UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – PPGEM

JOABY DE OLIVEIRA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA VOLTADA PARA A DEFINIÇÃO DE POLÍGONO NO SEXTO ANO

ILHÉUS – BA
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICA – DCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – PPGEM
GRUPO DE PESQUISA ENSIO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA EM ABIENTE COMPUTACIONAL – GPEMAC

JOABY DE OLIVEIRA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA VOLTADA PARA A DEFINIÇÃO DE POLÍGONO NO SEXTO ANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, como pré-requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gilson Bispo de Jesus.

ILHÉUS – BA
2019

S586 Silva, Joaby de Oliveira.
Uma sequência didática voltada para a definição de polígono no sexto ano / Joaby de Oliveira Silva. – Ilhéus, BA: UESC, 2019.
210f. : il.

Orientador: Gilson Bispo de Jesus
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM
Inclui referências e apêndices.

1. Polígonos. 2. Modelagem de informação da construção. 3. Didática. 4. Software educacional. I. Título.

CDD 516.15

JOABY DE OLIVEIRA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA VOLTADA PARA A DEFINIÇÃO DE POLÍGONO NO SEXTO ANO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática, aprovado em 14 de Fevereiro de 2019, pela banca examinadora constituída pelos professores doutores:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gilson Bispo de Jesus
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Orientador

Prof.ª. Drª. Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana
Universidade Estadual de Santa Cruz
Examinadora Interna Convidada

Prof.ª. Drª. Maridete Brito Cunha Ferreira
Universidade do Estado da Bahia
Examinadora Externa Convidada

ILHÉUS – BA
2019

Aos meus pais Orlando e Rita.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que colocou e tem colocado pessoas no meu caminho que tornaram tudo isso possível. Assim como um conjunto de pontos são alinhados para formar uma semirreta, assim diversas pessoas foram dispostas em meu caminho para formar a trajetória da realização desse meu desejo (tornar-me mestre) fosse possível.

Sem dúvida que dois pontos se destacam nessa semirreta, meus pais Rita e Orlando, que além de serem meu ponto de partida, são também meu ponto de referência.

Embora uma semirreta seja determinada por dois pontos (meus pais), para o traçado dessa minha trajetória acadêmica foram imprescindíveis infinitos pontos, dos quais destaco meus professores do Colégio Estadual Reitor Edgard Santos, onde cursei toda minha Educação Básica.

Essa semirreta se estende infinitamente e intersecta em diversos pontos a curva cheia de pontos de inflexão que foi minha graduação na UEFS. Onde estendo esses agradecimentos à Prof.ª. Andreia, ao Prof. Luiz Márcio e a todos os professores do GCMM, com os quais adquiri o desejo de melhorar a cada dia como professor.

Nesse anseio por aperfeiçoamento constante, tive a graça divina de tangenciar a trajetória de pessoas como a Prof.ª Maria Auxiliadora, Prof. Jonson Dias e ao colega Paulo pela leitura do pré-projeto de pesquisa. Agradeço a Isabela, que me acolheu em sua casa na véspera da prova.

Nesse ponto ganho presentes, que é meu Orientador Prof. Gilson e meus colegas de turma Vívian (aqui você é a primeira), Fabiano (autor da frase: "Joaby sendo Joaby") e Lígia (minha lindíssima, minha boy, minha cremosa, minha namoradíssima, ..., ela que é o superlativo absoluto sintético dos meus sentimentos), que levarei do PPGEM para vida!

Jamais deixaria de agradecer aos colegas do PPGEM Jadson, Marcus, Salvador, Daiane, Tamiles e Luana, que me mostraram o caminho das pedras dentro do programa. Saudades dos cafés noturnos na casa de Marcus!

Agradeço a Rafael, por compartilhar a sofrência logo de manhã cedo, à UESC e ao PPGEM, que possibilitaram conhecer boa parte dessas pessoas, à CAPES pela bolsa de mestrado, sem a qual essa realização não seria possível, financeiramente falando. Muito obrigado, integrantes do GPMAC, pelos aprendizados!

Sou grato à direção e corpo docente do Colégio Municipal Alexandre Porfírio do município de Poções-BA e da Escola Estadual Almeida Sampaio. E novamente...

Obrigado Deus por todos teus benefícios!

EPÍGRAFE

> “A Geometria é uma linguagem de caráter matemático pela qual o universo aceita ser escrito.”
>
> Carlos Tomei

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA VOLTADA PARA A DEFINIÇÃO DE POLÍGNO NO SEXTO ANO

RESUMO

Esta dissertação relata uma investigação que teve por objetivo analisar o processo de construção da definição de polígono mediado pelo uso do *software* GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental. Para isso, olhamos para o tema da pesquisa pelas lentes da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria Antropológica do Didático. Em seguida, trilhamos o percurso metodológico da Análise Institucional & Sequência Didática, no qual fizemos a análise do livro *Os Elementos* de Euclides, documentos oficiais e livro didático. Baseados nessas análises, desenvolvemos, implementamos e analisamos uma Sequência Didática que visava auxiliar alunos do 6º ano no desenvolvimento da definição de polígono. Por meio dessa investigação, identificamos duas concepções: polígono como região e polígono como linha. Também observamos três caminhos para a construção da definição de polígono na literatura específica sobre Geometria: definir triângulo; definir região plana convexa; e definir linha poligonal. A partir desses e de outros resultados elaboramos uma Sequência Didática composta de quatorze atividades que abordam temas desde a relação de ponto e reta até a definição dos quadriláteros notáveis. Nesta sequência, utilizamos com principal recurso didático o *software* GeoGebra, o qual propiciava uma gama de possíveis explorações de desenhos dinâmicos, os quais geravam fenômenos visuais que, por vezes, foram interpretados como atributos definidores dos objetos geométricos estudados. O processo de construção da definição de polígono mediado pelo GeoGebra começa pelo reconhecimento de elementos (pontos, retas, etc.) geométricos no ambiente dinâmico. Foi por meio da ação sobre esses objetos, reunidos em construções diversas, que os alunos, com o auxílio do professor, descobririam características que se constituíram como atributos definidores para a construção da definição de polígono.

Palavras-chave: Polígono. Construção De Definição. Sequência Didática. GeoGebra.

A DIDACTIC SEQUENCE FOCUSED ON THE DEFINITION OF POLYGON IN THE SIXTH YEAR

ABSTRACT

This dissertation reports an investigation that had as objective to analyze the process of construction of the definition of polygon mediated by the use of GeoGebra *software* in the 6th year of Elementary School. For this, this research was carried out based on the Theory of Didactic Situations and the Anthropological Theory of Didactics. We traced the methodological course of Institutional Analysis & Didactic Sequence, in which we did the analysis of the book The Elements of Euclid, official documents and textbook. Based on these analyzes, we developed, implemented and analyzed a Didactic Sequence that aimed to help students in the 6th year in the development of polygon definition. Through this investigation, we identify two conceptions: polygon as region and polygon as line. We also observed three ways to construct the definition of polygon in the specific literature on Geometry: define triangle; define flat convex region; and define polyline. From these and other results, we elaborated a didactic sequence composed of fourteen activities that deal with themes ranging from the point and line relationship to the definition of remarkable quadrilaterals. In this sequence, GeoGebra software was used with the main didactic resource, which provided a range of possible explorations of dynamic drawings, which generated visual phenomena that were sometimes interpreted as defining attributes of the studied geometric objects. The process of constructing the polygon definition mediated by GeoGebra begins with the recognition of geometric elements (points, lines, etc.) in the dynamic environment. It was through the action on these objects, combined in different constructions, that the students, with the aid of the teacher, would discover characteristics that were constituted as defining attributes for the construction of the definition of polygon.

Keywords: Polygon. Definition Construction. Didactic Sequence. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EM	Educação Matemática
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
EB	Educação Básica
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TTD	Teoria da Transposição Didática
TSD	Teoria das Situações Didáticas
SD	Sequência Didática
AI&SD	Análise Institucional & Sequência Didática
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
TCL	Temo de Consentimento Livre Esclarecido
OM	Organização Matemática
OD	Organização Didática
EF	Ensino Fundamental
EG	Ensino de Geometria

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 A geometria em minha vida

Diversos fatos do cotidiano influenciaram o meu[1] aprendizado sobre objetos geométricos. Posso citar como exemplo o trabalho do meu pai com marcenaria. Ou seja, ajudá-lo, mesmo que esporadicamente, colocou-me em constante contato com diferentes formas e unidades de medidas, e assim, desenvolvi uma boa relação com a “geometria”.

Essa relação amistosa com os saberes geométricos advém de uma série de situações vividas que colocaram em cheque saberes da matemática escolar já estudados. E outras situações deram significado a princípios matemáticos que, até então, não tinham sentido fora da sala de aula para mim. Contudo, acabarei agora com essas citações vagas e generalistas sobre minhas experiências cotidianas com a marcenaria que contribuíram significativamente para minha formação matemática e, nos próximos parágrafos, apresentarei dois exemplos reais.

Hoje em dia, a grande maioria dos marceneiros, que faz móveis por encomenda, trabalha quase que exclusivamente com MDF[2]. Porém, no fim dos anos 1990 e início dos anos 2000, ainda se utilizava majoritariamente a própria madeira na fabricação. Foi nesse período que eu tive meus primeiros contatos com as práticas dessa profissão. Dentre essas práticas, está a compra do material. E um dos principais materiais, a madeira, era comprada por metros cúbicos. Esse material vinha em tábuas nem sempre alinhadas.

Foi essa falta de alinhamento em uma tábua, que estava visivelmente retorcida, que me deixou intrigado. Então, questionei meu pai sobre como é que ele sabia que ali tinha a quantidade de madeira que ele comprou na madeireira. Eu já tinha aprendido na escola como calcular volumes de prismas retangulares, e nesse processo já tinha ouvido a professora comentar sobre o Princípio de Cavalieri. Contudo, a forma daquela tábua não se encaixava no modelo mental dos sólidos geométricos que eu conhecia e sabia calcular o volume. Assim, meu pai me mostrou usando uma trena que, mesmo estando curvada, a tábua tinha uma largura (25cm). Do mesmo modo, me fez perceber que a espessura era a mesma (4cm) em toda sua extensão. Além disso, ela tinha um comprimento (250cm). Para finalizar, ele disse que apenas

[1] Nesta primeira seção, escreveremos na primeira pessoa do singular, por se tratar de histórias vividas pelo autor.
[2] É sigla da expressão da língua inglesa “Medium Density Fiberboard” ou “Fibra de Média Densidade”, que é um material oriundo da madeira fabricado com resinas sintéticas.

multiplicava essas medidas e assim sabia a quantidade de madeira em cada tábua e depois somava os volumes.

Tem alguma coisa errada aí! Esse foi meu pensamento na hora. Passado algum tempo, vi em um livro didático a parte que falava sobre o Princípio de Cavalieri. Foi aí que descobri que meu pai aplicava esse princípio sem sequer saber que ele existia. De fato, se seccionarmos a tábua, mencionada no parágrafo anterior, teremos secções retangulares de dimensões 25cm X 4cm. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, o volume da tábua é o mesmo de um prisma com as mesmas dimensões da base, cuja altura seja igual ao comprimento da tábua (250cm).

Assim, temos que um princípio geométrico fundamental para o cálculo de volumes – o qual constitui um teorema[3] importante dentro cálculo de volumes por meio de Integrais Múltiplas – que fundamenta uma das práticas profissionais cotidianas de um marceneiro. Eu poderia me dar por satisfeito com este exemplo. Porém, sinto-me tentado a apresentar mais uma situação para mostrar que este não é um exemplo isolado nesta profissão. Desse modo, nos parágrafos que seguem é apresentado um exemplo do uso da geometria plana para resolver um problema comum na marcenaria.

Uma cliente solicitou que fosse feita uma prateleira para ser fixada no encontro de duas paredes de sua sala. No entanto, essas paredes não formam entre si um ângulo reto, o qual seria facilmente reproduzido na marcenaria com o uso de um esquadro – ferramenta comum em uma marcenaria. Então, como reproduzir o ângulo da parede durante a fabricação da prateleira na marcenaria? Muito simples! Basta pegar um pedaço de papelão e fazer um molde do ângulo entre as paredes. Porém, foi a ausência de um material para tirar o molde do ângulo entre as paredes que fez essa situação se tornar interessante para mim naquele momento. E mais uma vez, uma trena resolveu o problema e me deixou intrigado.

A solução para o problema, apresentada por meu pai, foi a seguinte. Ele mediu do canto da parede uma certa distância e fez um pequeno sinal com uma caneta. Depois, fez o mesmo procedimento na outra parede, sendo que ambos os pontos estavam mais ou menos à mesma distância do chão (determinando um plano paralelo ao plano do chão). Por fim, mediu a distância entre os sinais feitos em ambas as paredes, obtendo assim as medidas dos lados de um triângulo, que foram devidamente anotadas em sua mão. Como é que as medidas dos lados desse triângulo vão ajudá-lo a reproduzir na marcenaria a inclinação relativa (ângulo) entre essas duas paredes?

[3] O Princípio de Cavaliere é apresentado em Marsden e Tromba (2004, p. 312 e 313) como um teorema que generaliza a técnica de cálculo de volumes por secções transversais.

A Geometria Euclidiana Plana tinha a resposta para meu questionamento, por meio da congruência de triângulos. Mais especificamente, um triângulo é dito congruente a outro quando se pode estabelecer uma relação entre os vértices de tal forma que os lados dele sejam ordenadamente congruentes aos lados do outro e o mesmo para os ângulos. A partir dessa noção de congruência, é possível listar alguns casos, que contêm condições mínimas, as quais garantem a congruência entre dois triângulos. Um desses casos é “se dois triângulos têm ordenadamente congruente os três lados, então esses triângulos são congruentes” (DOLCE; POMPEO, 1993a, p. 42). É por causa dessa característica dos triângulos que, com as informações coletadas por meu pai, é possível reproduzir na marcenaria o mesmo triângulo (ângulos congruentes) que serve de modelo para transportar o ângulo da prateleira encomendada.

