica. A proporção também é evidenciada no documento como ideia fundamental para o desenvolvimento da noção de função. Nesse sentido, o uso da proporcionalidade direta entre duas grandezas pode auxiliar no desenvolvimento da relação funcional, e isso pode ser feito por meio de multiplicação simples. Cabe ressaltar que a regra de três é uma importante ferramenta para o cálculo da proporção, contudo é preciso que antes disso o estudante compreenda a noção de proporcionalidade.

No que tange à área da matemática e à unidade temática de Álgebra, a BNCC (BRASIL, 2017) se apresenta bem mais organizada em termos de conteúdo e das habilidades e competências que devem ser atingidas em cada ano de estudo. No entanto, é preciso destacar que o documento não valoriza outras formas de conceber o conhecimento matemático. Além disso, a base apesar de se apresentar como um documento que norteia a educação em nível nacional, não atinge o território nacional em sua totalidade. É preciso chamar a atenção de que existem particularidades regionais e locais e que necessitam ser respeitadas e por isso o documento não consegue completar todas as lacunas no que se refere às necessidades educacionais desse país.

1.5.3 O que avançou dos PCN para a BNCC

Os PCN assim como a BNCC são documentos que orientam o trabalho docente bem como propõe indicações de trabalho para cada área de conhecimento e seus respectivos componentes curriculares. No caso do componente curricular de Matemática, os dois documentos trazem orientações que, por serem de épocas diferentes, possuem diferenças. Essas diferenças chamam a atenção, pois distinguem largamente um documento do outro. Para melhor delimitar, serão evidenciadas apenas o que caracteriza cada documento no que diz respeito à Álgebra. Vale ressaltar ainda que o comparativo que será traçado aqui diz respeito aos PCN do 2º ciclo do Ensino Fundamental que corresponde à 3ª e 4ª séries e a parte da BNCC que corresponde aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em relação à área da Matemática, a primeira diferença que se encontra nos dois documentos é a divisão no componente curricular de Matemática. Enquanto que nos PCN aparece apenas como bloco de conteúdos Números e Operações, na BNCC aparece a unidade temática de Álgebra. A segunda diferença, e essa é a mais notável, é a de que enquanto os PCN trazem que “Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados;” (BRASIL, 1997, p.35), a BNCC (BRASIL, 2017) já propõe o desenvolvimento do pensamento algébrico como uma ideia fundamental.

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2017, p. 226)

É notório que essas diferenças fazem sentindo quando se trata no desenvolvimento do pensamento algébrico. Considerando a ênfase dada por cada documento e a época em que foi publicado, reitera que a preocupação com o desenvolvimento desse tipo de pensamento é evidenciada nos dois documentos, mesmo que de maneiras distintas. O que se torna claro é o fato de que a ênfase no ensino da Álgebra agora não fica mais restrito aos anos finais do Ensino Fundamental. Mas é algo que começa por desenvolver pequenas noções desde os primeiros anos de escolaridade. Essas diferenças apontam para o quanto se avançou, em termos de orientações para o ensino, no que diz respeito à Álgebra em documentos oficiais publicados no Brasil.

Apesar desse avanço no tocante da necessidade de introduzir noções de Álgebra desde os primeiros anos da Educação Básica, os dois documentos se distinguem largamente em outros aspectos. O principal deles é a forma como os PCN valorizam as diversas formas de se conceber o ensino da matemática e as orientações que tal documento traz em seu bojo. Diferentemente da BNCC que não dá tantas orientações para o trabalho com a matemática e valoriza o conteúdo cientificamente consolidado ao longo do tempo de cada área de conhecimento.

CAPÍTULO II

2. A *EARLY ALGEBRA* SOB A PERSPECTIVA DA MATEMÁTICA

Este capítulo é reservado para apresentarmos as três vertentes da *Early Algebra*. Consideramos que elas são os pilares da nossa discussão e que foram discutidas desde os tempos mais remotos por matemáticos importantes e que promoveram a discussão sobre o que temos de teoria Matemática na área da Álgebra hoje. Por isso, este capitulo está divido em duas seções. A primeira discute na perspectiva da Matemática as três vertentes referidas. A segunda seção apresenta uma discussão sobre o pensamento algébrico em relação à introdução de noções de Álgebra a partir das três vertentes na perspectiva da Educação Matemática com relação ao que é apresentado em pesquisas nacionais e internacionais a respeito da introdução das noções de álgebra para estudantes iniciantes no processo educativo.

2.1 A perspectiva da *Early Algebra* na Matemática

Esta seção é destina à discussão das três vertentes da *Early Algebra:* a sequência, a equivalência e a relação funcional. Para cada uma das três vertentes procuramos trazer conceitos e definições que nos ajudam a fundamentar matematicamente os objetos matemáticos que procuramos trabalhar nessa pesquisa. Essa fundamentação é importante para esclarecer em que medida e em que propósito estamos trabalhando tais conceitos e definições nos anos de ensino que destinamos a pesquisar.

2.1.1 A Sequência

As sequências são objetos matemáticos importantes no sentido de identificar regularidades e padrões, que favorecem o processo de generalização de regras que organizam a sequência e definem o padrão em que estão organizadas.

No geral quando falamos em sequências, para nós da área da matemática já vem logo à mente as sequências constituídas por números. No entanto, sequências não somente são constituídas ou definidas dessa forma. Desse modo, podemos dizer que sequência é um conjunto de elementos que estão organizados respeitando determinada ordem.

É preciso esclarecer também que as sequências são determinadas de diversas maneiras tanto em relação à sua representação quanto à ordenação dos elementos. Por isso, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), apresentamos duas formas de representar uma sequência: por ícones ou por números. Assim sendo, uma *sequência icônica* é aquela que é apresentada usando somente ícones (desenhos ou formas). Já uma *sequência numérica* é aquela que é apresentada usando somente números.

Ainda de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), em relação à sua ordenação ou regra, as sequências podem ser classificadas de duas formas distintas: repetitiva ou recursiva. Sendo assim, uma *sequência repetitiva* é aquela que os elementos se repetem seguindo algum padrão. No caso de uma *sequência recursiva*, para definir os termos subsequentes recorre sempre aos termos anteriores.

Após classificar as sequências quanto a sua representação ou ordenação, a seguir apresentamos alguns tipos de sequências e as definimos segundo as características apresentadas anteriormente.

<u>Sequências repetitivas</u>

As sequências repetitivas podem ser apresentadas de duas formas: por ícones e por números. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), uma *sequência repetitiva icônica* é aquela em que os ícones (desenho ou formas) se repetem ciclicamente e, uma *sequência repetitiva numérica* é aquela em que os números também são repetidos de acordo com um ciclo pré-estabelecido. O Quadro 2.1 apresenta exemplos desses tipos de sequências.

Quadro 2.1 – Exemplo de Sequência repetitiva icônica e numérica

Repetitiva icônica	Repetitiva numérica
	1 2 11 22 111 222

Fonte: A autora

Em relação aos exemplos apresentados no Quadro 2.1, vale ressaltar que apresentamos apenas um para cada uma das sequências repetitivas que conceituamos. No entanto, são inúmeras as sequências que podem ser formadas tomando os mesmos elementos das que apresentamos no referido quadro.

Sequências recursivas

Assim como as sequências repetitivas, as sequências recursivas também podem ser apresentadas por ícones e por números. No entanto, dentro das sequências recursivas é preciso considerar ainda o tipo de recursividade. Portanto, considerando a definição de sequência dada por Lima *et al* (2012) temos que "Uma *sequência* é uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais" (p. 86, grifo do autor). Sendo assim, consideramos que toda sequência recursiva pode ser expressada por uma relação funcional[3]. Por isso, classificaremos as sequências recursivas de acordo com o Quadro 2.2.

Quadro 2.2 – Classificação quanto à forma como se apresenta uma Sequência Recursiva

Formas de apresentação de uma sequência recursiva			
Fibonacci	Função Polinomial qualquer	Progressões	
		Aritmética	Geométrica

Fonte: A autora

De acordo com o que foi apresentado no Quadro 2.2, as sequências podem aparecer ainda em formato icônico ou numérico. Sendo assim, a seguir apresentamos a definição de cada uma das sequências apresentadas no referido quadro e também apresentamos um exemplo (na forma icônica e numérica) para cada tipo de sequência.

Como foi definida de acordo com Lima *et al* (2012), que toda sequência é uma função sendo que o seu conjunto domínio é o conjunto dos números naturais, então apresentamos a definição das sequências.

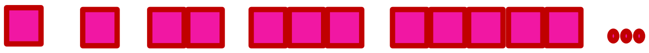
[3] A relação funcional será amplamente discutida e definida no item 2.1.3.

- *Sequência de Fibonacci*: é a sequência que possui os dois primeiros termos iguais a 1 e, a partir do terceiro termo, o valor é dado pela soma dos dois termos anteriores. Sendo assim, essa sequência é dada da seguinte forma:

$$f_1 = f_2 = 1 \; e \; f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall \, n \geq 3 \; e \; n \in \mathbb{N}$$

É possível expressar essa sequência na forma icônica e numérica. Por isso, o Quadro 2.3 apresenta a sequência de Fibonacci de duas formas.

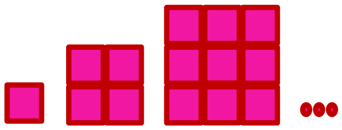
Quadro 2.3 – Sequência de Fibonacci

Sequência de Fibonacci	
Na forma icônica	Na forma numérica
	1, 1, 2, 3, 5, ...

Fonte: A autora

- *Sequência expressada por uma função polinomial qualquer*: é a sequência que pode ter seu termo geral ou lei que a define expressa por alguma função polinomial. Para ficar mais claro apresentaremos no Quadro 2.4 o exemplo da sequência que possui como regra $a_n = n^2, \forall \, n \in \mathbb{N}$ e que pode ser escrita também através da função $f(x) = x^2, \forall \, x \in \mathbb{N}$.

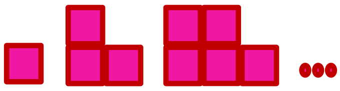
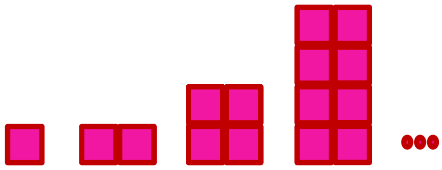
Quadro 2.4 – Exemplo de uma sequência expressada por uma função polinomial qualquer

Sequência $a_n = n^2, \forall \, n \in \mathbb{N}$	
Na forma icônica	Na forma numérica
	1, 4, 9, ...

Fonte: A autora

- *Sequência definida por uma progressão*: é a sequência que além de ser definida por uma função polinomial, poder ser classificada também por uma progressão aritmética ou geométrica. Para que fique claro o que estamos classificando, o Quadro 2.5 apresenta duas sequências desse tipo.

Quadro 2.5 – Exemplos de sequências definidas por uma progressão

Sequências definidas por progressões	
Aritmética icônica 	Geométrica icônica 
Aritmética numérica 1, 3, 5, ... com $a_1 = 1, r = 2 \; e \; a_n = 2n - 1, \forall \; n \in \mathbb{N}$	Geométrica numérica 1, 2, 4, 8, ... com $a_1 = 1, q = 2 \; e \; a_n = 2^{n-1}, \forall \; n \in \mathbb{N}$

Fonte: A autora

De acordo com o que apresentamos, é importante destacar que os tipos de sequências recursivas que apresentamos, Ponte, Branco e Matos (2009) as definem também como crescentes. No entanto, optamos por definir como recursivas e classificá-las quanto à sua lei de formação entendo que dessa forma conseguimos identificar sobremaneira as suas singularidades. Além disso, é pertinente ressaltar que, de acordo com Lima *et al* (2012) as sequências recursivas constituem também funções. Por isso, o trabalho com sequências é fundamental para que os alunos compreendam também a noção de função. Ademais, reconhecer o padrão ou regra de uma sequência também desenvolve nos alunos a capacidade de generalizar.

2.1.2 A Equivalência

Em Matemática, muitas vezes trabalhamos com algum tipo de relação. Em matemática temos vários tipos de relações, como por exemplo a função. No entanto, esta seção foi reservada para discutir uma dessas tantas relações Matemáticas que é a relação de equivalência. Essa relação tem muita importância sobretudo para a compreensão da igualdade. Mas, antes é necessário definir o que é uma relação de equivalência.

Para isso, consideraremos a definição de Ferreira (2013) que afirma o seguinte:

> Uma relação R em A diz-se relação de equivalência se possuir as seguintes propriedades:
> (i) *reflexiva:* aRa, para todo $a \in A$;
> (ii) *simétrica:* se $a, b \in A$ e aRb, então bRa;
> (iii) *transitiva:* para $a, b, c \in A$, se aRb e bRc, então aRc. (p. 9, grifo do autor)

A partir do que Ferreira (2013) define, podemos afirmar que a igualdade (ou identidade) também é uma relação de equivalência. Sendo assim, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), consideramos a igualdade como uma relação de equivalência, pois tomando a relação de igualdade e um conjunto A, será reflexiva se tivermos $a = a, \forall\, a \in A$; será simétrica se $a = b$, então $b = a$ para quaisquer $a, b \in A$; e será transitiva se tivermos $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ para quaisquer $a, b, c \in A$.

Conforme Ponte, Branco e Matos (2009) é preciso que o aluno compreenda a equivalência a partir dos primeiros com o sinal de igualdade. É preciso que ele entenda o sinal de igual não apenas como resultado de uma operação, mas também como a equivalência entre duas expressões numéricas. Por isso, a noção de equivalência a partir dos primeiros contatos com o sinal de igualdade.

Ainda em concordância com os referidos autores, o sinal de igual pode ser visto de dois modos distintos: processual e estrutural. O modo processual é aquele em que o aluno entende o sinal de igual apenas como resultado de uma operação, enquanto que o modo processual é aquele em que o aluno estabelece a equivalência entre duas ou mais expressões. Por isso, entendemos que o sinal de igual pode ter diversos significados, que podem ser entendidos como:

- Operador – indicando uma operação ou resultado;
- Equivalência – a partir de simplificações de expressões algébricas e em equações;
- Relação funcional – a partir da relação de dependência entre duas ou mais variáveis.

Este estudo tem grande interesse na equivalência apresentada por meio das equações e por meio da relação funcional. Por isso, discutiremos a equivalência por meio das equações e na seção seguinte ampliaremos a discussão para a relação funcional.

Para introduzir a discussão a respeito das equações é preciso antes deixar claro que apenas discutiremos nesta seção o que tange às equações algébricas. Sendo assim, Garbi (2010) afirma que

> Equações Algébricas são aquelas em que a incógnita aparece apenas submetida às chamadas operações algébricas: ***soma*** (ou adição), ***subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira*** (embora a potenciação inteira seja um caso particular de multiplicação de n fatores iguais, ela está sendo deixada em destaque por questões de clareza) e ***radiciação*** (p. 4, grifo do autor).

Com a definição de Garbi (2010) podemos agora apresentar a definição de equação polinomial, pois nos limitaremos na discussão apenas desse tipo. Sendo assim, Caraça (2003) define uma equação polinomial como "toda igualdade da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + \cdots + a_n = 0$" (p. 144), em que n é um número inteiro e positivo que é chamado o grau da equação, x é a incógnita e $a_0, a_1, \dots, a_n$ são chamados de coeficientes da equação. Nesse sentido, a definição de equação polinomial de Caraça (2003) constitui também uma equação algébrica definida por Garbi (2010).

Também vale apresentar o conceito de equação defendido por Ponte, Branco e Matos (2009) para ser apresentado para alunos dos anos mais elementares da Educação Básica. Nesse sentido, os referidos autores defendem a ideia de que é possível apresentar situações que envolvem equações mesmo para alunos dos anos iniciais do ensino básico. Até mesmo porque é a partir da introdução de situações que envolvam noções elementares de equações que os alunos podem começar a formar conceitos a respeito da equivalência e da equação propriamente dita. Sendo assim, Ponte, Branco e Matos (2009) defendem que pode iniciar o ensino de equações a partir da noção de que ela consiste numa igualdade "onde há um valor desconhecido" (p. 92).

Conforme Ponte, Branco e Matos (2009), é necessário não somente introduzir o conceito de equação, como também fazê-lo de forma que os alunos compreendam também os princípios de equivalência a partir da resolução dessas equações. Por isso, os autores defendem o uso do modelo de balanças de dois pratos para o ensino das equações com vistas na compreensão da equivalência. Sendo assim, eles afirmam que "O uso deste modelo facilita a compreensão da operação de eliminar o mesmo termo de ambos membros e também a operação de multiplicar ambos os membros por um número positivo" (p. 95). No entanto é preciso ter cautela com o uso desse tipo de modelo, pois Lins e Gimenez (2009) salientam que ele possui limitações em relação a certas situações como é o caso de equações que envolvem números inteiros negativos.

2.1.3 A Relação Funcional

Como já mencionamos na seção anterior, é impossível falar de Matemática sem por vezes falar de relações. Assim, sendo, um tipo de relação especial que dedicamos essa seção é a relação funcional. Apesar de consistir num conceito complexo, alguns autores como Ponte, Branco e Matos (2009) defendem que desde os primeiros anos de escolaridade devem ser trabalhados alguns conceitos com vista na relação funcional.

Conforme os referidos autores, desde cedo é possível fazer menção à relação funcional a partir de outros conceitos. Não esperamos que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental possam compreender o conceito e a definição de função, mas que sejam capazes de compreender algumas relações que estejam ligadas à noção de função. Para aprofundar um pouco mais no assunto, antes precisamos mencionar alguns conceitos e definições importantes.

Em conformidade com Rüthing (1984) é possível esclarecer o que vem a ser uma relação funcional. Nesse sentido, a partir do que autor apresenta, podemos afirmar que uma relação funcional é o tipo de relação que define uma função. Enquanto que a função é a operação que que faz os elementos de dois conjuntos se associarem por meio dessa relação. Além disso, Biachini e Machado (2010) afirmam que a função da variável numa relação funcional é deixar clara a relação de dependência entre duas ou mais variáveis num problema. Por isso, após entendermos em que se constitui uma relação funcional, agora é possível apresentar a definição de função.

De acordo com o que Rüthing (1984) afirma sobre uma relação funcional, isso vai de acordo com o que Munem e Foulis (1982) definem para uma função como regra ou correspondência. Assim, Munem e Foulis (1982) apresentam a seguinte definição.

> Uma *função* f é uma regra ou uma correspondência que faz associar um e somente um valor da variável y para cada valor de variável x. Deve ser bem compreendido que a variável x é denominada *variável independente*, pode tomar qualquer valor num certo conjunto de números [...]. A variável y é denominada *variável dependente*, visto que seu valor depende do valor de x (MUNEM; FOULIS, 1982, p. 21 - grifo do autor).

A partir da definição fica evidente que uma função expressa claramente a relação de dependência entre variáveis. Sendo assim, no que tange à introdução da noção de função aos alunos dos anos mais elementares da Educação Básica, é possível que isso seja feito a partir da apresentação de situações que estejam relacionadas às operações básicas e à proporcionalidade. Nesse sentido, a relação entre grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais apresentam claramente a relação de dependência entre essas grandezas e que podem ser apresentadas por meio de uma função simples que é a função linear. A função linear é um tipo mais simples da função da função afim.

De acordo com Lima *et al* (2012), a função linear que é dada pela fórmula $f(x) = ax$ que é o modelo para os problemas de proporcionalidade. Os autores afirmam ainda que “A proporcionalidade é, provavelmente a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios” (p. 107). A introdução de situações que envolvam as operações matemáticas básicas bem como a proporcionalidade poderão desenvolver nos alunos a compreensão de variabilidade e dependência. Além disso, ao passo que essas noções vão sendo desenvolvidas, aos poucos é possível introduzir noções mais complexas como é o caso da própria função afim.

Por isso, o uso de sequências tende a possibilitar a generalização. Além disso, as sequências podem auxiliar na compreensão da noção de função desde que sejam apresentadas atividades que possam proporcionar o raciocínio com proporções assim como aponta Post, Behr e Lesh (1995). O que não podemos mais é privar os alunos de conhecer situações que os levem a grandes experiências com a Álgebra, mesmo que sejam ainda crianças. É preciso desenvolver nos alunos o gosto pela atividade matemática.

2.2 Estudos Correlatos

Ao elaborar essa sessão, tínhamos que pensar quais os critérios que adotaríamos para a escolha dos estudos correlatos. Para essa escolha, buscamos estudos que tratassem do tema abordado na nossa pesquisa: *Early Algebra* na última década. Por isso, buscamos nos periódicos da CAPES, também em outros periódicos importantes com resultados de pesquisas nacionais e internacionais, em dissertações de mestrado e teses de doutorado que de alguma forma fossem relevantes ao nosso estudo.

Para delimitar mais ainda o que estivemos procurando, esta seção será dividida em quatro subseções as quais trazem as pesquisas a respeito do pensamento algébrico e das três vertentes da área a qual nos propomos realizar esse estudo. Por isso, traremos as seções que apresentam: (i) pesquisas e discussões em torno do pensamento algébrico de estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental; (ii) estudos relacionados com as sequências bem como o reconhecimento de padrões e regularidades nessa sequências; (iii) trabalhos relacionados com a equivalência, com o uso de suas propriedades no que tange às equações e a sistemas de equações lineares; e (iv) pesquisas que abordam a relação funcional para estudantes dos anos iniciais sobretudo no que tange à função polinomial do primeiro grau (linear e afim).

2.2.1 Estudos que discutem sobre o pensamento algébrico

Os estudos que elencamos nesta seção fazem menção ao desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental ou equivalentes (quando as pesquisas são internacionais) apresentam ao resolver situações voltadas à Álgebra. Procuramos aqueles trabalhos que discutem a respeito de generalizações e formas de registros de respostas, bem como características que os autores discutem que apresentam indícios de compreensão de conceitos algébricos elementares.

A primeira pesquisa que apresentamos é a de Silva e Savioli (2012) que tiveram como objetivo identificar e analisar características do pensamento algébrico em tarefas aplicadas a estudantes do Ensino Fundamental I. Nesse estudo, participaram 35 estudantes de uma escola pública do município de Apucarana no estado do Paraná. Os estudantes envolvidos nessa pesquisa foram estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Para a pesquisa as autoras utilizaram a Análise de Conteúdo como método investigativo. Dentre as oito tarefas realizadas pelos estudantes, para este estudo as pesquisadoras selecionaram duas dessas tarefas o que resultam em 70 registros escritos para a análise.

Analisando os protocolos escritos, as autoras identificaram algumas semelhanças entre as respostas dadas pelos estudantes para as questões analisadas. Entre as semelhanças identificaram em uma das situações formas parecidas de expressar as respostas por meio de um tipo de generalização. Para expressarem as respostas os estudantes utilizavam de registros figurais e escritos em língua natural. Por vezes os estudantes relacionavam os dois registros de modo que um registro estava ligado ao outro ou se completavam. As autoras ainda afirmaram que, por mais que os estudantes não apresentaram respostas corretas às situações-problema apresentadas, eles durante o processo de resolução demonstraram utilizar alguns recursos que caracterizam o pensamento algébrico.

Uma pesquisa que nos ajudou muito em relação aos registros feitos pelos alunos foi a de Lautert e Spinillo (1999). Nessa pesquisa as autoras tinham como objetivo investigar como crianças com diferentes níveis de instrução sobre a divisão representam essa operação em situações gráficas e concretas. Nesta pesquisa as autoras apresentaram oralmente duas situações de divisão a 80 crianças e as pediram para registrar no papel e com material concreto as situações. Apesar dessa pesquisa não ter relação direta com o pensamento algébrico, ela nos ajudou a compreender como os alunos podem realizar seus registros em situações matemáticas. Além disso, as autoras usaram papel e lápis e material manipulativo, assim como fizemos em nossa pesquisa.

Outro estudo que elegemos foi o realizado por Canavarro (2007) em que a pesquisadora discutiu a respeito do desenvolvimento do pensamento algébrico. Esse estudo teve por objetivo discutir em que consiste o pensamento algébrico; analisar em que medida este conceito está presente nas atuais orientações curriculares para o ensino da Matemática nos primeiros anos; e identificar aspectos decisivos que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula.

A pesquisa foi realizada com turmas de estudantes de anos diferentes do ensino básico português, que corresponde ao Ensino Fundamental no Brasil. Para tanto, a pesquisadora analisou algumas situações vivenciadas em sala de aula com estudantes portugueses. As atividades propostas e analisadas, nesta pesquisa, correspondem a situações que envolvem o estudo da Tabuada da multiplicação de números Naturais e, o uso de sequências. Todas as atividades realizadas na pesquisa envolviam algum contexto aritmético com ênfase na Álgebra.

Na pesquisa realizada por Silva e Savioli (2014), as autoras tiveram como objetivo identificar, analisar e discutir características do pensamento algébrico elementar nas produções escritas de oito tarefas da *Early Algebra* aplicadas a estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental. Nessa pesquisa as autoras apresentaram questões que envolviam conceitos algébricos. As autoras analisaram as produções escritas desses alunos e criaram categorias para classificar as respostas desses alunos quanto ao estabelecimento de relações, utilização de diferentes representações, generalização e compreensão de propriedade aritméticas. Nesse sentido, essa pesquisa se aproxima da nossa em vários aspectos, uma vez que analisamos várias características apontadas pelas autoras.

2.2.2 Pesquisas a respeito da Sequência

No que tange as pesquisas relacionadas às sequências, nesta seção apresentamos alguns estudos que fazem menção a essa vertente. As pesquisas elencadas nessa seção não mencionam apenas sobre as sequências em si, mas também a respeito de padrões e regularidades que são conceitos importantes para a compreensão das sequências.

Um estudo de Vale et al (2007) vem discutir a importância dos padrões no ensino e na aprendizagem da Álgebra. Nesse estudo os autores trazem o conceito de padrão e o que ele representa na atividade matemática, sobretudo no que tange a Álgebra. Além disso, os autores mencionam que a identificação de padrões é algo natural ao ser humano. Por isso, discutem ainda que na matemática a busca por padrões envolve também regularidades e essas são extremamente importantes sobretudo em sequências. Desse modo, essa pesquisa nos ajudou a compreender como os alunos identificam padrões e regularidades em sequências e como eles concebiam esses padrões.

Outro estudo que nos ajudou foi a de Porto (2018). Ele foi realizado numa pesquisa de mestrado em que a autora teve como objetivo comparar as competências e os esquemas de ação que os estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental utilizam ao lidarem com situações-problema envolvendo os conceitos da Álgebra elementar e, ainda, identificar os níveis de raciocínio algébrico usados por eles para resolver tais situações. Para isso a autora aplicou um teste a 69 alunos do 3º ano e a 80 do 5º ano do Ensino Fundamental. O teste foi composto de dez questões que versavam sobre sequências, equações e funções. Este estudo por constar de um diagnóstico e que se assemelhava à nossa pesquisa, foi muito importante para compreendermos o que os alunos apresentavam em suas respostas bem como nessas respostas apareciam indícios de compreensão de noções algébricas.

2.2.3 Estudos relacionados com a Equivalência

Nesta seção apresentamos as pesquisas que nos auxiliaram a compreender e analisar os nossos dados no que tange à equivalência. As pesquisas apresentadas nesta seção fazem menção sobretudo às situações que envolvem equações. Os problemas relacionados às equações são principalmente os apresentados em balanças de dois pratos, pois entendemos que, geralmente, é a principal forma de introduzir o conceito de equação para alunos do Ensino Fundamental. E apoiamo-nos nessa ideia para criar as nossas questões que envolvem a equivalência.

Numa pesquisa realizada por Cyrino e Oliveira (2011), os autores procuraram identificar as estratégias e os tipos de pensamento algébrico mobilizados por três estudantes de três ciclos diferentes do Ensino Básico de Portugal ao responderem um mesmo conjunto de questões. Nesta pesquisa os autores utilizaram também a entrevista no momento em que os alunos resolviam as questões. Entre os problemas apresentados pelos autores, um deles era uma equação apresentada na forma de ícones. Essa pesquisa foi relevante à nossa no sentido de que apresentava problemas que se assemelhavam aos apresentados por nós e, além disso, os autores utilizaram a entrevista. Sendo assim, esse estudo nos ajudou no processo de análise, já que muitos alunos apresentaram características que os alunos da nossa pesquisa também apresentaram.

Outra pesquisa que nos ajudou no processo de análise dos dados foi a realizada por Merlini, Magina e Teixeira (2018). Esse estudo teve como objetivo analisar o raciocínio algébrico dos estudantes, a partir de suas resoluções a um problema de equação do 1º grau, com representação icônica. Apesar dos autores terem realizado a pesquisa com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, isso não causou problemas quanto à compreensão dos nossos dados em comparação os dados dessa pesquisa. Como realizamos a pesquisa com alunos do 4º e do 5º ano, muitas das estratégias apresentadas pelos alunos nessa pesquisa se aproximavam daquelas apresentadas pelos alunos do nosso estudo. Além disso, essa pesquisa nos ajudou, pois, o problema apresentado nesse estudo também consistia num sistema linear.

Todos as pesquisas que apresentamos nesta seção refere-se à apresentação de equações e sistemas de equações por meio de balanças de dois pratos. Elas foram de inteira importância no nosso processo de análise. No entanto, é preciso deixar claro que, apesar de ser muito usada no ensino de equações, o uso da balança de dois pratos é muito questionado. Lins e Gimenez (1997) questionam o uso desse tipo de material. Os autores acreditam que pode não existir uma ligação da situação que faz uso do material com a que é feita formalmente. Nesse sentido, eles afirmam ainda que, na possibilidade de existir tal ligação, pode haver lacunas no processo de transposição da situação concreta para a formal. E essas lacunas podem ser prejudiciais para o processo de ensino e aprendizagem das equações.

Havendo tantos questionamentos em relação ao uso da balança de dois pratos para o ensino de equações, outros autores como Ponte, Branco e Matos (2009) asseveram que a equivalência com o uso da igualdade e as próprias equações podem ser introduzidas e abordadas de outras maneiras e não somente através das balanças. Por isso, os referidos autores asseguram existem outras formas introduzir a equivalência e as equações. Nesse sentido, conforme Ponte, Branco e Matos (2009), Bitencourt (2018) afirma que “Em situações como a expressão 5 + □ = 13 + 10, os estudantes podem pensar a quantidade que falta para manter a equivalência, o que diferencia de uma ideia de imediato” (p. 41). Por isso, muitos autores questionam o uso da balança de dois pratos e afirmam que em situações do contexto aritmético é possível introdução a noção de equação.

2.2.4 Pesquisas relacionadas com a relação funcional

Esta seção traz algumas pesquisas que discutem sobre a relação funcional, bem como o uso de operações que apoiam esse conceito. As pesquisas que são descritas nessa seção, apresentam muito a respeito do raciocínio proporcional e funções lineares. Tendo isso em vista, os estudos que nos ajudaram a compreender e analisar os dados obtidos no nosso trabalho no que se refere a essa vertente.

Para iniciar trouxemos o estudo feito por Teixeira (2016) que teve como objetivo investigar o raciocínio funcional introdutório dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental apoiado em uma intervenção de ensino pautada em situações multiplicativas e sequenciais (icônicas e numéricas). Além disso, o autor aplicou também um pré-teste e dois pós-teste aos 29 alunos que participaram da pesquisa. Todo o trabalho da intervenção foi realizado com vistas na relação funcional, pois o objetivo do pesquisador era justamente introduzir raciocínio funcional para estudantes mais jovens. Nesse sentido, as atividades voltadas para as sequências e a proporção foram feitas com o intuito de generalização, sendo que essas poderiam ser representas por uma função afim.

A análise feita pelo pesquisador apontou que o desempenho dos estudantes divergiu do pré-teste para os dois pós-testes. O resultado indicou que após a intervenção os estudantes tiveram melhor aproveitamento no que diz respeito à apropriação dos conceitos de álgebra. Em relação à pesquisa, ela é relevante à nossa no sentido de que ele trabalhou com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, e seu pré-teste traz situações semelhantes àquelas que queremos explorar em nosso instrumento diagnóstico. Isso nos permitiu fazer algumas comparações nas análises.

O estudo realizado por Magina e Porto (2018) analisar as estratégias utilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem três situações-problema que envolvem o conceito de função. Esse estudo traz uma parte do que foi pesquisado por Porto (2018) em sua pesquisa de mestrado. Nesse estudo as autoras discutem as estratégias desses alunos que revelam o frequente uso da multiplicação e da proporcionalidade para resolver problemas de funções. Os resultados dessa pesquisa nos ajudaram a identificar muitas características nos dados obtidos com os alunos da nossa pesquisa. Os resultados se aproximam em partes e, em alguns pontos diferem um pouco da nossa pesquisa. A trabalho das referidas autoras se aproximam no sentido de que trata de situações parecidas às que analisamos em nosso estudo. No entanto, possui suas diferenças em relação à obtenção dos dados, pelo fato das autoras analisarem apenas os registros escritos desses alunos.

Numa pesquisa realizada por Merino, Cañadas e Molina (2013) com o objetivo de investigar as estratégias e as representações de alunos do 5º ano da educação primária na Espanha, ao realizarem atividades que envolvem a relação funcional. Neste estudo os autores trabalharam com vinte alunos e fazem uma análise a respeito do que eles apresentam nas respostas de quatro questões que envolviam o conceito de função. Os autores identificaram nas respostas desses alunos os padrões mais usados por eles para representarem as situações que envolviam o referido conceito, bem como a capacidade de generalizarem tais situações.

Outra pesquisa importante foi a realizada por Pinto *et al* (2016). Nesse estudo os autores procuraram identificar como alunos do 3º ano do que eles chamam de educação primária na Espanha, apresentam a respeito de um problema que envolve a relação funcional. Nessa pesquisa, assim como na nossa, os autores utilizaram também materiais manipuláveis. Além disso, eles procuraram identificar como os alunos faziam relações de correspondência e covariação entre variáveis, bem como esses alunos representavam essas relações. Esse estudo, apesar de ser realizado com o que eles chamam de 3º ano, nos ajudou a entender como os alunos estabelecem relações entre variáveis de funções e como as percebem.

CAPÍTULO III

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Tendo a necessidade de delinear como se dará todo o processo dessa pesquisa, neste capítulo apresentaremos, em detalhes, o desenho de nosso estudo. Desse modo, explicitaremos os processos e meios que nos possibilitaram chegar ao nosso objetivo de **investigar as estratégias de resolução utilizadas por estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao lidarem com situações que envolvem sequências, equivalência e relação funcional.**

Sendo assim, começaremos o capítulo abordando a escolha teórico-metodológica. Em seguida, apresentaremos o universo do estudo, com foco na amostra estudada, na escolha dos anos de estudo, da escola e dos alunos.Traremos o instrumento diagnóstico com todas as questões, seus respectivos objetivos e a análise a priori, assim como os procedimentos que geraram a produção de dados. Por último, discutiremos como se dará a análise dos dados produzidos.

3.1 Escolha teórico – metodológico

A pesquisa que empreendemos é de abordagem qualitativa nos moldes de Bogdan e Biklen (1994), os quais afirmam que nesse tipo de pesquisa:

> [...] os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva e o significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48-50).

Além disso, a pesquisa também é descritiva, pois, de acordo com Gil (2002, p. 42), "as pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis". Essa pesquisa se caracteriza como descritiva, pois visa identificar o nível de entendimento dos estudantes em relação à álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesse sentido, ela é descritiva porque procura descrever minuciosamente as características de um grupo, que, neste caso, é composto pelos estudantes que participarão da pesquisa.

Para a pesquisa, nos preocupamos em manter a neutralidade no que diz respeito aos sujeitos que participarão dela. Desse modo, apesar de ser difícil não interferir no processo de aplicação de um teste e mesmo tendo ele fins diagnósticos, entendemos que o simples fato de aplicar um teste para um indivíduo desconhecido já tem alguma interferência. Por isso, diante de tudo, tivemos o cuidado em nos manter neutras no processo de aplicação do teste, não interferindo de modo que pudesse prejudicar o estudante na resolução das situações ou mesmo favorecê-lo de alguma maneira.

3.2 Universo do estudo

Iniciaremos esta seção informando em quais anos escolares a pesquisa será desenvolvida e o porquê de tal escolha. Aqui, descreveremos ainda o *locus* do estudo, qual seja a escola que os estudantes da pesquisa (a amostra estudada) frequentam, e, subsequentemente, faremos a descrição dessa amostra.

3.2.1 A escolha dos anos de estudo

A escolha dos anos de estudo para que fosse aplicado o instrumento diagnóstico obedeceu a alguns critérios. Inicialmente, a escolha por esses anos se deu por fecharem os anos iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, correspondem ao 2º ciclo do Ensino Fundamental, de acordo com o PCN (BRASIL, 1997). Desse modo, entendemos que o aluno já saiu do ciclo de alfabetização e já tem condições de resolver problemas que envolvem o uso de raciocínios mais sofisticados, como por exemplo, conseguir fazer uso da estrutura multiplicativa e expressar as ideias por meio da escrita. Sendo assim, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), são nesses anos de ensino que está previsto desenvolver nos alunos habilidades como a multiplicação, que é tão importante para a compreensão da razão e da proporção, fundamentais na relação funcional. Além disso, esse mesmo documento reitera que a noção da equivalência com o sinal de igualdade, que é responsável pela compreensão futura das equações e das funções, seja desenvolvida no seu sentido mais formal.

Por esses motivos, decidimos por esses anos, pois os consideramos como aqueles em que a criança poderá ter condições de realizar certos procedimentos que utilizam raciocínio algébrico, mesmo sem terem contato formal com a Álgebra.

3.2.2 A escolha da escola

Definidos os anos escolares que trabalharíamos, fomos em busca da escola. A escolha da escola, na qual desenvolveríamos a pesquisa, passou pela acessibilidade. A escola escolhida situa-se na região Sudoeste do Estado da Bahia e pertence à rede Municipal de ensino. Essa instituição de ensino funciona nos três turnos, sendo no período diurno o ensino regular do Ensino Fundamental do 1º ao 5º ano, e no período noturno a Educação de Jovens e Adultos (EJA).

A escola possui 260 alunos que são distribuídos nos três turnos do dia. No turno da manhã, funciona uma turma da Educação Infantil, uma turma de 1º ano, uma turma de 2º ano, uma turma de 3º ano, uma turma de 4º ano e uma de 5º ano. No turno da tarde, funciona uma turma da Educação Infantil, uma turma de 3º ano, uma turma de 4º ano e uma de 5º ano. No turno da noite, a escola possui uma só turma do 4º e do 5º ano de ensino, na modalidade da EJA.

Em relação à sua estrutura, essa escola possui 7 salas de aulas, uma secretaria, uma sala de professores, uma diretoria, uma cozinha para a preparação da merenda escolar e não possui refeitório, a escola também possui um laboratório de informática; no entanto, esse laboratório não é muito usado pela escola, e, no geral, é usado como um espaço para outras atividades que são desenvolvidas pelos professores e/ou pela escola. Além disso, a instituição conta com um pátio coberto onde, geralmente, acontecem os eventos da escola, reuniões, entre outras atividades. Também existe uma área livre, que é onde os alunos costumam brincar na hora do recreio. Na escola, há também uma quadra poliesportiva que está em construção. Em relação aos funcionários da escola, há um corpo docente de 8 professoras, uma coordenadora, uma vice-diretora e 22 funcionários que auxiliam nas outras tarefas.

3.2.3 A escolha dos alunos

Para a escolha dos alunos, inicialmente, foi feita uma reunião com as professoras, com a presença da diretora e da coordenadora. Essa reunião tinha o propósito de apresentar a pesquisa e as condições para que ela pudesse acontecer. No decorrer da reunião, como os alunos envolvidos seriam os de 4º e 5º anos, os demais professores foram dispensados e ficamos apenas com os professores dos referidos anos. Durante a conversa, os professores se mostraram favoráveis ao estudo e não colocaram nenhum empecilho para a realização da pesquisa.

Como fora citado anteriormente, na escola havia três turmas de 4º ano (duas pela manhã e uma à tarde) e duas turmas de 5º ano (uma pela manhã e uma à tarde). Para o processo de escolha dos alunos, optamos por não ser aleatória. Então, solicitamos que as professoras escolhessem, dentre as turmas que lecionavam, quatro alunos do 4º ano e quatro alunos do 5º ano, sendo dois de cada uma das turmas. Como critério de escolha dos alunos, sugerimos que as professoras levassem em conta o desempenho deles em Matemática, escolhendo em cada turma um que tivesse um bom desempenho e outro que tivesse um desempenho mediano. Esse critério que adotamos se justifica pela possibilidade de escolhermos alunos que poderiam estar em um nível cognitivo que não condiz com o nível ideal do ano escolar. Diante disso, a escolha não poderia ser aleatória.

Com isso em mente, no momento da reunião com as professoras, foi esclarecido que elas que escolheriam os alunos segundo os critérios preestabelecidos, quais sejam: deveriam ser dois alunos acima da média escolar e dois alunos medianos, entre os 4 alunos escolhidos de cada ano (4º e 5º anos).

Definidos os nomes dos alunos que poderiam participar, pedimos à direção para que marcasse um momento em que pudéssemos conversar com os respectivos pais. Nessa conversa, foi abordado o tema da pesquisa e a relevância para o desenvolvimento do ensino de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, foram esclarecidos também todos os procedimentos da pesquisa quanto à participação dos alunos que foram selecionados. Nesse momento, alguns pais tiveram algumas dúvidas sobre os procedimentos, como também a respeito da participação dos filhos, e todas essas dúvidas foram dirimidas no decorrer da reunião, que aconteceu com os pais na presença dos alunos. No momento da reunião, uma aluna desistiu da participação na pesquisa, e um dos pais não consentiu a participação da filha. Por esses motivos, essas duas alunas foram substituídas por outros dois alunos. Diante disso, depois que as professoras selecionaram os outros alunos, a coordenação da escola contatou os pais dos novos escolhidos e, novamente, nos reunimos com eles, a fim de esclarecermos os detalhes da pesquisa. Dessa forma, com o consentimento dos pais e a aceitação dos alunos, foi dado prosseguimento à coleta dos dados.

Feita a escolha, tivemos quatro alunos do 4º ano e quatro alunos do 5º ano. Para que eles não sejam expostos, utilizamos oito nomes fictícios. Desse modo, para os alunos do 4º ano, utilizamos os seguintes: Abel, Antônio, Ana e Amália, todos os nomes tendo como inicial a letra “A”. Já para os alunos do 5º ano, utilizamos nomes iniciados com a letra “B”: Bia, Bento, Beto e Bete.

Os alunos do 4º ano têm em média 9 anos de idade, e eles estão dentro da idade escolar correspondente. Os alunos do 5º estão com 10 ou 11 anos, e também estão dentro da idade escolar. O instrumento diagnóstico, como foi evidenciado, foi respondido de duas maneiras diferentes. Por isso, as alunas Amália, Ana, Bia e Bete responderam o instrumento diagnóstico com o material manipulativo. Já os alunos Abel, Antônio, Bento e Beto responderam usando papel e lápis.

Entendemos por material manipulativo aquele material que o aluno pode manuseá-lo e usá-lo para refletir, fazer indagações e descobertas e, por fim, tirar conclusões sobre um determinado conhecimento que está sendo construído no momento, ou mesmo aquele que precisa apenas ser amadurecido. Sobre isso, Sarmento (2010, p. 3) discute o seguinte:

> O manuseio de materiais concretos, por um lado, permite aos alunos experiências físicas à medida que este tem contado direto com os materiais, ora realizando medições, ora descrevendo, ou comparando com outros de mesma natureza. Por outro lado permite-lhe também experiências lógicas por meio das diferentes formas de representação que possibilitam abstrações empíricas e abstrações reflexivas, podendo evoluir para generalizações mais complexas.

Os alunos responderam ao instrumento diagnóstico da seguinte maneira: dois alunos de cada ano responderam com papel e lápis e dois de cada ano responderam usando material manipulativo. Além disso, como foram escolhidos dois alunos medianos e dois alunos acima da média, de cada ano, organizamos de modo que um bom e um mediano de cada ano responderiam ao instrumento diagnóstico utilizando papel e lápis e, do mesmo modo, um bom e um mediano responderiam usando material manipulativo. Pela ordem em que os alunos foram chamados para participar da coleta de dados da pesquisa, coincidiu que somente as meninas responderam usando material manipulativo e somente os meninos responderam usando papel e lápis. Assim, aconteceu dessa forma sem que fosse um propósito do nosso estudo.

3.3 Material utilizado

Utilizamos como material de pesquisa um questionário que contempla os conteúdos de sequências, equivalência e relação funcional, mas que se apresentam em dois ambientes: (i) papel e lápis (P&L) e (ii) material manipulativo (MM). De antemão, ressaltamos que o questionário nos dois ambientes tratava do mesmo conteúdo, contemplando a mesma quantidade de questões, diferenciando tão somente o formato de apresentação.

No que tange ao ambiente P&L, o questionário (Apêndice B) elaborado foi composto por nove questões, dispostas na forma de um caderno de aproximadamente 15 cm de largura por 21 cm de altura (metade de uma folha A4). Ao todo, foram utilizadas 6 folhas de papel sulfite A4, escritas na frente e no verso, as quais foram transformadas em um caderno com 12 páginas. A primeira página continha a capa do caderno e, no verso, continha um espaço para o nome, a idade e o ano escolar que o estudante se encontrava naquele momento.

As outras 10 páginas continham as nove questões de conteúdo que versavam sobre relação funcional, sequência e equivalência. Ademais, em cada página do caderno, havia uma única questão. Esse questionário contempla questões tanto icônicas como numéricas.

O questionário no ambiente MM utilizou material manipulativo e teve as mesmas questões apresentadas no questionário da forma papel e lápis. O material manipulativo utilizado para que o estudante pudesse responder as questões foi confeccionado por nós. Para tanto, utilizamos caixas de fósforo, palitos de sorvete, papel laminado, cola, moedas no valor de 50 centavos, entre outros materiais[4]. Além disso, também usamos uma balança confeccionada em madeira e MDF[5].

Cabe salientar que, tanto o questionário no ambiente P&L quanto no ambiente MM, algumas das questões continham mais de um item para ser respondido. As questões Q1, Q2 e Q6 tinham 3 itens cada uma, as questões Q4, Q5 e Q7 tinham 2 itens cada, e as questões Q3, Q8 e Q9 continham apenas um item, perfazendo um total de 18 itens. Todas as questões estão relacionadas a situações do cotidiano do estudante dentro e fora da Escola.

O questionário respondido pelos alunos nos dois ambientes anteriormente citados foi acompanhado também de uma entrevista. Para a realização dessa entrevista, utilizamos como base o método clínico piagetiano. De acordo com Piaget (1979), a partir de testes e observações, é possível tirar várias conclusões a respeito das atitudes das crianças quando submetidas a questionamentos que possuem uma intenção. Desse modo, Carraher (1998) explicita como é que funciona o exame piagetiano. “O exame piagetiano visa buscar as respostas mais características do pensamento do sujeito, aquelas que o sujeito dá com maior convicção e não com maior rapidez” (CARRAHER, 1998, p. 17). Por isso, Piaget (1979) afirma que “A arte do clínico consiste não em fazer responder, mas em fazer falar livremente e em descobrir as tendências espontâneas, em vez de as canalizar e as conter” (PIAGET, 1979, p. 7). Assim, entendemos que esse tipo de exame nos ajudará a compreender como é o raciocínio dos alunos ao lidarem

---

[4] Nos anexos segue uma imagem com todos os materiais manipuláveis utilizados na aplicação do instrumento diagnóstico no ambiente MM.

[5] *Medium Density Fiberboard* – material à base de madeira que é normalmente utilizado para a fabricação de móveis e outros materiais.

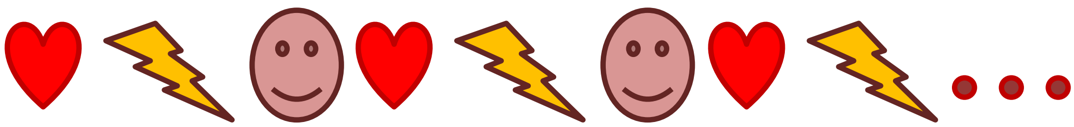
com problemas relativos à álgebra, no que diz respeito às situações que envolvem sequências, equivalência e relação funcional.

Para compreender o raciocínio dos estudantes, não serão considerados no teste apenas os acertos, mas também os erros. Novamente, Carraher (1998, p. 22) nos afirma que “a abordagem piagetiana sugere que se procure compreender o que os acertos e os erros revelam sobre o raciocínio do sujeito examinado”.

As questões que seguem foram aplicadas a alunos do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental. A aplicação delas seguiu de acordo com o Método Clínico Piagetiano. Desse modo, as questões foram pensadas de modo que pudessem ser adaptadas para as duas formas de aplicação. Por isso, a seção a seguir possui a identificação de cada questão, seus objetivos e sua respectiva análise *a priori.*

3.3.1 As Questões do Instrumento Diagnóstico[6]

QUESTÃO 1: Observe a sequência abaixo:



Seguindo este mesmo padrão, responda:

a) Qual o próximo termo da sequência?
b) Qual é o 12º termo da sequência?
c) Como você poderia explicar para seu coleguinha como é que se consegue qualquer termo dessa sequência?

Essa questão traz em seu bojo o conceito de sequência repetitiva e icônica, e tem como objetivo identificar a que nível está o reconhecimento de padrões e regularidades e de generalização de uma sequência do supracitado tipo. Por assim ser, trazemos em seguida o objetivo de cada item dessa questão, bem como possíveis respostas que podem aparecer no momento da aplicação.

[6] O Apêndice A apresenta uma fotografia de todos os materiais manipuláveis que foram usados na aplicação do instrumento diagnóstico.

(a) OBJETIVO: Identificar o próximo termo da sequência, já que, por ser uma sequência repetitiva, provavelmente, o aluno conseguirá chegar ao termo seguinte observando os termos anteriores que a compõem.

Possíveis respostas oferecidas pelos estudantes para o item (a):

(i) desenhar/escolher a carinha, o que nos permitiria inferir que ele compreendeu a sequência com três elementos;

(ii) desenhar/escolher o coração, o que nos levaria a inferir que ele considerou os 8 elementos como uma única sequência;

(iii) por fim, o estudante ainda pode desenhar/escolher o raio como resposta, numa ação de simplesmente repetir o último elemento que aparece na sequência. Nesse caso, não parecerá que esse estudante identificou algum padrão nessa sequência.

(b) OBJETIVO: Identificar termos mais distantes daqueles que foram apresentados na sequência.

Possíveis respostas oferecidas pelos estudantes para o item (b):

(i) desenhar/escolher a carinha, o que nos permitiria inferir que o estudante entendeu a sequência que se repete a cada três elementos;

(ii) desenhar/escolher o coração, o que nos permitiria inferir que o estudante entendeu a sequência de oito elementos;

(iii) por fim, o aluno pode oferecer como resposta o raio, de modo que poderíamos inferir que o estudante teria se equivocado na contagem.

(c) OBJETIVO: Esperar que esse aluno possa dar uma resposta que, de certo modo, generalize a estratégia adotada por ele para encontrar qualquer termo da sequência.

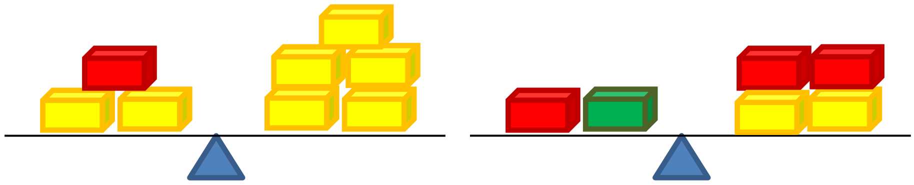
Possíveis respostas oferecidas pelos estudantes para o item (c):

(i) uma possível resposta seria ele responder que, se contar de 3 em 3 elementos, ele chegará sempre à carinha;

(ii) uma possível resposta seria ele responder que, se contar de 8 em 8 elementos, ele chegará sempre ao raio;

(iii) uma possível resposta seria o raio, por entender que, assim como o 2º elemento é o raio, todos os elementos pares também o serão. Como 12 é par, ele poderia pensar que toda posição par será representada pelo raio.

QUESTÃO 2: Duas balanças estão equilibradas.



a) Quantas caixinhas amarelas valem uma caixinha vermelha?
b) Quantas caixinhas amarelas valem uma caixinha verde?

A questão apresentada traz o conceito de equivalências em equações, que estão no formato de balanças de dois pratos. Sendo assim, o objetivo dessa questão é analisar as relações feitas pelos alunos entre os elementos do primeiro prato com o segundo e o estabelecimento da igualdade entre os elementos dos pratos. Para responder aos itens (a) e (b) dessa questão, os estudantes poderão recorrer a duas formas de resolução:

(i) ao desenho, à escrita e a outros símbolos, quando resolverem apenas com papel e lápis;

(ii) à balança de dois pratos, confeccionada em madeira, e aos pesos, na forma de caixinhas de mesmo tamanho, dispostos nas cores amarela, vermelha e verde, e, também, ao papel e lápis para registrarem suas conclusões.

A seguir, são apresentados os objetivos para cada item da questão, como também as possibilidades de resposta que os alunos podem apresentar.

(a) OBJETIVO: Encontrar o valor da caixinha vermelha em função das caixinhas amarelas, por meio da observação, manipulação ou desenho.

Possível resposta apresentada pelos estudantes para o item (a)

O aluno poderá observar as duas balanças e compreender que elas estão equilibradas. A partir disso, ele começará a formular sua resposta para obter o que é desejado como solução ideal para essa questão, que é o fato de a caixinha vermelha valer três caixinhas amarelas. Para o aluno chegar a esse resultado, ele pode perceber que, se na primeira balança tem três caixinhas (duas amarelas e uma vermelha), e, no outro prato, possuem cinco caixinhas amarelas, então, esse aluno poderá perceber que a caixinha vermelha equivale a três amarelas. A partir da segunda balança, ficaria difícil para ele fazer alguma relação, pois aparece uma caixinha verde.

(b) OBJETIVO: Encontrar o valor da caixinha verde em função das caixinhas amarelas, por meio da observação, manipulação ou desenho.

Possível resposta apresentada pelos estudantes para o item (a)

Nesse item, o aluno estará frente a uma situação mais sofisticada, pois ele deverá recorrer ao item anterior para fazer as relações necessárias para encontrar a resposta. Nesse caso, o aluno poderá recorrer à manipulação, mesmo que mental, das caixinhas, a fim de conseguir visualizar as trocas a serem feitas. Desse modo, se o aluno tomar a caixinha amarela como unidade, facilitará para ele o trabalho, uma vez que a caixinha vermelha vale três amarelas. Assim, ele pode fazer trocas e identificar que uma caixinha verde vale uma vermelha mais duas amarelas, ou, simplesmente, que a caixinha verde vale cinco caixinhas amarelas. Essas trocas podem ser identificadas pelo princípio da transitividade. Sendo assim, se uma caixa vermelha é igual a três caixinhas amarelas, e, se uma caixinha verde é igual às duas caixinhas amarelas e uma vermelha, logo, pela transitividade, uma caixinha verde é igual a cinco caixinhas amarelas.

QUESTÃO 3: Stela estava passeando com sua mãe. Nesse passeio elas resolveram tomar uma tigela de açaí na barraca de Dona Márcia. O valor da tigela de açaí depende da quantidade de frutas que é acrescentada. A tigela de açaí custa R$ 3,00 e cada fruta acrescentada é R$ 2,00. Assim, quanto vai custar:

a) Uma tigela de açaí com banana, abacaxi e kiwi?
b) Duas tigelas de açaí: uma com abacaxi e kiwi, e outra somente com banana?

A questão em discussão traz o conceito de função de uma variável. Nesse caso, mais especificamente a função afim. A Q3 tem como objetivo analisar como o aluno relaciona as variáveis para se chegar ao valor da tigela de açaí. Para responder aos itens (a) e (b) dessa questão, os estudantes poderão recorrer a duas formas de resolução:

(i) ao desenho, à escrita e a outros símbolos, quando resolverem apenas com papel e lápis;

(ii) aos materiais confeccionados no formato de tigela e de frutas, e também ao papel e lápis para registrarem suas conclusões.

Como foi apresentada a questão, cada item traz um objetivo e suas possíveis respostas que poderão aparecer no momento da aplicação do teste.

(a) OBJETIVO: Observar se o aluno compreende que o que vai variar são as quantidades de frutas.

Possíveis respostas apresentadas pelos estudantes para o item (a):

(i) podem confundir os valores da função do tipo $f(x) = ax + b$, ou seja, sendo a função dada por $f(x) = 2x + 3$, os alunos podem confundir e usar o 3 no lugar do 2 e calcular o valor a pagar, de acordo com essa troca feita;

(ii) os alunos poderão ainda não compreender e somar os dois valores, 2 e 3, e dar como resposta para o problema;

(iii) o uso do material manipulativo poderá facilitar, pois o aluno terá apenas que somar os valores a partir das frutas que ele irá acrescentar na tigela;

(iv) pode acontecer ainda desse aluno apenas contar os valores referentes às frutas e esquecer do valor fixo da tigela de açaí;

(v) e ele ainda pode associar que são três frutas diferentes e somar ao valor da tigela, obtendo 6 como resposta.

(b) OBJETIVO: Observar se o aluno consegue estabelecer as relações entre as variáveis frutas e valor e preço da tigela de açaí, em duas situações distintas.

Possíveis respostas apresentadas pelos estudantes para o item (b):

(i) os estudantes podem confundir os valores da função do tipo $f(x) = ax + b$, ou seja, sendo a função dada por $f(x) = 2x + 3$, os alunos podem confundir e usar o 3 no lugar do 2 e calcular o valor a pagar de acordo com essa troca feita e somar duas vezes;

(ii) os alunos poderão ainda não compreender e somar os dois valores, 2 e 3, multiplicar por 2 e dar como resposta para o problema;

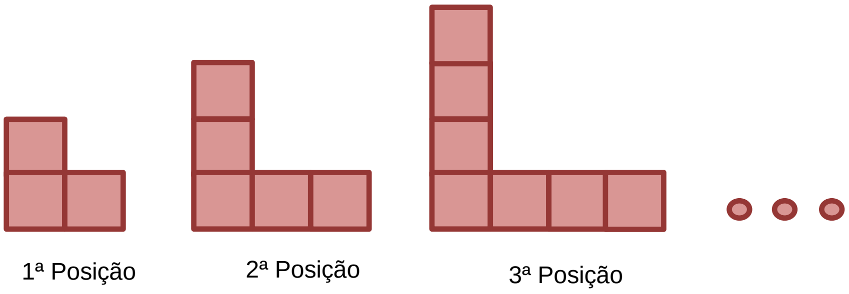
(iii) o uso do material manipulativo poderá facilitar, pois o aluno terá apenas que somar os valores a partir das frutas que ele irá acrescentar na tigela, e, assim, ele poderá:

1. somar 2 mais 2 e depois somar 3 referente a uma das tigelas, depois somar 2 mais 3 referente à outra tigela, e, por fim, somar os valores das duas tigelas que resultarão em 12;
2. multiplicar 2 por 2 e depois somar 3 referente a uma das tigelas, depois somar 2 mais 3 referente à outra tigela, e, por fim, somar os valores das duas tigelas que resultarão em 12;
3. multiplicar 2 por 3 e 3 por 2 e somar as duas multiplicações, resultando no valor que custa as duas tigelas de açaí.

(iv) pode acontecer ainda de esse aluno apenas contar os valores referentes às frutas e esquecer do valor fixo da tigela de açaí, que, nesse caso, agora são duas;

(v) ele pode ainda associar que são três frutas diferentes e somar ao valor da tigela, obtendo 6 como resposta, e esquecer de somar novamente o valor ou multiplicar por 2.

QUESTÃO 4: Observe a sequência abaixo:



a) Desenhe a próxima posição.

b) Desenhe a 11º posição.
c) Você acha que dá para saber a quantidade de quadradinhos do desenho de qualquer posição?

A questão Q4 traz o conceito de sequência icônica recursiva. A Q4 tem como objetivo analisar os recursos utilizados pelos alunos para encontrar os termos seguintes da sequência e a respectiva quantidade de quadradinhos de cada termo, bem como observar como esses alunos podem apresentar uma generalização para a regra da sequência. Para responder aos itens (a) e (b) dessa questão, os estudantes poderão recorrer a duas formas de resolução:

(i) ao desenho, quando resolverem apenas com papel e lápis;
(ii) aos quadradinhos, quando resolverem com material manipulativo.

A referida questão possui três itens e cada um deles possui um objetivo. Além disso, são apresentadas algumas possibilidades de respostas para cada item que podem ocorrer durante a aplicação do instrumento diagnóstico.

(a) OBJETIVO: Identificar o próximo termo da sequência recorrendo sempre aos termos anteriores, já que se trata de uma sequência recursiva.

Possíveis respostas oferecidas pelos estudantes para o item (a):

(i) o estudante pode desenhar/organizar a figura com nove quadradinhos para a próxima posição;
(ii) ele pode desenhar/organizar os quadradinhos considerando a soma da quantidade de quadradinhos das figuras anteriores, ou seja, essa figura pode apresentar quinze quadradinhos;
(iii) o aluno pode ainda desenhar/organizar os quadradinhos numa quantidade par, como, por exemplo, a figura seguinte pode aparecer com oito ou dez quadradinhos.

(b) OBJETIVO: Observar se o aluno consegue prever um termo mais distante na sequência.

Possíveis respostas apresentadas pelos estudantes para o item (b):

(i) o aluno poderá desenhar/organizar a figura com 23 quadradinhos a partir do desenho/organização das figuras anteriores, que poderão estar em sequência;

(ii) ele poderá também desenhar/organizar a figura com 23 quadradinhos, compreendendo o padrão e a regularidade da sequência a partir da contagem;

(iii) ainda pode acontecer de o aluno compreender a lei de formação da sequência e conseguir prever a 11ª figura e desenhar/organizar a quantidade de quadradinhos.

(c) OBJETIVO: Analisar se o estudante consegue uma generalização para a sequência.

Possíveis respostas dadas pelos estudantes para o item (c):

Nesse item, o aluno pode apresentar respostas da seguinte maneira:

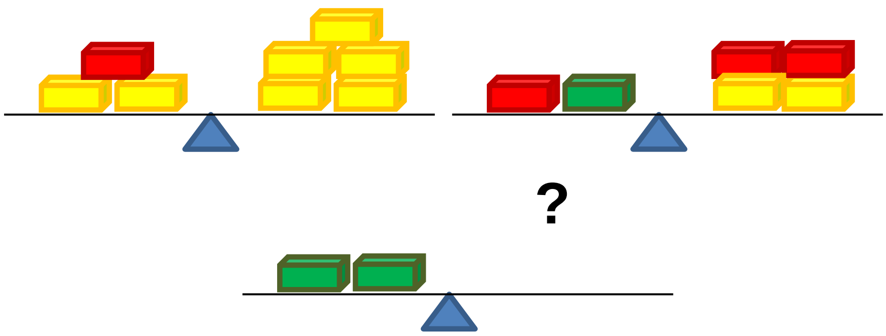
(i) na língua materna, explicando como é possível chegar a qualquer quantidade de quadradinhos em qualquer posição;

(ii) usando de forma complementar a língua materna e símbolos, para apresentar uma generalização da lei de formação da sequência;

(iii) por meio de símbolos (sejam com letras ou não), uma forma de generalizar a lei que descreve a sequência;

(iv) fazendo uso de figuras e desenhos para representar a generalização da sequência.

QUESTÃO 5: As duas primeiras balanças estão equilibradas. Complete a terceira balança com caixinhas, de modo que ela também fique equilibrada.



Quantas e quais cores de caixinhas você pode colocar no lugar da interrogação para equilibrar a terceira balança?

A quinta questão do instrumento diagnóstico trata do conceito de equivalência envolvendo equações e sistemas de equações na forma de balança de dois pratos. Essa questão tem como objetivo analisar o raciocínio usado pelos alunos para estabelecer a equivalência e equilibrar a balança. Para responder essa questão, os estudantes poderão recorrer a duas formas de resolução:

(i) ao desenho, à escrita e a outros símbolos, quando resolverem apenas com papel e lápis;

(ii) à balança de dois pratos, confeccionada em madeira, e aos pesos na forma de caixinhas de mesmo tamanho, dispostos nas cores amarela, vermelha e verde, e também ao papel e lápis para registrar suas conclusões.

A seguir, são apresentadas algumas possibilidades de respostas que os alunos podem apresentar no momento em que estiverem respondendo o instrumento diagnóstico.

Possíveis respostas apresentados pelos alunos para a questão:

Para responder a essa questão, os alunos poderão apresentar as seguintes possibilidades do uso de pesos no lugar da interrogação para equilibrar a balança:

(i) usar 10 caixinhas amarelas;

(ii) usar uma caixinha verde e 5 amarelas;

(iii) usar uma caixinha verde, 2 amarelas e uma vermelha;

(iv) usar 7 caixinhas amarelas e uma vermelha;

(v) usar 2 caixinhas vermelhas e 4 amarelas;

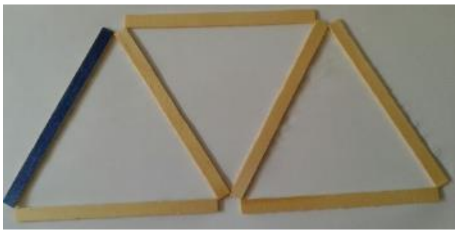
(vi) usar 3 caixinhas vermelhas e uma amarela;

(vii) usar 2 caixinhas verdes;

(viii) poderá também não utilizar nenhuma dessas possibilidades e a resposta estar correta;

(ix) poderá também não utilizar nenhuma dessas possibilidades e a resposta estar errada, demonstrando que ele não compreendeu a situação ou simplesmente se confundiu com os pesos.

QUESTÃO 6[7]: Numa brincadeira, Alan e Bruno estavam testando como montar triângulos com palitos de picolé, conforme mostra a figura ao lado. Obedecendo essa maneira de montar triângulos, responda:



a) De quantos palitos eles precisam para fazer dois triângulos?
b) De quantos palitos eles precisam para fazer 11 triângulos?
c) Escreva como você falaria para seu colega a quantidade de palitos necessária para construir qualquer quantidade de triângulos.

A questão Q6 traz o conceito de função polinomial do 1º grau. Ela tem o objetivo de analisar como os alunos relacionam as variáveis e chega a uma possível generalização para a função. Para responder aos itens (a) e (b) dessa questão, os estudantes poderão recorrer a duas formas de resolução:

(i) ao desenho, à escrita e a outros símbolos, quando resolverem apenas com papel e lápis;
(ii) à folha de papel sulfite e aos palitos de picolé nela colados, aos palitos de picolé avulsos, e também ao papel e lápis para registrarem suas conclusões.

Para o item (c), não será necessário nenhum material manipulável, pois, para ambas as formas de aplicação, a forma de registrar a resposta será a mesma. Como foi discutido nas questões anteriores, essa questão possui três itens e cada um deles possui um objetivo. Além disso, são apresentadas algumas possibilidades de respostas que podem surgir no momento da aplicação do teste.

(a) OBJETIVO: Contabilizar a quantidade de palitos para três triângulos.

Possíveis respostas apresentadas pelos estudantes para o item (a):

(i) o aluno poderá responder que a quantidade de palitos necessária para 2 triângulos é 6, entendendo que são necessários 3 palitos para cada triângulo;

[7] Questão inspirada em Teixeira (2016).

(ii) ele poderá dar como resposta que a quantidade de palitos necessária para 2 triângulos é 5, compreendendo que a relação é sempre 2 palitos para cada triângulo e mais 1 para fechá-lo;

(iii) ou poderá ainda dar como resposta qualquer outro valor, dando a entender que não compreendeu a relação.

(b) OBJETIVO: Estimar quantos palitos são necessários para uma quantidade de triângulos que não está visível.

Possíveis respostas apresentadas pelos estudantes para o item (b):

(i) o aluno poderá responder que a quantidade de palitos necessária para 11 triângulos é 33, entendendo que são necessários 3 palitos para cada triângulo, mesmo os tendo desenhado / montado;

(ii) ele poderá dar como resposta que a quantidade de palitos necessária para 11 triângulos é 23, compreendendo que a relação é sempre 2 palitos para cada triângulo e mais 1 para fechá-lo, analisando o desenho / montagem;

(iii) poderá ainda dar como resposta qualquer outro valor, dando a entender que não compreendeu a relação, mesmo tendo desenhado ou montado os triângulos com os palitos;

(iv) ou será possível ainda não ter conseguido nem mesmo desenhar ou montar os triângulos.

(c) OBJETIVO: Generalizar uma regra que possa explicar a quantidade necessária de palitos para montar qualquer quantidade de triângulos.

Nesse item, espera-se que o aluno consiga chegar a uma possível generalização para a situação. Nessa generalização, ele poderá utilizar:

(i) a língua materna para expressar a sua ideia de generalização;

(ii) desenhos para expressar as suas ideias;

(iii) símbolos e a própria língua materna para externar as suas ideias;

(iv) ou, simplesmente, símbolos para externar a sua ideia de generalização.

QUESTÃO 7: Complete a sequência a seguir com os termos que faltam.

2, 5, 8, ___, 14, ___, ___, 23, ___, 29, ...

Essa questão traz o conceito de sequência numérica recursiva. Desse modo, o nosso objetivo, nessa questão, é analisar o raciocínio e as estratégias para definir os termos que faltam na sequência, a partir dos termos que já são apresentados nela. Sendo assim, a seguir, indicamos algumas possibilidades de respostas que podem surgir no momento da aplicação do instrumento diagnóstico.

Possíveis respostas apresentadas pelos estudantes para a questão

Essa questão, apesar de não ter muitas exigências para sua resolução, é bastante complexa, pois exige bastante do aluno para resolvê-la. Naturalmente, o aluno necessitará compreender a lei de formação da sequência para estabelecer os termos faltantes. Por isso, não há a necessidade de pedir mais itens nessa sequência, compreendendo que o aluno só conseguirá preenchê-la corretamente se entender como é a sua lei de formação.

Para resolver essa questão, o aluno poderá simplesmente recorrer ao termo anterior e somar três para obter o termo seguinte, ao observar os três primeiros termos da sequência. Desse modo, ele poderá dar como resposta os valores 11, 17, 20 e 26. Caso o aluno complete com valores diferentes desses supracitados, podemos inferir que ele não compreendeu a sequência ou que, possivelmente, fez cálculos erroneamente para que chegasse a resultados diferentes.

QUESTÃO 8: Na barraca de Dona Noélia, vende-se açaí na tigela. Lá, o valor da tigela de açaí também é de R$ 3,00. Stela e sua mãe foram comprar açaí e lá souberam que cada fruta tem um valor diferente. Lá, qualquer quantidade de banana custa R$ 1,00, qualquer quantidade de abacaxi custa R$ 2,00 e qualquer quantidade de kiwi custa R$ 3,00.

a) Quanto custa uma tigela de açaí com banana, abacaxi e kiwi?

b) Quanto custa duas tigelas de açaí: uma com abacaxi e banana e outra somente com kiwi?

A questão Q8 traz o conceito de função de três variáveis. Essa questão tem o objetivo de observar se o aluno consegue relacionar as três variáveis presentes e chegar ao valor final da tigela de açaí. Para responder aos itens (a) e (b) dessa questão, os estudantes poderão recorrer a duas formas de resolução:

(i) ao desenho, à escrita e a outros símbolos, quando resolverem apenas com papel e lápis;

(ii) aos materiais confeccionados, no formato de tigela e de frutas, e também ao papel e lápis para registrarem suas conclusões.

A referida questão possui dois itens. Sendo assim, são apresentados os objetivos para cada item, bem como algumas das possibilidades de respostas que os alunos podem apresentar.

(a) OBJETIVO: Analisar a possibilidade de os alunos compreenderem a relação de dependência em uma função de três variáveis.

Possíveis respostas apresentadas pelos estudantes para o item (a):

Nessa questão, o aluno estará diante de um problema envolvendo uma função de três variáveis, pois a função que descreve essa situação é dada pela expressão $f(x, y, z) = x + 2y + 3z + 3$, onde x, y e z correspondem aos tipos de frutas. Por isso, é possível que os alunos apresentem como resposta:

(i) somar os valores de cada porção de frutas e dar como resposta o valor 6 como o valor da tigela de açaí;

(ii) somar os valores de cada porção de frutas e somar ao valor da tigela de açaí e dar como resposta para o problema o valor 9;

(iii) considerar apenas o valor da tigela de açaí, ou seja, considerar como resposta apenas o valor 3;

(iv) esquecer de somar o valor de alguma das frutas e o valor da tigela variar em 6, 7 e 8.

(b) OBJETIVO: Analisar as formas como os alunos relacionam as variáveis e como compreendem a variação.

Possíveis respostas apresentadas pelos estudantes para o item (b):

Nessa questão, o aluno estará diante de um problema envolvendo uma função de três variáveis, pois a função que descreve essa situação é dada pela expressão $f(x, y, z) = x + 2y + 3z + 3$, onde x, y e z correspondem aos tipos de frutas. No entanto, por se tratar de duas tigelas de açaí com tipos de frutas diferentes, os valores podem variar por conta dessas diferenças. Por isso, é possível que os alunos apresentem como resposta:

(i) somar os valores de cada porção de frutas, e obter como resposta o valor 6, referente ao valor de uma tigela de açaí, e depois somar mais 6, referindo-se às duas tigelas;

(ii) somar os valores de cada porção de frutas e dar como resposta o valor 6, correspondente ao valor de uma tigela de açaí, e depois multiplicar esse valor por 2, referindo-se às duas tigelas;

(iii) somar os valores de cada porção de frutas e somar ao valor da tigela de açaí, encontrar 9 como o valor para uma tigela de açaí e, depois, somar mais 9, referindo-se às duas tigelas;

(iv) somar os valores de cada porção de frutas e somar ao valor da tigela de açaí, encontrar 9 como o valor para uma tigela de açaí e, depois, multiplicar esse valor por 2, referindo-se às duas tigelas;

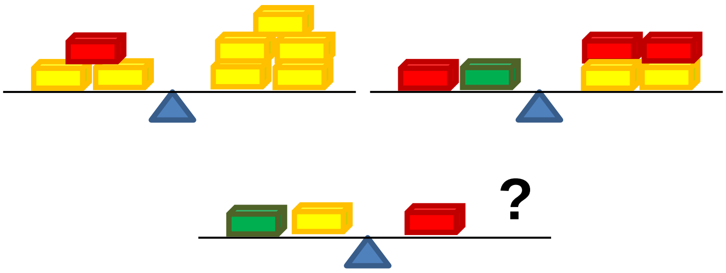
(v) considerar apenas o valor da tigela de açaí e, depois, somar mais 3, referindo-se às duas tigelas;

(vi) considerar apenas o valor da tigela de açaí e, depois, multiplicar por 2 esse valor, referindo-se às duas tigelas;

(vii) somar o valor da porção de banana e de abacaxi e somar mais 3 (valor da tigela 1). Depois, somar o valor da porção de kiwi com 3 (valor da tigela 2). Por fim, somar os valores das duas tigelas, resultando em 12;

(viii) somar o valor da porção de banana e de abacaxi e somar mais 3 (valor da tigela 1). Depois, somar o valor da porção de kiwi com 3 (valor da tigela 2). Por fim, poderá multiplicar por 2, resultando em 12 (isso ocorre porque, mesmo sendo tigelas com porções de frutas diferentes, o valor das duas acaba sendo o mesmo).

QUESTÃO 9: As duas primeiras balanças estão equilibradas. Complete a terceira balança com as caixinhas que faltam, de modo que ela também fique equilibrada.



Quantas e quais cores de caixinhas você pode colocar no lugar da interrogação para equilibrar a terceira balança?