Tantas outras situações semelhantes a estas despertaram em mim certa vontade de estudar geometria e matemática como um todo. Por conta desse desejo, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana. Durante o período desse curso, participei do Grupo Colaborativo em Modelagem Matemática[4], no qual desenvolvi planos de trabalho fundamentados no ensino de geometria por meio da modelagem. Desse modo, no período da graduação, fui amadurecendo e aprofundando cada vez mais os meus saberes e interesse pela geometria, tanto pelos conteúdos em si, quanto pelo seu ensino. E, com respeito ao ensino da geometria, apresentamos na próxima seção a problemática que motivou essa pesquisa.

1.2 Problemática

A preocupação com os métodos empregados no ensino da Matemática, aliada à atenção dada ao seu aprendizado por alguns estudos da psicologia desenvolvidos no início do século XX, podem ter estimulado o surgimento da Educação Matemática (EM). Essa preocupação e esforços justificavam-se pela necessidade de adequar o ensino da matemática as necessidades sociais e econômicas vigentes na época.

Diante dessa necessidade de adequação do ensino da matemática, na década de 1960, foi promovida uma reforma educacional com relação aos saberes matemáticos que deveriam ser ensinados, conhecida como Movimento da Matemática Moderna (MMM) (FIORENTINE;

[4] Grupo de extensão fundado no ano de 2007, que era vinculado a Pró-reitoria de Extensão da UEFS. Maiores informações acessar: <http://colaboracaoprofessores.blogspot.com.br>.

LORENZATO, 2012). Este movimento é apontado como um dos responsáveis pelo estigma de ter se abandonado o ensino de Geometria. Esse abandono é apontado como o princípio dos problemas contemporâneos relacionados ao ensino deste campo da matemática. Contudo, o MMM trouxe para o âmbito internacional, discussões acerca da Educação Matemática (op. cit., 2012). Mas por que é importante estudar geometria?

A primeira resposta que se costuma dar para esta pergunta é de caráter empirista, baseada nas aplicações da geometria no cotidiano. Por exemplo, olhemos para o que está à nossa direita e tentemos descrever para outra pessoa tudo o que podemos ver. É bem possível que apareçam nessa descrição as formas dos objetos que visualizamos. Essas formas, bem como todo o espaço, são os objetos de estudo da geometria enquanto campo da matemática. Talvez por isso, muitos professores, estudantes de matemática, até mesmo pessoas que se dedicam a outras áreas profissionais, dizem que "a matemática está em todos os lugares". Se essa afirmação é verdadeira, a geometria é, sem dúvida, a principal responsável por sua veracidade. Isso porque, o mundo que nos cerca está tomado por objetos que possuem formas as quais os modelos podem ser estudados pela geometria. Acrescente-se a esse rol das potenciais contribuições para a formação do indivíduo que, o estudo da geometria pode desenvolver a capacidade de se localizar no espaço e de planejar intervenções nele sem ter necessidade de vê-lo concretamente.

A geometria vista assim, como o campo da matemática responsável pelo estudo do espaço e das formas presentes nele, apresenta uma relação muito próxima entre os seus objetos de estudo e os objetos do nosso cotidiano. Ou seja, as noções elementares da geometria têm um caráter bastante intuitivo. E essa instintividade e proximidade com o mundo material devem, e são utilizadas no processo inicial de aprendizagem da geometria. Inclusive, documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem que, o estudo dos temas contidos no bloco Espaço e Forma seja iniciado por meio dos objetos tridimensionais, e só depois os bidimensionais, pois estes últimos exigem a abstração de uma das dimensões (BRASIL, 1998).

Com isso, vemos que os processos de ensino e de aprendizagem da geometria seguem um caminho que conduz a uma menor dependência dos objetos do mundo físico, porém sem perdê-los completamente de vista. No entanto, esta é apenas uma das especificidades relacionadas ao ensino e a aprendizagem de geometria. E mesmo após ter sido feita esta transição do espaço para o plano, os aprendizes podem se deparar com diversos problemas para estabelecer uma relação com os conceitos geométricos, por exemplo, o reconhecimento de figuras geométricas apenas por uma única representação[5].

No contexto da problemática do ensino da geometria plana, Laborde e Capponi (1994) discorrem sobre os conceitos de desenho e de figura e da importância desta distinção para o ensino de geometria. Segundo esses autores, o desenho é um ente que depende principalmente do suporte (papel, quadro, tela, etc.) no qual ele é construído. Sua principal função é representar, trazer para o mundo dos sentidos (tato ou visão), algo que está no campo das ideias. Enquanto que a figura é um ente composto por duas dimensões: representante e propriedades. Diante disso, pode-se identificar dois tipos de trabalhos no ensino da geometria: o trabalho sobre o desenho e o trabalho sobre a figura. Assim, Laborde e Capponi (1994) afirmam que negligenciar o trabalho sobre a figura pode constituir uma barreira para a aprendizagem em geometria por parte dos alunos.

Dessa forma, ao pensarmos no processo de ensino sobre os objetos geométricos, devemos dar especial atenção as propriedades, ou seja, as características que os diferenciam entre si. Porém, mesmo antes de nos aprofundarmos na problemática relativa ao ensino de um objeto geométrico específico, podemos nos questionar acerca de quais elementos do saber geométrico deveriam ser ensinados na escola. Ainda mais, quais desses objetos devem ser "dominados" pelos alunos, para que eles possam ter as ferramentas necessárias para resolverem os problemas cotidianos.

Ao buscarmos resposta para essas indagações e, tendo em vista a constituição da matemática de modo geral, notamos que todo saber englobado por ela foi desenvolvido por meio de axiomas, definições[6] e teoremas. Com respeito a relação entre estes elementos e o ensino de matemática, Pais (2002) aponta uma tendência de memorização deles e, consequentemente, deriva desse tipo de ensino o simples uso de modelos para resolução de problemas, em lugar da compreensão dos conceitos envolvidos nesse processo.

Com respeito às definições, o trabalho não é difícil apenas para o aluno, mas também para o professor. Essa dificuldade reside na necessidade do uso de termos técnicos e de uma linguagem significativamente concisa para a escrita das definições. Acrescente-se a isso, fato de exigir uma composição de uma imagem (mental) que represente um conceito (DE VILLIERS; GOVENDER; PATTERSON, 2009). Diante destas dificuldades, o professor tende a apresentar as definições em seu formato pronto e acabado. Essa forma de trabalho força o

---

[5] Pais (2000, p. 4) chama essas representações de "configurações geométricas", as quais são apresentadas fixadas "em uma posição particular".

[6] É uma formalização do conceito (PAIS, 2002, p. 15).

aluno a limitar-se a simples memorização, a ter uma visão de que essa definição foi algo inventado por alguém e não uma propriedade observada durante o processo de estudo de um objeto matemático. Quando restringimos estas ideias para a geometria, podemos nos perguntar, por exemplo, sobre quais são e como são definidos os objetos da Geometria Euclidiana Plana na Educação Básica (EB).

Contudo, se analisarmos os documentos oficiais que organizam a EB, notaremos que são muitos os objetos e, consequentemente, seria impossível analisar como todos eles são definidos e como estas definições são utilizadas. Dentre estes objetos estão os polígonos, os quais, por vezes são apresentados como sendo uma linha e, por vezes como uma região do plano. Por exemplo, Moise e Downs (1971, p. 271) define polígono como sendo "a reunião de um número finito de regiões triangulares, em um plano, de tal modo que, se duas se interceptam, a interseção é um ponto ou um segmento", enquanto que Castrucci (1978, p. 62) escreve que "dada a sequência de pontos (A_1, A_2, ..., A_n), onde três pontos consecutivos são não-colineares [...] chama-se polígono ao conjunto $[A_1\ A_2] \cup [A_2\ A_3] \cup ... \cup [A_{n-1}\ A_n] \cup [A_n\ A_1]$". Assim, vemos que, para Moise e Downs (1971) os polígonos são regiões planas enquanto que para Castrucci (1978) este mesmo objeto matemático é a união de um conjunto de segmentos, ou seja, uma linha no plano.

Diante disso, podemos nos questionar a respeito de qual é a real natureza dos polígonos (linha ou região), e se essa diferença aporta algum prejuízo (gera inconsistência teórica) para a aprendizagem de outros objetos geométricos. E ainda, como se dá o processo de definição deles nos livros didáticos do Ensino Fundamental (EF) e em livros acadêmicos? São dadas prontas ou encontramos um processo de construção dessas definições? E sobre as definições relacionadas com a de polígono, elas sofrem alguma consequência, por exemplo, é correto falar "área do polígono", ou "perímetro do polígono"? É de suma importância focarmos não só na definição, mas também no processo de construção dela, pois a definição não expressa o conceito, que está sendo posto em jogo, em sua plenitude (PAIS, 2002).

Referente ao processo de definição, ou mais precisamente, sobre a definição de polígonos convexos há um fato que nos chamou a atenção: os polígonos convexos possuem várias definições. Por exemplo, Lima (2007), apresenta três definições para este mesmo objeto matemático e demonstra a equivalência dessas definições. Além disso, esse mesmo autor afirma que, a depender do contexto da utilização, uma ou outra definição será considerada a mais adequada. Assim, notamos a existência do que Zaslavsky e Shir (2005) chamam de definições alternativas, as quais são construídas por meio de características opcionais (ou secundárias) de um objeto matemático.

Essa possibilidade de definições alternativas parece ser usada para diferenciar as definições usadas em níveis educacionais distintos. Por exemplo, podemos encontrar na literatura autores como Morgado et. al. (1973) e Chavante (2015) que também apresentam definições diferentes para o mesmo objeto matemático, sendo este último um livro didático do 6º ano do Ensino Fundamental. Essas diferentes formas de definir só são possíveis graças a variação da linguagem e do vocabulário empregados nela. Sobre a importância da linguagem empregada na definição, Aires et. al. (2015, p. 155) afirmam que esta deve ser "comum aos intervenientes no processo de ensino e aprendizagem, já que não é possível definir um conceito se a linguagem utilizada não for compreendida".

Diante dessa problemática sobre a definição de polígono e da importância da linguagem empregada nelas, podemos nos questionar: Qual é a forma mais adequada para se trabalhar com a definição de polígono com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental? Como desenvolver essa definição em sala de aula com esses alunos? Será que a linguagem (termos) utilizada não acarreta problemas com definições relacionadas aos polígonos no futuro? Essa multiplicidade de definições para um mesmo objeto é boa ou ruim para o desenvolvimento cognitivo dos alunos? Em que medida o meio utilizado influencia no processo de construção da definição de polígono no 6º ano?

1.3 Justificativa

Com respeito ao "meio" mencionado na última pergunta da seção anterior, estamos nos referindo basicamente aos ambientes papel e lápis[7] e a ambientes computacionais[8] de geometria dinâmica, como é o caso do *software* GeoGebra. O primeiro ambiente é, sem dúvida, o mais utilizado, pois a escrita sobre uma superfície (pedra, argila, papel, etc.) com algum objeto (talhadeira, caneta, lápis, etc.) vem sendo desenvolvido e modificado desde a invenção da escrita pelo homem. O meio computacional, que tem origem nas últimas décadas do século passado, tem agregado novas formas de se representar e de manipular essas representações. Com este novo ambiente, tanto o escrever quanto o desenhar tornam-se processos muito mais dinâmicos no sentido que os produtos dessas ações podem ser corrigidos, modificados ou

[7] Um ambiente PAPEL/LÁPIS é um espaço usual de estudo constituído por ferramentas como: papel, lápis, caneta, borracha, etc. O quadro, o piloto ou giz também se enquadram nesse ambiente. **Fonte:** GPMAC, Disponível em <https://sites.google.com/site/gpemac/Home>, acessado em 17 de jun. de 17.

[8] Um ambiente COMPUTACIONAL é o espaço virtual de estudo constituído de ferramentas como: o computador, o software, a internet, a calculadora, etc. **Fonte:** GPMAC, Disponível em <https://sites.google.com/site/gpemac/Home>, acessado em 17 de jun. de 17.

reproduzidos com muito mais agilidade. Cientes das potencialidades dessa nova forma de registro, os pesquisadores em Educação Matemática vêm desenvolvendo uma série de investigações sobre como essas tecnologias podem ser implementadas nas aulas de matemática.

Neste contexto, as construções geométricas feitas no GeoGebra apresentam a potencialidade de serem manipuladas, revelando para o usuário propriedades por meio da observação de características variantes e invariantes. Essa potencialidade do GeoGebra vem sendo utilizada em pesquisas sobre o Ensino de Geometria que abordam o tema polígonos (LOUREÇO, 2014; RAMIRO, 2014; AFONSO; HALL; MARTINS, 2013; BATTIST; NEHRING, 2014). Também o ambiente papel-lápis é um recurso tecnológico amplamente utilizado (MARTINEZ; GIRONEZ, 2013; OLIVEIRA; PALIS, 2011).

A maioria dessas pesquisas realizadas nos dois ambientes têm como objeto de pesquisa os quadriláteros, como é o caso de Costa e Santos (2016) que trabalharam com os quadriláteros notáveis e de Aires et. al. (2015) que abordam o conceito de quadrado. No entanto, poucas pesquisas se debruçaram de fato sobre o desenvolvimento do conceito de polígono. Essa afirmação baseia-se em uma pesquisa que realizamos no portal de periódicos da CAPES utilizando o termo “polígono” obtivemos como resultado 3313 trabalhos, todavia, a maioria estava relacionada com o conceito de polígonos ecológicos encontrado em estudos do campo da Biologia. Ao refinarmos a busca acrescentando o termo “geometria”, obtemos 154 trabalhos.

Dentre estes, encontramos o trabalho de Proença e Pirola (2009) que ao pesquisarem sobre o conhecimento conceitual sobre polígonos e poliedros que alunos do Ensino Médio possuem, constataram que a maioria não sabia definir, ou até mesmo confundiam os conceitos polígonos e poliedros. Esse resultado é no mínimo preocupante, uma vez que os diversos tipos de polígonos convexos e suas propriedades vão ocupar boa parte dos trabalhos em geometria a partir do 6º ano.

O fato de que não é incomum encontrarmos alunos da Educação Básica que confundam os conceitos de perímetro e de área, pode ser uma possível consequência dessa dificuldade de distinguir os conceitos de polígono e poliedros. Essa confusão pode decorrer de um processo de definição falho. Saber distinguir o que é o comprimento da linha poligonal (perímetro) da medida associada a região do plano delimitada por uma linha poligonal (área) é o primeiro passo para evitar a confusão.

Acreditamos que o aluno só será capaz de perceber realmente esta distinção se o processo de construção da definição dos objetos matemáticos o levar a aprender a definição, e não apenas memorizá-la. Assim, vemos a necessidade de realizar uma pesquisa na qual seja elaborada uma Sequência Didática destinada a construção da definição de polígono convexo.

Uma vez que pronta a sequência, teremos então uma ferramenta que poderá contribuir para o desenvolvimento do ensino de geometria, uma vez que o processo de escrita de uma definição exige que o escritor revisite o conceito a fim de expressá-lo. Neste contexto do desenvolvimento da definição de polígono, nossa pesquisa tem por objetivo **analisar o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do *software* GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental**.

Como possíveis frutos desta investigação temos potenciais contribuições para a prática dos professores que ensinam matemática, uma vez que a Sequência Didática que elaboramos, pode auxiliar no processo de operacionalização do uso do GeoGebra no ensino de polígonos. Além disso, respondemos nossa questão de pesquisa – **Como acontece o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do software GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental?** – contribuiremos com uma proposta com maiores chances de sucesso na implementação, pois as limitações e potencialidades da Sequência Didática serão previamente analisadas e posteriormente testadas mediante a implementação com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, além disso ela terá passado pelo crivo de especialistas do campo da Educação Matemática.

Ressaltamos ainda que, uma vez que a Sequência Didática foi construída utilizando como recurso o GeoGebra, o professor não ficará refém da necessidade de que sua instituição possua um laboratório de informática, uma vez que este *software* pode ser utilizado em diferentes dispositivos, incluindo *smartphones*.

Após esta apresentação da problemática e da justificativa da nossa proposta de pesquisa, na próxima seção apresentaremos o referencial teórico, composto pela Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1992) e pela Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008), e nesta mesma seção, trazemos a revisão de literatura e o percurso metodológico que seguimos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, nos deteremos na apresentação e discussão dos principais conceitos constituintes da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria das Situações Didáticas, além de apresentarmos resultados de trabalhos relacionados com o tema desta investigação. A primeira teoria desempenhou nesta pesquisa a função de fornecer uma visão macro dos fatores sociais e matemáticos que influenciam no ensino de Geometria, mais especificamente polígonos. Enquanto que a Teoria das Situações Didáticas nos permitiu uma modelação e compreensão dos fenômenos que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem referente aos polígonos também, forneceu elementos para pensarmos, elaborarmos e analisarmos a Sequência Didática que nos propomos a desenvolver nesta pesquisa. Os trabalhos correlatos que são apresentados nas duas últimas seções deste capítulo, têm por objetivo explanar como a definição dos objetos matemáticos vem sendo abordada em pesquisas em Educação Matemática

2.1 Teoria Antropológica do Didático

Podemos verificar algumas diferenças no tocante a como a matemática é utilizada, desenvolvida e estudada em universidades e em instituições da Educação Básica. Por exemplo, o nível de rigor exigido nas demonstrações, o estudo da matemática pela matemática é mais presente nas universidades, assim como o foco da “matemática universitária” excede a comunicação do que já está posto e se dedica também à produção do novo. Neste viés, Chevallard (2002) discorre sobre os princípios da Teoria da Transposição Didática, na qual podemos identificar três tipos de saberes: o Saber Sábio; o Saber a Ser Ensinado; e o Saber Ensinado.

No que diz respeito ao surgimento do Saber Sábio, sabemos que um determinado grupo cultural enfrenta problemas de naturezas diversas – alimentação, reprodução, habitação, transcendência – e ao resolvê-los, esse grupo cultural está gerando um conhecimento. Por exemplo, no processo de resolução de vários problemas relacionados ao plantio, dá-se origem a um conjunto de conhecimentos atrelados à agricultura, a esse conjunto de conhecimentos, quando organizados e “formalizados”, damos o nome de saber, nesse caso poderíamos chamá-lo saber agrário. Nesta linha de raciocínio, identificamos a ideia de que o Saber Sábio faz referência ao estado inicial em que um conjunto de conhecimentos, antes dispersos, são agrupados por se comportarem de modo complementar no processo de compreensão de um fenômeno.

Processos semelhantes ao de constituição do Saber Sábio, ocorreram (e continuam a ocorrer) ao longo dos séculos, com contribuições de diferentes culturas, na tentativa de se compreender, representar e organizar o espaço em que habitavam, assim, deu-se origem à diferentes conjuntos de conhecimentos, dentre os quais encontramos o Saber Matemático. Dentro do Saber Matemático, podemos identificar subconjuntos de conhecimentos como é o caso do Saber Aritmético, Saber Algébrico e do Saber Geométrico. As pessoas que resolveram as situações das quais emergem os conhecimentos que deram origem ao saber são seres mortais, desse modo, faz-se necessário que este seja compartilhado com outras pessoas, a fim de que eles transcendam os limites do tempo. É para atender essa necessidade de se compartilhar o Saber Sábio que surge o Saber a Ser Ensinado. Porém, o Saber Sábio não pode ser transmitido tal como ele é, seus elementos precisam passar por um processo de reorganização e modificação para então tornar-se passível de ser ensinado. Essa transformação sofrida é chamada de Transposição Didática ou Processo Transpositivo (CHEVALLARD, 2000).

Esse Saber a Ser Ensinado é o que encontramos, por exemplo, nos documentos oficiais elaborados para nortear o sistema de educação de um país. No entanto, quem de verdade "executa" a ação de ensinar (professor) acaba por submeter o Saber a Ser Ensinado a um novo processo transpositivo. Durante esta nova transposição didática, o professor seleciona quais elementos do saber serão efetivamente ensinados e os ensina. Ele estabelece relações com outros elementos que não são necessariamente aqueles que estavam postos, dando origem assim ao Saber Ensinado. Essa transposição é dita Transposição Interna, pois ocorre no interior do ambiente de ensino (sala de aula), diferente do primeiro processo transpositivo que ocorre a nível extraescolar, e por isso é denominado de Transposição Externa (CHEVALLARD, 2000, p. 36).

Essa Transposição Externa é efetuada por representantes do Sistema de Ensino, ou seja, todos aqueles que enfrentam os problemas que são gerados pelo encontro do sistema didático (professor, aluno e saber) com a sociedade. Dessa forma, agentes tais como diretores, professores, líderes de governo, secretários, ministros, por exemplo, compõe o que Chevallard (2000) chama de *Noosfera*. Assim, são os integrantes da *Noosfera* os responsáveis pela produção de metodologias e dos conteúdos que serão usados e ensinados. Nesta perspectiva, podemos observar alguns efeitos da transposição didática realizada pela *Noosfera*, que são: criação de objetos; a substituição de objetos; e a vigilância epistemológica, que questiona a relação do objeto ensinado (pertencente ao Saber Ensinado) com o objeto matemático de referência (pertencente ao Saber Sábio) (CHEVALLARD, 2000, p. 49).

Notemos que, estes processos – produção do saber, adequação para o ensino e o ensino de fato – ocorre dentro de instituições formadas por pessoas. Assim, podemos inferir que o saber não existe sem a instituição. E este é um dos postulados da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD,1992), o de que nenhum objeto do saber existe isoladamente, desvinculado de outros objetos e sem ser "reconhecido" por pelo menos uma instituição. Esse reconhecimento institucional se dá quando é possível identificar ao menos uma pessoa (X), que faça parte de uma instituição (I), que execute ações com esse objeto, ou seja, que haja práticas efetivas no entorno deste objeto.

Podemos notar com isso que o conceito de instituição tem grande relevância na compreensão da TAD. Para que os indivíduos desempenhem a função de manter o desenvolvimento da sociedade, o sistema social é "subdividido" em sistemas menores como é o caso do educacional. Assim, segundo Chevallard (2000, p. 13) o sistema educacional é uma obra humana construída para determinado fim e permeada de vontades e caprichos. Ainda dentro desses sistemas sociais podemos encontrar as instituições que são dispositivos sociais totais, os quais não são necessariamente extensos, mas que são capazes de impor seus temas, suas próprias formas de pensar e fazer (CHEVALLARD, 2009).

Neste contexto, vemos que as ações executadas com o objeto são imprescindíveis para o entendimento do objeto e de seu papel na instituição. Desse modo, Chevallard (1998) fala sobre quatro noções essenciais para a modelação das práticas institucionais e pessoais no entorno de um objeto do saber, são elas: a Tarefa (t); a Técnica (τ); a Tecnologia (θ) e a Teoria (Θ). A noção de Tarefa pode ser compreendida como aquilo que é proposto para ser feito, assim, ela está intimamente ligada a um verbo que indica a ação a ser realizada, mas este verbo identifica apenas o gênero da tarefa (CHEVALLARD, 1998), pois para termos uma Tarefa de fato, necessitamos de um determinativo. Por exemplo, "traçar as diagonais de um polígono", temos que essa tarefa tem seu gênero determinado pelo verbo "traçar", mas é o determinativo "as diagonais de um polígono" que a diferencia de outras tarefas do mesmo gênero, como é o caso de "traçar a mediatriz do segmento AB". Além do agrupamento de Tarefas por seu gênero, a TAD também as organiza em Tipos de Tarefa (T), por exemplo, t_1: calcular a medida da área da região interna de um quadrado e t_2: calcular a medida da área da região interna de um hexágono são tarefas pertencentes ao mesmo tipo T, as quais giram em torno de identificar o número real associado à região delimitada por uma figura geométrica plana.

Essa noção de Tarefa nos remete a algo que deve ser feito, podemos deduzir que há formas de se fazer, ou seja, que existe uma Técnica que nos permite realizar a Tarefa. Na realidade, dada uma Tarefa, podemos identificar uma ou mais formas de realizá-la, Técnica. A título de exemplo, para "desenhar um quadrilátero inscritível numa circunferência" podemos desenhar uma circunferência e marcar quatro pontos distintos sobre ela e traçar quatro segmentos que unem esses pontos de tal forma a determinar um quadrilátero; ou podemos desenhar um quadrilátero cujos ângulos opostos sejam suplementares e na sequência construir a circunferência. Essas duas primeiras noções, Tarefa e Técnica, constituem o bloco denominado saber-fazer [*praxe*] (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007).

Toda Técnica está atrelada a um discurso racional que desempenha as funções de explicar e justificar o seu funcionamento (CHEVALLARD, 1998). Este discurso é a terceira noção da TAD, a que é denominada Tecnologia, que tem a função de explicar e descrever o emprego da Técnica, em quais casos ela funciona e em quais não se aplica. A função de justificar destina-se a garantir que a Técnica sempre funcionará nos casos em que ela é indicada, ou seja, evidencia o "porquê" da efetividade da Técnica no cumprimento da Tarefa. Esse discurso varia conforme a instituição em que é empregado. A Tecnologia, enquanto discurso, é composta por assertivas que carecem também de explicação e justificativa, é para estes fins que o discurso teórico é direcionado, ou seja, a Teoria é também um discurso lógico que serve para tornar compreensível a Tecnologia para que ela desempenhe suas funções (CHEVALLARD, 1998).

As duas últimas noções essenciais para a modelação das práticas institucionais e pessoais, Tecnologia e Teoria, compõem o bloco tecnológico-teórico [*logos*]. Esses dois blocos, saber-fazer e tecnológico-teórico, quando reunidos num só, "descrevem uma Organização Praxeológica completa" (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 63). Uma vez que possamos identificar um conjunto de Tarefas relativas a um objeto matemático, cada uma acompanhada por pelo menos uma Técnica, devidamente justificada e explicada por uma Tecnologia, que por sua vez é compreensível graças aos elementos de uma Teoria, podemos dizer que esse objeto matemático existe para aquela instituição. A noção de transposição didática, apresentada no início dessa seção, também pode ser compreendida como o processo no qual uma instituição decide adotar uma praxeologia de outra instituição (CHEVALLARD, 1998).

Essa Organização Praxeológica, ou Organização Matemática (OM) podem ser de três tipos: Local; Regional; ou Global. Quando um conjunto de OM's compartilham um mesmo sistema de explicação e justificação, ou seja, uma mesma Tecnologia, dizemos que essa é uma

Organização Matemática Local. Agora, se existem OM's cujas Tecnologias são diferentes, mas que compartilham e são sustentadas por uma mesma Teoria, temos que esse conjunto de praxeologias formam uma Organização Matemática Regional. De forma mais ampla, se temos uma agregação de OM's Regionais, esta recebe o nome de OM Global, a qual está ligada várias Teorias (CHEVALLARD, 1998). Assim, podemos inferir que diferentes instituições podem ter suas práticas modeladas por praxeologias aparentemente diferentes, mas que se vistas a nível local ou regional é possível identificar correlações. Essa ideia nos permite – por meio da observação de uma Organização Matemática presente em uma instituição de nível Superior - identificar a fonte (uma explicação e uma solução) de problemas existentes no ensino da matemática em nível da Educação Básica.

Diante de um tema de estudo (Teoria), podemos identificar uma OM que é a realidade matemática que pode ser construída em uma aula de matemática, além disso, temos a noção de Organização Didática (OD) que diz respeito à "como essa realidade matemática pode ser construída, isto é, a maneira como o estudo do tema pode ser realizado[9]" (CHEVALLARD, 1998, p. 8). Para que possamos entender melhor o que é uma OD e seus elementos de modelização do processo de modelação da atividade matemática, necessitamos entender a noção de *estudo*. Espinoza e Azcárate (2000) afirmam que a noção de estudo excede o que ocorre em sala de aula, englobando desde a atividade do matemático, passando por outros profissionais que desenvolvem atividades com a matemática até mesmo as ações dos alunos. Ainda segundo essas autoras "o processo de estudo se refere tanto ao processo de criação – ou recriação – de uma organização matemática quanto ao produto do referido processo[10]" (ESPINOZA; AZCÁRATE, 2000, p. 357). Assim, no contexto da nossa investigação, a noção de estudo nos auxiliará na identificação, organização e compreensão de atividades matemáticas capazes de estimular a construção da definição de polígono por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Em um processo de estudo podemos identificar diferentes momentos que são na verdade dimensões do processo de (re)construção de uma OM, pois não se trata de uma ação que deve ocorrer em uma fração de tempo determinada, mas sim partes de um processo maior que conduzem ao desenvolvimento de uma praxeologia. Neste sentido, Chevallard (1998) descreve

---

[9] Étant donné un thème d'étude mathématique q, on considérera successivement a) la réalité mathématique qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème q, b) la manière dont peut se construire cette réalité mathématique, c'est-à-dire la manière dont peut s'y réaliser l'étude du thème Θ (CHEVALLARD, 1998, p. 8).