A 9ª e última questão do instrumento diagnóstico trata do conceito de equivalência em equações e sistemas de equações envolvendo a balança de dois pratos. A questão Q9 tem como objetivo identificar quais são as possibilidades de equilibrar a balança que os alunos podem presumir. Para responder essa questão, os estudantes poderão recorrer a duas formas de resolução:

(i) ao desenho, à escrita e a outros símbolos, quando resolverem apenas com papel e lápis;

(ii) à balança de dois pratos, confeccionada em madeira, e aos pesos, na forma de caixinhas de mesmo tamanho, dispostos nas cores amarela, vermelha e verde, e também ao papel e lápis para registrarem suas conclusões.

A seguir, são apresentadas as possibilidades de respostas que podem aparecer no momento da aplicação do teste.

Possíveis respostas apresentados pelos alunos para a questão:

Para responderem essa questão, os alunos poderão apresentar as seguintes possibilidades do uso de pesos no lugar da interrogação, para equilibrarem a balança:

(x) usar mais uma caixinha vermelha;

(xi) usar 3 caixinhas amarelas;

(xii) não utilizar nenhuma dessas possibilidades e a resposta estar correta;

(xiii) não utilizar nenhuma dessas possibilidades e a resposta estar errada, demonstrando que ele não compreendeu a situação ou simplesmente se confundiu com os pesos.

Algo importante nas questões Q5 e Q9 é que é perguntado ao aluno "Quantas e quais cores de caixinhas você pode colocar no lugar da interrogação para equilibrar a terceira balança?". Essa pergunta é essencial para evidenciar que o aluno, neste momento, é livre para dar a quantidade de possibilidades de resposta que ele desejar, inclusive apenas uma possibilidade. Essa pergunta permite que seja possível analisar se o aluno compreendeu mesmo as relações estabelecidas e se consegue associar os elementos do primeiro membro (prato da esquerda) com os elementos do segundo membro (prato da direita), a partir do estabelecimento de uma igualdade. Além disso, é importante esclarecer também que as questões Q2, Q5 e Q9 são correlacionadas. Nesse sentido, as questões Q5 e Q9 dependem estritamente da resposta encontrada na Q2.

3.4 Procedimentos de produção de dados

Uma pesquisa a ser realizada utilizando materiais manipuláveis e tendo por base um conjunto de questões que serão rigorosamente analisadas necessita também de um roteiro de entrevista que possa auxiliar na obtenção de informações relevantes. Por isso, para a produção de dados dessa pesquisa, foi usado um roteiro de entrevista. Esse roteiro foi elaborado de acordo com o que Fiorentini e Lorenzato (2007) classificam como entrevista semiestruturada. Para os autores, esse tipo de entrevista consiste num roteiro de entrevista em que o pesquisador organiza alguns pontos que ele quer observar, de modo que, no decorrer da entrevista, o pesquisador poderá trocar a ordem das perguntas e, até mesmo, fazer uso de outras que não estavam previamente estabelecidas.

Apesar de o roteiro da entrevista seguir o que Fiorentini e Lorenzato (2007) classificam como entrevista semiestruturada, a entrevista realizada foi a clínica, que ocorreu de acordo com o Método Clínico Piagetiano. Nesse tipo de entrevista, não se busca apenas obter respostas, mas também compreender algumas das facetas do pensamento da criança (PIAGET, 1979). Essa entrevista nos deu a possibilidade de fazer os alunos falarem livremente sobre suas estratégias de respostas, e, a partir do que eles falaram, foi possível tirarmos as nossas próprias conclusões.

Como foi exposto no início deste capítulo, durante o período em que aconteceram as reuniões com as professoras, a diretora e a coordenadora, para a apresentação do projeto, foram esclarecidas algumas coisas para que a pesquisa fosse realizada de uma forma que não prejudicasse os alunos nem professores. No entanto, como uma forma de realizar as entrevistas, de modo que não colocasse os alunos em risco pelo fato de serem crianças e também não os deixando cansados, as professoras e a coordenadora decidiram que a entrevista seria realizada durante o horário comum de aulas dos alunos. Apesar de explicar que os alunos poderiam ser prejudicados, as professoras acharam melhor que a entrevista acontecesse no horário normal de aula. Elas argumentaram que não atrapalharia, pois seria retirado da sala apenas um aluno por vez e que isso não ocasionaria problemas ao andamento da aula nem ao aluno. Além disso, ficou acordado também que as entrevistas aconteceriam num período pós-provas, o que facilitaria tanto para a pesquisadora, quanto para as professoras, bem como para os alunos. Ademais, as professoras argumentaram que, se fosse solicitado que os alunos fossem para a escola num turno oposto, possivelmente, os pais não concordariam que os filhos participassem da pesquisa, como também pelo fato de deixar os alunos mais cansados.

Depois de ter acertado com o corpo docente da escola como aconteceriam as entrevistas, a pesquisa começou, e, para que ela acontecesse, a equipe da escola disponibilizou um espaço para a realização das entrevistas. Desse modo, as entrevistas foram realizadas individualmente com duração média de uma hora e trinta minutos para cada aluno. Como foi explicado, o procedimento aconteceu numa sala reservada na escola. O espaço disponibilizado pela escola foi o laboratório de informática, que possui alguns computadores (nem todos funcionam) e que, no geral, não é usado.

Para dar início à entrevista, a coordenadora da escola ia até a sala do aluno que seria entrevistado no momento e comunicava à professora sobre a saída dele e o retirava da sala. Após esse momento, já no laboratório de informática, a pesquisadora recebia o aluno e se apresentava. Além disso, apresentava também como a entrevista seria realizada e que seriam filmadas apenas as mãos dele, enquanto ele respondia as perguntas que seriam feitas.

Após esse momento de conversa e de descontração, para deixar o aluno mais confortável, era lhe apresentado o material e se iniciava a entrevista, pedindo ao aluno que preenchesse a contracapa do caderno que continha as questões.

Ao dar início à entrevista, observamos que os alunos ficavam um pouco tímidos por ser uma situação diferente da que estavam acostumados, como também estavam na presença de pessoas estranhas a eles e num local separado e fechado. No entanto, no decorrer da entrevista, os alunos se esqueciam da filmagem e das pessoas que estavam ali e ficavam livres para responderem qualquer pergunta que lhes era feita. Além disso, ficavam também tão confortáveis que não receavam nem mesmo fazerem certas brincadeiras e perguntas às “tias”[8] no momento da entrevista.

Para a entrevista, foi feito um roteiro que norteava os questionamentos. Assim, para cada questão, existia uma pergunta norteadora e, a partir dessa pergunta norteadora e de acordo com o que o aluno respondia e falava, eram feitas novas perguntas, visando sempre compreender as estratégias adotadas por ele no momento da resolução da questão. Essas perguntas norteadoras eram sempre relacionadas às questões do instrumento diagnóstico que compreendeu em situações que envolveram sequências, equivalência e relação funcional.

Como material para os alunos, foi oferecido um envelope contendo o caderno com as questões do instrumento diagnóstico e folhas de papel em branco, a fim de que ele pudesse fazer os registros que achasse necessário, durante a resolução das questões. Esse envelope era uma espécie de material individual que cada aluno teve direito para responder às questões. No entanto, para os registros das respostas, os alunos usavam o próprio caderno para fazer as anotações, tanto quando respondiam as questões apenas no ambiente P&L, tanto quando respondiam no MM. No ambiente P&L, eles dispunham apenas daquela forma para representar suas respostas. Já, quando se tratava da resolução no ambiente MM, os alunos manipulavam os materiais e depois de

[8]Tia é um termo comumente usado no ambiente escolar, sobretudo, por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse termo só foi utilizado durante a aplicação do instrumento diagnóstico pelo fato de os alunos se sentirem mais confortáveis ao se dirigirem à pesquisadora. Além disso, ao usar o termo para chamar a atenção dos alunos, a pesquisadora percebeu que eles se sentiam mais confiantes em estabelecer um diálogo. Durante a coleta de dados, foi possível perceber que esse termo era comumente usado pelas professoras da escola.

chegarem à conclusão sobre suas respostas, eles as registravam no caderno que continha as questões do instrumento diagnóstico. Por vezes, os alunos (tanto os que responderam às questões apenas no caderno quanto os que responderam usando o material manipulativo) utilizavam também folhas avulsas de papel sulfite para fazerem alguns rascunhos, enquanto resolviam alguma questão.

As respostas dadas pelos alunos poderiam aparecer na forma de vários registros escritos. No geral, as respostas poderiam ser dadas em língua materna, porém, por vezes, poderiam aparecer também na forma de desenhos e em escrita numérica, quando registravam algum cálculo para obterem alguma resposta. Concernente ao material manipulativo, os alunos manipulavam os objetos e, após chegarem à resposta da questão, eles registravam de forma escrita no caderno de questões o que concluíam a respeito da resposta da questão.

3.5 Procedimentos de análise

Após coletados os dados, estes precisavam passar por um tratamento para que deles fossem extraídos os resultados que possam (ou não) comprovar as nossas hipóteses. Por isso, como meios de registro dos nossos dados, contamos com videogravações e com os protocolos escritos na forma de cadernos. Maior parte das informações foi retirada das videogravações, de acordo com o método empregado na nossa pesquisa, qual seja o Método Clínico Piagetiano, que consiste em não arrancar as respostas pretendidas, mas sim fazer o aluno falar livremente, e, a partir daí, conseguir as informações necessárias (PIAGET, 1979).

Nesta seção, abordaremos como seguiram os nossos procedimentos de análise. Para tanto, apoiamo-nos nos estudos de Lins e Gimenez (1997), Kaput (1999) e outros estudiosos, no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Nos atemos aos estudos de Usiskin (1995), Kieran (1995), Ponte, Branco e Matos (2009), entre outros estudiosos concernente à Álgebra. E, no que se refere à Early Algebra, contamos também com as pesquisas que compõem a nossa seção dos estudos correlatos como, Canavarro (2007), Cirino e Oliveira (2011), Teixeira (2016), Porto (2018), entre outros.

Para a análise, os dados serão divididos em três blocos: (i) o bloco das questões que se referem às situações de sequências; (ii) o bloco das questões que se referem às situações de equivalência; e (iii) o bloco das questões que se referem às situações da relação funcional. Além disso, antes de discutir cada bloco de questões, será feita a análise que evidencia as principais formas de registros usadas pelos alunos dos dois anos de estudo. Essa divisão será feita apenas por questão de organização e para que fique mais evidente o que foi revelado pelos dados, no que concerne às situações de cada natureza. Essa análise será fundamental para cumprir com o papel principal da nossa pesquisa, que é analisar as estratégias que esses alunos apresentam na hora de resolverem situações relativas à Álgebra.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este capítulo é dedicado à análise e discussão dos dados coletados nos dois ambientes, papel e lápis (P&L) e material manipulativo (MM). Cabe salientar que nesses dois ambientes os alunos registraram suas respostas no caderno de questões, apresentado e discutido no capítulo anterior.

A partir dos dados coletados criamos quatro categorias que classificam os registros feitos pelos alunos. A partir de então iniciamos a análise que apresenta as tendências de registro, segundo essas categorias, dos alunos do 4º e 5º anos em cada um dos itens de questão.

Em seguida, a análise foi feita por vertente da *Early Algebra,* pré-definida e discutida no Capítulo 1. Para cada uma dessas vertentes, Sequência, Equivalência e Relação Funcional, analisamos sob três enfoques: (i) a tendência segundo a categorização do registro; (ii) a tendência em relação ao acerto; (iii) a tendência em relação às categorias de análise criadas para cada vertente da *Early Algebra*, para classificar as respostas dos alunos segundo o raciocínio deles. Além disso, nessa análise é apresentado também as influências de cada ambiente para a aplicação do instrumento diagnóstico, bem como as proximidades e distanciamos das respostas desses alunos no que tange ao ambiente P&L e MM.

4.1 Os registros utilizados pelos alunos no instrumento diagnóstico

De posse dos dados, a primeira indagação que nos veio para que pudéssemos iniciar a análise, foi a de como os alunos registraram suas respostas, se com números, desenhos ou ainda utilizando a língua materna. Cabe ressaltar que, mesmo aqueles alunos que trabalharam no ambiente MM também registraram suas respostas no caderno de questões. Desse modo, a partir dos dados coletados criamos quatro categorias que classificam todos registros feitos pelos alunos. A partir de então iniciamos a análise que traz uma visão geral das tendências de registro, dos alunos do 4º e 5º ano em cada um dos itens de questão, segundo essas categorias.

De acordo com o que foi observado dos registros dos alunos do 4º e do 5º ano e após um estudo minucioso, identificamos quatro formas recorrentes de os alunos apresentarem suas respostas, o que denominamos por categorias dos registros, conforme destacamos no Quadro 4.1.

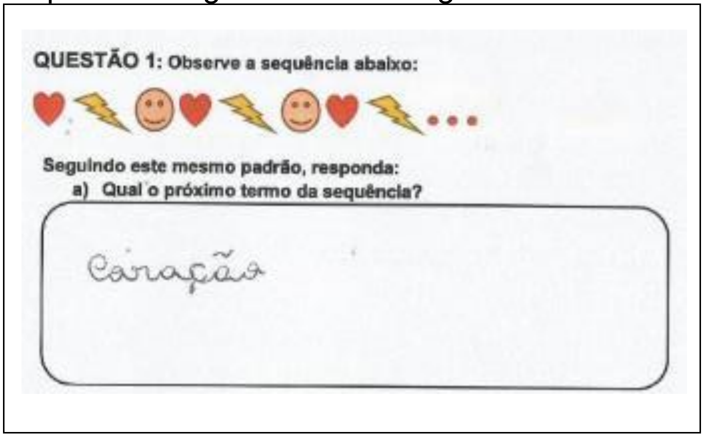
Quadro 4.1 – Categorias das respostas dos alunos quanto ao registro

Categoria	Categoria de registro
C1	Uso da língua materna
C2	Uso de número
C3	Uso figural (desenho ou ícone)
C4	Uso misto

Fonte: Elaborado pela autora

C1 – Uso da língua materna: essa categoria refere-se à resposta do aluno que é apresentada unicamente por meio da língua materna, como mostra a Figura 4.3.

Figura 4.3 – Exemplo da categoria “Uso da língua materna”

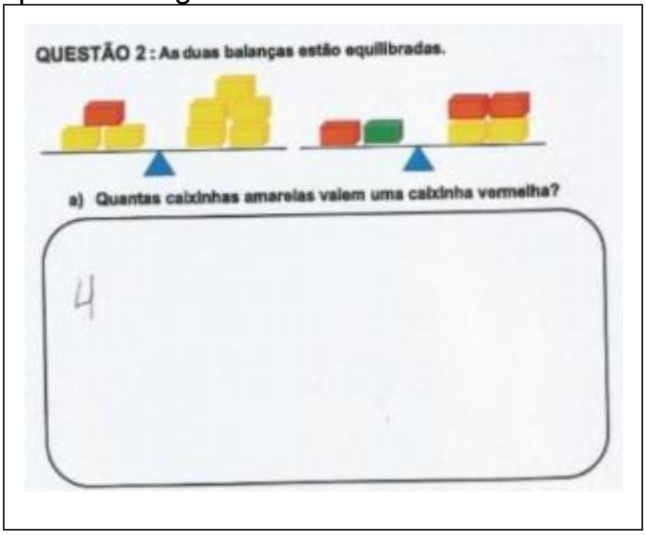


Fonte: Protocolo do aluno Antônio

Como podemos observar o aluno Antônio respondeu fazendo uso da língua materna, mesmo numa questão icônica. Nesse tipo de questão o aluno era livre para registrar a resposta da forma como achasse melhor.

C2 - Uso de número: a resposta do aluno é classificada nessa categoria quando ele registra um ou mais números como resposta. A Figura 4.4 mostra um exemplo representativo desse tipo de categoria.

Figura 4.4 – Exemplo da categoria “Uso de número”

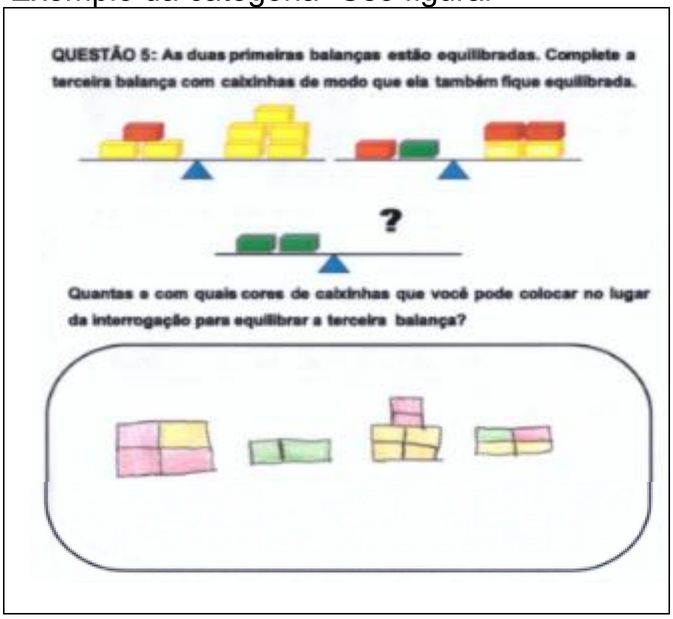


Fonte: Protocolo do aluno Antônio.

O aluno Antônio registrou sua resposta de forma resumida, representando apenas por um número. No caso dessa questão, o aluno poderia expressar a sua resposta da forma que achasse mais fácil para ele.

C3 - Uso figural: essa categoria refere-se à resposta do aluno que é apresentada por meio do uso de figuras, ícones, desenhos. Esse tipo de registro é exemplificado pela Figura 4.5.

Figura 4.5 – Exemplo da categoria “Uso figural”

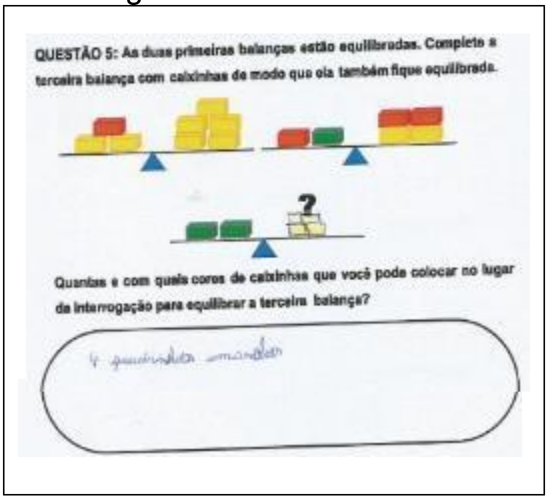


Fonte: Protocolo da aluna Bia

A aluna Bia ao responder essa questão lançou mão dos desenhos das caixinhas, colorindo-as. A aluna se sentiu livre para expressar a sua resposta por meio de desenhos, o que não a impedia de expressar também por números ou por meio da língua materna.

C4 - Uso misto: nesse tipo de registro o aluno utilizou dois ou mais registros desses já mencionados anteriormente. Por esse motivo é que caracterizamos esse registro como misto. Esse tipo é mostrado na Figura 4.6.

Figura 4.6 – Exemplo da categoria "Uso misto"



Fonte: Extrato do protocolo do aluno Abel.

Note que nesse registro apresentado pela Figura 4.6, o aluno Abel utiliza os três registros: língua materna, número e figural. Ele desenhou quatro quadrados embaixo da interrogação que aparece no prato da terceira balança. Além disso, no espaço em que é designado para resposta, ele usa o número e a língua materna para apresentar a quantidade de caixas que ele supõe valer as duas caixas verdes.

Após apresentar as quatro categorias criadas a partir das respostas registradas pelos alunos, passaremos a classificar e quantificar as respostas segundo essas categorias. Vale relembrar que, mesmo aqueles alunos que responderam ao instrumento diagnóstico com o material manipulativo fizeram registros escritos no mesmo caderno de questões que foi utilizado pelos alunos que responderam apenas com papel e lápis. Os resultados obtidos quanto ao registro das respostas dos alunos são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Classificação dos registros de cada item das questões por categoria

Classificação dos registros de cada item das questões por categoria																			
Ano escolar	**Aluno**	**Questões**																	
		Q1a	**Q1b**	**Q1c**	**Q2a**	**Q2b**	**Q3a**	**Q3b**	**Q4a**	**Q4b**	**Q4c**	**Q5**	**Q6a**	**Q6b**	**Q6c**	**Q7**	**Q8a**	**Q8b**	**Q9**
4º	Abel	C3	C3	C1	C4	C4	C4	C2	C3	C3	C1	C4	C4	C4	C4	C2	C4	C2	C1
	Amália	C3	C3	C1	C2	C2	C4	C4	C3	C3	C1	C4	C4	C2	C4	C2	C4	C4	C4
	Ana	C3	C3	C1	C2	C2	C2	C2	C3	C2	C1	C4	C2	C2	C1	C2	C2	C2	C4
	Antônio	C1	C1		C2	C2	C2	C2	C3	C3	C1	C3	C2	C2	C1	C2	C2	C2	C3
	Total			C1 = 12				C2 = 26				C3 = 15				C4 = 18			
5º	Bento	C3	C3		C2	C2	C2	C2	C3	C3	C1	C4	C4	C4	C4	C2	C2	C4	C4
	Bete	C3	C3	C1	C4	C4	C4	C2	C3	C3	C1	C3	C4	C2	C4	C2	C2	C2	C3
	Beto	C1	C1	C1	C1	C1	C4	C4	C3	C3	C1	C3	C4	C4	C4	C2	C4	C4	C3
	Bia	C1	C1	C1	C2	C2	C4	C4	C3	C3	C1	C4	C4	C4	C1	C2	C4	C4	C4
	Total			C1 = 14				C2 = 15				C3 = 16				C4 = 26			

Fonte: Dados da pesquisa

Legenda:

(rosa)	Categoria 1 – Uso da língua materna
(azul)	Categoria 2 – Uso do número
(amarelo)	Categoria 3 – Uso figural
(verde)	Categoria 4 – Uso misto
(branco)	Não respondeu

Os dados da Tabela 4.1 revelam que, de maneira geral, apesar das formas de registro aparecerem com quantidades próximas nos dois anos em estudo, ainda assim, duas dessas formas, uso do número e uso misto, foram mais usadas pelos alunos. Entre as nove questões do instrumento diagnóstico e dos dezoito itens que as compõe, identificamos 44 da categoria do Uso Misto, seguido de 41 do Uso do Número, 31 do Uso Figural e 26 da Língua Materna. Observamos que os alunos utilizaram mais o registro categorizado como Uso Misto o que nos leva a inferir que eles sentem a necessidade de utilizar diferentes formas de registro para expressarem suas respostas. No entanto, ao olharmos por ano escolar é perceptível uma predominância da categoria Uso do Número por parte dos alunos do 4º ano, enquanto que os alunos do 5º ano da categoria Uso Misto.

Ao focarmos nos itens questões, foi possível identificar algumas características importantes, dependendo do comando do item da questão. Uma delas foi que na Q7 os alunos utilizaram apenas uma categoria de registro que foi o Uso do Número. Essa categoria foi favorecida pela natureza da questão, pois o comando era preencher os espaços vazios numa sequência numérica recursiva. Já nos itens Q1c e Q4c todos os registros foram categorizados como Uso da Língua Materna, uma vez que o comando desses itens era explicar a generalização. No item Q4a todas as respostas analisadas foram categorizadas como Uso Figural, também por conta do comando, desenhe a 7ª posição. No entanto, um fato curioso foi o de que um aluno ao responder a Q4b, que tinha comando semelhante a Q4a, ao invés de utilizar o registro figural ele acabou por usar o registro numérico indicando a quantidade de quadrados que teria a figura procurada.

Os dados puderam nos mostrar explicitamente que dentre as categorias de registros a menos usada foi a língua materna, o que pode demonstrar que os alunos estão conseguindo comunicar matematicamente melhor (LAUTERT; SPINILLO, 1999). E, na maioria dos registros da categoria Uso da Língua Materna foi utilizado foi pelo fato da necessidade de explicitar a generalização, que para eles foi mais fácil escrever usando a língua materna.

Até aqui discutimos as respostas dos alunos classificadas por categoria e por item de questão. Nas próximas seções nos debruçaremos na análise das resoluções das questões relacionadas a cada vertente da *Early Algebra*.

Paralelamente as análises trarão as proximidades e distanciamentos observados em relação ao ambiente da aplicação, tanto com P&L quanto com MM. Por isso, por motivo de organização fizemos uma seção para cada vertente e analisamos juntos todos os resultados, independentemente do tipo de ambiente (P&L ou MM).

4.2 Análise das respostas relacionadas às sequências

Nessa seção analisamos os registros feitos pelos alunos nas três questões do instrumento diagnóstico que se referem às sequências. Essas questões são Q1, Q4 e Q7 que são sequências do tipo repetitiva icônica, recursiva icônica e recursiva numérica, respectivamente. Para seguir com a análise, essa será feita sob três enfoques em relação: (i) ao tipo de registro; (ii) ao acerto; e (iii) ao de raciocínio[9] de reconhecimento de padrões. Tendo em vista esses três enfoques, analisamos as tendências e características para cada ano escolar em relação a cada um dos ambientes (P&L e MM).

Analisamos as resoluções dessas três situações levando em conta as semelhanças e diferenças, as proximidades e distanciamentos entre as respostas dadas pelos alunos no ambiente P&L e no ambiente MM no que se refere à categoria de registro, ao acerto e aos níveis de raciocínio.

4.2.1 Análise das resoluções das questões de sequências em relação ao tipo de registro

Iniciamos essa análise apresentando as formas de registro utilizadas pelos alunos apenas nas questões relacionadas às sequências, quais sejam, Q1, Q4 e Q7, trazendo a Tabela 4.2 que é um extrato da Tabela 4.1. Cabe relembrar que nesse extrato da Tabela 4.1 apresentamos os registros utilizados tanto pelos alunos que responderam no ambiente P&L, quanto daqueles que responderam no ambiente MM, nos dois anos de estudo.

[9] É preciso esclarecer que, em toda a nossa análise, quando usamos a palavra raciocínio, esta estará sendo usada de acordo com o que Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam a respeito do que vem a ser raciocinar como uma das vertentes fundamentais do pensamento algébrico (p. 11).

Tabela 4.2 – Registros de cada item das questões de sequência classificados por categoria e por tipo de ambiente

Registros de cada item das questões de sequência classificados por categoria e por tipo de ambiente										
Tipo de ambiente	**Ano Escolar**	**Aluno**	**Questões**							
			Q1a	**Q1b**	**Q1c**	**Q4a**	**Q4b**	**Q4c**	**Q7**
P&L	4º	Abel	C3	C3	C1	C3	C3	C1	C2
		Antônio	C1	C1		C3	C3	C1	C2
	5º	Bento	C3	C3		C3	C3	C1	C2
		Beto	C1	C1	C1	C3	C3	C1	C2
MM	4º	Amália	C3	C3	C1	C3	C3	C1	C2
		Ana	C3	C3	C1	C3	C2	C1	C2
	5º	Bete	C3	C3	C1	C3	C3	C1	C2
		Bia	C1	C1	C1	C3	C3	C1	C2

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados da Tabela 4.2 revelam que para as questões de sequências não ocorreu a categoria Uso Misto (C4). Notamos que em cada uma das respostas encontradas nas questões Q4a, Q4c e Q7 os alunos utilizaram, nos dois ambientes, apenas um tipo de registro, Uso Figural, Uso da Língua Materna e Uso do Número, respectivamente. De acordo com os dados, não houve diferença em relação às formas de registro nos dois tipos de ambientes em ambos os anos de estudo.

4.2.2 Registros de cada item das questões de sequência classificados por categoria e por tipo de ambiente

Os dados da Tabela 4.3 apresentam os resultados obtidos quanto ao acerto dos alunos em relação às questões de sequências. Nessa tabela, procuramos organizar os dados forma que fosse possível evidenciar as tendências com relação ao uso dos dois tipos de ambientes, P&L e MM, em cada ano de estudo.

Tabela 4.3 – Desempenho dos alunos nos itens das questões de Sequência

Desempenho dos alunos nas questões de Sequências							
Tipo de ambiente	**Ano Escolar**	**Aluno**	**Questões**				
			Q1a	**Q1b**	**Q4a**	**Q4b**	**Q7**
P&L	4º	Abel	A	A	A	A	A

		Antônio	A	A	E	E	E
	5º	Bento	A	A	A	A	A
		Beto	A	E	E	E	A
MM	4º	Amália	A	E	A	A	A
		Ana	A	A	E	E	E
	5º	Bete	A	A	A	A	E
		Bia	E	A	A	E	E

Fonte: Dados da pesquisa

Legenda:

(verde)	Acertou
(laranja)	Errou

Cabe salientar que na Tabela 4.3 não apresentamos o acerto ou erro do aluno em relação aos itens Q1c e Q4c, pois esses itens solicitavam a generalização para a situação posta na questão. Por esse motivo achamos conveniente não os incluir na tabela.

No que diz respeito ao acerto, é conveniente dar ênfase na quantidade. Nesse sentido, nas questões relacionadas às sequências, o número de acertos foi ligeiramente maior que o número de erros. Essa diferença foi quase o dobro. Enquanto que registramos um total de 26 acertos, notamos apenas 14 erros. De modo geral, possível inferir que sequências constituem problemas de maior compreensão por parte dos alunos uma vez que a identificação de padrões é algo natural ao ser humano (VALE *et al*, 2006).

Do ponto de vista do acerto, estamos considerando que não houve diferença entre os ambientes do P&L e do MM, mesmo que nesse último houve um erro a mais. Vale ressaltar também que os erros predominaram nas sequências do tipo recursiva icônica e recursiva numérica. O que nos leva a inferir que sequência recursiva se configura como um tipo que exige um raciocínio mais sofisticado (PORTO, 2018) para encontrar os termos que são solicitados ou que faltam. No que tange ao erro e ao acerto, no geral, os alunos erraram por não compreender a sequência ou fazer algum processo de contagem errado.

4.2.3 Análise das resoluções das questões de sequências em relação ao raciocínio de reconhecimento de padrões

Nesta seção a análise será feita observando algumas características marcantes no que tange as resoluções dos alunos para as questões de sequências. Nesse sentido, a seção será dividida em mais duas subseções que tem o objetivo de discutir (i) a classificação das respostas dos alunos de acordo com algumas categorias criadas por nós depois de observarmos aspectos relevantes nas resoluções e, (ii) cada uma das categorias de análise a partir dos extratos dos protocolos dos alunos bem como das suas falas a partir dos extratos das entrevistas feitas com eles no momento da aplicação do teste que tem a finalidade de evidenciar aspectos marcantes no que tange ao raciocínio dos alunos ao resolver questões de sequências.

Além disso, serão destacadas as características mais marcantes em relação às influências dos tipos de ambiente de aplicação do instrumento diagnóstico (P&L e MM). Essas diferenças são importantes para entendermos como os alunos reagem diante de uma mesma situação, no entanto apresentada de uma forma diferente, como é o caso do uso de materiais manipuláveis.

4.2.3.1 Visão geral das respostas por categoria de análise

Nesta seção discutimos as principais evidências observadas a partir das respostas dadas pelos alunos, sejam elas no registro escrito quanto na fala. Sendo assim, pudemos criar categorias que evidenciam reconhecimento de padrões e a possibilidade de generalização. Cabe salientar que foram criadas sete categorias, denominadas por S1, S2, ..., S7, sendo que as quatro primeiras se referem ao reconhecimento de padrões e regularidades (BRASIL, 2017; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009); as categorias S5, S6 e S7 estão relacionadas às possibilidades de generalização (LINS; GIMENEZ, 1997; KAPUT, 1999; BLANTON; KAPUT, 2005).

O Quadro 4.2 traz as categorias de análise e como caracterizamos cada uma delas. Além disso, em seguida é apresentada a Tabela 4.4 que classifica as respostas dadas pelos alunos em relação à cada categoria, em relação ao tipo de material utilizado e em relação ao ano escolar. apresentando a análise acompanhada dos extratos dos protocolos e das falas dos alunos, referente que às questões Q1, Q4 e Q7.

Quadro 4.2 – Categorias relativas ao raciocínio de reconhecimento de padrões

Categoria	Nome da Categoria
S1	Não consegue reconhecer padrão ou regularidade na sequência
S2	Reconhece padrão ou regularidade e identifica o termo seguinte
S3	Não consegue prever termos distantes
S4	Identifica termos distantes da sequência
S5	Utiliza contagem para prever termos distantes
S6	Não generaliza
S7	Generaliza, mas não prevê termos distantes

Fonte: Elaborado pela autora

A Tabela 4.4 expressa as respostas dos alunos classificadas de acordo com as categorias que elencamos anteriormente no Quadro 4.2. As respostas dos alunos estão classificadas na tabela no que tange ao reconhecimento de padrões ou regularidades e a possibilidade de generalização. Vale ressaltar que uma mesma resposta pode estar classificada em mais de uma categoria, visto que as respostas dos alunos apresentam várias características. Por isso, observando as características mais marcantes e recorrentes, foram criadas as categorias em que são classificadas as respostas.

Tabela 4.4 – Raciocínio de reconhecimento de padrões por item de questão

Raciocínio de reconhecimento de padrões por item de questão															
Tipo de ambiente	**Ano Escolar**	**Aluno**	**Questões**												
			Q1a	**Q1b**			**Q1c**	**Q4a**	**Q4b**			**Q4c**	**Q7**		
P&L	4º	Abel	S2	S2	S4	S5	S6	S2	S2	S4	S7	S7	S2	S4	S5
		Antônio	S1	S1	S3	S5	S6	S1	S1	S3	S5	S6	S1	S3	S6
	5º	Bento	S2	S2	S4	S5	S6	S2	S2	S4	S7	S7	S2	S4	S5
		Beto	S2	S2	S4	S5	S6	S1	S1	S3	S5	S6	S2	S4	S5
MM	4º	Amália	S2	S2	S4	S5	S6	S2	S2	S4	S5	S7	S2	S4	S5
		Ana	S2	S2	S4	S5	S6	S1	S1	S3	S5	S6	S1	S3	S6
	5º	Bete	S1	S2	S4	S5	S6	S2	S1	S3	S6	S6	S2	S4	S5
		Bia	S1	S2	S4	S5	S6	S2	S1	S3	S5	S6	S1	S3	S5

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação às respostas e às categorias em que foram classificadas, observamos que em todas as sequências apresentadas, no geral, os alunos não demonstraram sentir dificuldades em reconhecer padrões ou regularidades (S2). Também observamos que em todas as questões houve a predominância do uso da contagem para prever termos distantes nas sequências (S5). Além disso, com relação à generalização, maioria dos alunos não conseguem generalizar regras para prever termos distantes (S6 e S7). Isso pode ocorrer, possivelmente pelo uso marcante da contagem.

Os dados da Tabela 4.4 nos leva a resultados interessantes no que diz respeito ao reconhecimento de padrões ou regularidades e na possibilidade de generalização. Em relação à sequência do tipo repetitiva da Q1 percebemos que os alunos conseguem reconhecer o padrão mais facilmente como prevê a BNCC (BRASIL, 2017), tanto em relação a termos próximos ou mais distantes, apesar de usarem a contagem como estratégia para chegar a termos mais distantes. No entanto, é possível afirmar que os alunos não conseguem chegar a uma generalização para esse tipo de sequência quando se trata de encontrar termos de qualquer posição. No que concerne ao tipo de ambiente P&L e MM e ao ano escolar dos alunos, esses dois fatores não influenciaram nos resultados.

Em relação à Q4 observamos que os alunos apresentam maiores dificuldades no reconhecimento de padrões, uma vez que esse tipo de sequência se configura como mais sofisticada (PORTO, 2018) por ser do tipo recursiva icônica. Vimos que alguns desses alunos além de não conseguir reconhecer o padrão da sequência, também não conseguiram prever termos distantes. Todavia, apesar de ter um grau de sofisticação maior, entendemos que esse tipo de sequência proporciona uma possibilidade maior de generalização, isso afirmamos pelo fato de aparecerem mais alunos que conseguiram prever termos distantes sem utilizar a contagem para encontrar esses termos, o que nos leva a supor que eles generalizaram.

No caso da Q7, percebemos que os alunos tiveram mais facilidade em reconhecer o padrão da sequência e também conseguiram identificar termos distantes. Para encontrar esses termos distantes era necessário reconhecer o padrão e generalizar a regra para encontrar os termos da sequência, pois ela é também do tipo recursiva numérica. No geral os alunos além de reconhecer o padrão e conseguir chegar a descrever uma regra (VALE *et al*, 2007), eles conseguiam prever termos distantes. Entretanto, ainda se apoiam muito na contagem.

Em suma, os dados da Tabela 4.4 nos leva a perceber que os alunos conseguem reconhecer padrões e estabelecer regras que generalizam as sequências assim, como visto por Blanton e Kaput (2005). No entanto, existe ainda uma forte tendência da parte deles em se apoiar na contagem, o que dificulta o desenvolvimento do pensamento algébrico, o que vai ao encontro do que Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam sobre a capacidade dos alunos resolver problemas e generalizar expressando-os por vezes por meio de modelos.

4.2.3.2 As resoluções dos alunos do ponto de vista das categorias

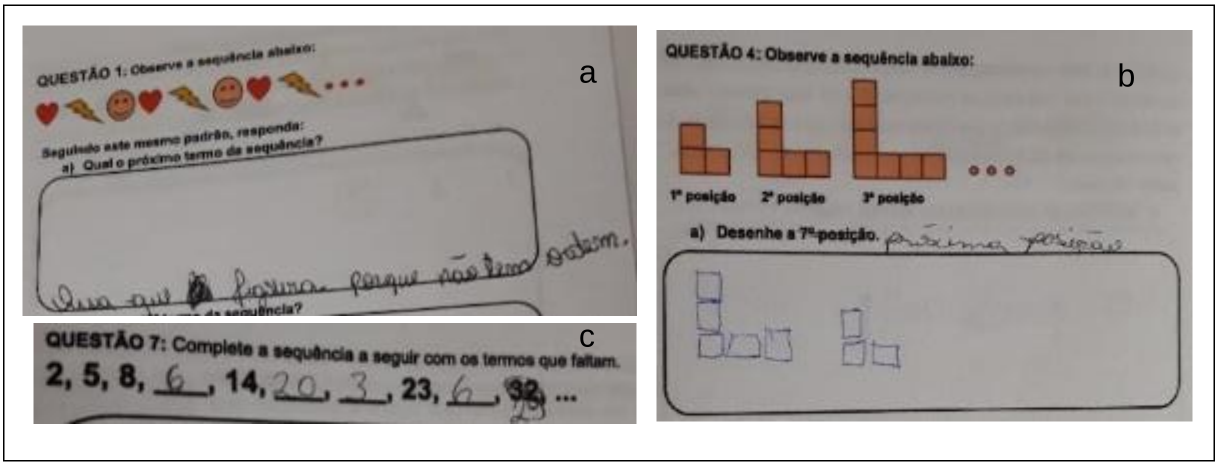
A seção anterior buscou evidenciar os aspectos mais marcantes de acordo com as tendências observadas nas respostas dos alunos em relação as categorias de análise criadas por nós e apresentadas no Quadro 4.2. Os dados apresentados na Tabela 4.4 apresenta de modo geral algumas características das respostas dos alunos no que tange ao ano escolar e ao ambiente de aplicação.