[10] El proceso de estudio se refiere tanto al proceso de creación – o recreación – de una organización matemática como al producto del dicho proceso (ESPINOZA; AZCÁRATE, 2000, p. 357).

seis tipos de momentos de estudo ou momentos didáticos denominados: primeiro encontro com a OM; exploração do tipo de tarefa; desenvolvimento do ambiente tecnológico teórico; trabalho sobre a técnica; institucionalização; avaliação.

O momento do primeiro encontro consiste essencialmente em ter contato com pelo menos um Tipo de Tarefa que constitui a OM. Esse encontro pode se dar de diferentes formas. Nesse sentido, Chevallard (1998) afirma que o primeiro encontro ocorre quando o professor anuncia o que será estudado na próxima aula, também pode ser despercebido, que é quando o objeto matemático encontrado tem um papel secundário no estudo e acaba aparecendo por que ele convive com o objeto principal do estudo. Esse primeiro momento didático é análogo a relações pessoais, pois você pode conhecer mais de uma pessoa que já conhece, ou seja, conhecer um outro lado dela, reconhecê-la ou reencontrá-la. Da mesma forma, podem ocorrer reencontros com objetos já estudados e/ou Técnicas já desenvolvidas. A exemplo disso, temos as técnicas de fatoração de polinômios, as quais são reencontradas no estudo de formas de resolução de algumas equações e, posteriormente, na eliminação de indeterminações para o cálculo de limites.

O segundo momento didático se destina a elaboração de uma Técnica que permita o estudante resolver uma Tarefa específica, por essa razão Chevallard (1998) a denomina como momento de exploração de um Tipo de Tarefa. Segundo Espinoza e Azcárate (2000, p. 358), "a técnica pode emergir pelas mãos dos alunos ou ser apresentada diretamente pelo professor"[11]. Com isso, surgem indícios de que essas dimensões do estudo podem ser aplicadas para compreender a organização didática de aulas de diferentes naturezas, por exemplo, aulas expositivas e aulas investigativas. De todos os modos, este momento é finalizado quando a técnica já pode ser observada, mesmo que não esteja tão explícito que ela é aquilo que se buscava.

Como apresentado no parágrafo anterior, o momento exploratório não gera um Técnica já consolidada, por esse motivo, faz-se necessário um terceiro momento denominado trabalho com a técnica. Nesse sentido, Espinoza e Azcárate (2000) falam da necessidade de que o aluno reutilize a técnica encontrada resolvendo Tarefas diferentes, mas pertencentes ao mesmo tipo, dessa forma os alunos poderão dominar e até mesmo flexibilizar o uso da técnica. Muito provavelmente, neste processo, eles sentirão a necessidade de modificar a técnica para que esta possa atender a um conjunto maior de Tarefas. Assim, temos que no momento do trabalho com

---

[11] La técnica puede emerger en manos de los alumnos o ser presentada directamente por el profesor.

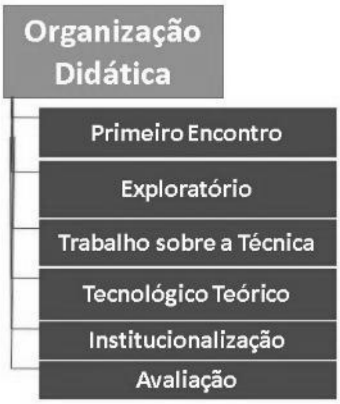
a técnica, esta tem analisada suas potencialidades e limitações, bem como sua relação com outras técnicas.

No entanto, as técnicas trabalhadas necessitam ter seu funcionamento justificado e explicado, ou seja, enquanto componente de uma Organização Matemática, essa técnica precisa ter seu *logos* explicitado. Neste sentido, se desenvolve o momento tecnológico-teórico do estudo. Embora seja comum vermos processos de estudo serem encerrados na dimensão do trabalho sobre a técnica, é relevante identificar os elementos tecnológicos e teóricos para que se ultrapasse o nível de procedimento mecânico e haja uma verdadeira compreensão do objeto por meio da OM associada a ele. Assim, o momento tecnológico-teórico faz-se necessário para que o estudante não se limite, por exemplo, a saber como se resolve determinado exercício, mas que também saiba porque respondê-lo da forma que aprendeu é correto.

É possível notar que durante esses quatro momentos descritos a OM relativa ao objeto em estudo é construída, contudo todo o processo necessita ser sintetizado e oficializado, e é nesta direção que surge o momento da institucionalização. Chevallard (1998) atribui a esta dimensão do estudo o papel de mostrar qual é, precisamente, a OM que foi elaborada e é neste momento que a relação pessoal como objeto dá lugar a relação institucional. Nesta seção, nos limitaremos a esta descrição da dimensão da institucionalização, pois este será melhor discutido no escopo da Teoria das Situações Didáticas apresentada na seção seguinte.

Uma vez institucionalizada, podemos avaliar diferentes elementos do processo de estudo, é neste sentido que surge o momento da avaliação. Podemos notar que entre o momento de institucionalização e o de avaliação há uma relação dialética, pois “por um lado, se avalia o que foi exposto ou institucionalizado e, por outro, se institucionaliza para, dentre outras coisas poder avaliar” (ESPINOZA; AZCÁRATE, 2000, p. 359). Assim, na dimensão de avaliação testamos o domínio do estudante sobre a OM desenvolvida, bem como, o potencial das técnicas desenvolvidas. Esses seis momentos, mostrados na Figura 2.1, combinados nos dão um “retrato” de como o sistema didático se configura para que a relação pessoal do aluno com um objeto do saber se desenvolva.

Figura 2.1 – As seis dimensões do processo de estudo que compõem uma Organização Didática.



Fonte: elaborado pelos autores.

Embora, os objetos matemáticos estejam associados a Organizações Praxeológicas particulares, estas podem ter pontos em comum com as praxeologias de outros objetos, desse modo temos que o saber matemático está imerso em um ecossistema. Quando a Teoria Antropológica do Didático fala da existência de um objeto do saber, ela o faz por meio de uma analogia à vida natural por meio do emprego de termos inerentes a Biologia. Desse modo, a TAD se apropria do conceito de *habitat* para designar o ambiente onde o conceito de um objeto do saber vive, composto basicamente pelas situações de ensino onde este objeto aparece e por outros objetos com os quais ele se relaciona. O conceito de *nicho* denota a função que o objeto do saber desempenha naquele ambiente em que vive.

A identificação deste habitat e nicho relativos a um objeto se dá por meio da análise de elementos institucionais, por exemplo, documentos oficiais relativos ao nível de ensino, livros entre outros. Por exemplo, podemos questionar se os polígonos pertencem ao ecossistema, ou a ecologia dos saberes que compõem o Ensino Médio brasileiro, então, ao lermos as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio encontramos o seguinte trecho: "No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides" (BRASIL, 2006, p. 76). Claramente este texto versa sobre o processo de estudo das superfícies de sólidos, e neste contexto os polígonos aparecem como objetos secundários (ou auxiliares), o que nos permitiria afirmar o habitat dos polígonos no Ensino Médio é formado pelas situações de cálculo da medida da área de superfície de sólidos. O mesmo trecho deixa implícito que a função (nicho) dos polígonos é a de representar as faces dos sólidos possibilitando o cálculo da medida da sua área.

A partir desse exemplo, podemos notar que os elementos institucionais são imprescindíveis para conhecermos a praxeologia e a ecologia no entorno do objeto matemático que é enfocado por uma pesquisa. Porém, antes de escolhermos estes elementos necessitamos ter claro qual é a instituição de referência, ou seja, onde podemos encontrar o conceito representado e as indicações de como ele deve ser usado. Além da instituição de referência, temos a instituição de aplicação como fonte de elementos que nos revelam a natureza do objeto matemático. A instituição de aplicação é essencialmente onde nós podemos identificar uma OM e uma OD no entorno do objeto. No caso dessa investigação, a instituição de aplicação é um grupo de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, na qual é possível identificar vários sistemas didáticos compostos pela tríade professor, aluno e saber. Sendo assim, necessitamos de elementos, que são externos a TAD, para efetivar as análises necessárias, assim, recorremos ao aporte teórico da Teoria das Situações Didáticas a qual é apresentada na seção que segue.

2.2 Teoria das Situações Didáticas

A noção de situação é um dos pontos principais da Teoria das Situações Didáticas (TSD). Mas, é claro que não é qualquer tipo de situação, e sim as situações matemáticas, aquelas que estão relacionadas com um saber matemático. No entanto, antes de nos debruçarmos sobre os tipos de situações, destacamos um ponto de intercessão entre a TAD e a TSD, que é a relação de dependência do saber para com a instituição. Essa dependência se deve, por um lado, a existência de instituições de naturezas diferentes, incluído a possibilidade de uma pessoa ser considerada uma instituição, como vimos na seção anterior. Por outro lado, temos a função desempenhada por uma noção matemática em uma instituição, o que gera necessidade de diferenciar conhecimento e saber.

Essa diferenciação é pertinente, uma vez que nos possibilita distinguir aquilo que é de natureza pessoal (conhecimento) daquilo que é um produto cultural (saber). Segundo Brousseau (2008), o conhecimento é comparável a uma partição[12] de uma noção que pode ser transmitida entre as pessoas, e os principais veículos de propagação dos conhecimentos são a imitação, a iniciação e a comunicação. Nesse processo de transmissão são compartilhadas formas de se controlar e extrair de determinada situação um efeito desejado. É a exigência social que concede a este efeito extraído da situação o caráter de desejado ou não. Por exemplo, distinguir figuras geométricas planas por suas formas e não pela cor das suas representações é uma prescrição social relativa ao saber geométrico.

[12] Utilizamos o temo “partição” como o empregado em matemática, ou seja, as partições de um conjunto A são subconjuntos disjuntos de A, cuja união é igual ao conjunto A.

Diante disso, Brousseau (2008) qualifica o saber como um fruto de uma cultura existente em uma instituição. Assim, são concedidos aos saberes as funções institucionais de identificar, analisar e organizar os conhecimentos. Essas funções contribuem para o processo de comunicação dos conhecimentos uma vez que é mais fácil tanto transmitir quanto receber algo que já possui uma organização interna.

Essa organização interna é importante para a TSD, pois essa teoria dedica-se primordialmente aos fatores que intervêm no processo de comunicação dos saberes matemáticos. Esse processo de comunicação é comumente referido como ensino e aprendizagem, os quais serão tratados como dois processos distintos, mas não independentes, que representam a função do professor e a do aluno, respectivamente, dentro de um processo maior que é a construção de conhecimentos.

No tocante a aprendizagem, segundo Freitas (2008) a Teoria das Situações Didáticas baseia-se numa concepção com características piagetiana[13] no que diz respeito a necessidade de que o aprendiz se adapte a um meio. Essa adaptação ocorre quando o sujeito que aprende é submetido a uma situação, a qual pode ser compreendida como o modelo de interação que ele seguirá ao estabelecer uma relação com o meio (BROUSSEAU, 2008). Além disso, para que a aprendizagem realmente ocorra, faz-se necessário um ambiente provido de elementos capazes de gerar diálogos, reflexões e experimentações.

O ambiente dotado de tais características é o meio (*milieu*[14]) que é modelado no processo de transposição didática interna. Nessa transposição, os saberes passam por processos que o adéquam para serem efetivamente ensinados. Para isso, o professor organiza um dispositivo seguindo o caminho inverso do matemático ao recontextualizar o saber que deseja ensinar, ou seja, modela um meio que responderá as ações dos sujeitos segundo regras pré-estabelecidas pelo contexto. Essas regras passam a ser peças constituintes de um sistema autônomo e antagonista às ações dos alunos (BROUSSEAU, 2008). Assim, o meio é modelado de tal forma que os alunos se sintam inclinados a tomarem para si a responsabilidade de resolver as situações propostas das quais o professor se isenta de dar respostas e oferecer ferramentas para realização de procedimentos necessários. Quando o aluno executa esses procedimentos, ele consegue vislumbrar o saber que o professor tinha a intenção de ensinar.

---

[13] D'Amore (2007, p. 236) destaca duas hipóteses de Piaget: "todo conhecimento se constrói por meio de uma interação constante entre o sujeito que aprende e o objeto; os conteúdos em jogo constituem a base a partir da qual se desenvolve a hierarquia das estruturas mentais".

[14] O conceito de *milieu* dentro da TSD extrapola o significado da palavra "meio", sua tradução literal para o Português. Alguns autores optam por utilizar o termo em francês como forma de remeter ao significado atribuído dentro da Teoria das Situações Didática. Porém, em nosso texto utilizaremos o vocábulo em Português, pois não acreditamos que causa perca significativa do conceito de *milieu* da TSD.

Neste contexto vemos o ensino manifestado pela intenção do professor em modificar os conhecimentos dos alunos. Assim, ficam cada vez mais explícitas as três hipóteses nas quais a Teoria das Situações Didáticas se baseia, a saber: a aprendizagem ocorre através da adaptação do aprendiz ao meio; o meio só contribui para a aquisição do conhecimento se ele é dotado de intenção didática; e o meio deve estar fortemente ligado ao saber matemático a ser ensinado (ALMOULOUD, 2007). Mas, se a preparação do meio é função exclusiva do professor, e para aprender o aluno precisa estabelecer relação com esse meio, como é estabelecido o primeiro contato do aluno com esse sistema? Essa relação se estabelece de forma natural?

Como resposta a essas perguntas, Brousseau (2008) apresenta o conceito de devolução, que é o processo pelo qual o professor "convence" o aprendiz a aceitar a responsabilidade de buscar e apresentar uma solução para uma situação que ele não sabe responder imediatamente. Sobre este processo Brousseau (1996) afirma que:

> Não basta "comunicar" um problema a um aluno, para que esse problema se converta em *seu* problema e ele se sinta o único responsável de resolvê-lo. Também não basta que o aluno aceite esta responsabilidade para que o problema que resolva seja um problema "universal", livre de pressupostos subjetivos (BROUSSEAU, 1996, p. 50).

Assim, o autor apresenta a devolução como uma atividade realizada pelo professor e que se destina primeiro a responsabilizar o aluno e segundo a ocultar temporariamente a interferência da intenção didática por trás da situação proposta. Na devolução os alunos são encorajados, com perguntas ou com incentivo a realizarem experimentações com o meio, a permanecerem na busca da solução. Essas perguntas e incentivos são mantidos até que o aprendiz seja capaz de perceber a relação de causa e efeito de suas ações com as informações fornecidas pelo meio, bem como de explicar e justificar essas retroações do meio.

Esse conceito de devolução modifica a ideia comumente associada ao termo "ensinar". De acordo com as ideias da didática moderna, ensinar assume um significado um pouco mais "passivo" uma vez que se refere a deixar que o aluno aprenda (BROUSSEAU, 2008). Essa suposta passividade é na verdade efeito de todo um trabalho do professor de preparação do meio, que é realizado antes da aplicação da situação em si, iniciada com a devolução. Freitas (2008) afirma que essa devolução inicial é indispensável para que a aprendizagem ocorra, no entanto, ele admite que ela não é a única, pois há outras fases a serem vivenciadas entre a devolução e a aprendizagem.

Neste sentido, para entendermos a modelação do processo de aprendizagem de saberes matemáticos, necessitamos retomar a ideia de situação, mais precisamente começaremos a falar de situações matemáticas. Situações desse tipo, são aquelas que podem ser difundidas para qualquer pessoa sem a necessidade de uma relação anterior dela com o conhecimento em jogo

(CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001). Dessa forma, as situações matemáticas guardam a potencialidade de envolver o aprendiz em uma atividade matemática e, assim, estabelecer uma relação pessoal com o conhecimento (BROUSSEAU, 2008). São das situações matemáticas específicas de um saber que deriva o conceito de situação adidática. Uma situação adidática é uma situação matemática que tem como principal característica o trabalho independente do aluno e que o professor não tem influência direta na relação que o aluno estabelece com o conteúdo matemático em jogo (BROUSSEAU, 2008; FREITAS, 2008). Se faz necessário que não se confunda situações adidáticas com as situações não-didáticas, que são aquelas que não são resultado do planejamento do professor, ou seja, não são construídas com o objetivo de contribuir para a aprendizagem do aluno, e que são situações que surgem naturalmente das ações do sujeito (FREITAS, 2008).

Em contrapartida, situações adidáticas podem ser utilizadas para fins didáticos, pois, de acordo com a TSD cada conhecimento tem pelo menos uma situação adidática, associada a ele, capaz de envolver o aluno em uma atividade matemática, a qual revela as características desse conhecimento. Isso só é possível porque elas são compostas por variáveis. De acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 215, grifo do autor):

> São chamados *variáveis de uma situação matemática* aqueles elementos do jogo formal que são suscetíveis de assumir diferentes valores e que, ao assumi-los, provocam mudanças tais no jogo que fazem variar a estratégia ótima[15] (ou vencedora). [...] uma variável de uma situação adidática se chama *variável didática*.

São essas variáveis didáticas que estão ao alcance do professor para serem fixadas ou modificadas (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001) de acordo com o objetivo didático. Por exemplo, a quantidade de lados de um polígono regular é uma variável didática que ao ser manipulada contribui para a aprendizagem sobre medida do ângulo externo desse tipo de polígono (saber específico).

O saber matemático, que se deseja ensinar, desempenha o papel de solução ótima na relação com a situação adidática. Assim, as situações adidáticas assumem papel de destaque dentro da TSD, uma vez que o ato de aprender um saber matemático pode ser sintetizado pela adaptação do aprendiz a uma situação adidática específica. Quando um conjunto de situações adidáticas estão associadas a caracterização de uma mesma noção matemática, temos uma situação fundamental (BROUSSEAU, 2008; CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

---

[15] Os autores Chevallard, Bosch e Gascón (2001) utilizam esse adjetivo "ótima" para diferenciar, para dizer que não se trata de qualquer solução, mas sim uma "solução ótima" que melhor satisfaz a todas as variáveis do problema.

Além disso, ao atribuir diferentes valores às variáveis didáticas de uma situação fundamental, é possível compreender o objeto matemático, ligado a esta situação, por diferentes ângulos. Por exemplo, as variáveis didáticas, de uma situação fundamental associada ao conceito de linha poligonal fechada, podem ser modificadas para que os alunos a compreendam ora como conjunto de segmentos contidos num mesmo plano, ora como limitante de uma região do plano associada a um número (área), etc. Ou seja, os valores dados às variáveis didáticas desse tipo de situação revelam diferentes dimensões do "sentido" do objeto matemático (ALMOULOUD, 2007).

Quando se fala em sentido de um conhecimento, dentro da perspectiva da TSD, estamos nos referindo a como a cultura vê a compreensão desse conhecimento, ou seja, quais são as ações do aprendiz que indicam para aquele meio cultural (institucional) que ele realmente construiu o conhecimento. O sentido de um saber construído pelo aluno também é revelado pelos tipos de situações que são mobilizadas e pela forma que realiza essa mobilização.

Retomando a ideia de situações adidáticas, Almouloud (2007) destaca sua contribuição para aprendizagem do aluno uma vez que permite uma desestabilização dos seus conhecimentos conduzindo-os a aceitarem uma mudança de ponto de vista sobre um determinado saber. Embora esses tipos de situações no qual o controle do professor se dá de forma indireta, Freitas (2008) escreve que todos os processos que ocorrem desde o planejamento até a aprendizagem do aluno estão permeados pela intenção didática. Mesmo quando o professor efetua a devolução de uma situação adidática, ele o faz com a intenção de que o aluno estabeleça relações com o saber. Essa relação é apenas uma das que são estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber em determinado meio didático. O conjunto constituído por essas relações é denominado Situação Didática (BROUSSEAU, 2008; CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001; D'AMORE, 2007; FREITAS, 2008).

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (BROUSSEAU, 1986, *apud* FREITAS, 2008, p. 80)

Desse modo, vemos que as situações didáticas podem ser vistas como um conjunto de relações decorrentes da intenção explícita por parte do professor de ensinar o saber ao aluno. Nesses temos, é necessário que tanto o aluno quanto o professor tenham noção de seus papéis no desenvolver de uma situação didática. É daí que emerge o conceito de contrato didático, que engloba a subjetividade e as expectativas de ambas as partes. Nesse contrato, o professor se compromete a garantir para o aluno os meios necessários para assegurar que ele irá aprender. O professor dá essa garantia mesmo sem ter como assegurar de fato o cumprimento dessa responsabilidade. Em contrapartida, o aluno se compromete a resolver os problemas propostos mesmo sem ter conhecimento suficiente para resolvê-los. Porém, é graças ao contrato didático, com suas cláusulas implícitas, que o aluno se sente confiante para aceitar se envolver numa situação adidática, pois ele sabe que existe nela a intenção do professor de que ele estabeleça relação com um saber (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

O destaque do contrato didático está no fato de suas cláusulas levarem em consideração características do conhecimento que se deseja construir. Contudo, esse não é o único tipo de contrato que intervém na relação do professor com o aluno. Neste sentido, Brousseau (2008) também estabelece oito tipos de contratos – emissão, comunicação, habilidade, produção, informação, utilização, iniciação e instrução – que descrevem as responsabilidades do professor e do aluno. Esse autor os agrupa e sintetiza o foco de cada um desses contratos escrevendo que "o contrato de *emissão* ou de *comunicação* encarrega-se da forma da mensagem; o de *habilidade* e de *produção* ou de *informação* do seu sentido; e o de *utilização*, de *iniciação* ou de *instrução* do seu uso" (BROUSSEAU, 2008, p. 71, grifo do autor).

Seguindo essa ordem apresentada podemos notar uma mudança na postura do "professor", o qual começa como um emissor que se ocupa apenas do envio de uma mensagem, sem se preocupar, se de fato, esta mensagem está sendo recebida por alguém. Conforme muda-se o contrato, ele passa a dar mais atenção à forma como sua mensagem está sendo recebida, sem descuidar do conteúdo dela. Assim, ele "evolui" para um diretor de estudo, que é a pessoa responsável por indicar como se pode aprender um saber em um processo de estudo especifico de um objeto matemático. Neste contexto, em que múltiplos contratos coexistem, o contrato didático é aquele que possibilita a devolução, uma vez que o aluno só aceita o problema porque ele sabe que o professor quer que ele aprenda algo.

Esses são os elementos fundamentais da TSD, os quais nos permitem iniciar a caracterização do processo de aprendizagem de conceitos matemático. Contudo, para compreendermos melhor como ocorrem os processos de ensino e aprendizagem segundo esta teoria, necessitamos entender o que acontece depois que o professor seleciona as situações adidáticas e faz a devolução para o aluno. Daí é que vem os tipos de situação adidática (BROUSSEAU, 2008): Situação de Ação: Situação de Formulação; e Situação de Validação.

Uma vez feita a devolução inicial o aluno começa um trabalho autônomo de exploração do meio, no qual ele faz escolhas de como agir. Essa ação sobre o meio lhe retorna algumas informações que ele utiliza para elaborar um modelo implícito. Esse modelo é apresentado por

Brousseau (2008) como um conjunto de regras que norteiam a tomada de decisões do aluno, e como a capacidade de controlar o meio constituinte da situação. Esses procedimentos do aluno caracterizam o que Brousseau (2008) chama de Situação Adidática de Ação. Freitas (2008) afirma que os resultados das atividades realizadas durante esse tipo de situação são mais imediatos e que o conhecimento produzido é operacional. Entende-se com isso, que o conhecimento se restringe a experimentação na qual a ação do aluno se restringe a tentar executar a tarefa, sem a consciência de que existe uma técnica ótima para realização dela, ainda menos, qual sentido do conhecimento é desejado.

Assim, nas situações adidáticas de ação o meio desempenha um papel importante, pois ele é fonte de informações que permite ao aluno tomar ou antecipar suas decisões na busca pela resolução da situação. Neste sentido, Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.221) revelam que para uma situação de ação seja considerada boa, ela "deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustar essa ação, sem a intervenção do professor, graças à retroação por parte do meio da situação". Desse modo, o grande desafio para o professor é escolher estratégias que possibilitem a atividade direta do aluno sobre o problema sem exigir que ele explicite seu raciocínio (PAIS, 2002).

O tipo de situação descrita anteriormente gera um modelo de resolução para a situação que não é compreensível nem para o professor nem para os outros alunos. Com isso, o aluno busca uma forma de explicar sua solução, ou seja, de informar ao outro uma maneira de se chegar a mesma solução que ele chegou. Esse processo de elaboração de uma explicação é chamado de Situação Adidática de Formulação, na qual o aluno gera um modelo explícito comunicável a outras pessoas. Neste momento, o aluno estabelece relações entre suas ações e conhecimentos anteriores, transcendendo assim, a pura experimentação ao agregar elementos teóricos em suas decisões (PAIS, 2002). No entanto, os elementos da teoria não são mobilizados com fins de justificar uma resolução, mas sim por conter elementos (símbolos, conhecimentos compartilhados, comportamentos compatibilizados) institucionais que podem ser usados na comunicação do modelo de resolução.

Uma vez que o aluno comunique o modelo explícito que encontrou, ele diversifica suas fontes de informações. A partir desse momento, as retroações, capazes de agregar elementos que corroboram para o aprendizado do novo conhecimento, deixam de ser exclusivamente oriundas do meio e passam a fluir também dos seus pares. Assim, tanto o que foi formulado (e comunicado) por um aluno, pode ser utilizado por outro para modificar seu modelo. Desse modo, essa troca de informações podem gerar novas conjecturas sobre o objeto matemático estudado.

Contudo, para que um aluno aceite modificar o modelo explícito que ele formulou, é preciso que a informação recebida seja verdadeira. Essa comprovação da veracidade da informação não é cobrada durante a situação de formulação, mas sim na situação de validação. Balacheff (1988, *apud* FREITAS, 2008) caracteriza a validação como um conjunto de ações dirigidas à comprovação da validade de uma assertiva de natureza matemática. Dessa forma, faz-se necessário que o aluno busque meios de provar ao outro que seu modelo explícito produz resultados verdadeiros independente de quem os aplique. Em termos de jogos, o aluno deve validar sua estratégia mostrando que ela respeita as regras do jogo e é uma estratégia vencedora. Assim, percebemos que na situação de validação o aluno transcende a simples comunicação de uma informação, ao assumir o dever de sustentar sua maneira de pensar, mesmo que para isso ele tenha que apresentar uma prova[16] (BROUSSEAU, 2008).

É perceptível que nesses três tipos de situações adidáticas, o aluno é o ator principal, cabendo ao professor garantir, por meio de novas devoluções, que o aluno permaneça envolvido na resolução da situação. Entretanto, como os três elementos (professor, aluno e saber) principais da relação didática estão imersos em uma instituição, faz-se necessário que o conhecimento, com o qual o aluno estabeleceu relação, lhe seja apresentado de forma compatível com a que esse conhecimento é utilizado na instituição. A esse processo é dado o nome de Situação Didática de Institucionalização, no qual o conhecimento, após ser aprendido pelo aluno, recebe o "estatuto cultural" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001). Assim, na institucionalização o professor trabalha para estabelecer a ligação do conhecimento aprendido com os outros conhecimentos e com outras questões relacionadas ao novo saber.

Embora carregue um ar de finalizadora de uma situação, de aparecer para "pôr em ordem a casa", a situação de institucionalização pode entremear as situações de ação, formulação e validação, como lemos na citação de Brousseau (1996, p. 56):

> A institucionalização se realiza tanto sobre uma situação de ação – reconhece-se o valor de um procedimento que se converterá em um recurso de referência – como também sobre uma situação de formulação. Há formulações que serão conservadas ("isto se diz assim", "aquilo deve ser lembrado"). O mesmo acontece com as provas: é necessário identificar o que será retido das propriedades dos objetos que encontramos.