Nesta seção faremos uma discussão mais abrangente no que concerne às categorias que criamos para classificar as respostas dados pelos alunos. Por isso, achamos conveniente discutir cada uma dessas categorias trazendo as respostas nos registros escritos dos alunos como também os extratos das entrevistas feitas com eles durante a aplicação do instrumento diagnóstico.

Em relação à categoria S1, foram poucos os alunos que não conseguiram prever um padrão ou uma regularidade nas três sequências apresentadas. A sequência da Q1, por ser uma sequência em que se identifica padrões diferentes e podem ser considerados como corretos, teve apenas uma resposta com a característica da S1. Cabe ressaltar que essa característica só se apresentou na Q1a. Em relação à Q4, dois alunos não reconheceram o padrão ou regularidade da sequência. No que tange a Q7, três alunos se encaixam na S1. Apesar da Q7 parecer uma situação simples que só exigia do aluno completar a sequência, ela é ao mesmo tempo uma questão sofisticada que exige que o aluno tenha compreendido a sequência para que ele consiga completa-la corretamente.

A Figura 4.7 exemplifica as respostas dadas pelos alunos que se encaixam na S1. A Figura 4.7 traz um exemplo das respostas para cada uma das três questões.

Figura 4.7 – Respostas que o aluno não consegue reconhecer padrão ou regularidade na sequência



Fonte: Protocolos dos alunos Bia (a), Beto (b) e Antônio (c), respectivamente.

Para que seja possível compreender o motivo pelo qual classificamos as respostas apresentadas na Figura 4.7 nessa categoria, mostramos os trechos das entrevistas com os alunos, de modo que eles explicam o raciocínio utilizado para tal resposta. Esses trechos são apresentados pelos extratos 4.1, 4.2 e 4.3.

Extrato 4.1 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Bia

Depois de ter falado das três figuras da sequência como o próximo termo, a pesquisadora pergunta:
Pesquisadora: Mas vem cá, pode ser qualquer figura?
Bia: Pode!
Pesquisadora: Ah! Então, não tem ordem? Não precisa de ordem? Então, eu posso colocar tanto o raio, quanto a carinha, quanto o coração?
Bia: É!

Extrato 4.2 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Beto

Pesquisadora: Desenhe a próxima posição para mim!
Beto: Aí vai ficar três (apontando para a terceira posição), dois (apontando para a segunda posição), um (apontando para a primeira posição).
Pesquisadora: Então, desenha aí para mim.
Beto: Depois três vem o dois e depois do dois vem o um. (Enquanto desenha as figuras).

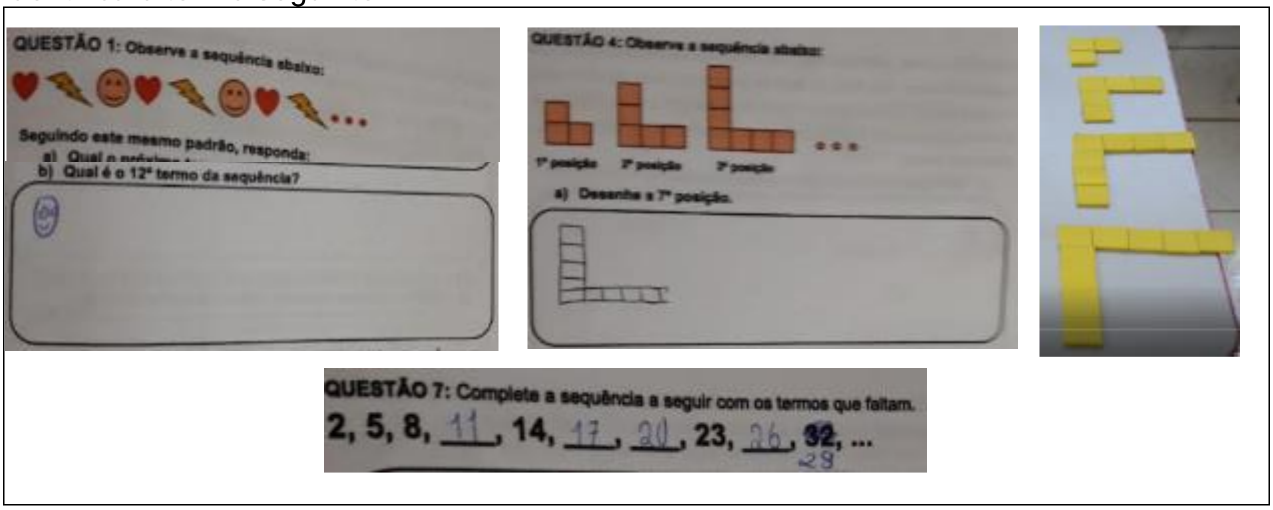
Extrato 4.3 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Antônio

Pesquisadora: Esses espaços você tem que completar com os termos que faltam.
Antônio: Aqui (referindo-se ao primeiro espaço vazio da sequência) vai ser seis, porque nove, dez, onze, doze, treze, catorze. Seis para chegar em catorze. Aí catorze, para chegar...
Pesquisadora: Aí você tem dois espaços.
Antônio: Aí catorze. Quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove... Aí eu contei seis e aqui (o segundo espaço vazio da sequência) deu vinte, mas antes eu tinha contado cinco e tinha dado dezenove.
Pesquisadora: Entendi. E aí, você acha que é vinte ou dezenove?
Antônio: Como aqui (o primeiro espaço vazio da sequência) eu tinha feito, então eu acho que aqui (o segundo espaço vazio da sequência) é seis também. Aí pra chegar em vinte e três, três! Vinte e três pra vinte e nove, (ele conta) seis!

De certo modo, os extratos das entrevistas deixam evidente que os alunos, apesar de não conseguirem reconhecer o padrão ou regularidade nas sequências, na busca de um padrão, eles inventam uma regra para se guiarem na procura da resposta para a questão.

Em relação à categoria S2, que reconhece padrões ou regularidades e identifica o termo seguinte, a maioria dos alunos se encaixam nessa categoria no que diz respeito às três sequências apresentadas. De um total de oito alunos, sete apresentaram uma resposta correta para a Q1a, cinco para a Q4a e cinco para a Q7[10]. A Figura 4.8 exemplifica as respostas dos alunos que se adequam a essa categoria.

Figura 4.8 – Resposta que o aluno reconhece padrão ou regularidade e identifica o termo seguinte



Fonte: Protocolos dos alunos Abel (à esquerda), Bete (ao meio), imagem retirada do vídeo de Bete (à direita) e Amália (abaixo).

As respostas apresentadas pelos alunos foram classificadas nessa categoria depois dos alunos explicitarem as suas estratégias durante a entrevista realizada durante a aplicação do instrumento diagnóstico. Para evidenciar essas estratégias vejamos o que foi relatado nos estratos 4.4, 4.5 e 4.6.

Extrato 4.4 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Abel

PESQUISADORA: POR QUE VOCÊ PENSOU QUE É A CARINHA ABEL?
ABEL: PORQUE TEM TRÊS RAIOS, TRÊS CORAÇÕES E SÓ TEM DUAS CARINHAS. E O CORAÇÃO É O PRIMEIRO, ESSE É O SEGUNDO (REFERINDO-SE AO RAIO) E O TERCEIRO (APONTANDO PARA

[10] A categoria S2 só serviu para analisar a Q1a e Q4a, porque só nessas questões é que foi pedido para identificar o termo seguinte da sequência. Apesar da Q7 não ter um item que pedia especificamente para encontrar o termo seguinte, esta questão foi incluída pelo fato de sempre ter que identificar os termos seguintes de um apresentado na sequência numérica que possuía espaços para completar.

A CARINHA). [...] AQUI TEM TRÊS CORAÇÕES, TRÊS RAIOS E SÓ TEM DUAS CARINHAS, ENTÃO EU VOU FAZER A TERCEIRA PARA PODER COMPLETAR AQUI.

Extrato 4.5 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Bete

PESQUISADORA: POR QUE ESSA É A PRÓXIMA FIGURA DA SEQUÊNCIA? ME EXPLICA.
BETE: PORQUE AQUI EMBAIXO TEM UM, DOIS. AQUI JÁ SOBE PARA TRÊS, AQUI PARA QUATRO, ENTÃO AQUI EU COLOQUEI CINCO. AQUI EM CIMA TINHA UMA. AQUI TINHA UMA, FOI PARA DOIS, DEPOIS DE DOIS SUBIU PARA TRÊS E AQUI EU COLOQUEI QUATRO.

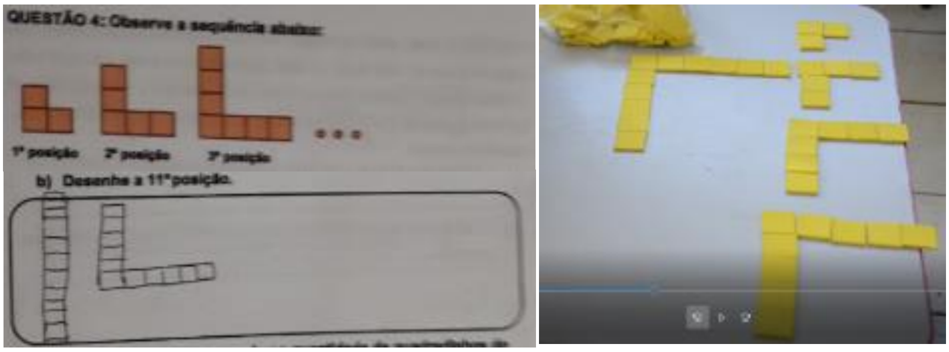
Extrato 4.6 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Amália

DEPOIS DA ALUNA TER MONTADO A SEQUÊNCIA.
PESQUISADORA: ENTENDI, AMÁLIA! AGORA VOCÊ VAI ME DIZER COMO FOI QUE VOCÊ COMPLETOU ESSA SEQUÊNCIA!
AMÁLIA: DE TRÊS EM TRÊS!

Observamos nos três extratos que os alunos explicam e, implicitamente, descrevem a regra que os levaram a encontrar o termo seguinte da sequência. Verificamos assim, que os alunos conseguem perceber padrões e regularidades em sequências, assim como é recomendado na BNCC (BRASIL, 2017) em seus objetivos e nas habilidades que devem ser desenvolvidas. Além disso, de acordo com Vale *et al* (2006) é natural que em algumas situações a crianças procurem por padrões, por isso evidenciamos que perceber padrões foi uma tarefa simples aos alunos ao resolverem as questões.

Concernente à categoria S3, em que o aluno não consegue prever termos distantes da sequência, observamos que só teve a ocorrência dessa característica na Q4b. Dos oito alunos que responderam essa questão, três deles não conseguiram identificar um termo distante da sequência. Uma resposta que se classifica na categoria S3 é apresentada na Figura 4.9. A resposta apresentada nessa figura foi de uma aluna que respondeu o instrumento diagnóstico utilizando material manipulativo. Por isso, a resposta é apresentada no registro escrito e com o uso do material manipulativo.

Figura 4.9 – Resposta que o aluno não consegue prever termos distantes da sequência



Fonte: Protocolo da aluna Bete e imagem retirada do seu vídeo.

A fim de tornar evidente o raciocínio utilizado por Bete ao responder a Q4b, o Extrato 4.7 retirado da entrevista feita com ela durante a aplicação do instrumento diagnóstico evidencia detalhes da sua estratégia.

Extrato 4.7 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Bete

Pesquisadora: Agora me explica como foi que você pensou para poder montar essa figura?
Bete: Porque aqui se eu tiro essas duas fica um quadrado. Aí aqui, estava a figura de antes e eu coloquei mais dois. Aqui eu tenho a mesma de antes, mas eu também coloquei mais dois. Aqui está a anterior e eu coloquei mais dois. E aqui, como tem cinco, aí eu coloquei mais um e ficou seis. E aqui como tinha quatro aí ficou cinco. (Monta a figura da 5ª posição da sequência dizendo que é a 11ª)
Pesquisadora: Então a figura de número onze vai ter quantos quadradinhos aí no total?
Bete: Onze.
Pesquisadora: Ah! Então a figura de número onze vai ter onze quadradinhos? É isso?
Bete: É!

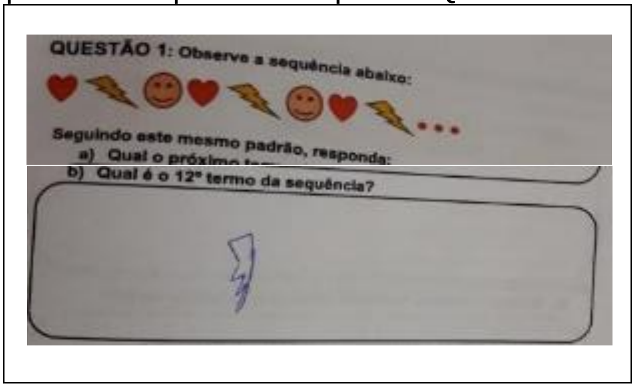
Algo que se verificou na Q4b foi o fato de que, mesmo tendo reconhecido o padrão ou regularidade da sequência e ter identificado o termo seguinte na Q4a, alguns desses alunos tiveram dificuldades em identificar um termo distante.

No que diz respeito à categoria S4, em que o aluno identifica termos distantes da sequência, verificamos um grande predomínio de respostas nessa categoria na Q1b e Q4b[11]. De um total de oito alunos, sete deles conseguiram prever o termo distante para a Q1b. Apesar de uma aluna ter errado a resposta, o fato ocorreu devido à contagem utilizada por ela, o que a induziu ao erro. Isso pode ser verificado pela Figura 4.10 que mostra a resposta dada pela aluna.

[11] A categoria S4 ficou restrita apenas para a análise do item (b) das questões 1 e 4. Não foi incluída a Q7 pelo fato de a questão exigir apenas que o aluno complete a sequência. Apesar de ter que descobrir termos distantes, isso era facilmente conseguido recorrendo ao termo anterior. Por isso, essa questão não se adequava a essa categoria. Além disso, os pontos mais importantes da Q7 foram evidenciados por outras categorias de análise.

Também é possível verificar a partir do extrato da entrevista feita com a aluna durante a aplicação do instrumento diagnóstico.

Figura 4.10 – Resposta dada por Amália para a Q1b



Fonte: Protocolo da aluna Amália.

Segue também o Extrato 4.8 retirado da entrevista concedida pela aluna Amália enquanto ela resolvia a Q1. O extrato evidencia o erro cometido pela aluna ao prever um termo distante para a sequência.

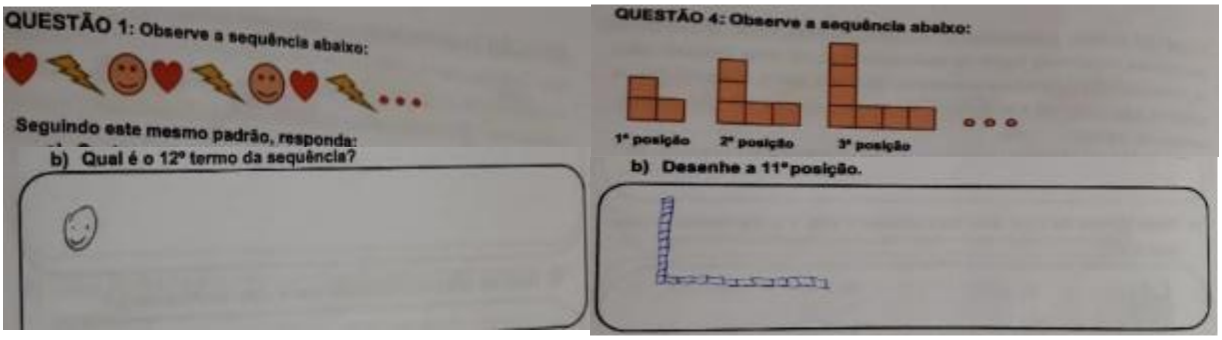
Extrato 4.7 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Amália

Pesquisadora: Amália, e agora qual é o 12º termo da sequência?
Amália: (A aluna conta as figuras para dar a resposta) Esse! (Aponta para o raio)
Pesquisadora: Você acha que é o raio, por quê, Amália?
Amália: Porque, fazendo as contas, se colocar mais aqui vai dar o raio.
Pesquisadora: Como foi mesmo que você contou?
Amália: Um, coração, dois (apontando para o raio), três (apontando para a carinha), quatro (apontando para o coração), cinco (apontando para o raio), seis (apontando para a carinha), sete (apontando para o coração), oito (apontando para o raio), nove (apontando para a carinha), aqui vinha coração, raio, coração, ... Oh, não! (volta a contar e a partir da nona posição volta a falar) Carinha, coração, raio.

A partir do Extrato 4.7 vê-se claramente que a aluna cometeu erro ao contar as figuras. Ela contou apenas até o 11º termo da sequência. No entanto, é fato que ela reconhece o padrão da sequência. Esse padrão foi previsto na nossa análise *a priori*.

Retomando as respostas classificadas na S4, em relação à Q4b, de oito alunos, apenas três deles conseguiram prever um termo distante para a sequência. A Figura 4.11 exemplifica as respostas dadas pelos alunos para a Q1b e Q4b.

Figura 4.11 – Resposta em que o aluno identifica termos distantes da sequência



Fonte: Protocolos dos alunos Bento e Abel, respectivamente.

A fim de evidenciar que esses alunos conseguem prever os termos distantes para as sequências, os Extratos 4.8 e 4.9 mostram o raciocínio dos alunos ao explicarem como conseguiram identificar termos que estavam distantes.

Extrato 4.8 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Bento

PESQUISADORA: QUAL É O 12º TERMO DA SEQUÊNCIA?
BENTO: PEGA UM PAPELZINHO.
(A PESQUISADORA PEGA O PAPEL E O ALUNO COMEÇA A DESENHAR)
BENTO: VAI SER A CARINHA. (DEPOIS DE DESENHAR AS FIGURAS QUE ESTAVAM FALTANDO NA SEQUÊNCIA ATÉ O 12º TERMO)

Extrato 4.9 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Abel

PESQUISADORA: COMO É QUE VOCÊ VAI FAZER PARA DESENHAR?
ABEL: AH! SE A 7ª POSIÇÃO TEM OITO AQUI (APONTANDO PARA OS QUADRADOS QUE FICAM NA VERTICAL DA FIGURA), ENTÃO TEM QUE TER DOZE QUADRINHOS. (DESENHA A FIGURA E COLOCA MAIS ONZE QUADRADOS NA DIREÇÃO HORIZONTAL DA FIGURA)

De fato, os extratos das entrevistas deixam evidente que os alunos compreendem as sequências apresentadas e, além disso reconhecem padrões ou regularidades nelas. O que os alunos identificam nessas sequências está de acordo com o que Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam sobre uma sequência pictórica. Os referidos autores asseveram que “Na análise de uma sequência pictórica identificam regularidades e descrevem características locais e globais das figuras que a compõem” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 40).

No que tange à categoria S5, que classifica as respostas em os alunos utilizaram a contagem para descobrir o termo distante da sequência, é possível afirmar que todos os oito alunos utilizaram dessa estratégia para responder as questões Q1b, Q4b e Q7. As imagens não evidenciam essa estratégia, por isso apresentamos aqui apenas os fragmentos das entrevistas fornecidas pelos alunos enquanto resolviam as questões Q1b, Q4b e Q7 do instrumento diagnóstico. Os fragmentos são apresentados nos Extratos 4.10, 4.11 e 4.12.

Extrato 4.10 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Abel

PESQUISADORA: POR QUE VOCÊ PENSOU QUE É A CARINHA ABEL?
ABEL: PORQUE TEM TRÊS RAIOS, TRÊS CORAÇÕES E SÓ TEM DUAS CARINHAS. E O CORAÇÃO É O PRIMEIRO, ESSE É O SEGUNDO (REFERINDO-SE AO RAIO) E O TERCEIRO (APONTANDO PARA A CARINHA). [...] AQUI TEM TRÊS CORAÇÕES, TRÊS RAIOS E SÓ TEM DUAS CARINHAS, ENTÃO EU VOU FAZER A TERCEIRA PARA PODER COMPLETAR AQUI.

Extrato 4.11 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Amália

PESQUISADORA: CONTINUANDO ASSIM A SEQUÊNCIA, QUAL VAI SER O 11º TERMO DA SEQUÊNCIA?
AMÁLIA: AQUI TEM QUATRO (APONTANDO PARA OS QUADRADOS DA PARTE HORIZONTAL DA FIGURA DA SEQUÊNCIA) E É A QUARTA POSIÇÃO. ENTÃO VAI SER CINCO (CONTA NOVAMENTE OS QUADRADOS DA PARTE HORIZONTAL DA FIGURA DA QUARTA POSIÇÃO). AQUI É A QUARTA POSIÇÃO, A QUINTA POSIÇÃO VAI SER COM SEIS E CINCO AQUI (APONTANDO PARA OS QUADRADOS DA PARTE VERTICAL DA FIGURA). DEPOIS VAI SER COM SETE E SEIS AQUI E VAI SER A SEXTA DA SEQUÊNCIA.
A ALUNA PENSA UM POUCO E PEDE.
AMÁLIA: EU POSSO FAZER A CONTA NO PAPEL?
PESQUISADORA: PODE! (ENTREGA O PAPEL)
AMÁLIA: (ENQUANTO PENSA ELA VERBALIZA) A CINCO VAI SER SEIS, VAI SER SETE, VAI SER OITO, NOVE, DEZ, ONZE, [...] ENTÃO QUANDO AQUI FOR DOZE (APONTANDO PARA OS QUADRADOS DA PARTE HORIZONTAL DE UMA DAS FIGURAS DA SEQUÊNCIA), AQUI VAI SER ONZE (APONTANDO PARA OS QUADRADOS DA PARTE VERTICAL DA FIGURA).
AGORA ELA FALA COM CERTEZA SOBRE O QUE PENSOU.
AMÁLIA: EU ACHO QUE AQUI SERIA ONZE (APONTANDO PARA OS QUADRADOS DA PARTE VERTICAL DA FIGURA) E AQUI SERIA DOZE (APONTANDO PARA OS QUADRADOS DA PARTE HORIZONTAL DA FIGURA).

Extrato 4.12 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Beto

PESQUISADORA: HUM! EU VI QUE VOCÊ ESTAVA FAZENDO CONTA! E COMO FOI QUE VOCÊ PREENCHEU AÍ, BETO?
BETO: EU VI QUE TÁ PULANDO DE TRÊS EM TRÊS. AÍ EU CONTINUEI DE TRÊS EM TRÊS.

Nos trechos das entrevistas fica evidente o processo de contagem utilizado pelos alunos. Em relação às questões Q1b e Q4b, apesar delas terem o objetivo de identificar se os alunos conseguem prever termos distantes e observar se utilizam alguma forma que leve à resposta de maneira mais simples, observamos a partir das respostas que eles preferem usar a contagem. Ficou claro também que os alunos identificam regularidades na sequência, mas não formalizam a ideia. No que diz respeito à Q7, já esperávamos que eles fossem adicionar sucessivas parcelas de três para encontrar os elementos faltantes. Nesse caso, fica evidente que os alunos ainda utilizam de um raciocínio aritmético (KIERAN, 1995).

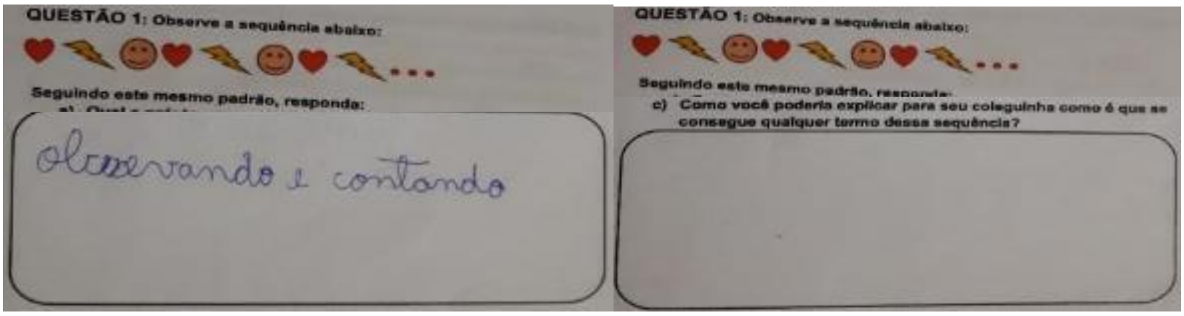
No que tange a categoria S6[12] e S7[13], que identifica se o aluno não consegue generalizar ou se generaliza, mas não consegue prever termo distante, respectivamente, em relação à Q1 e mais especificamente à Q1c identificamos características importantes do ponto de vista do pensamento algébrico. Não menos importante foi também o que observamos em relação à Q4 e com ênfase na Q4c.

Entre os oitos alunos, que responderam a Q1, dois deles deixaram o item (c) em branco, um deles afirmou que não sabia se seria possível identificar qualquer termo da sequência, outro afirmou que não havia jeito de identificar qualquer que fosse o termo, os demais apresentaram respostas baseadas na contagem e observação. No que se refere à Q4, observamos que as respostas já mudaram um pouco de configuração. No geral, em relação à Q4c, os alunos afirmaram poder saber a quantidade de quadradinhos de uma figura qualquer. Ainda assim, três deles disseram que é com base na contagem, dois disseram que depende do valor ou posição, outro afirmou que só continuando a sequência e dois deles afirmaram que é possível saber quantos quadrados tem um termo qualquer, no entanto não esclarecem como isso é possível.

O que evidencia essas respostas não é tanto os registros escritos desses alunos, mas sim os comentários que eles tecem a respeito das indagações feitas sobre a possibilidade de identificar um termo qualquer da sequência. Esses comentários foram retirados de trechos das entrevistas concedidas por esses alunos na decorrência da aplicação do instrumento diagnóstico. A fim de compreender como são classificadas as respostas dos alunos em relação à S6 e S7, as Figuras 4.12 e 4.13 exemplificam as respostas dadas pelos alunos nas questões Q1c e Q4c.

Figura 4.12 – Resposta que o aluno não generaliza

[12] As categorias S6 e S7 se restringem apenas à análise das questões 1 e 4. A Q7 não foi incluída devido ao fato de não exigir do aluno que demonstrasse um pensamento generalista.
[13] Decidimos discutir as respostas que se classificam nessas duas categorias, por entendermos que na ocorrência de uma, a outra não ocorre. Além disso, fica mais fácil discutir sobre as duas quando tratadas em conjunto.



Fonte: Protocolos dos alunos Beto e Antônio, respectivamente.

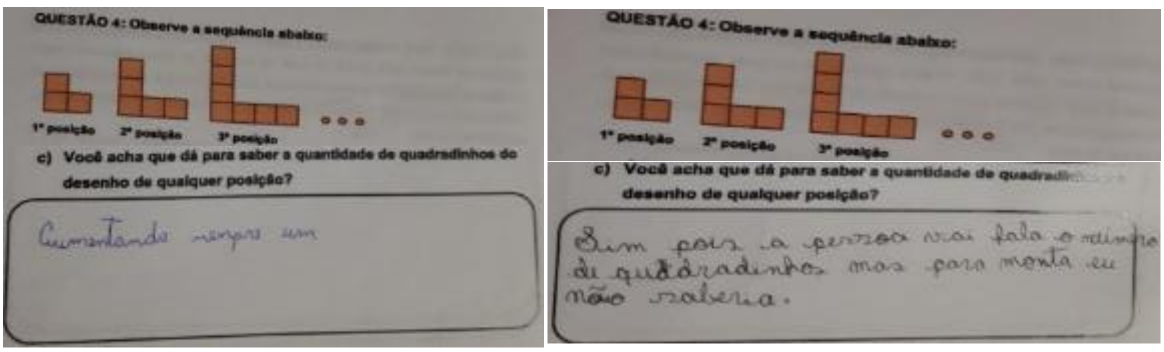
A fim de compreendermos como os alunos concebem suas respostas, as classificamos na categoria daquelas em que os alunos não generalizam uma regra (S6), a seguir apresentamos o trecho da entrevista com o aluno Antônio no momento em que ele respondia a Q1c.

Extrato 4.13 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Antônio

PESQUISADORA: COMO É QUE VOCÊ IA DIZER PARA SEU COLEGUINHA COMO ENCONTRAR UM TERMO BEM DISTANTE DESSA SEQUÊNCIA? É POSSÍVEL SABER? EXISTE UM JEITO DE SABER? E SE FOSSE, POR EXEMPLO A FIGURA DE NÚMERO CEM SERÁ QUE TERIA COMO SABER QUAL É?
ANTÔNIO: PRA SABER... CONTANDO?
PESQUISADORA: COMO ASSIM CONTANDO? EXPLICA PARA A TIA!
ANTÔNIO: TIPO ASSIM, ELE VAI CONTANDO, CONTANDO, CONTANDO (APONTANDO PARA CADA UMA DAS FIGURAS DA SEQUÊNCIA), AÍ QUANDO ELE VÊ A FIGURA ELE CONTA, AÍ QUANDO PARAR NO NÚMERO CEM ELE VAI SABER A FIGURA.

Em relação à categoria que classifica as respostas daqueles alunos que conseguem chegar a uma generalização (S7), a Figura 3.13 apresenta os extratos dos protocolos de dois alunos que responderam a Q4c e que tiveram suas respostas classificadas nessa categoria.

Figura 4.13 – Resposta que o aluno generaliza, mas não consegue prever termos distantes



Fonte: Protocolos das alunas Amália e Bete, respectivamente.

Para que seja melhor compreendidas as respostas apresentadas pelos alunos na Figura 4.13, escolhemos o trecho da entrevista com a aluna Amália que respondeu a Q4c e que conseguiu generalizar, mas não consegue prever termos distantes. O trecho da entrevista é apresentado pelo Extrato 4.14.

Extrato 4.14 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Amália

PESQUISADORA: COMO FOI QUE VOCÊ PENSOU QUE AQUI (APONTANDO PARA OS QUADRADOS DA PARTE HORIZONTAL DA FIGURA DA SEQUÊNCIA) TEM QUE TER DOZE E AQUI (APONTANDO PARA OS QUADRADOS DA PARTE VERTICAL DA FIGURA DA SEQUÊNCIA) TEM QUE TER ONZE?
AMÁLIA: OLHANDO AQUI, AQUI (PARTE HORIZONTAL DA FIGURA) TEM CINCO, MAS É A QUARTA POSIÇÃO E AQUI (PARTE VERTICAL DA FIGURA) TEM QUATRO. ENTÃO AQUI (PARTE VERTICAL DA FIGURA), É TIPO O NÚMERO QUE DÁ A POSIÇÃO E AQUI (PARTE HORIZONTAL DA FIGURA) TEM UMA A MAIS.
PESQUISADORA: AH! ENTENDI! E SE FOSSE PARA SABER UMA POSIÇÃO BEM DISTANTE, POR EXEMPLO, A POSIÇÃO DE NÚMERO CINQUENTA, TERIA COMO SABER A QUANTIDADE DE QUADRADINHOS QUE ESSA FIGURA TEM? COMO É QUE VOCÊ IA DIZER QUADRADINHOS VAI TER?
AMÁLIA: CONTANDO OS QUADRADINHOS! SOMANDO O DE BAIXO (REFERINDO-SE AOS QUADRADOS DA PARTE HORIZONTAL DA FIGURA) COM O DE CIMA (REFERINDO-SE AOS QUADRADOS DA PARTE VERTICAL DA FIGURA).
PESQUISADORA: HUM! E COMO É QUE EU VOU SABER, ASSIM, RÁPIDO, QUANTOS QUADRADINHOS VAI TER A FIGURA DA POSIÇÃO CINQUENTA?
AMÁLIA: FAZENDO UMA CONTA DO DE BAIXO COM O DE CIMA FICA MAIS RÁPIDO DO QUE CONTANDO UM A UM!

Em relação às respostas dadas pelos alunos referentes à categoria S6, as imagens não fazem muitas referências ao extrato da entrevista que é mostrado no texto. O que ocorreu com a resposta do aluno Abel, por exemplo, a imagem não tem registro nenhum quanto à resposta dada por ele, no entanto até desistir de escrever uma resposta o aluno fez algumas tentativas que o levaram a falar o que foi mostrado no Extrato 4.13.

No caso das respostas dadas pelas alunas e que fazem referência à categoria S7, ocorre de maneira análoga à que ocorreu com as respostas da referentes à S6. No entanto, o que Amália registra como resposta não evidencia o seu pensamento generalista. Observando a sua resposta é possível compreender que a aluna consegue identificar uma regra para encontrar qualquer elemento da sequência. O que a aluna faz é expressar com suas palavras essa regra, o que está de acordo com Kaput (1999), quando afirma que o aluno deve ser capaz de generalizar da forma mais apropriada possível de acordo com a sua idade.

Até aqui apresentamos as características mais marcantes dos nossos dados no que diz respeito ao estudo das sequências com ênfase no reconhecimento de padrões ou regularidades. A próxima seção traz uma análise sobre os principais aspectos percebidos nos nossos dados a respeito da equivalência em equações, sobretudo daquelas apresentadas em balanças de dois pratos. A análise da próxima seção segue a mesma organização desta.

4.3 Análise das respostas relacionadas à equivalência

Nesta seção apresentamos a análise de três questões do instrumento diagnóstico Q2, Q5 e Q9, que versam sobre a equivalência em equações, sendo que são todas icônicas e apresentadas na balança de dois pratos. Como foi apresentado no capítulo dos Procedimentos Metodológicos, os três problemas relacionados a equações também fazem uma menção sutil a sistemas de equações de 1º grau e funções lineares.

Seguindo o mesmo padrão da análise das questões de sequência, na análise das questões Q2, Q5 e Q9, será feita considerando três enfoques: (i) ao tipo de registro; (ii) ao acerto; e (iii) ao raciocínio quanto ao uso das relações de equivalência em equações. Em relação aos três enfoques analisamos as tendências e características para cada ano escolar considerando também os dois ambientes de aplicação (P&L e MM). Além disso, analisamos a influência do uso dos dois tipos de materiais no que concerne à aplicação do instrumento diagnóstico.

4.3.1 Análise das resoluções das questões de equivalência em relação ao tipo de registro

A análise dessa seção é referente aos tipos de registros utilizados pelos alunos para responder ao instrumento diagnóstico tanto no ambiente P&L quanto no MM. Além disso, serão analisadas também as influências dos dois tipos de materiais para esses tipos de questões. Para tanto os dados estão apresentados na Tabela 4.5 (extrato da Tabela 4.1) de acordo com as categorias apresentadas no Quadro 4.1

Tabela 4.5 – Registros de cada item das questões de equivalência classificados por categoria e por tipo de ambiente

Registros de cada item das questões de equivalência classificados por categoria e por tipo de ambiente						
Tipo de ambiente	**Ano Escolar**	**Aluno**	**Questões**			
			Q2a	**Q2b**	**Q5**	**Q9**
P&L	4º	Abel	C4	C4	C4	C1
		Antônio	C2	C2	C3	C3
	5º	Bento	C2	C2	C4	C4
		Beto	C1	C1	C3	C3
MM	4º	Amália	C3	C3	C3	C2
		Ana	C2	C2	C4	C4
	5º	Bete	C4	C4	C3	C3
		Bia	C2	C2	C4	C4

Fonte: Dados da pesquisa

Observando os dados da Tabela 4.5 identificamos que os alunos não seguiram um padrão para os registros, eles utilizaram formas variadas para registrar suas respostas, o que nos levou a observar a ocorrência de todas as categorias que organizamos no Quadro 4.1. Esse resultado está de acordo com os encontrados por Lautert e Spinillo (1999), os quais afirmam que os alunos utilizam formas variadas para comunicar suas respostas, sejam elas por meio de palavras, números, figuras ou ícones.

Se por um lado não houve um padrão nas respostas apresentadas pelos alunos, por outro lado os alunos lançaram mão dos mesmos registros na Q2a e Q2b, ou seja, todos eles registraram do mesmo modo. Notamos ainda que os alunos que responderam usando o ambiente P&L foram os que mais diversificaram nas respostas. Foram esses alunos que usaram todos os tipos de registros categorizados na Tabela 4.1.

De acordo com a bibliografia consultada, os alunos, em comparação com os matemáticos, utilizam formas diversificadas para comunicar suas respostas (BOYER, 1974; EVES, 2004) sejam elas apenas com palavras, com palavras e símbolos (números, figuras, ícones) ou ainda, apenas com símbolos. A forma diversificada de apresentar suas respostas de acordo com Blanton e Kaput (2005); Ponte, Branco e Matos (2009), representa também a forma como o aluno compreende e como ele se sente mais confortável para comunicar as suas ideias.

4.3.2 Análise das resoluções das questões de equivalência em relação ao acerto

Nesta seção analisamos as respostas dos alunos no que se refere ao acerto nas questões relacionadas à equivalência em equações. É importante ressaltar que os alunos que responderam no ambiente MM tiveram a chance de fazer três tentativas para que pudesse registrar a resposta da Q2 e, ao final, todos acertaram. Contudo, para efeito de análise apresentamos apenas a primeira tentativa respondida por eles. As questões Q5 e Q9 tinham uma forte relação de dependência com a Q2, pois a resposta para elas dependia da resposta da Q2. Assim sendo, consideramos a Q9 como correta em duas situações distintas: (a) quando o aluno registrava a resposta correta, como foi o caso de Bento; (b) quando o aluno registrava a resposta errada, mas que estava de acordo com a resposta dada por ele na Q2, como foi o caso de Abel e Beto.