Assim, fica evidente que a institucionalização, além de uma situação, pode ser considerada uma importante ferramenta do professor para evitar que características do saber que, porventura, surjam após a devolução, se percam, ou sejam excluídos pelos alunos de seus

[16] O sentido de "prova" que é empregado aqui se refere ao defendido por Balacheff (2004). Esse autor caracteriza a prova como uma explicação que é cultural e temporalmente limitada, ou seja, ela pode ser aceita por um grupo social e por outro não em um determinado momento.

modelos. Na verdade, essas situações adidáticas e didáticas não seguem uma ordem muito bem definida, por exemplo a formulação e a validação podem ocorrer simultaneamente, ou seja, ao passo que o aluno explícita seu modelo já acompanhado de uma prova de sua validade.

Observamos até aqui, que a TSD defende e apresenta elementos que modelam um processo de aprendizagem no qual o aluno é sujeito ativo na aquisição do novo saber. Além disso, essa participação, bem como o papel desempenhado pelo professor estão presentes num acordo (implícito e explícito) entre esses dois agentes denominado contrato didático. Assim, da mesma forma que o contrato didático contribui para a organização dos processos de ensino e aprendizagem, a má gestão de suas cláusulas pode gerar efeitos prejudiciais à aprendizagem.

Dentre esses efeitos, ou rompimentos, do contrato didático temos o Pigmaleão, Topaze e Joudain, os quais têm em comum a tentativa do professor de negar o reconhecimento de um fracasso do aluno em uma dada situação. Assim, no Efeito Pigmaleão, o professor, movido pelo bom histórico de notas de um aluno, ao se deparar com um resultado ruim em uma avaliação, o professor reduz seu nível de exigência (ALMOULOUD, 2007). Essa autolimitação do professor decorre de suas expectativas com respeito a esse aluno (ou grupo de alunos), o qual é, para o professor, balizador do quanto o professor pode cobrar daquela turma. Então, se aquele aluno vai mal numa avaliação, o professor interpreta não como uma falha do aluno, mas sim como se as exigências foram feitas muito além das capacidades dos alunos.

Nessa mesma linha, o Efeito Topaze diz respeito a atitude do professor ao identificar que o aprendiz está em dificuldades. Ao notar um eminente fracasso o docente utiliza perguntas e “dicas” cada vez mais fáceis, chegando ao ponto de praticamente devolver ao aluno o papel de sujeito passivo no processo de aprendizagem e, com isso, fazendo os conhecimentos desaparecerem. Nas palavras de Brousseau (2008, p. 80) o professor acaba “tomando para si a responsabilidade essencial do trabalho”. Esse efeito, segundo Pais (2002), ainda pode sofrer uma degeneração dando origem ao Efeito Jourdain. Esse efeito acontece quando o professor identifica, em uma ação comum do aluno, elementos que segundo ele são suficientes para afirmar que o aluno estabeleceu uma relação pessoal com o saber, ou seja, que ele aprendeu. A relação entre os efeitos Topaze e Joudain se dá quando o professor faz perguntas tão fáceis que o aluno dá uma resposta óbvia, mas o professor, movido pelo anseio de evitar o fracasso, reconhece nessa resposta características do saber a ser ensinado.

Além dessas, outra consequência negativa que pode derivar da má gestão do contrato didático é o Deslize Metacognitivo. Esse efeito se caracteriza pelo foco dado a técnica em detrimento do conhecimento, ou seja, a forma de resolver determinado problema passa a ser mais importante do que o domínio do saber necessário para se chegar a resolução. Essa inversão de valores muitas vezes decorre da complexidade das ferramentas (técnicas) utilizadas na situação, o que leva o professor a substituir o saber científico pelos seus argumentos pessoais, suas experiências no uso dessa ferramenta.

Neste rol dos efeitos do contrato didático também entra um que decorre do uso excessivo de uma ferramenta didática muito utilizada pelos professores: a analogia. Neste contexto, Almouloud (2007) critica o uso abusivo da analogia, pois segundo ele seu uso na comunicação do saber auxilia apenas na memorização ao associar conceitos a ideias cotidianas. As analogias acabam por desviar a atenção dos alunos dos dados do problema para as orientações didáticas (BROUSSEAU, 2008) ofertadas pelo professor ao dar uma segunda chance de aquisição do conhecimento após o fracasso de uma situação didática. Outro ponto que merece destaque é que o uso exagerado de analogia pode desencadear o efeito Topaze (PAIS, 2002; ALMOULOUD, 2007; BROUSSEAU, 2008), uma vez que os diferentes sentidos do conhecimento vão sendo associado a elementos cotidianos causando o empobrecimento desse sentido.

Pautado nestes conceitos da Teoria das Situações Didáticas, planejamos e aplicamos a Sequência Didática voltada para ensino da definição de polígono no 6º ano do Ensino Fundamental. Destacamos que um dos principais elementos constituintes do meio das situações didáticas que propusemos foi o *software* GeoGebra.

2.3 Ensino de Geometria

É possível observar que nas duas subseções anteriores as duas teorias, embora possam ter suas ideias aplicadas no ensino de outras áreas de conhecimento, seus conceitos se ajustam perfeitamente na análise dos fenômenos didáticos emergentes do processo de ensino e aprendizagem de matemática. Assim, quando olhamos para o Saber Geométrico, que é parte do Saber Matemático, sob a perspectiva da TAD e da TSD podemos notar que há um reconhecimento da sociedade de que esse saber deve fazer parte da formação dos seus cidadãos.

Diante disso, podemos nos questionar sobre o porquê desse reconhecimento, e ao vermos situações didáticas relativas a conhecimentos constituintes do Saber Geométrico sendo desenvolvidas em sala também nos questionamos se o Ensino de Geometria (EG) sempre foi assim. E como essa pesquisa se insere no campo do EG, quais são os tipos de investigações que são desenvolvidas, ou ainda, como podemos classificar a pesquisa que desenvolvemos em comparação com as demais. Nesta subseção, apresentamos elementos que respondem a estes questionamentos e que destacam uma visão geral sobre o Ensino de Geometria.

O primeiro questionamento presente no parágrafo anterior, é apresentado por Fonseca et al (2001) como: por que ensinar geometria? Esse questionamento é respondido pelas mesmas autoras ao evidenciarem a:

> Geometria como veículo para o desenvolvimento de habilidades e competências tais como a percepção espacial e a resolução de problemas (escolares ou não) [...] e de promover valores culturais e estéticos importantes para uma melhor compreensão e apreciação das obras do homem (construções e trabalhos artísticos) ou da natureza" (FONSECA et al, 2001, p. 92 e 93).

Essas razões para o Ensino de Geometria revelam o que as autoras chamam de faces utilitária e formativa da geometria. Desse modo, o reconhecimento da necessidade de ensinar geometria por parte da *Noosfera* transcende o objetivo de que os cidadãos aprendam a aplicar os conhecimentos geométricos. Assim, a compreensão do espaço derivada do estudo da geometria propicia uma criticidade e autonomia na tomada de decisões. Além disso, a percepção do espaço e das formas que o compõe é bem mais intuitivo do que a associação de números a quantidades. Neste sentido, o EG demonstra um potencial de contribuição para o desenvolvimento de habilidades básicas para a aprendizagem matemática, como é o caso do reconhecimento de regularidades.

Essa importância utilitária e formativa do Ensino de Geometria já foi quase que totalmente menosprezada ao longo da história do ensino da matemática no Brasil. Os fatores históricos-sociais que conduziram a geometria a quase desaparecer das instituições de ensino brasileiras foram diversos (PAVANELLO, 1993). Tomando como referência esses fatores, Santos e Nacarato (2014) falam da existência de três fases do Ensino de Geometria no Brasil: a fase euclidiana, que perdurou até os anos 1960; a fase do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que atingiu o auge de sua influência no período de 1970 a 1980; e a fase da retomada do EG.

É bastante comum imputar a responsabilidade da quase exclusão da geometria do currículo brasileiro ao movimento característico da segunda fase do Ensino de Geometria. Contudo, Pavanello (1993) argumenta que mesmo antes do MMM elementos sociais tais como o predomínio da atividade agrícola e a grande parcela de analfabetos da população foram o ponto de partida para o progressivo abandono da geometria. No decorrer dessa primeira fase, o EG baseava-se na estrutura do livro *Os Elementos* do matemático grego Euclides, ou seja, o ensino partia de noções elementares culminando com a construção de conceitos mais complexos (SANTOS; NACARATO, 2014; PAVANELLO, 1993; VELOSO, 1998).

Essa linha de apresentação dos objetos geométricos exigia bastante do aluno, pois parte desses objetos abstratos, requeria do professor um conhecimento especializado para desenvolver essa “construção” do Saber Geométrico. Por isso, que com a expansão industrial da década de 1950 foi gerada uma maior demanda por mão de obra especializada, e para essa preparação, necessitava-se de uma quantidade bem maior de professores. Porém, nosso país não dispunha de professores preparados, com conhecimentos matemáticos e pedagógicos, para atender a demanda que surgia. Além disso, segundo Pavanello (1993), o programa educacional de 1951 não apresentava a geometria em algumas séries do sistema de ensino vigente na época. Temos assim, a junção de problemas na formação dos professores com a intermitência na apresentação de objetos do Saber Geométrico como a preparação da base para o abandono do Ensino de Geometria.

É nesse cenário, já “fragilizado”, que as ideias do Movimento da Matemática Moderna penetram o sistema de ensino brasileiro, dando prioridade a linguagem em detrimento da compreensão dos conceitos (SANTOS; NACARATO, 2014). Segundo Pavanello (1993), sob o ponto de vista da Teoria dos Conjuntos, o Ensino de Geometria se reduzia ao estudo de figuras planas, as quais consistiam em conjuntos de pontos no plano. Essa autora acrescenta ainda que sobre as figuras estudadas era realizado um trabalho de classificação sem estabelecer um comparativo entre elas, e ainda o foco estava nas transformações dessas figuras planas.

Outro fator que foi determinante para a conformação do cenário de abandono da geometria, foi Lei de Diretrizes e Bases de 1971. Essa lei, dava direito aos professores de montarem o programa de ensino de acordo com o que eles observassem e julgassem necessários para formação dos seus alunos (PAVANELLO, 1993). Pelo que se pode observar, esses fatores levaram os professores a deixarem de lado a geometria, porque não tinham conhecimentos e não eram obrigados a ensiná-la.

Esse quadro de abandono do Ensino de Geometria, motivou uma série de pesquisas no campo da Educação Matemática no sentido de reverter o processo de degradação desse ensino e da matemática de forma geral. Em decorrência dessas pesquisas, atualmente o Ensino da Geometria rompe com o modelo euclidiano – do plano para o espaço – e adota um “trabalho simultâneo entre a geometria plana e espacial, pois essa abordagem possibilita aos alunos, principalmente em início de escolarização, maior enriquecimento na elaboração dos conceitos geométricos” (SANTOS; NACARATO, 2014, p. 16).

Ainda com respeito a esse processo de recuperação do EG, Veloso (1998) apresenta nove recomendações de como deve ser esse ensino renovado. Essas recomendações, segundo este autor, foram elaboradas em um seminário nos Estados Unidos no ano de 1990 que tinha o intuito de analisar a situação do EG e fazer sugestões para sua revitalização. O que demonstra que os efeitos do MMM não afetaram negativamente o Ensino de Geometria apenas no Brasil, mas que teve um alcance internacional. Os tópicos que seguem sintetizam as nove recomendações apresentadas por Veloso (1998):

- Estudo de caráter instrumental e experimental dos conceitos e objetos geométricos;
- Reconhecimento da importância dos aspectos métricos, combinatórios, topológicos, analíticos e computacionais da geometria;
- Evidenciar os diferentes campos de aplicação da geometria;
- Uso de programas de computador em investigações e no desenvolvimento de conceitos geométricos;
- Uso didático da história da geometria;
- Intensificar a manipulação de modelos concretos na construção de conceitos geométricos;
- Dar ênfase aos conceitos centrais da geometria (transformações, distância, superfície, etc.);
- Encorajar o pensamento e o raciocínio visual, que consiste em expressar o pensamento por meio de diagramas e modelos ou resolver problemas;
- Trabalhar com temas que possam ser explorados por meio de experiências matemáticas;

Essas recomendações sugerem um Ensino de Geometria baseada em situações didáticas em que os aprendizes sejam instigados a experimentarem o processo de construção dos conceitos geométricos, por meio de investigações e aplicações. Ou seja, sugere-se um processo de ensino aprendizagem semelhantes ao que é defendido, de maneira geral, pela Teoria das Situações Didáticas. Também, é possível identificar a necessidade do reconhecimento da geometria como uma construção histórico-social e a necessidade de se agregar elementos modernos ao seu ensino, por exemplo o uso de *softwares*.

Muitas dessas sugestões foram incorporadas, ou pelo menos vêm sendo objeto de pesquisas, como podemos perceber nas sete categorias de trabalhos identificado nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática ocorridos entre os anos de 1987 e 2001. Esse levantamento foi realizado por Andrade e Nacarato (2004) e foram identificadas as categorias: Geometria das Transformações; *Geometria Experimental*; Relação Álgebra e Geometria; Geometria na Perspectiva Curricular e/ou Formação de Professores; *Geometria em Ambientes Computacionais*; Geometria numa Perspectiva Teórica; e Geometria numa Perspectiva Histórica. Essas categorias foram tomadas como bases em pesquisas mais recentes como as de Déchen e Carneiro (2007) e Silva, Souza e Santos (2013), sendo que as categorias grifadas são as que apresentaram um maior número de trabalhos.

Essas duas categorias de maior destaque são intimamente ligadas ao uso de recursos didáticos variados. Isso, nos remete ao trabalho de Pais (2000) o qual destaca a necessidade de dar maior atenção a manipulação desses recursos didáticos para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico. Esse pensamento geométrico é, segundo Santos e Nacarato (2014) dotado de duas dimensões, a primeira composta de noções espaciais inclusive as topológicas, e a segunda dimensão é composta de noções de forma, composta por elementos da geometria plana e espacial.