Em seguida apresentamos os dados na Tabela 4.6 que nos traz os resultados que evidenciam as tendências em relação ao acerto na Q2a, Q2b, Q5 e Q9 do instrumento diagnóstico nos dois ambientes (P&L e MM).

Tabela 4.6 – Desempenho dos alunos nos itens das questões de Equivalência

Desempenho dos alunos nos itens das questões de Equivalência						
Tipo de ambiente	**Ano Escolar**	**Aluno**	**Questões**			
			Q2a	**Q2b**	**Q5**	**Q9**
P&L	4º	Abel	A	E	A	A
		Antônio	E	E	E	E
	5º	Bento	A	A	A	A
		Beto	E	E	A	A
MM	4º	Amália	E	E	A	A
		Ana	E	E	A	A
	5º	Bete	E	E	A	A
		Bia	E	E	A	A

Fonte: Dados da pesquisa

Legenda:

(verde)	Acertou
(laranja)	Errou
(amarelo)	Acertou de acordo com a resposta da Q2

Os dados da Tabela 4.6 nos revelam que a quantidade de erros (17 de 32) foi maior que a quantidade de acertos (15 de 32), no entanto, vimos algumas tendências. Em linhas gerais, apesar de alunos do 4º e do 5º ano terem aptidão para estudarem equações (PORTO, 2018), de acordo com os resultados encontrados neste estudo, apesar da amostra ser pequena, é possível afirmar que equações, mesmo na forma de balança de dois pratos, constituem problemas difíceis para alunos do 4º e 5º ano da educação básica.

A diferença mais notável dos dados dessa tabela é o total de erros dos alunos que responderam no ambiente MM no que tange à Q2. O fato mais marcante foi de todos os alunos nesse ambiente errarem a Q2 na primeira de três tentativas, ao passo que no ambiente P&L tivemos dois acertos na Q2a e um acerto na Q2b. No entanto, os resultados foram diferentes nas questões Q5 e Q9, sendo que os alunos que responderam no ambiente MM acertaram todas. Pelo fato de terem três tentativas para a Q2a e Q2b todos eles acertaram essas o que acarretou acerto nas demais questões (Q5 e Q9), o que podemos afirmar que o MM contribui para uma melhor compreensão de situações de equações levando-os a acertarem e usar as informações de uma questão para as demais (THOMPSON, 1995). Todavia, o resultado para o ambiente P&L é demasiado diferente.

Para o leitor algumas informações contidas na Tabela 4.6 podem parecer contraditórias, em especial quando ela apresenta dois resultados de dois alunos (Abel e Beto) que erraram a Q2 e acertaram a Q5 e Q9. O fato é que esses alunos, apesar de terem errado esses itens, eles tomaram as respostas dadas na Q2 e, as utilizaram corretamente na Q5 e Q9, o que nos levou a considerar as respostas como corretas do ponto de vista do raciocínio utilizado[14]. O que nos leva a entender, de acordo com Cirino e Oliveira (2011), que esses alunos conseguem entender a relação de igualdade e resolvem essa igualdade mesmo com números desconhecidos. Esse fato também ocorreu com os alunos que responderam no MM, no entanto, todos eles utilizaram as respostas que encontraram, por meio das tentativas com a balança, e acertaram a Q5 e Q9. Isso mais uma vez reforça o que Cirino e Oliveira (2011) abordam sobre a compreensão da equivalência e o que Thompson (1995) afirma a respeito do uso

[14] A análise das resoluções das questões que considera o ponto de vista do raciocínio dos alunos será feita na próxima subseção. Por isso, apenas mencionamos e não discutiremos o acerto sobre esse enfoque.

do material concreto como algo que possui um grande potencial para desenvolver a compreensão da equivalência e para o ensino das equações.

4.3.3 Análise das resoluções das questões de equivalência em relação ao raciocínio de compreensão da equivalência e uso de suas propriedades

Esta seção traz para a discussão elementos marcantes no que tange às tendências e características observadas nas resoluções dos alunos no que se refere às questões de equivalência. A seção será dividida em duas subseções que tem a finalidade de discutir (i) a classificação das respostas dos alunos de acordo com categorias criadas; (ii) a discussão de cada uma das categorias que traz em seu bojo os extratos dos protocolos e das entrevistas dos alunos mostrando as principais evidências em torno do que foi discutido a respeito da equivalência.

Além disso, procuramos discutir também as principais evidências e diferenças encontradas entre a aplicação do instrumento diagnóstico nos dois ambientes, quais sejam P&L e MM. Essas diferenças são importantes para entendermos como os alunos reagem e quais as suas estratégias diante de uma mesma situação em diferentes ambientes.

4.3.3.1 Visão geral das respostas por categoria de análise

Nesta seção discutiremos as resoluções dos alunos e para tanto criamos algumas categorias de análise a partir do que os alunos apresentaram como respostas, tanto no registro escrito quanto na fala, a partir das gravações. Organizamos as categorias no Quadro 4.3 e, depois apresentamos na Tabela 4.7 a classificação das respostas dos alunos a partir dessas categorias.

As categorias que organizamos surgiram das respostas dos alunos, mas também foram criadas a partir da bibliografia consultada (MERLINI; MAGINA; TEIXEIRA, 2018; CIRINO; OLIVEIRA; 2011; LINS; GIMENEZ, 1997) que nos ajudou a compreender como se faz o entendimento da equivalência em alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim sendo, o Quadro 4.3 traz as categorias para análise das questões relacionadas à equivalência.

Quadro 4.3 - Categorias relativas ao raciocínio de compreensão da equivalência

Categoria	Nome da Categoria
E1	Não compreende a equivalência
E2	Compreende a equivalência
E3	Relaciona elementos dos membros da equação
E4	Correlaciona os resultados das questões Q2, Q5 e Q9
E5	Utiliza tentativa e erro
E6[15]	Identifica solução única para o sistema (SPD[16])
E7	Identifica mais de uma solução para o sistema (SPI[17])

Fonte: Elaborado pela autora

As categorias contidas no Quadro 4.3 serão devidamente apresentadas a partir dos protocolos e das falas tão logo apresentarmos os dados da Tabela 4.7. Cabe ressaltar que, por vezes, a resolução de uma questão foi classificada em mais de uma categoria. Isso só foi possível a partir das evidências que surgiram através das videogravações.

Tabela 4.7 – Raciocínio de compreensão da equivalência de acordo com a classificação

Raciocínio de compreensão da equivalência													
Tipo de ambiente	Ano Escolar	Aluno	Questões										
			Q2		Q5				Q9				
P&L	4º	Abel	E2	E3	E2	E3	E4	E6	E2	E3	E4	E6	
		Antônio	E1		E1				E1				
	5º	Bento	E2	E3	E2	E3	E4	E7	E2	E3	E4	E7	
		Beto	E1		E2	E3	E4	E6	E2	E3	E4	E7	
MM	4º	Amália	E5	E2	E2	E3	E4	E6	E5	E2	E3	E4	E7
		Ana	E5	E2	E2	E3	E4	E7	E2	E3	E4	E7	
	5º	Bete	E5	E1	E5	E1	E7		E5	E1	E7		
		Bia	E5	E1	E5	E1	E7		E5	E2	E7		

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados da Tabela 4.7 traz resultados interessantes do ponto de vista do raciocínio de compreensão da equivalência por parte dos alunos e, alguns pontos devem ser destacados. Na análise sobre o acerto já notamos uma diferença entre os alunos que responderam no ambiente P&L dos que responderam no MM e, essa diferença foi confirmada a partir dos dados

15 As categorias E6 e E7 são utilizadas apenas para classificar as resoluções apresentadas nas questões Q5 e Q9.

16 Para designar um Sistema Possível e Determinado (GUELLI; IEZZI; DOLCE, 1980), usualmente é utilizada a abreviação SPD.

17 A mesma coisa ocorre para designar um Sistema Possível e Indeterminado (GUELLI; IEZZI; DOLCE, 1980), usa-se a abreviação SPI.

apresentados na Tabela 4.7. Foi a partir dessa amostra restrita que analisamos os dados nos fizeram perceber a influência positiva e negativa sobre a aplicação dos dois tipos de ambientes.

No geral, de acordo com os dados, notamos que, a partir das resoluções apresentadas pelos alunos tanto num ambiente quanto no outro uma progressão, eles compreenderam a relação de equivalência. Dos oito alunos que responderam ao instrumento, apenas dois não conseguiram compreender a equivalência nas três questões. Esse resultado foi igual para os dois tipos de ambiente (P&L e MM), sendo que a diferença entre os resultados foi que no ambiente P&L, se o aluno não compreendia a equivalência, ele não teria condições de apresentar uma resposta coerente para as questões. O que não ocorre no MM, pois se o aluno não compreender a equivalência de imediato, nesse ambiente ele tem a possibilidade de acertar simplesmente pelo fato de poder testar a resposta na própria balança. Nesse sentido, cabe salientar que, o fato de as questões estarem correlacionas nos possibilitou acompanhar o progresso dos alunos quanto ao raciocínio.

Dos quatro alunos que responderam no P&L dois deles compreenderam a equivalência desde a Q2 e só progrediram no raciocínio da Q5 e Q9. Além disso, um deles que não chegou a compreender a equivalência na Q2 passou a compreender na Q5 e Q9. Nesse sentido, houve um progresso, pois a partir da Q5 os alunos conseguem avançar nos resultados correlacionando os dados de uma questão com a outra até a identificação de uma ou mais soluções para os sistemas de equações. Desse modo, no que tange à compreensão da equivalência, de acordo com Porto (2018) esses alunos, utilizam as propriedades da equivalência com facilidade. Além disso, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009) esses alunos já não concebem a igualdade apenas como resultado, o que vem ao encontro do que a BNCC (BRASIL, 2017) traz na Unidade Temática da Álgebra.

No que diz respeito aos alunos que resolveram no MM, também notamos um progresso significativo para o raciocínio de compreensão da equivalência. Nesse sentido, dos quatro alunos que responderam nesse ambiente, dois deles compreendem a equivalência desde a Q2. O fato de usar a tentativa e erro na balança os levou a encontrar o valor das incógnitas presentes na Q2 e correlacionaram esses resultados com a Q5 e Q9 sem ter que ficar presos ao material manipulativo como apoio para encontrar as respostas. Assim, de acordo com Thompson (1995) o material manipulativo auxilia na compreensão da equivalência e na resolução de equações e sistemas de equações. O uso desse tipo de material foi fundamental para os alunos perceberem que na presença de um sistema de equações, como foi o caso da Q5 e Q9, existiam várias possibilidades de solução, o que levou três alunos a perceberem isso na Q5 e os quatro alunos na Q9.

É necessário salientar também as influências positivas de cada um dos ambientes. Enquanto que no MM os alunos se apoiavam muito na estratégia da tentativa e erro, no P&L os alunos não podiam testar possibilidades e por isso utilizavam estratégias mais sofisticadas para encontrar as respostas. Nesse sentido, o material manipulativo leva o aluno a testar suas hipóteses e, consequentemente a acertar mais. Todavia, corre o risco de ficarem presos na possibilidade de testar e conseguir relacionar os elementos presentes no problema. No que diz respeito ao P&L, pelo fato de não terem como testar as hipóteses, os alunos tendem a errar mais e não conseguem, por exemplo, identificar as diferentes possibilidades de resposta de um mesmo sistema linear. No entanto, tendem a desenvolver o raciocínio e fazer uso das propriedades da equivalência com mais naturalidade.

A partir desses resultados, podemos inferir que ainda que os alunos tenham condições de resolver problemas que envolvem a equivalência, sobretudo que envolvam equações (PORTO, 2018), estes problemas ainda se configuram como difíceis para esses anos escolares (MERLINI; MAGINA; TEIXEIRA, 2018). Por isso, é preciso cautela ao propor problemas desse tipo para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim sendo, é razoável supor que o uso de materiais manipuláveis seja um suporte para a introdução da equivalência nessa etapa da escolaridade. No entanto, é preciso fazer o uso consciente desse tipo de material, uma vez que ele tem limitações se pensarmos em números inteiros negativos (LINS; GIMENEZ, 1997).

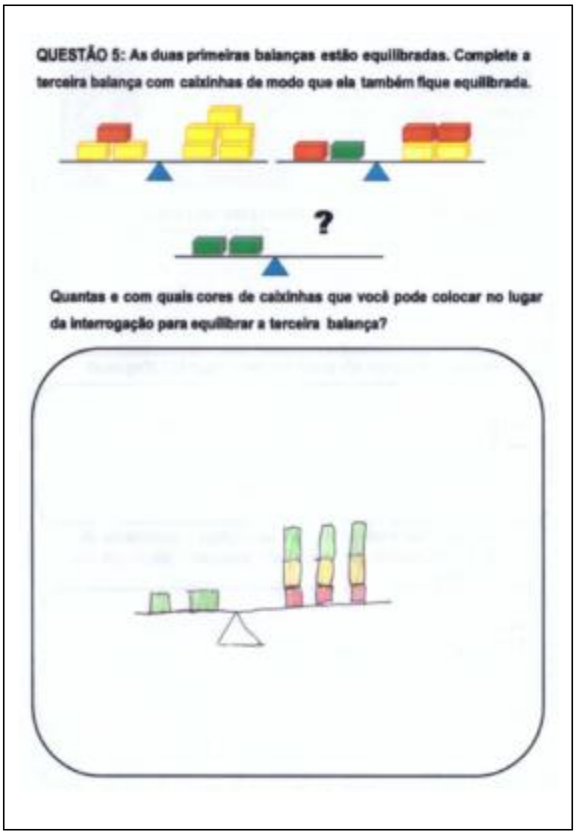
4.3.3.1 As resoluções dos alunos do ponto de vista das categorias

A seção anterior trouxe uma visão geral do que os alunos apresentaram como respostas que classificamos em sete categorias. A partir dessa classificação distribuímos os dados na Tabela 4.7 e conseguimos identificar as tendências das respostas apresentadas no que concerne aos ambientes P&L e MM. Desse modo, foi possível identificarmos as diferenças entre a aplicação do instrumento diagnóstico nos referidos ambientes.

Nessa seção procuramos evidenciar o que cada uma das categorias apresentadas no Quadro 4.3 aponta a partir dos extratos dos protocolos e das falas concedidas nas entrevistas pelos alunos. As evidências e alguns dos raciocínios mais notáveis dos alunos que só foram possíveis de identificar a partir das entrevistas feitas com eles durante a aplicação do teste, uma vez que nem sempre os alunos conseguiram registrar seu raciocínio no papel.

A categoria "Não compreende a equivalência" (E1) pode ser encontrada nas respostas dadas das três questões, porém foram regredindo de quatro repostas na Q2 para duas respostas na Q9. Notamos que houve um progresso da Q2 para a Q9 por parte dos alunos em relação à compreensão da equivalência. A Figura 4.14 traz o extrato do protocolo do aluno Antônio, com a resposta que se classifica nessa categoria.

Figura 4.14 – Resposta do aluno que respondeu no ambiente P&L que não compreende a equivalência

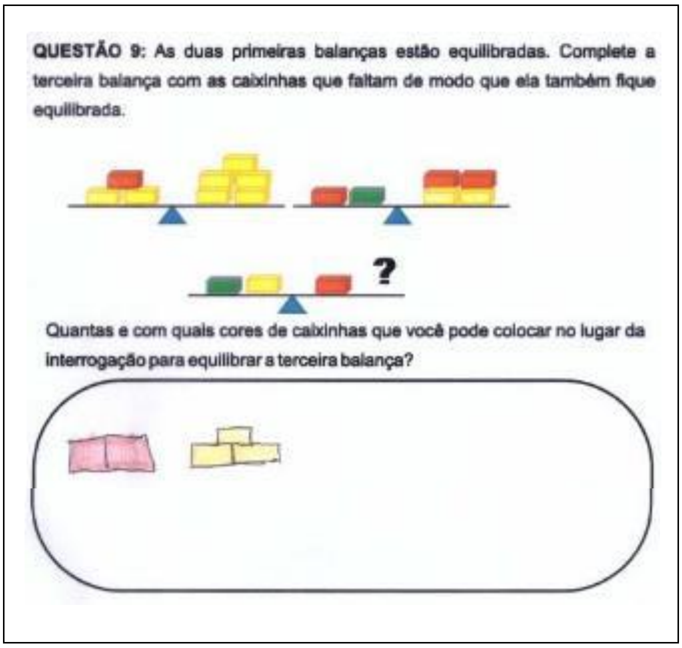


Fonte: Extrato do protocolo do aluno Antônio.

O aluno Antônio que respondeu o instrumento diagnóstico no ambiente P&L não compreende a equivalência, pois ele desenha nove caixas sendo três de cada cor. Isso evidencia que o aluno não consegue compreender que cada caixa tem um peso[18] diferente.

Contudo, essa não compreensão também pode ser encontrada no ambiente MM, como foi apresentado o extrato do protocolo da aluna Bete na Figura 4.15 e o extrato de sua respectiva fala.

Figura 4.15 - Resposta da aluna que respondeu no ambiente MM que não compreende a equivalência



Fonte: Extrato do protocolo da aluna Bete.

Apesar da resposta apresentada no protocolo estar correta, no extrato da sua entrevista mostra que ela não compreendeu. A aluna só conseguiu acertar a resposta do problema porque ela respondeu o instrumento diagnóstico no ambiente MM, o qual a possibilitou testar as respostas e, consequentemente, acertá-la. O Extrato 4.15 evidencia o raciocínio utilizado pela aluna.

Extrato 4.16 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Bete

[18] A palavra “peso” foi empregada não no seu sentido original oriundo da Física, todavia, foi empregada a partir do seu uso para indicar a massa de objetos, assim como os alunos estão acostumados a usar. Como as equações são apresentadas na balança de dois pratos, é comum encontra-las em feiras livres onde os feirantes as usam para pesar produtos e vender por quilograma.

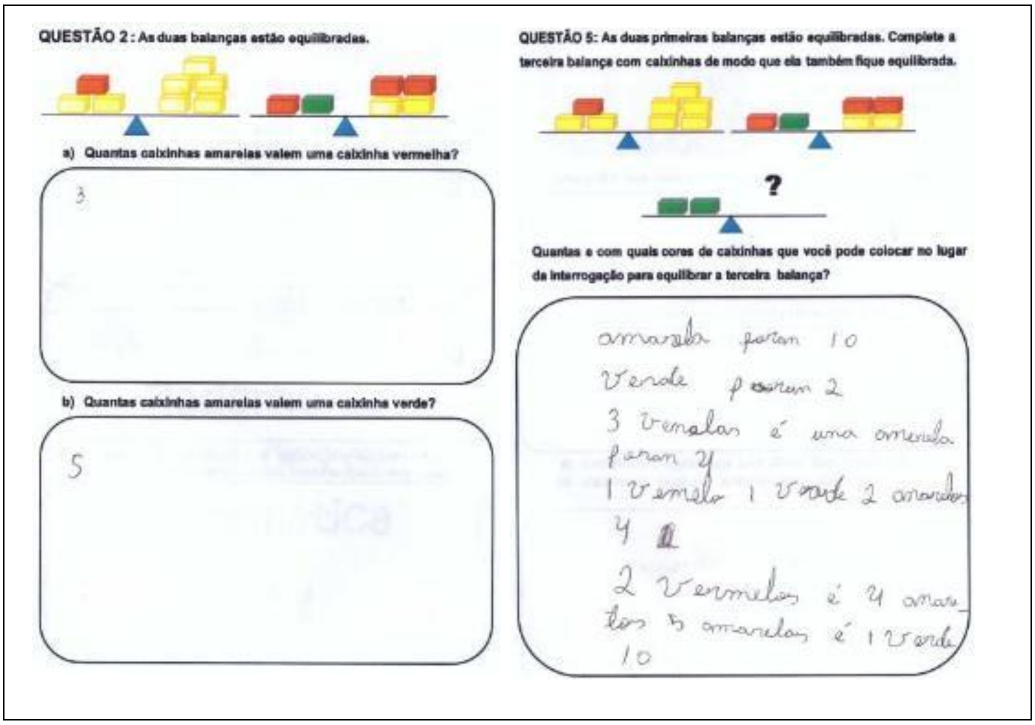
PESQUISADORA: QUANTAS CAIXINHAS E DE QUAIS CORES VOCÊ VAI UTILIZAR PARA EQUILIBRAR ESSA BALANÇA?
BETE: ACHO QUE SE EU POR DUAS AMARELAS.
PESQUISADORA: E AÍ BETE?
BETE: NÃO EQUILIBROU!
DEPOIS DE FAZER VÁRIAS TENTATIVAS, BETE CONSEGUIU EQUILIBRAR A BALANÇA COLOCANDO TRÊS CAIXAS AMARELAS JUNTO COM A VERMELHA.
PESQUISADORA: E SERÁ POR QUE FORAM TRÊS AMARELAS?
BETE: ACHO QUE É PORQUE O PESO DA VERMELHA É DUAS AMARELAS, E O PESO DA VERDE É DUAS VERMELHAS.
PESQUISADORA: ME EXPLICA DE NOVO!
BETE: NÃO SEI! EU FIZ ASSIM: COMO O PESO DA VERMELHA É A METADE DO PESO DA VERDE, ENTÃO EU BOTEI UMA VERMELHA! AÍ, ESSAS TRÊS AQUI (REFERINDO-SE ÀS TRÊS CAIXAS AMARELAS) DÁ O PESO DA VERDE.

A partir do Extrato 4.16 do diálogo é possível perceber que a aluna não conseguiu identificar o peso de cada caixa. A resposta apresentada por ela já foi na Q9, isso significa que não houve evolução da Q2 para a Q9. O fato de responder a questão dessa forma e explicar dessa maneira demonstra que a aluna acertou apenas por tentativa e erro e não conseguiu relacionar os pesos das caixas vermelha e verde com o peso da caixa amarela.

Em relação à categoria “Compreende a equivalência” (E2) identificamos que dos oito alunos que participaram da pesquisa, seis deles em algum momento resolvendo as questões Q5 ou Q9, chegam a compreender a equivalência, o que indica um resultado satisfatório. Um dado muito importante que nos chamou a atenção é que, apesar do ambiente P&L não permitir a tentativa e erro como no ambiente MM, tivemos quatro alunos que ao resolver a Q2 quatro alunos já demonstram compreender a equivalência, sendo dois de cada ambiente. Respostas classificadas ainda nessa categoria foram encontradas na Q5 e na Q9, de maneira muito semelhante nos dois ambientes, o que significa que independente do ambiente os alunos conseguiram compreender a equivalência.

De acordo com Merlini, Magina e Teixeira (2018) questões que envolvem equações e sistemas de equações se configuram como difíceis, pois alunos desses anos de ensino ainda não aprenderam formalmente sobre esses conteúdos, por isso usam diversos meios, como tentativa e erro, para encontrar os valores das incógnitas. A Figura 4.16 exemplifica as respostas de dois alunos que se classificam nessa categoria. A imagem traz como exemplo as respostas de um aluno que respondeu no ambiente P&L e de outro que respondeu no MM.

Figura 4.16 - Respostas dos alunos que responderam nos ambientes P&L e MM que compreenderam a equivalência



Fonte: Extratos dos protocolos dos alunos Bento e Ana respectivamente.

A fim de evidenciar que esses alunos de fato compreenderam a equivalência apresentamos os extratos 4.17 e 4.18 que deixam explícito o raciocínio utilizado por cada um deles na hora de responderem as questões Q2 e Q5 que estão exemplificadas na Figura 4.16.

Extrato 4.17 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Bento

PESQUISADORA: A PERGUNTA É "QUANTAS CAIXINHAS AMARELAS VALE UMA VERMELHA?" SILENCIA.
BENTO: TRÊS?
PESQUISADORA: POR QUE VOCÊ PENSOU LOGO QUE É TRÊS?
BENTO: PORQUE AQUI TEM DOIS (REFERINDO ÀS DUAS CAIXAS AMARELAS QUE ESTÃO NO PRATO ESQUERDO DA PRIMEIRA BALANÇA) E AQUI TEM... AÍ TIRANDO DOIS IA FICAR TRÊS (REFERINDO-SE ÀS CAIXINHAS AMARELAS QUE ESTÃO NO PRATO DIREITO DA BALANÇA).
PESQUISADORA: HUM! MUITO BEM.
APÓS UM TEMPO SIGNIFICATIVO DE ESPERA BENTO DIZ A VALOR DA CAIXA VERDE.
BENTO: CINCO?
PESQUISADORA: COMO FOI QUE VOCÊ CHEGOU A ESSA RESPOSTA?
BENTO: É PORQUE AQUI TEM OITO (REFERINDO-SE AO 2º PRATO DA 2ª BALANÇA (À DIREITA NA Q2)) E AQUI (REFERINDO-SE AO 1º PRATO DA 2ª BALANÇA (À DIREITA NA Q2)) DESSE LADO TEM TRÊS CAIXINHAS AMARELAS (SUBSTITUI DIRETO O VALOR NA CAIXA VERMELHA), AÍ PRECISA DE CINCO (REFERINDO-SE À CAIXA VERDE) PRA PODER FICAR OITO.

Extrato 4.18 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Ana

PESQUISADORA: VOU LHE PERGUNTAR O SEGUINTE: QUANTAS CAIXINHAS E DE QUAIS CORES VOCÊ VAI COLOCAR AQUI (REFERINDO-SE AO PRATO VAZIO DA BALANÇA DA Q5) PARA A BALANÇA FICAR EQUILIBRADA?

ANA: AMARELA, DEZ!
PESQUISADORA: POR QUE ANA, QUE SÃO 10 CAIXINHAS AMARELAS?
ENQUANTO ISSO A ALUNA COLOCA NA BALANÇA PARA PODER TESTAR.
ANA: PORQUE UMA CAIXINHA VERDE SÃO CINCO (QUIS DIZER CINCO CAIXINHAS AMARELAS), COMO DUAS CAIXINHAS VERDES SÃO DEZ!

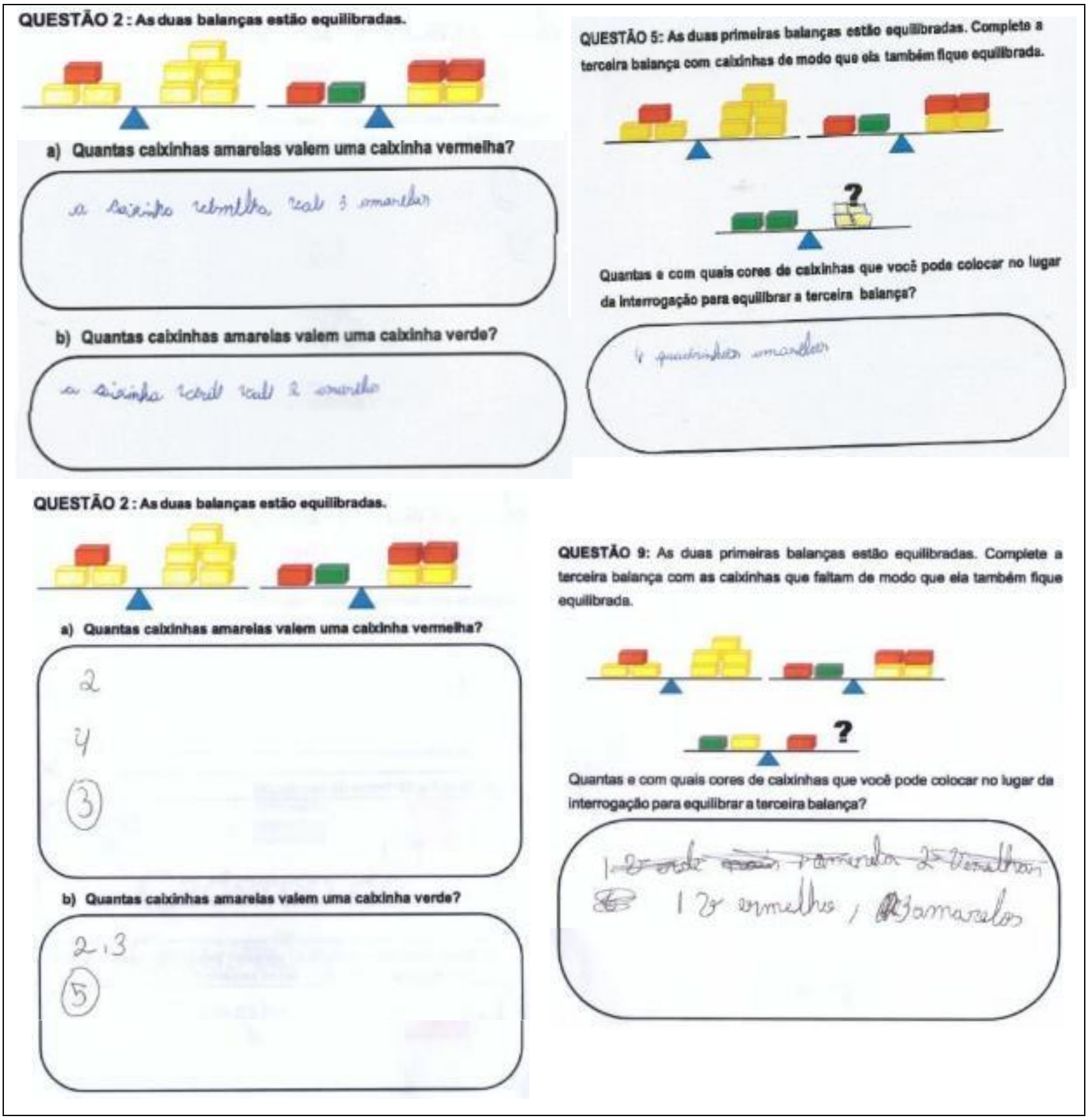
Notamos no diálogo da pesquisadora com o aluno Bento, quando ele resolve a Q2, que ele tanto compreende a equivalência e relaciona os valores presentes nas duas equações, quanto consegue fazer uso de uma de suas propriedades, especificamente a propriedade transitiva. Bento usa, naturalmente, substituições para encontrar o valor da caixa verde. Se colocarmos letras para representar as cores das caixinhas, por exemplo: caixa vermelha m; caixa amarela a; e caixa verde d, seguindo seu raciocínio ele considerou a caixa vermelha como $m = 3a$, e fez apenas uma substituição da seguinte forma $2m + 2a = 2(3a) + 2a = 8a$. Sendo assim, se a equação é dada por $m + d = 2m + 2a$, então, por transitividade, $m + d = 8a$. Esse foi o raciocínio utilizado por Bento para encontrar o valor das incógnitas presentes nas duas equações da Q2.

No diálogo da pesquisadora com a aluna Ana é possível observar que ela, depois de ter descoberto a relação das caixas amarelas com a caixa verde ao solucionar a Q2, utiliza essa informação para resolver a Q5. Assim, a partir dos dois diálogos percebemos que os dois alunos compreendem a equivalência. Nesse sentido, as relações feitas pelos dois alunos, mesmo em ambientes diferentes, estão de acordo com o que Ponte, Branco e Matos (2009) e Lins e Gimenez (1997) afirmam sobre o pensamento algébrico. Assim, os dois alunos conseguem raciocinar (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009) quando relacionam os elementos presentes nas equações e generalizam a partir dessas relações, além disso conseguem "produzir significados" (LINZ; GIMENEZ, 1997) no que concerne à Álgebra. Novamente destacamos que os dois ambientes, tanto P&L quanto MM proporcionam compreensão da equivalência, sendo que o Bento no ambiente P&L trabalha, explicitamente, com a transitividade da equivalência.

Em relação à categoria "Relaciona elementos dos membros da equação" (E3) nela são classificadas as respostas que os alunos conseguem compreender a equivalência (E2) e faz a relação das caixas apresentadas no prato da esquerda com aquelas contidas no prato da direita da mesma balança.

Percebemos, novamente, que não somente alunos que responderam no ambiente P&L são classificados nessa categoria, mas também alunos que responderam no MM. Além disso, as respostas dadas pelos alunos que foram classificadas nessa categoria também são classificadas na categoria “Correlaciona os resultados das questões Q2, Q5 e Q9” (E4). Para que pudéssemos esclarecer e evidenciar as características observadas nas respostas dos alunos que se encaixam nas categorias E3 e E4, a Figura 4.17 traz os extratos dos protocolos de dois alunos que foram assim classificados e que responderam ao instrumento diagnóstico em ambientes diferentes.

Figura 4.17 - Respostas dos alunos que responderam nos ambientes P&L e MM que são classificados nas categorias E3 e E4.



Fonte: Extratos dos protocolos dos alunos Abel (esquerda e direita superior) e Ana (esquerda e direita inferior) respectivamente.

Os extratos dos protocolos da Figura 4.17 apresentam as respostas que classificamos de acordo com as categorias E3 e E4. Sentimos a necessidade apresentar as duas questões, Q2 e Q5, extratos do protocolo de Abel, e as questões Q2 e Q9 retiradas do protocolo de Ana. Analisando os extratos dos protocolos é possível perceber que Abel correlaciona os pesos encontrados das caixinhas da Q2 com os pesos das caixas da Q5 e Ana correlaciona, de modo semelhante, os resultados encontrados na Q2 com Q9 (E4). Além disso, eles relacionam os elementos dos membros das equações (E3). Para que sejam confirmadas tais asseverações, trouxemos os extratos 4.19 e 4.20 das entrevistas com esses alunos que nos possibilitam compreender o raciocínio utilizados por eles no momento que respondem as questões.

Extrato 4.19 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Abel

(NO MOMENTO EM QUE A PESQUISADORA EXPLICAVA A SITUAÇÃO, ABEL JÁ HAVIA A COMPREENDIDO FAZENDO UMA AFIRMAÇÃO)
ABEL: "JÁ PEGUEI!"
PESQUISADORA: QUANTAS CAIXINHAS AMARELAS VALEM UMA CAIXINHA VERMELHA?
ABEL: TÁ! SE AQUI TEM CINCO E AQUI TEM TRÊS... AQUI TEM UMA VERMELHA... ENTÃO SE EU POR... (ENTENDENDO QUE ERA COLOCAR TRÊS AMARELAS NO LUGAR DA VERMELHA) AQUI VALE TRÊS!
LOGO EM SEGUIDA A PESQUISADORA DIRECIONA A PERGUNTA PARA SABER QUANTO VALE A CAIXA VERDE E, DEPOIS DO ALUNO RESPONDER ELA O INDAGA:
PESQUISADORA: POR QUE VOCÊ CHEGOU A ESSA CONCLUSÃO QUE A CAIXINHA VERDE VALE DUAS CAIXINHAS AMARELAS?
ABEL: PORQUE, SE O VERMELHO VALE TRÊS, O VERDE AQUI... SE EU TIVESSE TIRADO O VERMELHO, O VERDE NÃO IA AGUENTAR OS DOIS VERMELHOS, PORQUE O VERMELHO VALE TRÊS CAIXINHAS (SE REFERINDO ÀS TRÊS CAIXINHAS AMARELAS). ENTÃO O VERDE SÓ TÁ DANDO UM APOIO PARA PODER CONSEGUIR ESSAS DUAS CAIXINHAS (SE REFERINDO ÀS DUAS CAIXINHAS AMARELAS QUE ESTÃO NO PRATO DA SEGUNDA BALANÇA) PRA PODER EQUILIBRAR.
PESQUISADORA: ME EXPLICA DE NOVO!
ABEL: SE A VERDE VALE DUAS E O VERMELHO VALE TRÊS, ENTÃO SE O VERMELHO TIVESSE FICADO AQUI (SE REFERINDO AO PRATO QUE TEM DUAS CAIXAS AMARELAS), ESSE LADO IA FICAR MAIS EQUILIBRADO (NO SENTIDO DE FICAR MAIS "PESADO") QUE ESSE.

Chamamos a atenção do leitor para o diálogo da pesquisadora com o aluno Abel, pois as primeiras linhas desse extrato evidenciam o raciocínio de Abel para encontrar o valor da caixa vermelha. Fica evidente que o aluno reconhece a presença de uma incógnita (PORTO, 2018) e reconhece a equivalência compreendendo a igualdade (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009) apresentada na equação $m + 2a = 5a$ com m representando a caixa vermelha e a representando o valor da caixa amarela (que nesse caso não representa uma incógnita). O raciocínio do aluno revelado através do diálogo mostra que esse aluno consegue relacionar os elementos presentes nos membros da primeira equação da Q2, por isso classificamos a resposta dele na E3. E o resultado encontrado por ele, que também é evidenciado no diálogo, é utilizado para responder a Q5, o que mostra que esse aluno correlaciona as questões, o que nos leva a classificar essa resposta na categoria E4.

Agora apresentamos o extrato do diálogo da pesquisadora com a aluna Ana. A fim de explicitarmos apenas os pontos relevantes do raciocínio da aluna, apresentaremos apenas o trecho da entrevista quando a aluna resolve a questão Q9, a primeira solução apresentada por ela.

Extrato 4.20 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Ana

APÓS APRESENTAR A QUESTÃO, COLOCAR AS CAIXAS NA BALANÇA PARA APRESENTÁ-LA, A PESQUISADORA APRESENTA A PERGUNTA PARA ANA.

PESQUISADORA: VOCÊ TEM NUM PRATO DA BALANÇA UMA CAIXINHA VERDE E UMA AMARELA E, NO OUTRO VOCÊ TEM UMA CAIXINHA VERMELHA. AGORA VOCÊ VAI ME DIZER QUANTAS CAIXINHAS E DE QUAIS CORES VOCÊ VAI COLOCAR JUNTO COM A CAIXINHA VERMELHA PARA EQUILIBRAR A BALANÇA? ESPERE UM POUCO! ANTES DE VOCÊ COLOCAR VOCÊ VAI ME DIZER PORQUE VOCÊ ESTÁ PENSANDO EM COLOCAR A CAIXINHA VERMELHA?

ANA: PORQUE ESSA DAQUI (APONTANDO PARA O PRATO QUE CONTINHA A CAIXA VERDE E A AMARELA) VAI DAR CINCO, DÁ SEIS! COM ESSA DAQUI (APONTANDO PARA O PRATO COM AS DUAS CAIXAS VERMELHAS) TRÊS, SEIS!

Apesar de não apresentarmos o extrato da entrevista que evidencia a resposta da aluna para a Q2, bem como as estratégias adotadas por ela para resolvê-la, o extrato de seu protocolo apresentado na Figura 4.17 mostra que a aluna fez três tentativas para encontrar o valor de cada caixa (vermelha e verde). Esse procedimento foi possível pelo fato de estar respondendo ao instrumento diagnóstico no ambiente MM, no entanto queremos chamar a atenção para a relação que a aluna faz entre as caixas amarela e verde de um prato da balança com as duas caixas vermelhas do outro prato. Isso demonstra que ela relaciona os elementos presentes nos dois membros da equação. Nesse sentido, ela compreende a equivalência (E2) quando resolve a equação $6a = 3a + x$, com a indicando a quantidade de caixas amarelas. Por outro lado, essa mesma equação pode ser representada também pela equação $d + a = m + x$, com d representando o valor da caixa verde, m representando o valor da caixa vermelha e, a representa a caixa amarela (que não é uma incógnita para a equação, é um parâmetro). Sendo assim, a partir dos resultados encontrados na Q2, a aluna correlaciona os valores encontrados na Q2 com Q9 (E4) quando, por meio da propriedade transitiva ela resolve a equação $d + a = m + x \Longrightarrow 5a + a = 3a + x \Longrightarrow 6a = 3a + x \Longrightarrow 6a - 3a = 3a - 3a + x \Longrightarrow 3a + x$. Essa resolução só foi possível, porque Ana, ao resolver a Q2, descobriu que $m = 3a$ e $d = 5a$. Nesse caso o valor que cada caixa assume está em função da caixa amarela.

A partir do que nos é revelado pela imagem dos extratos dos protocolos de Ana assim como no extrato de sua entrevista, é razoável supor que essa aluna trabalha com variáveis, parâmetros e incógnitas conseguindo diferenciar uns dos outros (USISKIN, 1995); faz operações aritméticas generalizando essas operações a expressões algébricas (KIERAN, 1995). Nesse sentido, de acordo com Lins e Gimenez (1997) essa aluna realiza cálculos com valores desconhecidos como se fossem conhecidos revelando por meio do seu raciocínio indícios do que os referidos autores concebem como pensamento algébrico.

No que concerne à categoria “Tentativa e erro” (E5), classificamos todas as respostas dos alunos que utilizaram tentativa e erro para resolver os problemas relacionados à equivalência. Cabe salientar dois pontos importantes, sendo o primeiro que as respostas classificadas nessa categoria foram somente os que resolveram ao instrumento diagnóstico no ambiente MM; e segundo que todos os quatro alunos utilizaram essa estratégia. A Figura 4.18 traz o extrato do protocolo de uma aluna que que utiliza tentativa e erro para responder a Q2a, bem como a imagem da balança no momento em que a aluna consegue fazê-la equilibrar encontrando a resposta para o item da referida questão.

Figura 4.18 – Exemplo de resposta que utiliza tentativa e erro

Fonte: Extrato do protocolo da aluna Bia e imagem do momento que ela resolve a questão.

O extrato apresentado na Figura 4.18 mostra que a aluna escreveu na Q2a três números (7, 5 e 3) e circulou o terceiro, enquanto que na Q2b ela escreveu quatro números e circulou o quarto. Esses números foram os valores que a aluna Bia utilizou até chegar à resposta correta. Para saber que a resposta estava correta, a aluna testou cada um desses valores escolhidos por ela na balança de dois pratos confeccionada em madeira. Para compreender melhor o que a aluna fez, o extrato 4.21 da entrevista feita com a aluna enquanto respondia ao teste mostra como foi que ela conseguiu encontrar os valores das caixas vermelha e verde por meio da tentativa e erro.

Extrato 4.21 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Bia

APÓS APRESENTAR A QUESTÃO, COLOCAR AS CAIXAS NA BALANÇA PARA APRESENTÁ-LA, A PESQUISADORA APRESENTA A PERGUNTA PARA BIA.
PESQUISADORA: BIA, QUANTAS CAIXINHAS AMARELAS VALEM UMA CAIXINHA VERMELHA?
A ALUNA DEMORA ATÉ DAR O SEU PRIMEIRO PALPITE.
BIA: SETE?
PESQUISADORA: VOU LHE DAR AS CAIXINHAS E AGORA VOCÊ TESTA.
A ALUNA COLOCA NA BALANÇA E DIZ:
BIA: O PESO DA AMARELA FICOU MAIS PESADO DO QUE O DA VERMELHA!
PESQUISADORA: E AGORA? SETE CAIXINHAS AMARELAS VALEM UMA VERMELHA?
BIA: NÃO!
PESQUISADORA: TEM QUE SER MAIS OU TEM QUE SER MENOS?
BIA: TEM QUE SER MENOS!
PESQUISADORA: ENTÃO, QUANTAS MENOS VOCÊ ACHA?
BIA: CINCO?
PESQUISADORA: ENTÃO, VAMOS TESTAR!
A ALUNA TIRA DUAS CAIXAS DA BALANÇA E OBSERVA.
PESQUISADORA: E AÍ, BIA?
BIA: AINDA NÃO FOI!
A PESQUISADORA DÁ MAIS UMA CHANCE PARA A ALUNA TESTAR.
BIA: TRÊS CAIXAS?
PESQUISADORA: ENTÃO, TIRA MAIS DUAS PARA VER.
A ALUNA TIRA MAIS DUAS CAIXAS DE UM DOS PRATOS DA BALANÇA E OBSERVA.
PESQUISADORA: E AÍ, BIA? EQUILIBROU AGORA?
BIA: EQUILIBROU!

A partir do extrato da Figura 4.21 e do extrato da entrevista é possível afirmarmos que a aluna usou unicamente a estratégia da tentativa e erro para encontrar o valor da caixa vermelha em função da caixa amarela. Nesse sentido, o material manipulativo ajudou por possibilitar o teste das hipóteses levantadas pelos alunos no momento em que resolviam as questões. O trabalho que a aluna teve para encontrar a resposta pode, ingenuamente, ser comparado ao trabalho dos matemáticos para resolver equações de 1º grau há séculos atrás, que utilizavam um método engenhoso que foi chamado de Regra da falsa posição (GARBI, 2010; EVES, 2004). Apesar de parecer fácil, podemos afirmar a partir dos dados dessa pesquisa, que por meio desses testes os alunos compreendem a relação de equivalência (E2); eles conseguem relacionar os elementos presentes nos membros de uma equação (E3); e utilizam com certa naturalidade as propriedades de uma relação de equivalência correlacionando resultados encontrados numa questão com outras (E4). Isso evidencia o que é raciocinar em termos de pensamento algébrico chamado por Ponte, Branco e Matos (2009) como uma das vertentes fundamentais do pensamento algébrico.

Em relação à categoria “Identifica solução única para o sistema” (E6), nesta estão classificadas as respostas que os alunos consideram apenas uma única solução para o sistema de equações apresentado na questão Q5. Esse tipo de resposta apareceu tanto no ambiente P&L quanto no MM, no entanto prevaleceu no ambiente P&L pois, o ambiente MM possibilita aos alunos a opção de testar as suas hipóteses. A Figura 4.19 traz os extratos dos protocolos de dois alunos que resolveram a Q5 entendendo que o sistema apresentado nela apresenta única solução, sendo que eles responderam ao instrumento diagnóstico em ambientes diferentes.

Figura 4.19 - Respostas dos alunos que responderam nos ambientes P&L e MM que identificam o sistema como SPD.

Fonte: Extrato dos protocolos do aluno Abel (superior esquerda) e Amália (superior direita e inferior) respectivamente.

As imagens apresentadas na Figura 4.19 nos traz as respostas de dois alunos que responderam ao instrumento diagnóstico em ambientes diferentes, no entanto, apresentam uma única solução para o sistema apresentado na Q5. A questão Q5 apresenta um sistema possível e determinado (GUELLI; IEZZI; DOLCE, 1980) que são aqueles que não admitem solução única. Para que fique claro como os alunos pensaram para afirmar que existe uma única possibilidade de resposta, os extratos das entrevistas nos trazem detalhes que os extratos dos protocolos não possibilitam entender.

Extrato 4.21 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Abel

APÓS FAZER A LEITURA DA QUESTÃO PARA ABEL A PESQUISADORA FAZ A PERGUNTA.
PESQUISADORA: QUANTAS CAIXINHAS E DE QUAIS CORES VOCÊ DEVE COLOCAR NO OUTRO PRATO PARA EQUILIBRAR A BALANÇA.
ABEL: TEM DOIS VERDES! (APONTANDO PARA AS DUAS CAIXAS VERDES DO PRATO ESQUERDO DA TERCEIRA BALANÇA) HUM! JÁ PEGUEI! TEM QUE ESTÁ CERTO COM A OUTRA (REFERINDO-SE À Q2) PRA PODER DAR CERTO NESSA! SE O VERDE VALE DOIS AMARELOS, ENTÃO TEM QUE DAR QUATRO AMARELOS. PORQUE SE CADA UM DESSES VALESSE DOIS (APONTANDO PARA AS CAIXAS VERDES) E CADA UM DESSES VALESSE UM (APONTANDO PARA AS CAIXAS AMARELAS), ENTÃO DOIS COM DOIS, QUATRO (APONTANDO PARA AS DUAS CAIXAS VERDES) E UM, DOIS, TRÊS, QUATRO (APONTANDO PARA AS CAIXAS AMARELAS).

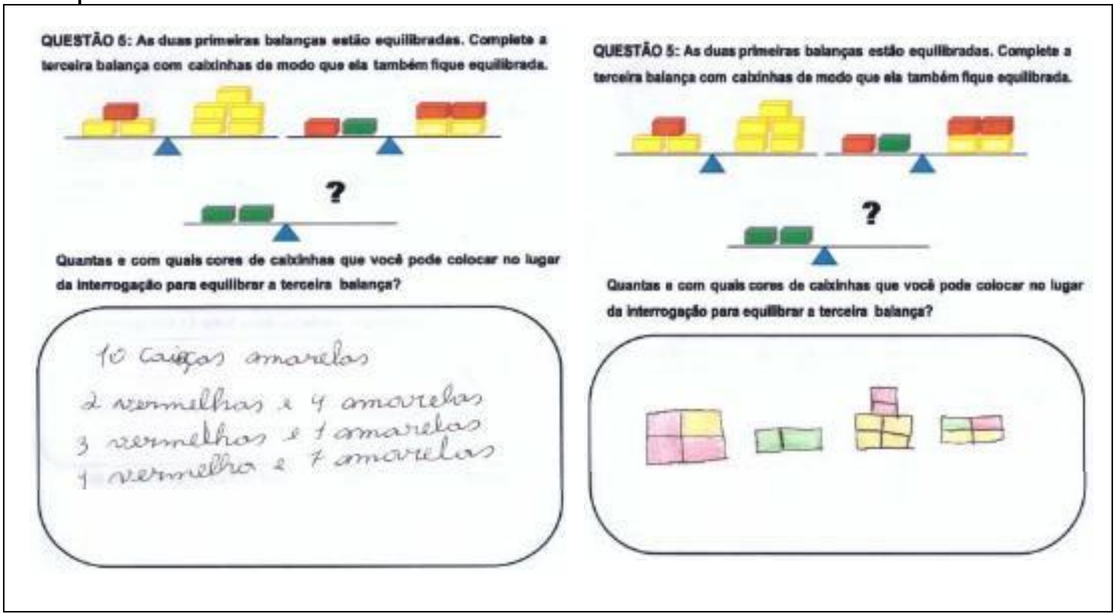
Extrato 4.21 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Abel

APÓS APRESENTAR A SITUAÇÃO DA Q5 PARA A ALUNA A PESQUISADORA FAZ A PERGUNTA.
PESQUISADORA: QUANTAS CAIXINHAS E DE QUAIS CORES VOCÊ DEVE COLOCAR NO OUTRO PRATO (REFERINDO-SE AO PRATO VAZIO PARA EQUILIBRAR A BALANÇA?
AMÁLIA: EU COLOCARIA DEZ AMARELAS!
A ALUNA COLOCA AS CAIXINHAS NA BALANÇA E TESTA.
PESQUISADORA: E POR QUE VOCÊ PENSOU LOGO EM DEZ CAIXINHAS?
AMÁLIA: PORQUE CINCO AMARELINHAS VALEM UMA VERDE, ENTÃO, DEZ AMARELINHAS VALEM DUAS VERDES!
PESQUISADORA: HUM! ENTENDI!
APÓS ANOTAR A RESPOSTA A PESQUISADORA VOLTA A PERGUNTAR.
PESQUISADORA: TERIA OUTRA OPÇÃO DE EQUILIBRAR A BALANÇA, AMÁLIA?
AMÁLIA: ACHO QUE NÃO!

Podemos observar nos dois diálogos que os dois alunos, mesmo respondendo à questão em ambientes diferentes, compreendem que existe uma única resposta para o problema. De certo modo essa atitude é compreensível, uma vez que esses alunos não têm conhecimentos sobre equações e sistemas de equações principalmente (MERLINI; MAGINA; TEIXEIRA, 2018) e, além disso, os problemas de Matemática trabalhados nesse nível escolar admitem tão somente uma resposta. Entretanto, a partir do que eles apresentaram como resposta e dos diálogos, afirmamos que esses alunos têm condições de compreender situações que envolvem conceitos algébricos, mesmo que não tenham sido introduzidos ao ensino da Álgebra formal.

No que tange à sétima categoria “Identifica mais de uma solução para o sistema” (E7), a qual classifica as respostas dos alunos que compreenderam o sistema de equações como um sistema possível e indeterminado (SPI), que é aquele que não admite uma solução única (GUELLI; IEZZI; DOLCE, 1980), tivemos esse tipo de resposta nos dois ambientes. Vale ressaltar que no ambiente MM todos os alunos que responderam a Q9 e três deles que responderam a Q5 foram classificados nessa categoria. Embora o ambiente MM facilite esse tipo de resposta, os alunos que responderam no ambiente P&L também conseguiram encontrar mais de uma solução para o sistema. Dois dos quatro alunos tiveram suas respostas da Q9 e um deles teve a resposta da Q5 classificadas nessa categoria. A Figura 4.20 a seguir apresenta os extratos dos protocolos de dois alunos que tiveram suas respostas classificadas nessa categoria, sendo que um deles respondeu no ambiente P&L e o outro no MM.

Figura 4.20 - Respostas dos alunos que responderam nos ambientes P&L e MM que identificam o sistema como SPI.



Fonte: Extrato dos protocolos do aluno Abel (superior esquerda) e Amália (superior direita e inferior) respectivamente.

A partir da Figura 4.20 fica evidente que mesmo respondendo o instrumento diagnóstico em ambientes diferentes, os alunos percebem que a terceira equação da Q5 pode ter diferentes soluções. As respostas apresentadas certificam que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental podem resolver situações que envolvem conceitos algébricos desde que sejam adaptadas às condições do seu nível de raciocínio e de escolaridade (THOPSON, 1995). Esses resultados nos levam a afirmar que não podemos privar esses alunos de poderem lidar com situações relacionadas à Álgebra desde os anos iniciais de sua escolaridade.

A próxima seção traz uma análise detalhada das respostas que os alunos apresentaram ao resolverem o instrumento diagnóstico no que concerne a relação funcional. Por isso, de modo análogo ao que fizemos nesta seção prosseguimos com a análise dos dados obtidos nesta pesquisa.

4.4 Análise das respostas relacionadas à relação funcional

Esta seção traz a análise de três questões, quais sejam a Q3, Q6 e Q8, que discutem sobre relação funcional. Nessas questões procuramos abordar o conceito de função de forma sutil a partir de situações que estão relacionadas com a realidade do aluno. As questões são relacionadas com função afim e até mesmo com funções de mais de uma variável. No caso da última procuramos mencionar de forma simples de modo que o aluno não se sentisse desconfortável em responder uma questão que parece tão complexa para esses anos de ensino.

Em relação à análise dessas questões, ela vai seguir conforme foi feita a análise das questões sobre sequências e equivalência. Assim sendo, a análise será feita sobre três enfoques: (i) em relação ao registro, (ii) em relação ao acerto e, (iii) em relação ao raciocínio funcional observado a partir das resoluções dos alunos e em seus relatos. Por assim ser, a análise observa as características e as tendências mais peculiares de cada ano de ensino. Além disso são observadas também as influências em relação às respostas obtidas na aplicação do instrumento diagnóstico nos dois ambientes (P&L e MM). Também serão observadas as principais diferenças no uso dos diferentes materiais.

4.4.1 Análise das resoluções das questões de relação funcional em relação ao tipo de registro

Nessa seção é feita uma discussão sobre as principais formas de registros usadas pelos alunos ao responder as questões que dizem respeito à relação funcional do instrumento diagnóstico. Por isso, serão discutidas as tendências em relação aos tipos de registros que mais apareceram nas questões que foram respondidas pelos alunos do 4º ano como também do 5º ano. Além disso, serão observadas as tendências em relação ao tipo de ambiente em que os estudos responderam o instrumento diagnóstico (P&L e MM). Vale ressaltar que a Tabela 4.8, que terão os dados analisados nessa seção, é um extrato da Tabela 4.2. que está de acordo com as categorias apresentadas no Quadro 4.1.

Tabela 4.8 – Registros de cada item das questões de relação funcional classificados por categoria e por tipo de ambiente

Registros de cada item das questões de relação funcional classificados por categoria e por tipo de ambiente									
Tipo de material	**Ano Escolar**	**Aluno**	**Questões**						
			Q3a	**Q3b**	**Q6a**	**Q6b**	**Q6c**	**Q8a**	**Q8b**
P&L	4º	Abel	C4	C2	C4	C4	C4	C4	C2
		Antônio	C4	C4	C4	C2	C4	C4	C4
	5º	Bento	C2	C2	C2	C2	C1	C2	C2
		Beto	C2	C2	C2	C2	C1	C2	C2
MM	4º	Amália	C2	C2	C4	C4	C4	C2	C4
		Ana	C4	C2	C4	C2	C4	C2	C2
	5º	Bete	C4	C4	C4	C4	C4	C4	C4
		Bia	C4	C4	C4	C4	C1	C4	C4

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos por meio dos dados da Tabela 4.8 algumas tendências que valem a pena comentar. Nas questões relacionadas à relação funcional, os alunos basicamente usaram apenas um registro, com exceção de três alunos que usaram cada um deles uma única vez, a língua materna (C1) para registrar as suas respostas na Q6c. Até entendemos que isso seria natural acontecer, pois a questão pede para expressar uma generalização como regra para saber a quantidade de palitos de picolé necessários para construir qualquer quantidade de triângulos. De modo geral os alunos preferem usar a língua materna para expressar suas generalizações, no entanto, nesta questão cinco alunos fizeram uso misto para registrar a resposta.

No que concerne ao registro em relação ao tipo de ambiente em que os alunos responderam ao instrumento diagnóstico, percebemos uma forte tendência em relação a cada ambiente. Notamos que os alunos que responderam no ambiente P&L tenderam a usar o número (C2) para registrar suas respostas, o que foi diferente dos que responderam no MM, esses já fizeram uso misto (C4) para suas respostas. No entanto, ainda notamos que no ambiente P&L os alunos que mais fizeram uso do número foram os alunos do 5º ano, que no ambiente MM usaram quase que exclusivamente o registro misto.

Desse modo, entendemos que os alunos fazem uso de diferentes formas de registro para expressarem suas ideias, por usarem suas notações intuitivas que vão sendo desenvolvidas ao longo da sua escolaridade (SILVA; SAVIOLI, 2014). Assim, como Blanton e Kaput (2005) afirmam que os alunos se expressam das formas mais convenientes ao seu grau de escolaridade e vão progredindo para a linguagem simbólica mais formal de acordo vão avançando no ensino escolar no que tange ao conhecimento matemático.

4.4.2 Análise das resoluções das questões de relação funcional em relação ao acerto

Essa seção busca evidenciar as tendências observadas em relação ao acerto no que tange as questões que tratam da relação funcional. É importante relembrar que buscamos trazer à tona as principais características que foram observadas em relação ao acerto dos alunos que diz respeito ao uso dos diferentes materiais na resolução do instrumento diagnóstico. Vale ressaltar que os alunos responderam ao instrumento diagnóstico em dois diferentes ambientais, quais sejam P&L e MM, bem como observamos também o acerto no que concerne ao 4º e 5º ano que foram os anos em que estavam os alunos os quais responderam o teste para esse estudo. Os dados analisados são dispostos na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Desempenho dos alunos nos itens das questões de relação funcional[19]

Desempenho dos alunos nos itens das questões de relação funcional								
Tipo de material	**Ano Escolar**	**Aluno**	**Questões**					
			Q3a	**Q3b**	**Q6a**	**Q6b**	**Q8a**	**Q8b**
P&L	4º	Abel	A	A	A	E	A	A
		Antônio	E	E	E	E	E	E
	5º	Bento	A	A	E	E	A	A
		Beto	A	A	A	E	E	E
MM	4º	Amália	A	A	E	E	A	A
		Ana	A	A	E	E	A	A
	5º	Bete	A	A	E	E	A	A
		Bia	A	A	E	E	A	A

Fonte: Dados da pesquisa

Legenda:

	Acertou
	Errou

[19] Vale ressaltar que consideramos para análise dos dados da Tabela 4.9 apenas a primeira resposta oferecida pelos alunos na sexta questão

No que diz respeito ao acerto, notamos algumas tendências interessantes a partir dos dados da Tabela 4.9. Algo que nos chamou a atenção está na grande quantidade de acertos nas questões Q3 e Q8 e não tendo o mesmo sucesso para a questão Q6. De modo geral, de acordo com os dados, apenas um aluno errou a Q3 e apenas dois erraram a Q8. Diferentemente dessas questões, a questão Q6 teve acerto apenas somente no item (a) de dois alunos. Isso demonstra que esse comportamento está relacionado com a natureza das questões e comando de cada uma delas.

É fato que as questões Q3 e Q8 se mostravam mais favoráveis às respostas corretas, pelo fato de usarem as operações de adição e/ou multiplicação para resolverem o que o comando pedia. Além disso, essas duas questões, apesar de estarem relacionadas com a mesma situação fictícia, tinham objetivos diferentes. No entanto, em relação à Q6, ela já pedia uma resposta mais rebuscada do ponto de vista algébrico, pelo fato de ter o comando de expressar ideias de generalizações. O que nos foi estranho foi o fato da Q6 ter uma forte relação com as questões de sequências[20] em que era pedido também para apresentar generalizações de regras que expressavam essas sequências. E nesse contexto os alunos tiveram mais acertos do que erros.

Esse resultado foi contrário ao que tivemos com relação às questões de sequências. A nossa questão Q6 se aproxima muito de uma sugestão de problema dada por Magina e Porto (2018). No entanto, o que as autoras sugerem que o aluno pode chegar facilmente aos resultados mesmo construindo triângulo por triângulo nesse tipo de questão não ocorre na Q6 do nosso instrumento diagnóstico. Mas, apesar de não apresentarem respostas corretas os alunos demonstram capacidades de generalizar as situações apresentadas, o que nos leva a concordar com Merino, Cañadas e Molina (2013) quando afirmam que alunos dos anos iniciais de escolaridade possuem condições de fazer generalizações e fazer relações entre variáveis.

[20] Situações representadas nas questões Q1, Q4 e Q7 do instrumento diagnóstico e que foram analisadas na seção 4.2 deste capítulo.

4.4.3 Análise das resoluções das questões de relação funcional em relação ao raciocínio de compreensão das relações entre variáveis e da função

Essa seção tem a finalidade de trazer as principais tendências e características observadas nas respostas dos alunos no que tange à relação funcional. Para expressarmos essas características dividimos esta seção em duas subseções que discutem (i) as tendências das respostas dos alunos em relação às categorias criadas por nós a partir das respostas dos alunos e, (ii) as principais características de das respostas dos alunos observadas e analisadas por meio de cada categoria. Essas categorias estão organizadas no Quadro 4.4 e as respostas dos alunos classificadas em relação às categorias estão organizadas na Tabela 4.10.

Além disso, procuramos evidenciar também as principais diferenças observadas na aplicação do instrumento diagnóstico nos dois ambientes (P&L e MM). Essas diferenças (se houverem) são importantes para compreendermos como os alunos reagem a uma mesma situação em ambientes diferentes. Também se faz importante para entendermos as influências dos diferentes tipos de materiais na resposta dos alunos e, se essas influências favorecem a compreensão ou dificultam.

4.4.3.1 Visão geral das respostas por categoria de análise

A presente seção busca fazer evidente as tendências das respostas dos alunos, bem suas características de acordo com algumas categorias de análise que criamos e que estão organizadas no Quadro 4.4. Além disso, buscamos organizar as respostas dos alunos por cada item de questão numa tabela e classifica-las de acordo com as categorias que criamos. Por isso, a seguir apresentamos o Quadro 4.4 com as categorias de análise para as situações relacionadas à relação funcional do teste aplicado neste estudo.

Quadro 4.3 - Categorias relativas ao raciocínio de compreensão da relação funcional[21]

[21] É importante destacar que a categoria F6 foi criada para classificar as respostas das questões Q3 e Q8. Além disso, as categorias F7, F8 e F9 dizem respeito apenas às respostas da questão Q6.

Categoria	Nome da Categoria
F1	Não compreende o problema
F2	Compreende a relação de dependência entre variáveis
F3	Resolve por adição ou multiplicação
F4	Calcula mentalmente
F5	Usa proporcionalidade
F6	Compreende a relação de dependência por quantidade acrescentada
F7	Compreende a função como linear
F8	Não generaliza
F9	Generaliza uma regra que se aproxima da situação

Fonte: Elaborado pela autora

Para apresentar de forma as respostas dos alunos classificadas nessas categorias, as organizamos na forma de tabela. Assim, temos uma visão melhor e podemos compreender as tendências mais marcantes das respostas desses alunos no que diz respeito às questões relacionadas com a relação funcional. Por isso, apresentamos a Tabela 4.10 com a classificação das respostas dos alunos para as questões Q3, Q6 e Q8. Em seguida, baseamo-nos na bibliografia consultada (MESTRE; OLIVEIRA, 2011; CYRINO; OLIVEIRA, 2011) que discute sobre o pensamento algébrico e, (PINTO; CAÑADAS; MORENO; CASTRO, 2016; MAGINA; PORTO, 2018) no que tange à relação funcional.

Tabela 4.10 – Raciocínio de compreensão da relação funcional

Raciocínio de compreensão da relação funcional											
Tipo de material	Ano Escolar	Aluno	Questões								
			Q3			Q6			Q8		
P&L	4º	Abel	F2	F3		F2	F5	F8	F2	F3	
		Antônio	F1	F3		F2	F7	F9	F1	F3	
	5º	Bento	F2	F4		F2	F7	F8	F2	F4	
		Beto	F2	F4	F6	F2	F7	F9	F2	F4	
MM	4º	Amália	F2	F4	F6	F2	F7	F9	F2	F4	F6
		Ana	F2	F4	F6	F1	F7	F9	F2	F4	F6
	5º	Bete	F2	F4	F6	F5	F7	F9	F2	F4	
		Bia	F2	F6		F2	F7	F8	F2	F4	F6

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados da Tabela 4.10 trazem resultados importantes no que diz respeito às três situações relacionadas à relação funcional. De modo geral, em relação às três questões, observamos que os alunos compreenderam o que a questão pedia (F2), o que, de certo modo, justifica o grande número de acertos (Tabela 4.9). Além disso, outro resultado que se faz necessário comentar é que os alunos usaram muito cálculos mentais. No geral, preferiam calcular mentalmente para chegar mais rapidamente ao resultado. Podemos inferir que os alunos evoluíram em termos cálculos aritméticos e, eles agora servem de mecanismos para resolver problemas.

Um resultado interessante é o fato de sete dos oitos alunos compreenderem a função da Q6 apenas como linear. Apesar de compreenderem o padrão, ficou evidente a dificuldade que os alunos encontraram em identificar a regra expressa por uma função afim. Esse fato já era esperado uma vez que encontramos em Teixeira (2016) que os alunos, somente depois de uma intervenção de ensino, conseguiram generalizar por meio de uma função afim e, mesmo assim, com uma generalização próxima da considerada correta. O que consideramos um avanço da nossa pesquisa é o fato de, através da entrevista, conseguirmos identificar que os alunos conseguem naturalmente generalizar uma função linear. No entanto, de acordo com Porto (2018), a função ainda é um conceito muito sofisticado para alunos desses anos de ensino e, apesar de apresentaram potencial algébrico satisfatório, eles ainda se apoiam muito nas operações aritméticas.

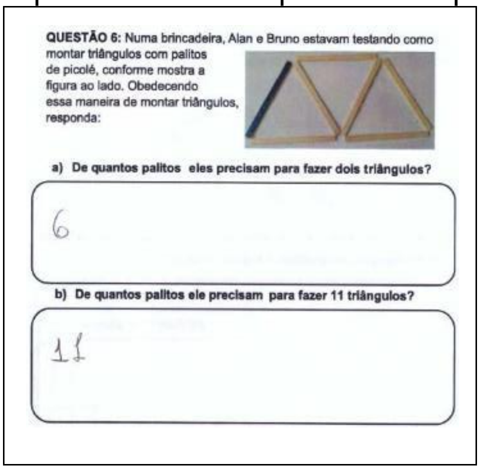
Depois de discutirmos sobre as tendências observadas a partir da classificação das respostas dos alunos, a próxima seção vem discutir, de forma mais aprofundada, as respostas e os raciocínios dos alunos por meio de cada categoria criada. A análise das respostas de acordo com as categorias, tem como base o que os alunos apresentaram nos protocolos e a entrevista videogravada. Por isso, a partir deles fazemos uma análise mais detalhada na seção seguinte.

4.4.3.2 As resoluções dos alunos do ponto de vista das categorias

A seção anterior trouxe uma visão geral das respostas dos alunos quanto às categorias de análise. Nesta seção procuramos evidenciar as características das respostas que evidenciam cada categoria criada e a necessidade de apresentar os dados a partir delas. Por isso, apresentamos cada categoria por meio das respostas apresentadas pelos alunos por meio de seus protocolos, como também por meio dos trechos das entrevistas que evidenciam o raciocínio utilizado pelos alunos para apresentarem tal resposta registrada no protocolo.

Em relação à categoria F1, que classifica as respostas dos alunos não compreenderam o problema, tivemos apenas três estudantes que, em alguma das três questões, mostrou não compreender o problema proposto. Os alunos que demonstraram não compreender o problema foram somente alunos do 4º ano, sendo que um deles respondeu ao instrumento diagnóstico no ambiente P&L e outro no MM. A Figura 4.21 apresenta o extrato do protocolo de um aluno que teve a resposta classificada nessa categoria.

Figura 4.20 - Respostas do aluno que não compreendeu o problema.



QUESTÃO 6: Numa brincadeira, Alan e Bruno estavam testando como montar triângulos com palitos de picolé, conforme mostra a figura ao lado. Obedecendo essa maneira de montar triângulos, responda:

a) De quantos palitos eles precisam para fazer dois triângulos?

6

b) De quantos palitos ele precisam para fazer 11 triângulos?

11

Fonte: Extrato do protocolo do aluno Antônio

Ao observar a resposta do aluno Antônio para o item (a) da Q6, parece até que ele apresenta um raciocínio coerente. No entanto, a partir do que ele apresenta para o item (b) da mesma questão, fica evidente que ele não compreende o problema. Para ficar mais claro como o aluno expressa por meio de palavras o seu raciocínio, segue um trecho da entrevista feita com esse aluno ao responder a Q6.

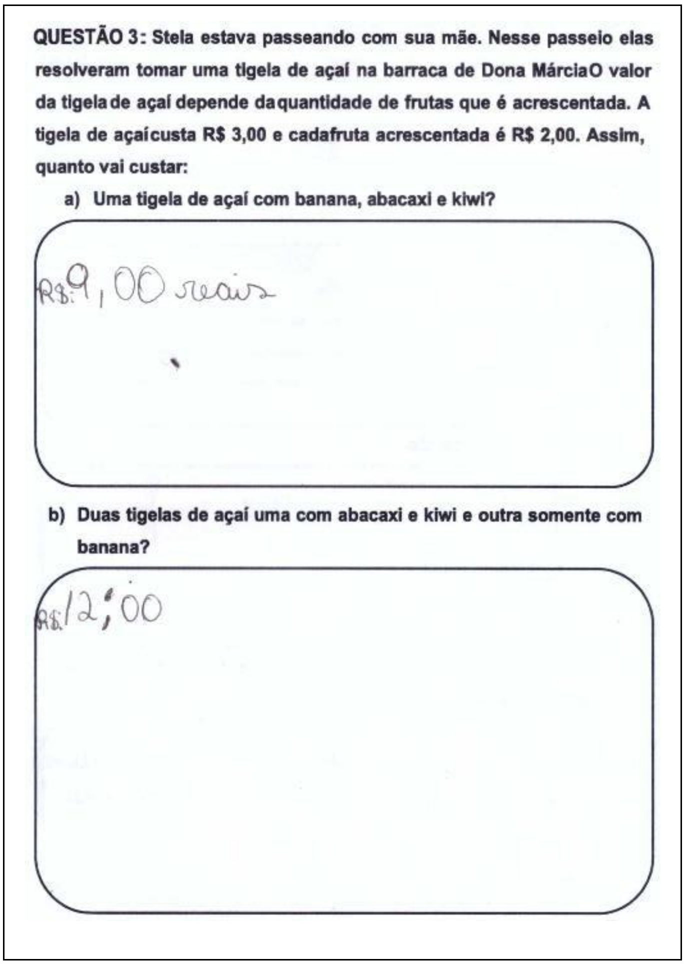
Extrato 4.22 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Antônio

PESQUISADORA: QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA FAZER DOIS TRIÂNGULOS?
ANTÔNIO: SEIS!
PESQUISADORA: E POR QUE ELES PRECISAM DE SEIS?
ANTÔNIO: PORQUE CADA TRIÂNGULO TEM TRÊS LADOS. AÍ ELES PRECISAM DE UM, DOIS, TRÊS! E NO OUTRO, UM DOIS, TRÊS. AÍ, SEIS! (CONTANDO CADA PALITO REFERENTE A UM LADO DO TRIÂNGULO).
PESQUISADORA: OK, ANTÔNIO. E DE QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA FAZER ONZE TRIÂNGULOS?
APÓS APRESENTAR A SITUAÇÃO DA Q6 PARA O ALUNO, ELE PENSA E DEPOIS RESPONDE.
ANTÔNIO: TRÊS PALITOS, MAIS TRÊS MAIS DOIS!

Quando se trata dos palitos observados na imagem e em pouca quantidade, o aluno até consegue fazer uma previsão da quantidade de palitos necessária, o que está de acordo com a resposta que os outros alunos apresentaram. No entanto, quando é pedido para ele prever para uma quantidade maior de triângulos, o aluno já demonstra uma compreensão equivocada do problema, pois a imagem demonstrativa não o ajuda a compreendê-lo. Vale ressaltar também que esse aluno é do 4º ano e, de acordo com Porto (2018), se para alunos do 5º ano é difícil compreender a relação funcional, para alunos do 4º ano isso se torna ainda mais difícil.

No que concerne à segunda categoria, à F2, que classifica as respostas dos alunos que compreendem a relação de dependência entre as variáveis, observamos que nas três questões, só teve o caso de dois alunos que não foram classificados nessa categoria. Nesse sentido, esse é um resultado importante, visto que eles compreendem, implicitamente, a dependência das variáveis. Para exemplificar uma resposta classificada nessa categoria a Figura 4.21 traz o extrato do protocolo de um aluno.

Figura 4.21 - Resposta do aluno que compreendeu a relação de dependência entre variáveis.


QUESTÃO 3: Stela estava passeando com sua mãe. Nesse passeio elas resolveram tomar uma tigela de açaí na barraca de Dona MárciaO valor da tigelade açaí depende daquantidade de frutas que é acrescentada. A tigela de açaícusta R$ 3,00 e cadafruta acrescentada é R$ 2,00. Assim, quanto vai custar:

a) Uma tigela de açaí com banana, abacaxi e kiwi?

R$:9,00 reais

b) Duas tigelas de açaí uma com abacaxi e kiwi e outra somente com banana?

R$/2;00

Fonte: Extrato do protocolo da aluna Bete

A imagem do protocolo da aluna não deixa claro como ela compreende essa relação de dependência entre as variáveis, que no caso da questão apresentada, a Q3, a variável independente é representada pelo tipo de fruta que varia em três tipos e a variável dependente é representada pelo valor a ser pago pela tigela de açaí e as frutas que forem acrescentadas a essa tigela. Por isso, para fica mais claro como foi o raciocínio de Bete ao responder essa questão, apresentamos a seguir o extrato da entrevista dessa aluno no momento em que respondia a questão mencionada.