Nesse sentido, Pais (2000) escreve sobre a existência de quatro elementos básicos cujas inter-relações estão diretamente ligadas ao desenvolvimento do pensamento geométrico, são eles o objeto, o desenho, o conceito e a imagem mental. Por exemplo, a manipulação exploratória de um objeto tridimensional, pode auxiliar os alunos na construção de um desenho (representação no plano). Quando essa manipulação é mediada pelo professor com questionamentos sobre as características do objeto e de seu desenho, os alunos podem estabelecer relações pessoais com o conceito daquele objeto. Essas relações tendem a enriquecer a imagem mental que o aluno tem do objeto. Segundo Pais (1996, p. 70), imagem mental não é algo simples de ser definido, mas pode ser compreendida como a capacidade "de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos". Assim, a imagem mental, quando expressada, revela aquilo que o aluno sabe sobre um determinado objeto.

Essas ideias de Pais (1996) sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio do estabelecimento de relações entre objeto, desenho, imagem mental e conceito, ao serem aplicadas aos polígonos, esbarrava na inexistência de um objeto concreto que possa ser manipulado no mundo físico. Contudo, com o advento e inserção das Tecnologias Digitais no ensino da matemática, as figuras bidimensionais ganham representações, com nível de fidelidade razoável, no mundo físico por meio dos computadores. E é graças (e para) essa inserção de tecnologias no ensino de matemática que trabalhos como o dessa dissertação são desenvolvidos. Assim, as Tecnologias Digitais são empregadas na tentativa de tratar uma problemática, por exemplo, a de como começar um processo de ensino e aprendizagem sem ter que de antemão expor aos aprendizes todas as definições. Neste caso específico, a natureza dos desenhos dinâmicos, que podem ser construídos em *softwares* como o GeoGebra, demonstram um grande potencial, uma vez que eles são passíveis de exploração, a qual pode dar acesso a característica do objeto geométricos que podem ser utilizadas na construção da definição. Esse tema e outros são discutidos na seção que segue.

2.4 Tecnologia na Educação Matemática

Nesta seção apresentamos e discutimos ideias relativas à tecnologia e sua importância para a sociedade contemporânea. Em seguida, discorremos sobre o uso inteligente das tecnologias digitais na educação como uma forma diferente de reorganizar o pensamento humano diante de situações de aprendizagem. Na sequência, apresentamos como essas tecnologias vêm sendo empregadas em pesquisas em Educação Matemática. E finalizamos com uso de *softwares* no ensino de matemática, onde destacamos o uso do *software* de geometria dinâmica denominado GeoGebra.

Dando início a essas discussões, relembramos que na primeira subseção deste capítulo teórico apresentamos a noção de Tecnologia sob o ponto de vista da Teoria Antropológica do Didático. De acordo com essa teoria, a Tecnologia é um discurso (CHEVALLARD, 1998). Continuamos defendendo esta noção, porém, além de justificar e explicar uma técnica (ou um conjunto de técnicas), acreditamos que a noção de tecnologia pode ser "materializada" em artefatos tecnológicos, os quais podem ser empregados para resolver determinadas tarefas.

Sob este ponto de vista, podemos concordar com Borba e Penteado (2005) que apresentam a oralidade, o lápis-e-papel e a informática como tecnologias historicamente responsáveis pela produção e manutenção do conhecimento humano. Nestes exemplos de tecnologias, temos que o lápis e o papel são artefatos tecnológicos tais como o computador, cada um com suas limitações e potencialidades intrínsecas. Por exemplo, a escrita com papel e lápis apresentou a vantagem da conservação do conhecimento independente da permanência humana, o que não ocorria com a oralidade, porém, demandou uma série de técnicas de escrita, regras gramaticais, cuja aquisição não é tão natural quanto a fala.

Diante do exposto, fica evidente que a sociedade produz novas tecnologias para serem aplicadas em diferentes setores ao mesmo tempo que criam um certo grau de dependência delas. Valente (1997, p. 20) afirma que o "mundo atualmente exige um profissional crítico, criativo, com capacidade de pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo e de conhecer o seu potencial intelectual, com capacidade de constante aprimoramento e depuração de ideias e ações". Fica assim subjacente a ideia de que um processo de ensino e aprendizagem que preze pela transmissão e o acúmulo de conhecimentos não mais atende às necessidades de formação do cidadão desejado pelo sistema social vigente. Neste sentido, o mesmo autor apresenta o computador como um artefato tecnológico que pode agregar importantes contribuições para a educação.

Com respeito ao uso da informática, mais especificamente sobre o uso do computador, na educação, Borba e Penteado (2005) apresentam e refutam algumas ideias oriundas de pessoas (professores, pesquisadores, pais, etc.) que são favoráveis e que são contrárias ao uso. Esses últimos argumentam que o computador pode gerar uma dependência e prejudicar o desenvolvimento dos alunos, porém, esses autores contrargumentam afirmando que o lápis-e-papel, assim como o computador, pode gerar dependência, pois é um artefato tecnológico utilizado na produção do conhecimento.

Há também o aspecto financeiro, que supostamente o investimento de recursos públicos na compra de computadores geraria a falta de recursos para suprir necessidades mais básicas do sistema educacional brasileiro. Por exemplo, compra de materiais de uso diário e remuneração dos professores, entre outros. Essa ideia é refutada pela existência do Fundo de Universalização do Sistema de Telecomunicações, oriundo das privatizações de empresas desse setor, que só pode ser utilizado para compra de materiais de informática.

No outro extremo, temos os que defendem a entrada das tecnologias digitais na educação, pois acreditam que estas são a solução para "forçar" os professores a se aperfeiçoarem, e uma forma de trazer motivação para sala de aula. Porém, Borba e Penteado (2005) a partir das suas experiências com trabalho com tecnologias na educação, afirmam que essa motivação é passageira.

Assim, diferentes autores concordam que a simples presença das tecnologias digitais no ambiente escolar não garante melhoria para o processo de ensino (BORBA; PENTEADO, 2005; VALENTE, 1995; GRAVINA; SANTAROSA, 1998). Nesta perspectiva, Valente (1997, p. 19) define o que seria o uso inteligente do computador como sendo "aquele que tenta provocar mudanças na abordagem pedagógica vigente ao invés de colaborar com o professor para tornar mais eficiente o processo de transmissão de conhecimento". Este mesmo autor ainda acrescenta que existem duas formas de uso deste artefato tecnológico, a primeira como "máquina de ensinar" (p. 20), que é com foco na instrução, ou seja, a informação é transmitida ao aluno por meio do computador. O outro uso é o de "máquina para ser ensinada" (p. 21), que é quando o aluno representa suas ideias no computador afim de que ele resolva um problema a partir dessas ideias.

Essas ideias convergem para o mesmo ponto defendido por Tikhomirov (1981 apud OLIVEIRA; GONÇALVES; MARQUETTI, 2015), o qual nega a existência da potencialidade das tecnologias de fazerem o homem pensar e aprender melhor, mas sim como reorganizadoras do pensamento. Assim, a tecnologia é uma assistente dos humanos na realização de determinadas tarefas, porém, devido a sua natureza, ela modifica a forma de cumprir essa tarefa (OLIVEIRA; GONÇALVES; MARQUETTI, 2015; BORBA; PENTEADO, 2005).

Diante do exposto, podemos nos questionar sobre como o uso do computador, por exemplo, pode influenciar na preparação e nas relações estabelecidas em uma situação didática voltada para a construção da definição de polígono. E mais, sobre quais tipos de tarefas devem ser propostas aos alunos de tal forma que o computador se torne uma máquina para ser ensinada e não uma máquina de ensinar.

O trabalho de Gravina e Santarosa (1998) agrega elementos que nos permitem vislumbrar uma possível resposta para os questionamentos anteriores. Essas autoras defendem a concepção de aprendizagem apresentada por Piaget, a qual se assemelha em diversos aspectos a que apresentamos na seção anterior quando discorremos sobre a Teoria das Situações Didáticas. Segundo essas duas concepções, a aprendizagem ocorre pela ação e adaptação do sujeito a situações que lhes são propostas. Neste sentido:

> O mundo físico é rico em objetos concretos para o início da aprendizagem em Matemática, no geral de caráter espontâneo. Mas se o objetivo é a construção de conceitos mais complexos e abstratos, estes não tem suporte materializado, entrando em jogo a 'concretização mental', que nem sempre é simples, mesmo para o matemático profissional. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 8).

Essas ideias são complementadas com as ideias de Hebenstreint (1987, apud GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 8) quando afirma que "o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos 'concreto-abstratos'. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais". Assim, temos que um aluno pode aprender matemática ao "manipular" um objeto construído no computador da mesma forma que o faz ao manipular um objeto concreto, isso graças à "concretização mental". Por exemplo, com o uso de um *software* rodando num computador, um pentágono, que é um objeto matemático abstrato, passa ter uma representação que ao ser manipulada revela características invariantes, as quais podem ser utilizadas para descrever, ou mesmo, para definir o pentágono.

Até este momento, apresentamos características do uso de tecnologias, especialmente as tecnologias digitais, tanto na educação de forma geral quanto na Educação Matemática de forma específica. As pesquisas em Educação Matemática são colocadas por Borba, Almeida e Chiari (2015) em uma via de mão dupla, na qual os extremos são a teoria referente às tecnologias digitais no ensino da matemática e o outro é a prática de ensino da matemática com uso dessas tecnologias. Assim, ele classifica os trabalhos publicados na revista Bolema[17] nos últimos 30 anos, que versavam sobre o uso de tecnologias, em duas categorias "da prática para teoria" e "da teoria para prática" e os analisa, como podemos ver na Figura 2.2.

---

[17] Boletim de Educação Matemática é uma das mais antigas e importantes publicações na área da Educação Matemática no Brasil Matemática na sociedade. Nascido vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, cuja primeira edição é de 1985(Fonte: http://www.scielo.br/revistas/ bolema /paboutj.htm).

Na primeira categoria, da prática para teoria, se enquadram trabalhos que relacionam teoria e prática partido de experiências vividas pelos autores, ou por terceiros, as quais foram posteriormente teorizadas (BORBA; ALMEIDA; CHIARI, 2015). Nesta categoria, encontramos trabalhos em duas vertentes, os que visam compreender uma realidade, e a segunda vertente são os que se voltam para análise do contexto virtual, ou seja, analisam potencialidades e limitações de artefatos digitais. Na segunda categoria, da teoria para prática, encontra-se trabalhos que os pesquisadores foram a campo somente após um estudo teórico e sistemático sobre o uso de tecnologias digitais (BORBA; ALMEIDA; CHIARI, 2015). Uma característica marcante desta vertente é o foco na aprendizagem.

Figura 2.2 – Síntese das pesquisas em Educação Matemática que envolvem tecnologia, segundo o estudo de Borba, Almeida e Chiari (2015).

Fonte: Elaborado pelos autores.

O que podemos apreender dessas duas grandes categorias, da prática para teoria e da teoria para a prática, é que cada uma delas pode revelar aspectos imprescindíveis ao uso inteligente das tecnologias digitais no ensino da matemática. Por exemplo, a primeira vertente, por não ter uma preparação tão minuciosa antes de ir a campo de pesquisa, pode revelar, de forma espontânea, entraves que um professor pode se deparar ao utilizar tecnologia digital em sua prática cotidiana de trabalho. Enquanto que, a segunda vertente tem um potencial de efetividade maior, principalmente, quando um dos objetivos é propor um produto educacional que contribua tanto para o aprendizado (mudanças de práticas) do professor, quanto do aluno sobre um determinado tema matemático.

Além dessas inferências, no trabalho de Borba, Almeida e Chiari (2015) foi possível notar que uma quantidade significativa de trabalhos que utilizam um *software* para o ensino de um objeto matemático específico. Semelhante a esses trabalhos temos o de Paula, Rodrigues e Silva (2016), que buscou a construção de atividades voltadas para o processo de ensino aprendizagem das relações métricas do triângulo retângulo baseando-se na TSD e segundo os princípios da Engenharia Didática. Esses autores, identificaram em sua revisão sistemática de literatura que o GeoGebra é o *software* mais citado nos trabalhos analisados por eles. O

GeoGebra é um programa da categoria de geometria dinâmica, o que nos leva perceber que para entendermos seu funcionamento, é necessário compreendermos o que é essa geometria dinâmica.

A geometria dinâmica pode ser compreendida como um sistema que permite representar objetos geométricos de tal forma que essas representações possuam elementos passíveis de movimentação, mas que guardem as propriedades originais do objeto representado. Segundo Acosta Gempeler (2004, p. 6), essa "propriedade geométrica se traduz em fenômeno visual que se produz ao mover o objetos, de tal forma que o movimento se torna em um meio de reconhecimento e verificação das propriedades geométricas de um desenho dinâmico"[18].

Neste sentido, Bairral e Barreira (2017) acrescentam que a geometria dinâmica "pode ser feita com recursos variados, e não apenas com *softwares* [...] pode ser feito com papel, lápis e outros recursos mais convencionais". Assim, tanto um quadrilátero construído em *softwares* como Cabri Géomètrie [19] ou GeoGebra, quanto aquelas utilizando palitos com uniões articuladas, podem ser considerados representações dinâmicas deste objeto geométrico.

No tocante à geometria dinâmica em *softwares*, Acosta Gempeler (2004), pautado na Teoria Antropológica do Didático, realizou um curso de formação de professores durante o qual ele identificou, descreveu e apresentou algumas dificuldades de uma praxeologia. Nessa praxeologia, relativa a geometria dinâmica no *software* Cabri, constam dois tipos de tarefa (T_1 e T_2) e duas sub-tarefas (ST1 e ST2) como podemos ver no Quadro 2.1.

Quadro 2.1: Tarefas e sub-tarefas de uma praxeologia de geometria dinâmica.

T1	Reproduzir um desenho dinâmico dado.	
	ST1:	Reconhecer uma possível propriedade no desenho (conjecturar).
T2	Produzir um desenho dinâmico a partir de uma série de condições dadas.	
	ST2	Verificar se a propriedade é válida em todos os casos do desenho (se é mantida mesmo com o deslocamento).

Fonte: Dados do trabalho de Acosta Gempeler (2004).

Para o cumprimento dessas tarefas, e suas respectivas sub-tarefas, o autor apresenta três técnicas (τ_1, τ_2 e τ_3), as quais também fazem uso de três sub-técnicas ($S\tau_1$, $S\tau_2$ e $S\tau_3$) atreladas à possibilidade de mover elementos construídos nessa classe de *softwares*. Cabe ressaltar que, diferente do que ocorre com as sub-tarefas em que ST1 está atrelada apenas a T1

[18] "toda propiedad geométrica se traduce en un fenómeno visual que se produce al arrastrar los objetos, de manera que el arrastre se convierte en un medio de reconocimiento y verificación de las propiedades geométricas de un dibujo dinâmico".