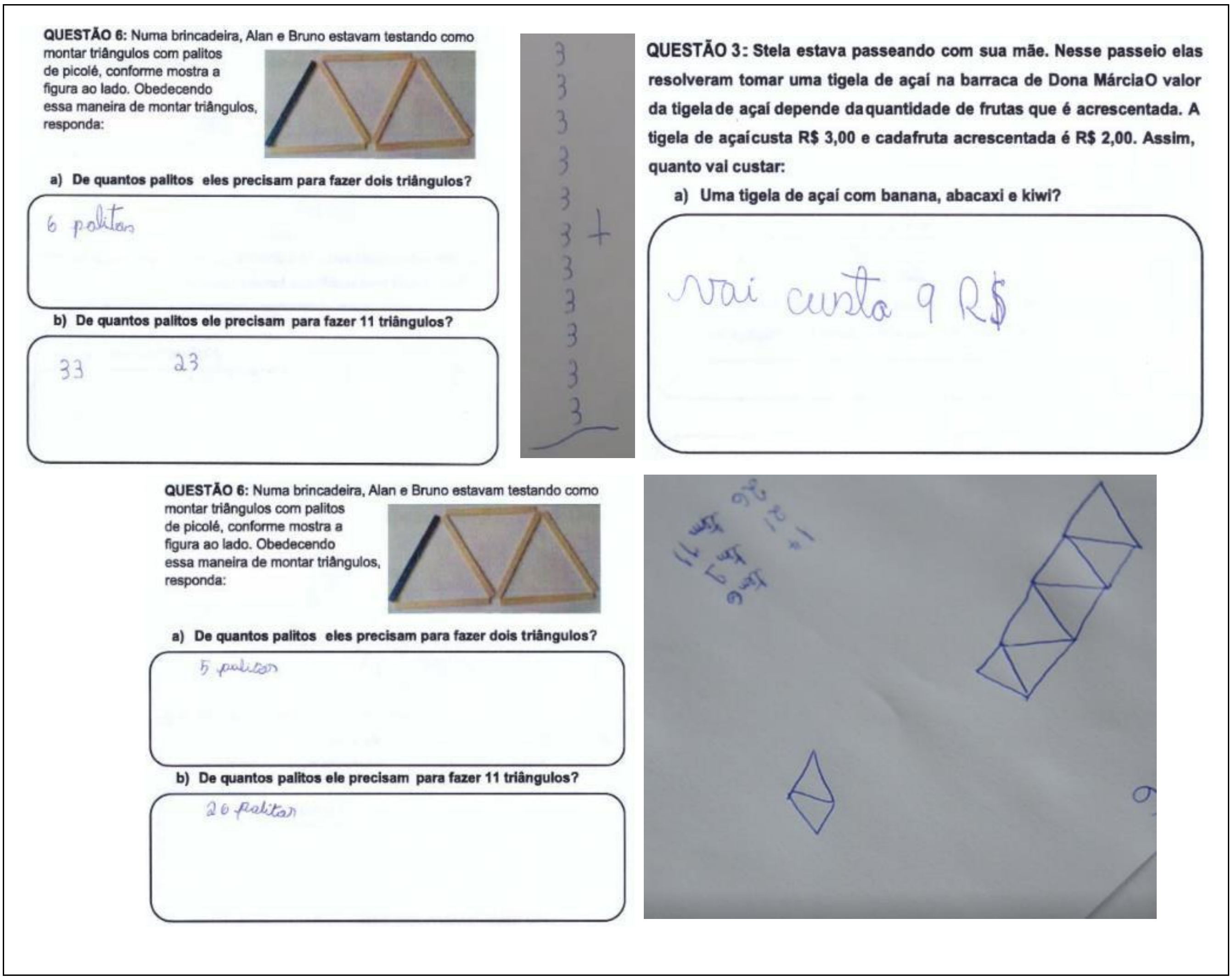
Extrato 4.23 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Bete

PESQUISADORA: QUAL O VALOR DE UMA TIGELA DE AÇAÍ COM BANANA, ABACAXI E KIWI?
BETE: NOVE!
PESQUISADORA: AGORA ME EXPLICA COMO FOI QUE VOCÊ ENCONTROU ESSE VALOR.
BETE: PORQUE A TIGELA DE AÇAÍ É TRÊS, CADA FRUTA QUE EU COLOCO É DOIS. AÍ SE EU COLOCO... TEM A TIGELA DE AÇAÍ, A BANANA, O KIWI E O ABACAXI. AÍ VAI O POTE DE AÇAÍ, O AÇAÍ, A BANANA, O KIWI E O ABACAXI.
PESQUISADORA: HUM! E TUDO É QUE DÁ NOVE REAIS?
BETE: É! AÍ DÁ NOVE REAIS!

Pelo trecho da entrevista é possível perceber que a aluna compreende que o valor da tigela depende da fruta que é colocada e, essa fruta faz o valor da tigela variar. Assim, de acordo com Carraher e Schliemann (2016) trabalhar com situações que envolvem valores variáveis podem promover a compreensão da função. Essa compreensão pode acontecer a partir de situações aritméticas que não dê ênfase apenas a resultados memorizáveis, mas que promovam a compreensão de propriedades a partir das operações.

Ao organizarmos as categorias, criamos três delas (F3, F4 e F5) que correspondem às estratégias adotadas pelos alunos para resolver as questões que dizem respeito à relação funcional no instrumento diagnóstico. As três categorias são aquelas em que identifica se o aluno usa adição ou multiplicação (F3), calcula mentalmente (F4) e usa proporcionalidade (F5). Por serem as categorias que estão relacionadas com as estratégias adotadas, resolvemos discutir as três juntas devido à aproximação que as três tem. Uma vez que usa proporcionalidade, o aluno automaticamente recorre às operações de adição e multiplicação para resolver o problema (apesar de, nesse caso, trabalhar com grandezas). Além disso, ao usar o cálculo mental (apesar de não ser possível identificar qual(ais) operação(ões) ele usou) sabemos que ele recorreu às referidas operações. Sendo assim, a Figura 4.22 apresenta os extratos dos protocolos de três alunos que tem suas respostas classificadas nas categorias mencionadas.

Figura 4.22 - Resposta do aluno que compreendeu a relação de dependência entre variáveis.



Fonte: Extrato dos protocolos dos alunos Amália (superior esquerda e central), Beto (superior direita) e Abel (inferior esquerda e direita).

No caso da Figura 4.22, as imagens mostram apenas as respostas registradas pelos alunos, no instrumento diagnóstico. Em relação às categorias, temos um exemplo para cada uma. Nesse caso, o extrato do protocolo de Amália, bem como o rascunho usado por ela para chegar à resposta desejada representa uma resposta da categoria F3; o extrato do protocolo de Beto representa uma resposta para a categoria F4; e o extrato do protocolo do aluno Abel representa uma resposta para a categoria F5. No entanto, as respostas registradas no papel não deixam claras as estratégias usadas por esses alunos. Por isso, para melhor compreender o motivo dessas respostas serem classificadas em cada uma das categorias mencionadas, segue os extratos das entrevistas desses alunos enquanto respondiam ao instrumento diagnóstico.

Extrato 4.24 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Amália

DEPOIS DE EXPLICAR A SITUAÇÃO A PESQUISADORA PERGUNTA.
PESQUISADORA: DE QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA FAZER DOIS TRIÂNGULOS?
AMÁLIA: SEIS! AQUI TEM TRÊS (APONTANDO PARA UM DOS TRIÂNGULOS) E AQUI TEM MAIS TRÊS (APONTANDO PARA OUTRO TRIÂNGULO)!
PESQUISADORA: OK, AMÁLIA! E DE QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA FAZER ONZE TRIÂNGULOS?
A ALUNA OLHA PARA OS TRIÂNGULOS MONTADOS NO PAPEL E TENTA USÁ-LOS PARA CALCULAR MENTALMENTE, MAS NÃO CONSEGUE.
AMÁLIA: EU QUERO FAZER NA FOLHA!
PESQUISADORA: VOCÊ QUER FAZER COM OS PALITOS?
AMÁLIA: QUERO!
PESQUISADORA: MAS, DE QUANTOS PALITOS VOCÊ PRECISA PARA EU PODER TE DAR? VOCÊ TEM QUE ME DIZER A QUANTIDADE.
A PESQUISADORA PERCEBE QUE A DIFICULDADE DA ALUNA ERA PARA FAZER OS CÁLCULOS E ENTREGA PARA A ALUNA UMA FOLHA DE PAPEL.
AMÁLIA: TRINTA E TRÊS!

Extrato 4.25 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Beto

DEPOIS DE LER A QUESTÃO A PESQUISADORA PERGUNTA.
PESQUISADORA: QUANTO VAI CUSTAR UMA TIGELA DE AÇAÍ COM BANANA ABACAXI E KIWI?
DEPOIS DE UM TEMPO PENSANDO O ALUNO RESPONDE.
BETO: NOVE!
PESQUISADORA: HUM! NOVE REAIS! AGORA ME EXPLICA COMO FOI QUE VOCÊ ENCONTROU ESSE VALOR!
BETO: PORQUE UMA TIGELA É TRÊS E CADA FRUTA É DOIS. AÍ, UMA BANANA É DOIS REAIS, UM ABACAXI É DOIS E UM KIWI É DOIS.
PESQUISADORA: HUM! E AÍ SOMANDO TUDO É...
BETO: NOVE REAIS!

Extrato 4.26 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Abel

DEPOIS DE LER A QUESTÃO, A PESQUISADORA PERGUNTA.
PESQUISADORA: DE QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA FAZER DOIS TRIÂNGULOS?
O ALUNO PEDE UM PAPEL E DESENHA UM ESQUEMA COMO O MOSTRADO NA FIGURA DA QUESTÃO SEIS.
ABEL: ENTÃO, UM, DOIS, TRÊS, QUATRO, CINCO (CONTA A QUANTIDADE DE TRAÇOS DESENHADOS PARA FAZER OS DOIS TRIÂNGULOS)! É PORQUE, AQUI COMO EU VOU FECHAR UM, ESSE AQUI JÁ VAI SERVIR PARA FAZER O OUTRO. ENTÃO, UM, DOIS, TRÊS (CONTA NOVAMENTE OS TRAÇOS DE UM DOS DOIS TRIÂNGULOS)! ENTÃO, ESSE AQUI JÁ SERVIU DE APOIO PARA ELES DOIS! ENTÃO, CINCO PALITOS!
PESQUISADORA: OK, ABEL!
O ALUNO COMEÇA A RESPONDER IMEDIATAMENTE O ITEM (B) DA QUESTÃO QUE PERGUNTA QUANTOS PALITOS SÃO NECESSÁRIOS PARA ONZE TRIÂNGULOS. APÓS UMA TENTATIVA COM O RECURSO DO DESENHO, O ALUNO DESISTE ACHANDO CANSATIVO RESPONDÊ-LO DAQUELA FORMA.
ABEL: UM, DOIS, TRÊS, QUATRO... TÁ ERRADO! ESSA VAI SER DIFÍCIL!
PESQUISADORA: PODE PENSAR! FIQUE À VONTADE!
ABEL: TÁ! EU VOU FAZER DE ACORDO COM ESSA IMAGEM! AQUI TEM TRÊS! AH! EU JÁ SEI COMO É QUE EU VOU FAZER! UM, DOIS, TRÊS, [...], SETE (CONTA A QUANTIDADE DE PALITOS DA IMAGEM) E TEM TRÊS TRIÂNGULOS! CATORZE TEM SEIS TRIÂNGULOS! [...] ENTÃO, VINTE UM PALITOS, TEM NOVE! DEZ, ONZE! ESSA ME PEGOU!
PESQUISADORA: PODE FICAR TRANQUILO! FIQUE À VONTADE! PODE PENSAR!
O ALUNO PENSA UM POUCO E USA O RESULTADO QUE OBTEVE PARA DOIS TRIÂNGULOS.

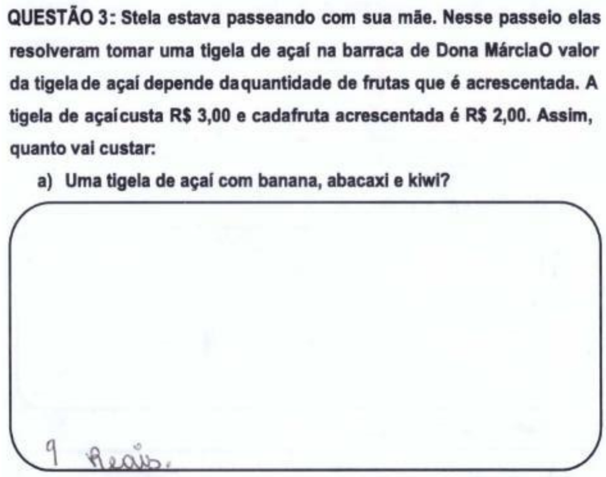
ABEL: CINCO. BORA VER! VINTE E SEIS PALITOS (E CHEGA A ESSE RESULTADO)!

Os três diálogos juntamente com as imagens da Figura 4.22 nos levam a afirmar que os alunos utilizaram adição e multiplicação nas suas estratégias. A primeira aluna, Amália, usou claramente a adição para encontrar o resultado mostrado na imagem. Todavia, as operações utilizadas por Beto não ficaram muito explícitas pelo fato de ter dado apenas o resultado. No caso de Abel, o esquema feito por ele juntamente com o trecho do diálogo deixam evidentes que ele usou a proporcionalidade, além de ter usado multiplicação e adição.

No que concerne às estratégias desses alunos, é possível afirmar que eles utilizaram os mesmos princípios para obter suas respostas, uma vez que tanto os cálculos mentais quanto a proporcionalidade, exigem que o aluno tenha domínio das operações de adição e multiplicação. Esse fato nos leva a concordar com Carraher e Schliemann (2015) quando afirmam que os alunos podem trabalhar com relações e funções a partir das operações e dos números. Além disso, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009) a proporcionalidade direta é encarada como função linear e os alunos conseguem relacionar mais facilmente variáveis a partir dela. Além disso, Porto (2018) e Magina e Porto (2018) indicam que a multiplicação e a divisão constituem um pilar para o desenvolvimento da proporcionalidade que representa um grande apoio para o raciocínio funcional.

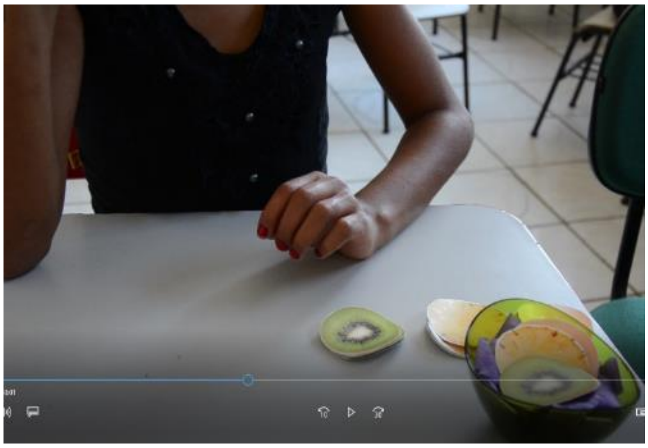
No que tange à categoria que classifica os alunos que compreendem a relação de dependência por quantidade acrescentada (F6), observamos que seis alunos compreenderam a Q3 dessa forma e, esse número reduziu para três na Q8. Isso pode ter ocorrido pelo fato das questões Q3 e Q8 serem semelhantes. Além disso, é importante ressaltar que os alunos que mais compreenderam a situação dessa maneira foram aqueles que responderam ao instrumento diagnóstico no ambiente MM. Por assim, ser apresentaremos o extrato do protocolo da aluna Bia na Figura 4.23.

Figura 4.23 - Resposta da aluna que compreende a relação de dependência por quantidade acrescentada


QUESTÃO 3: Stela estava passeando com sua mãe. Nesse passeio elas resolveram tomar uma tigela de açaí na barraca de Dona MárciaO valor da tigela de açaí depende daquantidade de frutas que é acrescentada. A tigela de açaícusta R$ 3,00 e cadafruta acrescentada é R$ 2,00. Assim, quanto vai custar:

a) Uma tigela de açaí com banana, abacaxi e kiwi?

9 Reais.



Fonte: Extrato do protocolo da aluna Bia.

O extrato do protocolo da aluna não deixa claro como foi que ela reagiu ao responder a questão Q3. Por isso, para entender o raciocínio da aluna, a seguir mostraremos o extrato da entrevista da aluna no momento em que ela deixa evidente como compreendeu a variação a partir da quantidade apresentada.

Extrato 4.27 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Bia

Depois de ser explicada a situação, depois de ser feita a pergunta e depois de a aluna a responder, a pesquisadora resolveu perguntar o seguinte:
Pesquisadora: Oh, Bia, e se eu colocasse assim: eu coloco aqui um, dois, três (colocando uma fatia de banana, uma de abacaxi e outra de kiwi como representa as imagens nos papéis)! Aí é quanto?
Bia: Nove reais!
Pesquisadora: E se eu acrescento mais uma quantidade de banana (colocando mais duas fatias)!
Bia: Duas, tia?
Pesquisadora: Duas, três, a quantidade que quiser! Vai mudar o valor da tigela de açaí?
Bia: Vai!
Pesquisadora: Por quê?
Bia: Porque, cada fruta é dois reais! Ela aumentou e, colocou mais duas de cada fruta!
Pesquisadora: Então, se eu aumento a quantidade de fruta, vai aumentar também...
Bia: A quantidade do valor!

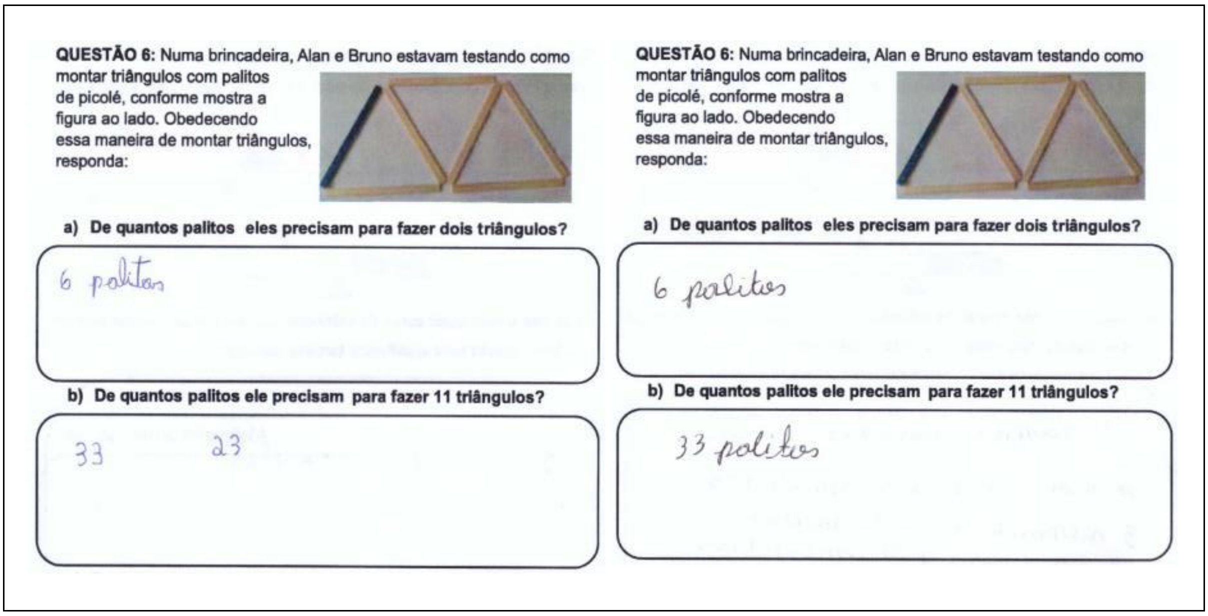
Como foi colocado pela aluna no extrato da entrevista, ela entendeu que aumentando as fatias (como pode ser visto na Figura 4.23) irá aumentar também o valor da tigela de açaí. Nesse caso ela entende que cada fatia de fruta acrescentada causa um aumento de dois reais na tigela de açaí. Ou seja, compreende a função $f(x, y, z) = 2x + 2y + 2z + 3$ com x, y, z representando, respectivamente, banana, abacaxi e kiwi e variando entre as quantidades por fatia colocada. Assim, percebemos que o problema causou dois tipos de interpretação. Um deles foi o que prevemos na nossa análise a priori que consiste em compreender a mesma função $f(x, y, z) = 2x + 2y + 2z + 3$ com $x, y, z \in \{0,1\}$ representando, respectivamente, banana, abacaxi e kiwi só que tendo 0 quando não fizer uso de determinado tipo de fruta ou 1 quando for usá-la. E, o outro foi o que a aluna compreendeu e, que explicamos anteriormente. Nesse caso, o problema causou essa grave confusão que só foi possível percebê-la porque foi feita a entrevista.

Achamos conveniente criar essa categoria, por termos observado a presença recorrente desse comportamento dos alunos quanto às questões Q3 e Q8. Além disso, chamamos a atenção para essa dupla interpretação da questão, pois nela observamos como os alunos concebem a relação de dependência entre as variáveis independentes (x, y, z) e a variável dependente ($f(x, y, z)$). O mais importante, é que apesar das diferentes interpretações, eles percebem essa relação, mesmo em situações relacionadas com a aritmética. Portanto, podemos presumir que esses alunos compreendem a relação de variação e covariação (PINTO *et al*, 2016) de variáveis de uma função.

No que diz respeito à categoria que classifica as respostas dos alunos que compreendem a função como linear (F7), de acordo com a Tabela 4.7 sete dos oitos alunos tiveram suas respostas classificadas nessa categoria. Todavia, é importante argumentar que, mesmo o aluno que não teve sua resposta para a Q6 classificada nessa categoria também pode ser classificada na F7. Isso é possível pelo fato do aluno usar a proporcionalidade como estratégia para encontrar a resposta para a questão, como pode ser visto na Figura 4.22 e extrato de entrevista 4.26 (extratos do protocolo e da entrevista do aluno Abel).

Com o resultado obtido nesta categoria, percebemos que independentemente do ano escolar ou do tipo de ambiente utilizado na resolução do instrumento diagnóstico, o resultado foi satisfatório. Por isso, a seguir na Figura 4.24 são mostrados os protocolos de dois alunos que tiveram as respostas classificadas nesta categoria.

Figura 4.24 - Resposta dos alunos que compreenderam a função como linear


QUESTÃO 6: Numa brincadeira, Alan e Bruno estavam testando como montar triângulos com palitos de picolé, conforme mostra a figura ao lado. Obedecendo essa maneira de montar triângulos, responda:

a) De quantos palitos eles precisam para fazer dois triângulos?

6 palitos

b) De quantos palitos ele precisam para fazer 11 triângulos?

33 23

QUESTÃO 6: Numa brincadeira, Alan e Bruno estavam testando como montar triângulos com palitos de picolé, conforme mostra a figura ao lado. Obedecendo essa maneira de montar triângulos, responda:

a) De quantos palitos eles precisam para fazer dois triângulos?

6 palitos

b) De quantos palitos ele precisam para fazer 11 triângulos?

33 palitos

Fonte: Extratos dos protocolos dos alunos Amália (esquerda) e Bento (direita).

As imagens dos protocolos dos dois alunos mostram apenas os resultados encontrados pelos alunos a partir do que eles pensaram para a situação. No entanto, para que fique claro o motivo que nos levou a classificar as respostas dos dois alunos na categoria F7, serão mostrados os extratos das entrevistas com esses dois alunos no momento em que respondiam ao teste. Os trechos revelam o raciocínio desses alunos.

Extrato 4.28 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Amália

DEPOIS DE EXPLICAR A SITUAÇÃO A PESQUISADORA PERGUNTA.
PESQUISADORA: DE QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA FAZER DOIS TRIÂNGULOS?
AMÁLIA: SEIS! AQUI TEM TRÊS (APONTANDO PARA UM DOS TRIÂNGULOS) E AQUI TEM MAIS TRÊS (APONTANDO PARA OUTRO TRIÂNGULO)!
PESQUISADORA: OK, AMÁLIA! E DE QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA FAZER ONZE TRIÂNGULOS?
A ALUNA PENSA UM POUCO, FAZ CÁLCULOS NUMA FOLHA DE PAPEL E DEPOIS RESPONDE.
AMÁLIA: TRINTA E TRÊS!

Extrato 4.28 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Bento

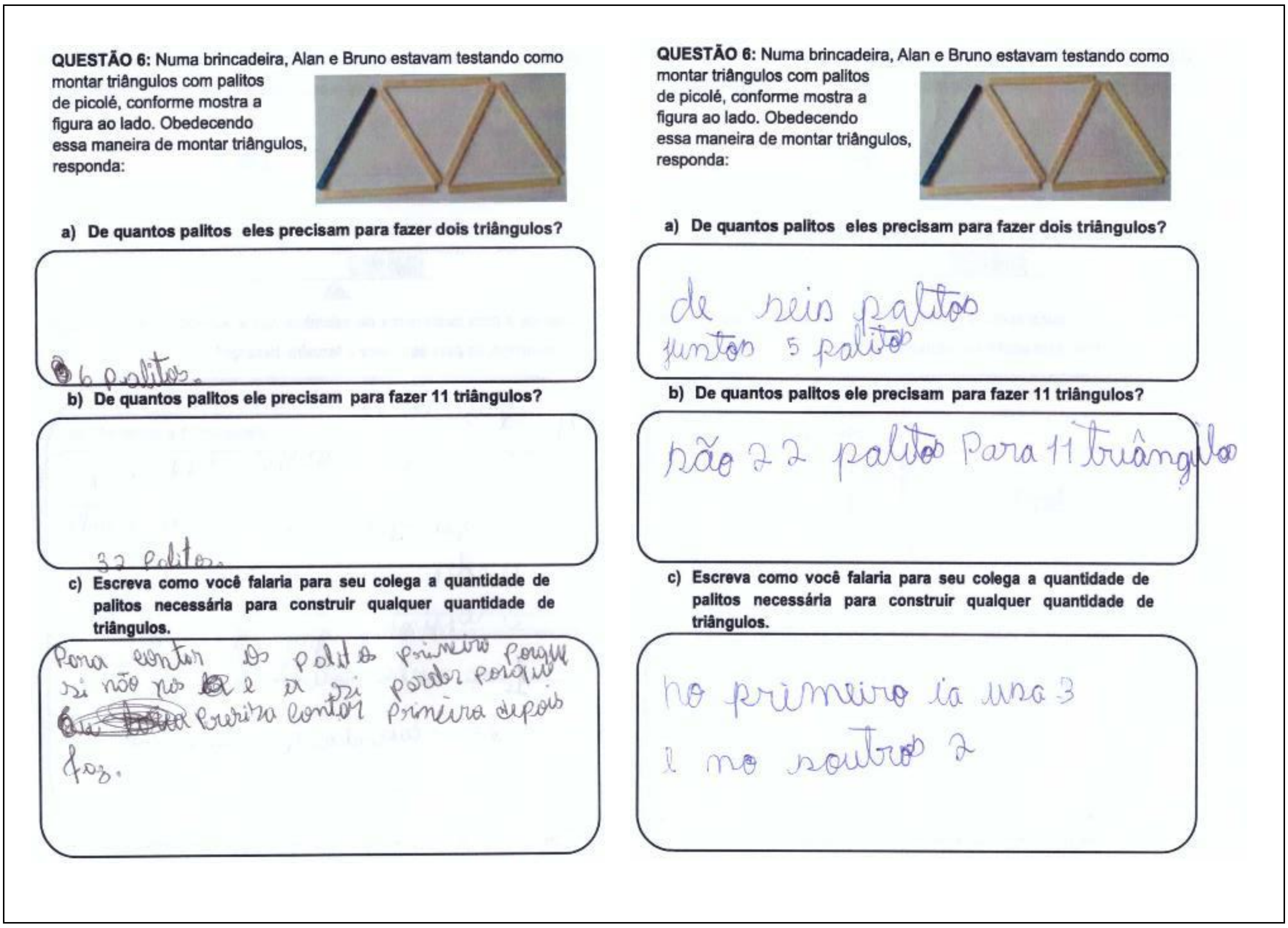
DEPOIS DE EXPLICAR A SITUAÇÃO A PESQUISADORA PERGUNTA.
PESQUISADORA: DE QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA FAZER DOIS TRIÂNGULOS?
BENTO: SEIS!
PESQUISADORA: E POR QUE VOCÊ PENSOU QUE SÃO TRÊS PALITOS?
BENTO: PORQUE EM UM TRIÂNGULO TEM QUE SER TRÊS PALITOS!
PESQUISADORA: E DE QUANTOS PALITOS ELES PRECISAM PARA PODER FAZER ONZE TRIÂNGULOS?
DEPOIS DE PENSAR POR UM BOM TEMPO E REALIZAR ALGUNS CÁLCULOS MENTALMENTE O ALUNO RESPONDE.
BENTO: É TRINTA E TRÊS!

De acordo com as imagens fornecidas pela Figura 4.24 e pelos extratos das entrevistas dos alunos, percebemos que os alunos compreendem que para construir um triângulo são necessários três palitos e, a partir desse resultado eles generalizam que para qualquer quantidade de triângulos vai seguir sempre a regra expressa pela função $f(x) = 3x$, com $x \in \mathbb{N}$. Essa função só é válida para triângulos separados, que não é o caso da questão Q6 do instrumento diagnóstico.

Para o resultado revelado pelos dados da pesquisa, o que ficou evidente foi o fato dos alunos conseguirem identificar uma regra que pode ser generalizada por uma função linear. Vale a pena salientar que, como identificamos as estratégias desses alunos (F3, F4 e F5), essas estratégias estão diretamente ligadas a essa compreensão dos alunos. Isso vai de acordo com o que Post, Behr e Lesh (1995) afirmam sobre o raciocínio com proporções. Os referidos autores salientam que esse tipo de raciocínio é importante para alunos compreenderem uma função linear que, por sua vez, é representada por uma equação linear simples de natureza multiplicativa e que envolve uma relação proporcional. Além desses autores, temos Porto (2018); Magina e Porto (2018) e Ponte, Branco e Matos (2009) que argumentam a importância da proporcionalidade e da multiplicação para a compreensão da relação funcional. Sendo assim, é possível afirmar que os alunos têm uma forte tendência em compreender funções lineares, o que já é um avanço para a compreensão de outros tipos de funções como é o caso da afim.

Concernente às duas últimas categorias (F8 e F9), que classificam as respostas dos alunos que não generalizam uma regra ou generalizam uma regra que se aproxima da regra da situação apresentada na questão Q6, tivemos bons resultados no que tange à capacidade de generalização. Dos oito alunos que responderam ao instrumento diagnóstico, apenas três deles não conseguiram generalizar uma regra que se aproximasse do que a situação propunha. Para melhor compreender o que classificamos nessas duas categorias, a Figura 4.25 traz os extratos dos protocolos de dois alunos que se classificam nessas categorias.

Figura 4.23 - Respostas dos alunos que não generalizam e que generalizam uma regra próxima para a função



Fonte: Extratos dos protocolos dos alunos Bia (esquerda) e Beto (direita).

As imagens mostradas não deixam muito claras as respostas apresentadas no item (C) da Q6 que é o referente à generalização da regra. Por isso, a seguir são mostrados os extratos das entrevistas feitas com esses alunos no momento em que respondiam à Q6. Os extratos são importantes para a compreensão do raciocínio utilizado pelo aluno ao responder a questão.

Extrato 4.29 – Diálogo da pesquisadora com a aluna Bia

Depois de explicar a situação para a aluna e, ela responder aos itens (a) e (b) da questão, a pesquisadora pergunta em relação ao item (c).

Pesquisadora: Escreva como você falaria para seu colega a quantidade de palitos necessária para construir qualquer quantidade de triângulos.

Bia: Não sei! Eu ia ter que ver como era o triângulo! Se fosse redondo, se fosse quadrado. Eu não sei! Só que eu tenho que ver o resultado, pra eu ver quantos que ela queria, pra eu contar os palitos.

Pesquisadora: Então depende da quantidade?

Bia: É!

Pesquisadora: E se uma amiga sua chegasse aqui perguntando sobre a quantidade de palitos se fosse 100, se fosse 200...

Bia: [...] Ela ia fazer a conta e o resultado ia tá aqui.

Pesquisadora: Hum! Então, tem que ser desenhando os triângulos?

Bia: E contando, né!

Extrato 4.30 – Diálogo da pesquisadora com o aluno Beto

DEPOIS DE EXPLICAR A SITUAÇÃO PARA O ALUNO E, ELE RESPONDER AOS ITENS (A) E (B) DA QUESTÃO, A PESQUISADORA PERGUNTA EM RELAÇÃO AO ITEM (C).
PESQUISADORA: ESCREVA COMO VOCÊ FALARIA PARA SEU COLEGA A QUANTIDADE DE PALITOS NECESSÁRIA PARA CONSTRUIR QUALQUER QUANTIDADE DE TRIÂNGULOS.
BETO: SE FOSSE SEPARADO IA USAR TRÊS E, SE FOSSE JUNTOS, UM IA USAR TRÊS E OUTROS DOIS.
PESQUISADORA: HUM! OK! E SE FOSSE ASSIM, MIL TRIÂNGULOS. AÍ, COMO É QUE IA FAZER?
BETO: SEPARADOS?
PESQUISADORA: NÃO. JUNTOS! VAMOS SUPOR QUE SEU AMIGO FOSSE CHEGAR AQUI, ELE FOSSE LHE PERGUNTAR: "E SE FOSSE MIL TRIÂNGULOS? TERIA COMO SABER A QUANTIDADE DE PALITOS?" E AÍ, COMO É QUE VOCÊ IRIA FALAR PARA ELE?
BETO: EU IA DIZER ASSIM: NO PRIMEIRO VAI USAR TRÊS E, NOS OUTROS, DOIS!

O que podemos perceber a partir do trecho da entrevista com a aluna Bia é que ela além de demonstrar não compreender o que é um triângulo, ela também não consegue compreender o padrão de construção dos triângulos (VALE *et al*, 2007). Apesar de fazer a mesma relação que os demais alunos fizeram para os itens (a) e (b) da Q6, Bia possivelmente conseguiu encontrar a quantidade de palitos contando-os. No entanto, o processo de generalização fica comprometido, uma vez que a aluna não consegue reconhecer o padrão de construção dos triângulos e não consegue fazer relação nenhuma entre o número de triângulos e a quantidade de palitos. Comparando os resultados de Bia em relação às questões relacionas às sequências e a essa questão de relação funcional que são semelhantes, já poderíamos esperar que ela não fosse conseguir chegar a uma possível generalização para a situação. Isso pode ser explicado pelo fato da aluna ter apresentado os mesmos resultados para as questões de sequências no que concerne ao usa da contagem como estratégia e, por não conseguir prever termos distantes e não generalizar.

Em relação à resposta do aluno Beto para a Q6c, observamos que ele compreende a regra da sequência de triângulos. Além disso, ele consegue distinguir que, se os triângulos forem construídos separadamente a função que descreve a regra é $f(x) = 3x$, com x representando a quantidade de triângulos e $f(x)$ representando a quantidade de palitos e, se os triângulos forem construídos juntos, vai ser sempre três palitos para o primeiro triângulo e sempre somar mais dois para os demais. Nesse segundo caso, a função que descreve a regra é dada por $f(x) = 2x + 1$, com x representando a quantidade de triângulos e $f(x)$ representando a quantidade de palitos. A partir do que esse aluno apresenta tanto no registro escrito no protocolo quanto no trecho da entrevista feita com ele, é possível afirmar que esse aluno generaliza uma regra para essa função. Essa generalização é feita por meio de palavras (KAPUT, 1999; BLANTON; KAPUT, 2005) como é esperado para a idade e para o ano desse aluno. Além disso, no seu processo de generalização podemos perceber também que Beto compreende a relação de variação e covariação entre variáveis (POST; BEHR; LESH, 1995; PINTO *et al*, 2016).

É importante ressaltar que, independentemente do ambiente em que os alunos responderam o instrumento diagnóstico os alunos apresentaram a possibilidade de generalização de algumas situações. Podemos verificar isso através da Tabela 4.10. Nesse sentido, a generalização independe do tipo de ambiente. O que pode ocorrer é que, a depender do tipo de material manipulativo ou da forma como o problema é apresentado, o aluno pode compreender mais facilmente a situação e conseguir chegar mais rapidamente ao processo de generalização. Em relação à função, fica evidente que os alunos compreendem as relações entre variáveis e identificam principalmente funções de raciocínio proporcional (POST; BEHR; LESH, 1995). Não podemos deixar de relatar que problemas com funções constituem situações difíceis para alunos desses anos de escolaridade (PORTO, 2018; MAGINA; PORTO, 2018). No entanto, afirmamos de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017) e confirmamos de acordo com os dados deste estudo que não podemos retardar a introdução das noções de Álgebra para alunos mesmo nos anos mais elementares da educação básica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo é destinado às conclusões e considerações finais da pesquisa realizada. Nesse estudo tivemos como objetivo investigar as estratégias de resolução utilizadas por estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao lidarem com situações que envolvem sequências, equivalência e relação funcional.

Para tanto, retomaremos de forma breve o percurso percorrido para a realização deste estudo, bem como as etapas vencidas para a sua conclusão. Feito isso, passaremos a sintetizar os principais resultados encontrados de modo que seja possível, a partir deles, responder à pergunta que norteou todo o nosso estudo. Tendo essas conclusões, poderemos sugerir pesquisas futuras que possam complementar o nosso estudo tendo em vista a sua relevância.

Um pouco da nossa trajetória

Ao iniciar as discussões sobre o que poderia ser pesquisado e tendo em vista que essa pesquisa deveria estar atrelada a uma pesquisa maior, qual seja a do "Projeto *Early Algebra*: Mapeamento e Diagnóstico", decidimos que seria feita uma pesquisa de caráter diagnóstico. Sendo assim, o próximo passo foi decidir para quais anos do Ensino Fundamental ela seria voltada. Por isso, decidimos que trabalharíamos com os dois últimos anos que fecham os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Tomadas as decisões sobre como e por onde a pesquisa poderia andar, começamos a organizar e estruturar o nosso estudo. Foi nesse momento que buscamos por leituras que versassem sobre a Álgebra e a *Early Algebra* (em relação às vertentes). Também buscamos fazer uma varredura nos documentos oficiais vigentes no que diz respeito ao ensino da Álgebra no Ensino Fundamental. Embasados nos documentos oficiais, o passo a seguir era procurar por pesquisas nacionais e internacionais que pudessem nos ajudar a entender como os pesquisadores vem discutindo o tema. Tudo isso foi necessário para que pudéssemos elaborar o nosso teste e, posteriormente analisar os resultados obtidos a partir da aplicação dele.

Como metodologia utilizamos o método clínico piagetiano que busca compreender o que o que o aluno faz através da entrevista clínica. Essa entrevista possibilita, por meio da interação e diálogo do pesquisador com o aluno, no momento da aplicação do teste, explicitar os pontos mais marcantes das ações dos alunos que, muitas vezes só aparecem mediante uma conversa informal, como é o que faz parecer o método clínico piagetiano. Sendo assim, o instrumento diagnóstico foi aplicado utilizando dois diferentes ambientes: o papel e lápis e o material manipulativo.

Após recolhidos os dados começamos o processo de análise que levou em consideração as três vertentes da *Early Algebra* e os dois tipos de ambientes de aplicação. Na análise observamos os pontos mais marcantes das respostas oferecidas pelos alunos na resolução das questões em dois ambientes diferentes, bem como as influências desses ambientes nas respostas dos alunos.

Por fim, a partir da análise e de tudo que foi elencado neste estudo, chegamos a algumas conclusões que validam a nossa pesquisa e nos possibilita entender e pensar formas de introduzir conceitos algébricos para os anos mais elementares do Ensino Fundamental impulsionado pelo documento oficial vigente, a BNCC (BRASIL, 2017). Assim sendo, de acordo com esse documento e com o que pesquisamos, sentimos também a necessidade de estender as pesquisas nessa área tendo em vista que tudo isso se configura como algo novo para o ensino de Matemática no país.

Respondendo à questão de pesquisa

Tendo em vista todo o trabalho empreendido por nós a fim de entendermos alguns aspectos sobre a possibilidade de introduzir conceitos algébricos elementares a alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, nos dedicamos a responder a seguinte questão de pesquisa:

- **Quais as estratégias de resolução utilizadas por estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao lidarem com situações que envolvem sequências, equivalência e relação funcional?**

A fim de responder ao referido questionamento, preferimos dividir em três partes e sendo assim, primeiro, trouxemos os pontos mais marcantes observados, a partir dos dados, no que tange à sequência, à equivalência e à relação funcional.

Iniciaremos desse modo, por discutir os pontos mais relevantes do que identificamos em relação à vertente da **sequência**.

Os dados nos mostraram que os alunos, de modo geral, não sentem muitas dificuldades com problemas relacionas às sequências. Eles as respondem com certa facilidade, no entanto, apesar de não sentirem dificuldade, notamos que alguns tipos são mais favoráveis à compreensão por parte deles. No instrumento diagnóstico oferecemos três questões contendo três tipos de sequências. A primeira questão era uma sequência repetitiva icônica, a segunda questão de sequência apresentava uma recursiva icônica e a última era uma sequência recursiva numérica. Entre esses três tipos notamos que a que os alunos mais acertaram foi a sequência repetitiva icônica, seguida pela recursiva icônica. Notamos que os alunos conseguem identificar padrões e regularidades das sequências, no entanto, quando a regra é numa sequência do tipo recursiva isso já se torna mais difícil. Quanto à generalização das sequências, percebemos que os alunos são capazes de generalizar parcialmente. De modo geral, eles conseguem expressar a generalização da sequência, no entanto não conseguem aplica-la para identificar seus termos distantes. Nesse sentido, eles generalizam a partir de elementos próximos e em casos particulares.

Em relação aos anos de ensino em que aplicamos o instrumento diagnóstico, não notamos diferenças significativas quando ao reconhecimento de padrões e regularidades. De certo modo, entendemos que o nível de reconhecimento é o mesmo, no entanto, o que muda de um ano para outro é em relação à possibilidade de generalizar e em relação às estratégias utilizadas. No que se refere à generalização, percebemos que os alunos do 5º ano possuem um raciocínio mais refinado no sentido de prever com mais facilidade termos mais distantes. E em relação às estratégias, percebemos que os alunos (tanto do 4º ano quanto do 5º, porém os alunos do 4º ano fazendo mais uso dessa estratégia) se apoiam muito no processo de contagem e no uso do desenho. Esse pode ser um dos motivos que os alunos não conseguem prever termos mais distantes, por ainda estarem presos à contagem.

No que tange ao tipo de ambiente, tivemos dois deles P&L (papel e lápis) e MM (material manipulativo). Para a vertente da sequência, não observamos uma influência que interferisse no resultado em relação ao tipo de ambiente de aplicação, com exceção da sequência recursiva numérica. Apesar da nossa amostra ser pequena, notamos um número maior de erros na sequência recursiva numérica respondida pelos alunos no ambiente MM. Julgamos que o tipo de material utilizado na adaptação da sequência pode ter provocado dúvidas que conduziu os alunos ao erro.

Desse modo, a partir do que observamos, podemos destacar alguns pontos marcantes a respeito das sequências.

- Os alunos identificam padrões e regularidades;
- Conseguem generalizar, em partes esses padrões, mas apenas para casos particulares e próximos na sequência;
- Se apoiam muito no processo de contagem;
- A adaptação do material para diferentes ambientes influência nas estratégias utilizadas para resolução do problema.

Para dar continuidade, agora apresentamos os pontos mais marcantes do que identificamos em relação à vertente da **equivalência**.

Assim como na vertente da sequência tivemos três problemas, na vertente da equivalência ocorreu o mesmo. Dessa forma, no instrumento diagnóstico apresentamos três problemas que envolviam equações apresentadas na balança de dois pratos e que faziam menção também aos sistemas lineares. As questões eram encadeadas e que o resultado da primeira questão apresentada no teste era usado nas demais questões de equivalência. Assim, o que notamos a partir dos dados do teste como um todo, foi que os alunos tendem a errar mais em situações de equivalência, pois a equivalência não é natural e, portanto, não é tão fácil de ser estabelecida por eles. Embora notamos dificuldades na resolução por parte dos alunos, foi possível identificar o uso das propriedades de equivalência em especial o uso da propriedade transitiva. No tocante às equações, vimos que os alunos conseguem resolver com facilidade situações simples, no entanto, quando envolve situações com ênfase em sistemas lineares a dificuldade se torna bem mais acentuada. Mesmo assim, notamos que apesar desses alunos estarem acostumados a respostas numéricas e únicas para problemas matemáticos, tivemos bons resultados de alunos que concebem mais de uma solução para determinados problemas, como foi o caso dos sistemas que apresentamos em nosso instrumento diagnóstico. É necessário deixar claro que os resultados encontrados para esses problemas, no que tange à equivalência, são referentes às situações apresentadas com o uso da balança de dois pratos. Conforme o que foi discutido nos capítulos anteriores, existem outras formas de apresentar problemas envolvendo equivalência e equações. No entanto, a nossa pesquisa se limitou a estudar problemas que envolvem o recurso da balança.

No que tange aos anos de ensino, não tivemos diferenças significativas do 4º ano para o 5º ano. De modo geral os alunos, tanto de um ano quanto do outro, apresentaram resultados parecidos do ponto de vista da compreensão da equivalência e da correlação entre resultados. Esse último, nos leva a perceber e afirmar que é quando eles utilizam muito propriedade transitiva para resolver os problemas.

No que tange ao tipo de ambiente de aplicação, observamos que ele influencia muito na forma de agir e pensar dos alunos. Nesse caso, ele traz diferenças consideráveis do ponto de vista da aplicação. O fato mais marcante do ambiente P&L é que nele a possibilidade de errar é muito maior em relação ao MM. Além disso, no ambiente P&L só tem o apoio do desenho e no ambiente MM ele pode fazer tentativas e observar o resultado visualmente se a balança está ou não equilibrada. Também, no que concerne o ambiente P&L, o aluno tende a pensar mais numa resposta única para a situação quando se trata de sistemas lineares como foi o caso de duas das questões de equivalência do nosso teste. No ambiente MM, a principal estratégia usada pelos alunos foi a tentativa e erro, uma vez que nesse ambiente eles tem a possibilidade de testar as suas hipóteses. Nesse ambiente, embora eles acertando, nem sempre conseguem relacionar os objetos de um prato com o outro, visto que testaram as hipóteses, mas isso não significa que compreenderam a relação entre os elementos de um prato com o outro. No entanto, quando percebem essa relação eles passam a descobrir as outras possíveis soluções para um mesmo sistema linear automaticamente. Nesse caso, o aluno tende apenas a testar no sentido de confirmar as hipóteses.

É preciso destacar, quanto ao uso dos diferentes materiais, que cada um deles possui suas vantagens e que também influenciam muito na forma de pensar e de agir dos alunos. Por isso, entendemos que cada material tem a sua importância, no entanto é preciso cuidado quando ao uso de cada um. No que percebemos, julgamos que o uso da balança no ambiente MM constitui como um facilitador para o aluno, mas acreditamos que o mau uso dela pode retardar ou mesmo impedir que o aluno possa identificar certas relações que os alunos podem fazer quando estão apenas no ambiente P&L. Por sua vez, o ambiente P&L apesar de ser um ambiente mais propício a levar o aluno a fazer relações mais consistentes, se torna também um lugar mais difícil para resolver esses tipos de problemas. Por isso, acreditamos que o tipo de ambiente que o aluno pode resolver esses problemas depende muito do nível de desenvolvimento cognitivo dele. Além disso, pensamos também que os problemas de equações em balanças de dois pratos podem ser introduzidos com o uso de um material facilitador (como é o caso da balança) e que pode progredir para situações de nível mais avançado (como é o caso de apresentar apenas por meio de desenho no papel).

Tendo em vista as considerações elencadas anteriormente a respeito da vertente equivalência, podemos sintetizar os fatos mais marcantes.

- Os alunos compreendem, de forma limitada, a equivalência no caso particular da igualdade;
- Conseguem relacionar elementos entre membros de equações quando são equações mais simples;
- Conseguem estabelecer e usar propriedades de equivalência, mesmo de forma limitada.
- Identificam mais de uma solução para sistemas lineares;
- O material manipulativo é um facilitador para situações de equações em balanças de dois pratos;
- No uso do material manipulativo a estratégia utilizada é sempre a tentativa e erro.

Passaremos agora a apresentar os pontos mais marcantes do que identificamos a respeito da vertente **relação funcional**.

Assim, como para a sequência e equivalência, no instrumento diagnóstico também tiveram três questões que contemplavam a relação funcional. Duas delas eram semelhantes no que tange à situação contextualizadora, contudo se tratavam de duas funções diferentes: uma delas continha uma variável, e na outra continha três variáveis. A outra situação constituía uma função afim que tenha como base a construção de triângulos por meio de palitos. Nesse caso tivemos dois problemas que envolviam função afim e outro com uma função de três variáveis. Dois desses problemas tinham como base as operações na sua resolução. Eram problemas de função com base aritmética. O outro problema era uma situação de sequência, no entanto nesse problema a ênfase estava na função.

Em relação aos principais pontos, observamos que os alunos tendem a acertar mais problemas que tem como base a aritmética. Nas duas questões que tinham como base as operações, os alunos resolveram os problemas com significativa facilidade, o que os levou ao acerto. Em relação à questão que tinha como base uma situação relacionada com sequência e que valorizava a generalização, o sucesso dos alunos foi menor. Nesse sentido, inferimos que problemas que tem como base a aritmética levam mais ao acerto do que aqueles que exigem que o aluno generalize o raciocínio. Além disso, notamos que nos problemas de cunho aritmético os alunos tendem a resolver usando muito cálculos mentais, que implicitamente fazem uso da adição e multiplicação. Além disso, notamos também que os alunos usam muito a proporcionalidade, principalmente nos problemas que tem relação com sequências.

Vale destacar também que os alunos compreendem noções de variação e covariação. Compreendem a relação de dependência entre variáveis. Essas duas características foram notadas nas resoluções das três questões com ênfase na relação funcional. É importante enfatizar também que os alunos tendem a compreender com muita facilidade problemas que envolvem o raciocínio com proporções e, consequentemente, tendem a entender com certa facilidade funções lineares. Até mesmo o processo de generalização por meio de uma função linear, nos pareceu ser mais fácil para os alunos.

Em relação aos anos de ensino, no caso da relação funcional, tivemos uma notável diferença do 4º para o 5º ano. Percebemos que os alunos do 4º ano identificam com certa facilidade uma função linear, no entanto, ao resolvê-la observamos que eles ainda tendem a usar muito a adição. O que os alunos do 5º ano já preferem usar a multiplicação. Também tem uma notável diferente em relação ao uso da proporcionalidade. Pelo fato de já terem mais facilidade com a multiplicação, os alunos do 5º ano usam mais a proporcionalidade.

No que diz respeito ao tipo de ambiente de aplicação, para as questões que apresentamos houve pequena diferença no que se referente às influências dos ambientes. Notamos que, com o material manipulativo duas das questões causavam uma certa confusão no que diz respeito às quantidades que variavam. Identificamos que os alunos que responderam no ambiente MM compreendiam que o valor final da tigela de açaí ia variar se fossem acrescentadas quantidades por fatia de fruta e não por fruta. As questões que nos referimos são as Q3 e Q8 que podem ser consultadas no Capítulo III. Em relação ao ambiente P&L esse problema não era facilmente identificado, pois a imagem na questão não possibilitava o mesmo tipo de dúvidas que o material manipulável.

Sendo assim, após apresentarmos todas essas considerações concernentes à relação funcional, tentamos sintetizar os pontos mais marcantes.

- Compreendem a variação e covariação numa função;
- Conseguem identificar a relação de dependências entre variáveis;
- Percebem padrões lineares e conseguem generalizados com mais facilidade;
- Problemas que envolvem função afim constituem como difíceis para alunos desses anos;
- Se apoiam muito nas operações de adição e multiplicação;
- Compreendem e usam com certa facilidade a proporcionalidade.

Após identificarmos os pontos mais marcantes de cada uma das vertentes da *Early Algebra*, agora conseguiremos responder a nossa questão de pesquisa: **Quais as estratégias de resolução utilizadas por estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao lidarem com situações que envolvem sequências, equivalência e relação funcional?** Sendo assim, para apontar as estratégias de resolução dos alunos é necessário ressaltar o raciocínio de compreensão das três vertentes aqui mencionadas. Consideramos que só a partir do raciocínio é que os alunos concebem uma estratégia de resolução para os problemas apresentados. Desse modo, podemos afirmar que os alunos conseguem identificar padrões e regularidades, compreendem (de forma limitada) a equivalência (no caso da igualdade) e usam suas propriedades, percebem a variação e covariação de variáveis e a relação de dependência entre elas e, por fim, conseguem generalizar algumas situações a partir de casos particulares. Por assim compreenderem as situações, eles lançam mão de algumas estratégias quais sejam: com frequência recorrem muito à contagem em situações de sequências independentemente do material utilizado; em situações de equivalência na balança de dois pratos com o uso de materiais manipuláveis, recorrem sempre à tentativa e erro; no caso de situações que envolvem a relação funcional, recorrem muito à operações de adição (4º ano) e multiplicação (sobretudo o 5º ano) e, costumam usar muito a proporcionalidade independentemente do tipo de material.

Vale ressaltar que muitas dessas estratégias só foram identificadas por meio das falas oriundas das entrevistas feitas com os alunos no momento de sua resolução. Por isso, percebemos que alunos dos anos iniciais, principalmente aqueles do 4º e 5º ano, apresentam grande possibilidade de compreenderem noções algébricas elementares. Além disso, notamos que eles sentem dificuldades em registrar as suas percepções e ideias. Desse modo, quando os ouvimos percebemos que as ideias são claras, no entanto o registro muitas vezes gera interpretações errôneas. No que tange aos anos, é preciso ter cuidado com o que pode ser ofertado aos estudantes, pois identificamos que alunos do 5º ano possuem uma maturidade cognitiva maior em relação aos alunos do 4º ano. Nesse sentido, acreditamos que as atividades voltadas para a introdução de noções de Álgebra para esses alunos podem acontecer de forma progressiva de tal maneira que, respeitando a idade e a maturidade, eles poderão progredir ano após ano.

Acrescentando ao que foi abordado no parágrafo anterior, muitas informações só foram possíveis de obter através das conversas com os alunos. A partir delas conseguíamos perceber se os alunos compreendiam ou não as situações e como eles agiam a partir do que compreendiam. Além disso, ficou evidente que através da conversa com eles (entrevista), por meio de indagações, os alunos refletiam sobre as situações até compreenderem o que ela pedia e chegar a uma resposta, por vezes, correta. Vale ressaltar que nossa pesquisa é descritiva e com caráter diagnóstico, que não intervém no processo de obtenção dos dados. No entanto, percebemos a partir da forma em que aplicamos o nosso instrumento diagnóstico que os alunos refletiam sobre o que estavam fazendo e, por vezes mudavam de estratégia. Por isso, chegamos a inferir que um trabalho interventivo possivelmente traria resultados positivos ao que estamos investigando.

No que diz respeito aos ambientes, apesar de termos uma amostra pequena e poucas situações para esses alunos resolverem, notamos que em algumas delas o tipo de material não fez diferença. No entanto, não podemos descartar o uso de materiais manipuláveis, pois no caso da equivalência sobretudo daquelas apresentadas por meio de balanças de dois pratos, os resultados com o uso dos materiais foram diferentes. Apesar de existir limitações quanto ao uso da balança, é preciso ter conhecimento de quando e como usá-la.

Pensando em pesquisas futuras

Tendo em vista que a nossa pesquisa é limitada e que estamos inferindo sobre as atitudes de uma pequena amostra, notamos que no caminhar dessa pesquisa, na tentativa de responder à pergunta que norteou este estudo surgiram também outras indagações que neste estudo não temos condições de responder. Por isso, a partir dos novos questionamentos deixamos algumas sugestões para pesquisas futuras. Além disso, a partir da publicação da BNCC (BRASIL, 2017), é preciso urgência em circular informações e alternativas a respeito do tema presente neste estudo, uma vez que se torna obrigatória a introdução dos conceitos algébricos elementares desde o 1º ano do Ensino Fundamental.

Por isso, como primeira sugestão de pesquisa, temos a de estender este mesmo estudo para os demais anos do Ensino Fundamental acontecendo nos mesmos moldes como foi nesta pesquisa. Sendo assim, poderia ser identificado o raciocínio e as estratégias desses alunos no que tange problemas das vertentes da *Early Algebra*. Além disso, pensamos ser relevante este estudo uma vez que envolve o ciclo de alfabetização.

Outra sugestão, a segunda, seria a de fazer uma pesquisa, ainda com caráter diagnóstico, para cada vertente da *Early Algebra* de modo que atingisse alunos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Assim, seria possível compreender como os alunos de cada ano encaram problemas de sequências, equivalência e relação funcional.

Como terceira sugestão, sugerimos um trabalho de intervenção com os próprios alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e o 6º ano dos anos finais. Esse trabalho ajudaria a compreender como eles compreendem as noções de Álgebra ano após ano até chegaram ao 7º ano do Ensino Fundamental que é o ano em que de fato introduz formalmente a Álgebra. Para tanto seria necessário um acompanhamento em larga escala e que a intervenção fosse feita com as três vertentes da *Early Algebra*.

Por último, como quarta sugestão e entendo ela como de grande urgência já que, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017) incluiu a Unidade Temática Álgebra para todos os anos do Ensino Fundamental, seria propor uma pesquisa longitudinal que diz respeito à formação do professor que trabalha com os anos iniciais. Essa pesquisa teria em vista alertar os professores das mudanças e a partir de resultados de pesquisas já feitas proporcionar a eles uma preparação para esse novo desafio. Como proposta para essa formação, poderia ser feita a experiência de acompanhar professores que trabalham com os anos iniciais do Ensino Fundamental na elaboração de atividades e de materiais que seriam trabalhados durante um ano letivo e que pudessem ser agregadas ao plano de curso.

As pesquisas que foram aqui sugeridas somente dão sequência a um trabalho que tem a necessidade de ser feito ao longo dos anos. É notável que alunos dos anos iniciais da Educação Básica tem condições de compreender a Álgebra em seus conceitos mais elementares. No entanto, acreditamos que seja necessário que os resultados dessas pesquisas sejam conhecidos, pois não podemos retardar a aprendizagem da Álgebra mesmo para aqueles que começam a vida escolar.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. **Pensamento Algébrico:** em busca de uma definição. RPEM, Campo Mourão, Pr, v.6, n.10, p.34-60, jan.-jun. 2017

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010.

BITENCOURT, D. V. **Early álgebra na perspectiva do livro didático**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

BLANTON, M. et al. **Early Algebra.** In: VICTOR, J. K. (Ed.) Algebra: Gateway to a Technological Future, Columbia/USA, The Mathematical Association of America, 2007, p. 7 – 14.

BLANTON, M.; KAPUT, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.** Journal for Research in Mathematics Education, V. 36, Nº 5, p. 412–446, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCpublicacao.pdf>. Acesso em: 14 de julho de 2017

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTLE, A. P. **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

BOYER, C.B. **História da Matemática** (Elza F. Gromide, trad.) São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico** Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de Lisboa, Portugal, 2008.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. (Maria Adriana Veríssimo Veronese, trad.). Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 136.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. XVI, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5ª ed. Lisboa: Gradiva Publicações LTDA, 2003.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. O lugar da álgebra no Ensino Fundamental. In: MARTINS, E.; LAUTERT, S. (ORG) **Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores:** Contribuições da Psicologia da Educação Matemática. Editora Autografia. Rio de Janeiro, RJ. 2016.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Powerful Ideas in Elementary School Mathematics. In: **Handbook of International Research in Mathematics Education.** Routledge. New York. 2016.

CARRAHER, D.W.; SCHLIEMANN, A.D.; SCHWARTZ, J. Early algebra is not the same as algebra early. In KAPUT, J; CARRAHER, D.; BLANTON, M (orgs.), **Algebra in the Early Grades.** Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. 235-272, 2008.

CARRAHER, T. N. **O método clínico usando os exames de Piaget**. São Paulo: Cortez, 1998.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal**. Boletim de Educação Matemática**, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 97-126

CIVINSKI, D. D. **Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no ensino fundamental.** Blumenau, 2015. Dissertação de mestrado.

EVES, H., **Introdução à História da Matemática.** Campinas, Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, J. **A construção dos números**. 3ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

FERREIRA, M. C. N. Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise dos documentos curriculares nacionais. **REnCiMa**, v. 8, n. 5, p. 16-34, 2017.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP. Autores Associados, 2007.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL. A. Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**, v,4, n. 1, p. 78-91, 1993.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 4ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GUELLI, C. A.; IEZZI, G.; DOLCE, O. **Álgebra II**. São Paulo: Editora Moderna, 1980

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), **Mathematics classrooms that promote understanding** (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999.

KATZ, Victor. J. **Algebra**: Gateway to a Technological Future, Columbia: MAA Reports, 2007

KIERAN, C. **Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra.** In: COXFORD, A. F.; SHULTLE, A. P. As idéias da álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 104 – 110.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. **Como crianças representam a operação de divisão:** da linguagem oral para outras formas de representação. Temas em Psicologia, v. 7, nº 1, p. 23-36, 1999.

LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio, vol. 2. **Coleção do Professor de Matemática,** SBM, 2012.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, Papiros. 1997 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

LUNA, A. V. A.; SOUZA, C. C. C. F. **Discussões sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 15, número especial, p. 817-835, 2013.

MAGINA, S. M. P.; PORTO, R. S. O. É possível se ter raciocínio funcional no nível dos anos iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. **VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Foz do Iguaçu, PR, 2018.

MERINO, E.; CAÑADAS, M. C.; MOLINA, M. **Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización***.* Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2(1), 2013, pp. 24-40.

MERLINI, V. L.; MAGINA, S. M. P.; TEIXEIRA, C. O que sabe sobre equação, em representação icônica, os que formalmente ainda não sabem? **VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Foz do Iguaçu, PR, 2018.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1982.

PIAGET, J. **A representação do mundo na criança**. Tradução: Rubens Fiúza. Rio de Janeiro: Record, 1079. 318p

PINTO, E.; CAÑADAS, M. C.; MORENO, A.; CASTRO, E. Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de terceiro de educación primaria y sistemas de representación que usan. In: MACÍAS, J. A.; JIMÉNEZ, A.; GONZÁLEZ, J. L.; SÁNCHEZ, M. T.; HERNÁNDEZ, P.; FERNÁNDEZ, C.; RUIZ, F. J.; FERNÁNDEZ, T.; BERCIANO, A. (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XX** (p. 417-426). Málaga, SEIEM, 2016.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: DGIDC.

PORTO, R. S. O. **Early álgebra:** prelúdio da álgebra por estudantes do 3° e 5º anos do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. **A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra.** In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). As idéias da álgebra. (Hygino H. Domingues, trad.). São Paulo: Atual, 1995. p. 89 – 103.

RODRIGUES, I. C.; PIRES, C. M. C. Um mapeamento de teses e dissertações que abordam o ensino e a aprendizagem da álgebra no Ensino Fundamental no Brasil. **REnCiMa**, v.8, n.2, p.162-182, 2017.

RÜTHING, D. Some Definitions of the Concept of Function from John Bernoulli to N. Bourbaki. **The Mathematical Intelligencer**, v. 6, n. 4, p. 72-77, 1984.

SARMENTO, A. K. (2010). A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática. Em L. C. Sales, T. J. Nogueira, S. L. Ramos & C. M. Oliveira (Orgs.), **O Pensamento Pedagógico na Contemporaneidade**. Piauí: VI Encontro De Pesquisa Em Educação da UFPI.

SILVA, D, P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do Ensino Fundamental I. **Revista paranaense de Educação Matemática,** Campo Mourão, v. 3, n. 5, p. 139 – 156, jul. – dez. 2014.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação** – Programa de Pós-Graduação em Educação - UFSCAR, São Carlos, SP, v. 6, n. 1, mai. 2012.

TEIXEIRA, A. C. N. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental:** uma proposta de intervenção. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Ilhéus, BA: UESC, 2016.

THOMPSON, F. M. **O ensino de álgebra para a criança mais nova**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). As idéias da álgebra. (Hygino H. Domingues, trad.). São Paulo: Atual, 1995. p. 79 – 88.

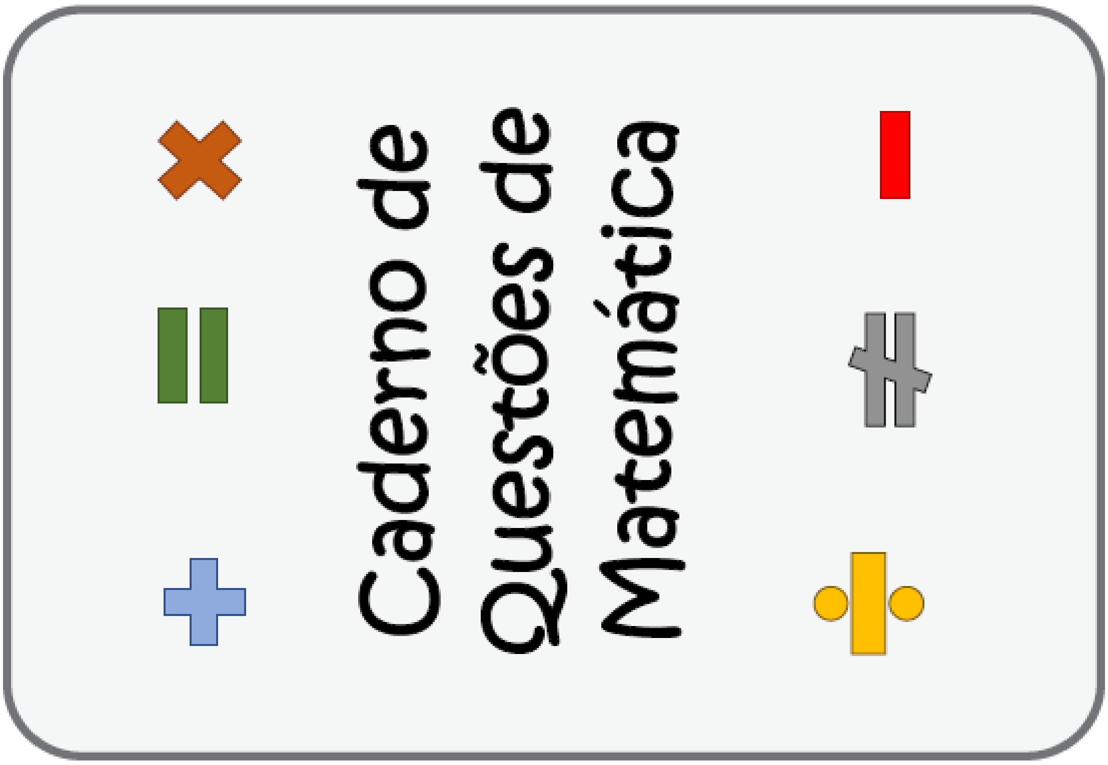
USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.** In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). As idéias da álgebra. (Hygino H. Domingues, trad.). São Paulo: Atual, 1995. p. 23 – 37.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem Álgebra. In: VALE, I., PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Orgs), **Números e Álgebra**. Lisboa: SEM-SPCE. 2007. (pp. 193-211).

YAMANAKA, O.; MAGINA, S. Um estudo da “early algebra” sob a luz da teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. **Anais do IX Encontro Paulista de Educação Matemática**: IX EPEM. Bauru: SBEM/SBEM-SP, 2008, pp. 1-15. (ISBN 978-85-98092-07-2)

APÊNDICES

Apêndice A – Materiais manipuláveis usados na aplicação do Instrumento Diagnóstico

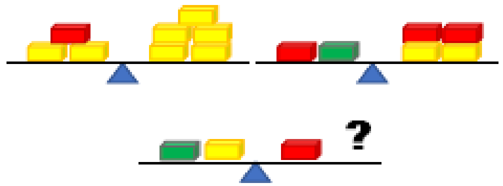

Caderno de
Questões de
Matemática

Nome Completo

Idade

Ano Escolar

QUESTÃO 9: As duas primeiras balanças estão equilibradas. Complete a terceira balança com as caixinhas que faltam de modo que ela também fique equilibrada.



Quantas e com quais cores de caixinhas que você pode colocar no lugar da interrogação para equilibrar a terceira balança?

QUESTÃO 8: Na barraca de Dona Noélia vende açaí na tigela. Lá o valor da tigela de açaí também é de R$ 3,00. Stela e sua mãe foram comprar açaí e lá souberam que cada fruta tem um valor diferente. Lá qualquer quantidade de banana custa R$ 1,00, qualquer quantidade de abacaxi custa R$ 2,00 e qualquer quantidade de kiwi custa R$ 3,00.

a) **Quanto custa uma tigela de açaí com banana, abacaxi e kiwi?**

b) **Quanto custa duas tigelas de açaí uma com abacaxi e banana e outra somente com kiwi?**

QUESTÃO 1: Observe a sequência abaixo:

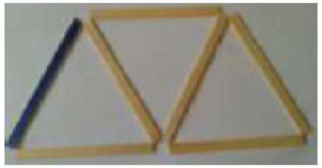
Seguindo este mesmo padrão, responda:

a) **Qual o próximo termo da sequência?**

b) **Qual é o 12º termo da sequência?**

c) **Como você poderia explicar para seu coleguinha como é que se consegue qualquer termo dessa sequência?**

QUESTÃO 6: Numa brincadeira, Alan e Bruno estavam testando como montar triângulos com palitos de picolé, conforme mostra a figura ao lado. Obedecendo essa maneira de montar triângulos, responda:



a) **De quantos palitos eles precisam para fazer dois triângulos?**

b) **De quantos palitos ele precisam para fazer 11 triângulos?**

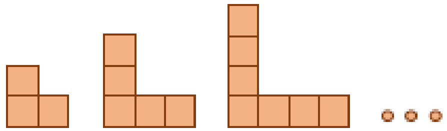
c) **Escreva como você falaria para seu colega a quantidade de palitos necessária para construir qualquer quantidade de triângulos.**

QUESTÃO 3 : Stela estava passeando com sua mãe. Nesse passeio elas resolveram tomar uma tigela de açaí na barraca de Dona MárciaO valor da tigela de açaí depende da quantidade de frutas que é acrescentada. A tigela de açaí custa R$ 3,00 e cadafruta acrescentada é R$ 2,00. Assim, quanto vai custar:

a) **Uma tigela de açaí com banana, abacaxi e kiwi?**

b) **Duas tigelas de açaí uma com abacaxi e kiwi e outra somente com banana?**

QUESTÃO 4: Observe a sequência abaixo:



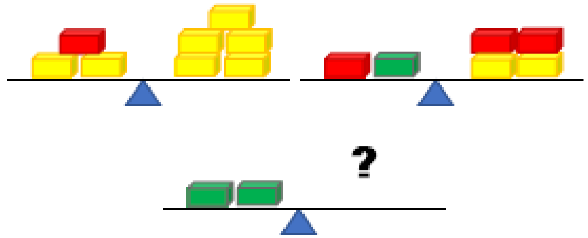
1ª posição 2ª posição 3ª posição

a) **Desenhe a 7º posição.**

b) **Desenhe a 11º posição.**

c) **Você acha que dá para saber a quantidade de quadradinhos do desenho de qualquer posição?**

QUESTÃO 5: As duas primeiras balanças estão equilibradas. Complete a terceira balança com caixinhas de modo que ela também fique equilibrada.



Quantas e com quais cores de caixinhas que você pode colocar no lugar da interrogação para equilibrar a terceira balança?

Apêndice C – TCLE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) Senhor (a)

Eu, Lígia Sousa Bastos, estudante do curso de Pós-Graduação Em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), venho por meio deste pedir a sua autorização para que seu (sua) Filho (a) possa participar, como voluntário, da pesquisa intitulada **"O raciocínio algébrico dos estudantes do 4º e 5º anos do ensino fundamental: um estudo das competências, concepções e estratégias".**

Esse estudo tem como objetivo diagnosticar as competências, concepções e estratégias de estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao lidarem com situações que envolvem o raciocínio algébrico. Desse modo, as implicações dessa pesquisa estão em investigarmos como o ensino de álgebra pode ser levado a crianças ainda nos seus primeiros anos de escolaridade. Assim, justifico que quanto mais cedo esse aluno ter contato com a álgebra, possivelmente ele terá mais facilidade em compreender a álgebra nos anos subsequentes do período de escolaridade regular.

Caso o senhor (a) concorde com a participação do seu (sua) filho (a), ele participará da pesquisa respondendo a um questionário que terá nove questões. Esse questionário será respondido num tempo máximo de 1 hora. Poderá exceder esse tempo, caso seu (sua) filho (a) precise de um tempo maior para responder esse teste. O questionário será respondido em um turno oposto ao que seu (sua) filho (a) estude, pois penso que não devo tirá-lo da sua aula para que o mesmo não tenha prejuízos em relação às aulas. Além disso, seu (sua) filho (a) responderá algumas perguntas feitas por mim durante a resolução do questionário, numa espécie de entrevista. Essas perguntas são necessárias para que eu possa compreender como ele (a) pensou para chegar à resposta dada. Por fim, esta entrevista será filmada. No entanto, respeitará a imagem do seu (sua) filho (a) de modo que a única imagem dele que aparecerá será das mãos no momento em que ele (a) estiver respondendo ao questionário.

Pode acontecer de seu (sua) filho (a) se sentir cansado (a) durante a aplicação do instrumento diagnóstico. Também pode ocorrer e, não posso deixar de citar o fato de que seu (sua) filho (a) estará respondendo ao instrumento em um horário oposto ao que ele (a) estuda. Desse modo, ele poderá se sentir constrangido por não estar no horário normal de seu estudo. Além disso, seu (sua) filho (a) pode se sentir constrangido também por estar suas mãos estarem sendo filmadas. No entanto, para que sejam minimizados os constrangimentos, a pesquisadora atuará como um membro da escola para que ele (a) se sinta à vontade.

Apesar dos riscos citados acima juntamente com a forma de amenizá-los, essa pesquisa poderá também contribuir para a aprendizagem do seu (sua) filho (a) no momento em que ele estiver participando. Dessa forma, o questionário que ele (a) responderá constituir-se-á de situações que poderão auxiliar no desenvolvimento do raciocínio algébrico. Por mais que o questionário não seja constituído de situações de um conteúdo específico da matemática, as situações que seu (sua) filho (a) responderá o (a) ajudará em outras situações que envolve o raciocínio algébrico.

Devemos deixar claro que o (a) senhor (a) poderá pedir maiores esclarecimentos sobre a condução desta pesquisa a qualquer momento. Além disso, o senhor (a) tem o direito de desistir desse compromisso a qualquer momento. Para isso basta avisar à pesquisadora para que este termo seja devolvido e, assim cancelado o acordo estabelecido por ele. Também é importante informar que não será penalizado pelo fim do compromisso caso ele venha a acontecer.

Garantimos ao (à) senhor (a) que esta pesquisa não lhe trará nenhum gasto. E caso isso venha acontecer faremos o ressarcimento destes gastos. Além disso, garantimos ainda a indenização dos possíveis danos que esta pesquisa pode ocasionar com a participação do seu (sua) filho (a) como voluntário nela. Além disso garantimos total sigilo das informações e o anonimato do seu (sua) filho (a).

Caso sinta a necessidade de mais informações o (a) senhor (a) poderá procurar a pesquisadora na Rua Manoel Joaquim de Souza, nº 173, Loteamento Juvenal, Poções – BA CEP: 45260 – 000. Também pode procurar através do telefone (77) 988189148 ou através do e-mail: ligiasousabastos@gmail.com. [22]

[22] Esta pesquisa teve os aspectos relativos à Ética da Pesquisa envolvendo Seres Humanos analisados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Santa Cruz. Em caso de dúvidas sobre a ética desta pesquisa ou denúncias de abuso, procure o CEP, que fica no Campus Soane Nazaré de Andrade, Rodovia Jorge Amado, KM16, Bairro Salobrinho, Torre Administrativa, 3º andar, CEP 45552-900, Ilhéus, Bahia. Fone (73) 3680-5319. Email: cep_uesc@uesc.br. Horário de funcionamento: segunda a quinta-feira, de 8h às 12h e de 13h30 às 16h.

Agradecemos a sua colaboração.

____

Pesquisadora: Lígia Sousa Bastos
E-mail: ligiasousabastos@gmail.com

____

Prof. Dra. Vera Lúcia Merlini
E-mail: vera.merlini@gmail.com

Eu, ____, responsável pelo aluno ____, autorizo a participação deste na pesquisa intitulada **"O raciocínio algébrico dos estudantes do 4º e 5º anos do ensino fundamental: um estudo das competências, concepções e estratégias"** agora que estou ciente dos procedimentos da pesquisa, dos seus possíveis riscos e benefícios. Além disso, me foi garantido que poderei desistir da participação da pesquisa a qualquer momento sem danos, bem como da participação do meu (minha) filho (a).

____

Assinatura do responsável

Ilhéus, _____/______/_______