[19] É um *software* de Geometria Dinâmica construído pelo Institut d'Informatiqe et de Mathematiques Appliquees em Grenoble (IMAG) e que é apresentado como um caderno interativo que facilita o ensino e a aprendizagem da matemática. Para mais informações, consultar o site: https://cabri.com/ .

e ST2 apenas a T2, as sub-técnicas, $S\tau_1$, $S\tau_2$ e $S\tau_3$, aparecem como auxiliares em cada uma das três técnicas como podemos ver sintetizado no Quadro 2.2.

Quadro 2.2: Técnicas e sub-técnicas de uma praxeologia de geometria dinâmica.

<table>
<tr><th>TÉCNICA</th><th colspan="2">DESCRIÇÃO</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$\boldsymbol{\tau_1}$(Análise):</td><td colspan="2">Consiste em considerar o problema resolvido para então encontrar as propriedades geométricas que permitam realizar a construção.</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{S\tau_1}$ (Enriquecer a figura):</td><td>Consiste em realizar construções auxiliares (traçar diagonais, prolongar segmentos, construir circunferências, etc.) ou calcular medidas de distância ou de ângulos, que permitam reconhecer visualmente propriedades da figura.</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{S\tau_2}$ (Deslocamento de exploração):</td><td>É o deslocamento, de diferentes elementos do desenho, que é realizado antes de se ter uma conjectura, com a finalidade de identificar um fenômeno visual que possa ser interpretado como uma propriedade geométrica.</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{S\tau_3}$ (Deslocamento de verificação):</td><td>É o deslocamento que é realizado quando já se tem uma conjectura. Consiste em deslocar um determinado objeto tendo em mente um fenômeno visual correspondente à propriedade desejada.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{\tau_2}$(Razão):</td><td colspan="2">Trata-se de considerar as distâncias de um ponto a outros pontos já construídos para identificar uma possível razão constante entre as distâncias ao variar o tamanho da figura.</td></tr>
<tr><td colspan="2">**As sub-técnicas, $\boldsymbol{S\tau_1}$ $\boldsymbol{S\tau_2}$ e $\boldsymbol{S\tau_3}$, podem aparecer como auxiliares dessa técnica.**</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{\tau_3}$(Lugares geométricos):</td><td colspan="2">Trata-se de considerar, separadamente, duas condições que determinam a posição exata do ponto desejado. O conjunto de todos os pontos que satisfazem uma das duas condições é um lugar geométrico. Os pontos que solucionam o problema estão na intercessão dos dois lugares geométricos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">**As sub-técnicas, $\boldsymbol{S\tau_1}$ $\boldsymbol{S\tau_2}$ e $\boldsymbol{S\tau_3}$, podem aparecer como auxiliares dessa técnica.**</td></tr>
</table>

Fonte: ACOSTA GEMPELER (2004).

Como exemplo de aplicação das técnicas e sub-técnicas presente no quadro 2.2 podemos citar, reproduzir uma construção onde aparece um quadrilátero (T1), então ao aplicarmos a técnica de Análise e supomos que se trata de um losango. Exploramos a construção, $S\tau_2$, deslocando alguns de seus vértices para ver como a figura se comporta, e os resultados da nossa observação nos leva a manter nossa suposição. Assim, na busca pelas propriedades que nos permitirão comprovar nossa suposição, aplicamos $S\tau_1$, ou seja, enriquecemos o desenho dinâmico traçando suas diagonais, medindo o ângulo entre elas, marcando seus pontos médios e medimos seus lados. Feito isso, movemos seus vértices novamente, porém, desta vez, o que buscamos é verificar ($S\tau_3$deslocamento de verificação) se os lados se mantêm congruentes, e as diagonais perpendiculares e se cruzando no ponto médio.

Para alcançarmos o objetivo desta pesquisa, foi necessário a construção de uma Sequência Didática composta de Tarefas pertencentes ao tipo T2, produzir um desenho dinâmico a partir de condições dadas. Assim, durante as fases das situações didáticas que foram propostas para os alunos vivenciarem, pretendíamos que eles construíssem as técnicas e sub-técnicas apresentadas no Quadro 2.2. Essas construções que foram realizadas pelos estudantes são de alguns tipos de polígonos. No entanto, a construção não era o fim que desejávamos, mas pretendíamos que a partir delas os alunos explorassem e identificassem outras característica invariantes, a partir das quais, eles construiriam por escrito uma ou mais definições do polígono em estudo.

Uma vez esclarecido que o foco da Sequência Didática estará na construção da definição de polígono, apresentamos uma revisão sobre como pesquisas em Educação Matemática vem tratando esse objeto (CHEVALLARD, 2000) no ensino da matemática e em particular no ensino da geometria. Desse modo, segue na próxima seção algumas ideias, conceitos e reflexões sobre o uso de definições nesse contexto.

2.5 A Definição no Ensino de Geometria

A matemática que é praticada hoje em dia em quase todas as nações, embora tenha raízes empíricas, passou por uma reestruturação que a concedeu uma natureza lógico dedutiva. Nessa reestruturação, dito de forma resumida, foram tomadas noções elementares para compor premissas consideradas verdadeiras, das quais derivam outras afirmações também válidas por meio de inferências lógicas. Outro elemento que desempenha um papel crucial é a definição que, num sentido denotativo, é a delimitação exata de um objeto ou a descrição deste por seus caracteres distintos, assim, definir é dar a significação, o sentido de um objeto (TAPSON, 2012).

Embora reconhecidamente importante, as definições, segundo Ouvrier-Buffet (2003), à primeira vista, são consideradas como algo simples de se compreender, no entanto, elas geraram diversas discussões científicas e filosóficas. As definições desempenham um papel importante na estrutura interna da matemática e também no seu ensino. Isso pode ser comprovado pelo fato de que, além da autora mencionada, diversas pesquisas nacionais e internacionais no campo da Educação Matemática são direcionadas para este tema (ZASLAVSK; SHIR, 2005; AIRES; CAMPOS; POÇAS, 2015; DE VILLIERS; GOVENDER;

PATTERSON, 2009; COSTA; SANTOS, 2016; VELOSO, 1998; BRUNHEIRA; PONTE, 2016).

Com respeito a natureza das definições, De Villiers, Govender e Patterson (2009) destacam seu aspecto ferramental, pois elas são úteis para a comunicação e reorganização de novos conhecimentos. Esse aspecto se enquadra na dimensão funcional das definições. Além desse ponto, Zaslavsky e Shir (2005) destacam que as definições servem de base para demonstrações e para resolução de problemas.

Assim, entendemos que as definições atuam no estabelecimento de um padrão linguístico utilizado para explicitar o significado de conceitos matemáticos, ou seja, a definição deve capturar a essência do conceito tornando-o apresentável a outras pessoas. Além disso, elas desempenham um importante papel na manutenção e crescimento da teoria matemática, ao permitir a validação de novos saberes por meio de demonstrações.

A outra dimensão da definição está associada ao tipo de característica do conceito que a formam. Segundo Zaslavsky e Shir (2005), esses elementos podem ser classificados como *imprescindíveis* ou *opcionais*. Os elementos, ou características, imprescindíveis são aquelas que, combinados, distinguem um conceito de outros, por exemplo, “dois pares de lados opostos paralelos” é a característica imprescindível que distingue os paralelogramos dos trapézios. As características opcionais são aquelas que podem ser deduzidas partindo-se das imprescindíveis, como é o caso da congruência das diagonais de um retângulo.

No entanto, graças ás características opcionais é possível construir definições alternativas equivalentes. Essa equivalência ocorre porque, a partir delas, é possível inferir as características imprescindíveis. Por exemplo, um “polígono convexo que possui apenas duas diagonais, congruentes, perpendiculares e que se intersectam no ponto médio é um quadrado”. Essa definição pode ser útil em atividades de construções e a partir dela é possível se chegar à congruência dos lados e dos ângulos internos, as quais são características imprescindíveis de um quadrado.

Esses aspectos, além de permitir a classificação das definições, trazem à tona uma problemática referente ao papel da definição no ensino da matemática, que é expressa pelas seguintes perguntas: Qual tipo de definição deve ser ensinada? As definições alternativas também devem ser ensinadas? E as não-definições[20] também devem aparecer no processo de

[20] Não-definição se remete a um conjunto de propriedades e/ou características de um objeto matemático apresentados como se fossem uma definição matemática, porém, falta-lhe uma ou mais características essenciais para descrever minimamente o objeto matemático. É “uma afirmação (descrição do conceito) que não é equivalente a definição comumente aceita” (ZASLAVSKY; SHIR, 2005, p. 319).

ensino? Na literatura encontramos, além das definições alternativas e não-alternativas, mencionadas, as *procedimentais, estruturais, hierárquicas* e *partitivas* (ZASLAVSKY; SHIR, 2005; DE VILLIERS; GOVENDER; PATTERSON, 2009).

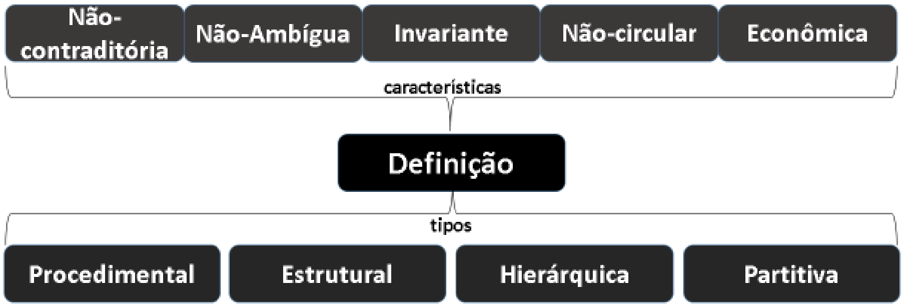
Dentre essas, as definições procedimentais são aquelas indissociáveis da gênese do objeto, ou seja, de como ele é obtido a partir de outros previamente estudados. No caso de objetos geométricos, dos procedimentos de construção. As definições estruturais são derivadas de uma propriedade comum do objeto (ângulos internos retos) ou dos pontos que constituem o objeto (lugar geométrico).

Este conceito de definição estrutural se confunde com a noção de definição hierárquica apresentada por De Villiers, Govender e Patterson (2009, p. 191), a qual "permite a inclusão de conceitos mais particulares como subconjuntos de um conceito mais geral", e por isso é também chamada de inclusiva.

Ao contrário disso, as definições partitivas organizam os conceitos em conjuntos disjuntos. Se um grupo de objetos, contido em outro conjunto aparentemente mais abrangente, possuem uma característica que os diferencia, esta característica em especial faz emergir um novo conjunto dissociado do anterior. A título de exemplo, temos a definição de oblongo (retângulo) encontrada no livro *Os Elementos* do escritor de origem grega Euclides, que ao afirmar que oblongo é uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não possui quatro lados iguais. A exigência de "não ter quatro lados iguais" exclui os quadrados dessa classe de figuras.

Podemos visualizar na Figura 2.3 os tipos de definições citadas bem como as cinco características descritas por Zaslavsky e Shir (2005), que são: não-contraditória, significa que todas as condições da definição podem coexistir; não-ambígua, o significado só pode ser interpretado de uma forma; invariante, não muda quando muda a representação; não-circular, não conduz a uma definição que não foi apresentada e usada anteriormente; mínima (ou econômica), não possui condições ou informações desnecessárias. Essa última característica das definições não é um consenso entre os pesquisadores. Alguns defendem que a presença de características do objeto que podem ser deduzidas a partir das outras não invalida uma definição, pois ela continua representando o objeto matemático em si.

Figura 2.3 – Características e tipos de definições segundo Zaslavsky e Shir (2005) e De Villiers, Govender e Patterson (2009).



Fonte: Elaborado pelos autores.

Com o que foi exposto, podemos comprovar o reconhecimento, por parte de pesquisas em Educação Matemática, da definição como um elemento do qual a instrução matemática não pode prescindir. Além disso, notamos um movimento de classificação dos tipos de definição. Cada um desses tipos pode ser convertido em ferramenta para a elaboração de intervenções de ensino, voltadas para melhoria do processo de estabelecimento de relações com os conceitos dos objetos matemáticos por parte dos alunos.

Mediante a existência desses tipos de definição, como deve ser o trabalho com as definições na Educação Básica? Algumas pesquisas como a De Villiers, Govender e Patterson (2009) apontam para os perigos do trabalho na Educação Básica fundamentado numa única definição para cada objeto matemático. Neste sentido, ao exporem os alunos a apenas uma definição, eles podem desenvolver apenas uma visão parcial do conceito, e ainda, rejeitar definições equivalentes tão somente por diferirem das que eles conhecem. Neste contexto, Brunheiras e Ponte (2016) verificaram esses efeitos no conhecimento geométrico de professores[21] em formação inicial participantes de sua investigação.

Com relação a pergunta enunciada no parágrafo anterior, diversos autores refletem e desaprovam a atitude que Veloso (1998, p. 374) nomeia de “definomania”. Este processo é caracterizado pela apresentação das definições que serão trabalhadas logo ao início da atividade. Esse tipo de abordagem pode conduzir os alunos ao equívoco de que a matemática só pode ser ensinada partindo-se de definições; que as definições só desempenham a função de comunicação matemática; e que as definições são invenções humanas e não o fruto de um processo de descoberta (DE VILLIERS; GOVENDER; PATTERSON, 2009).

Em oposição a essa apresentação *a priori* das definições, Veloso (1998) e De Villiers, Govender e Patterson (2009) defendem as ideias do Princípio Biogenético (ou Abordagem Reconstrutivista). Ao serem submetidos a este princípio, os alunos serão incentivados a “construir” a definição e não a aceitá-las pronta. O foco deste princípio está no processo, em

[21] Desta pesquisa participaram 90 futuros professores que estavam sendo formados para atuarem num nível de educação equivalente no Brasil a Educação Infantil e os cinco primeiros anos do Ensino Fundamental.

propiciar para o aluno a oportunidade de percorrer o caminho seguido para a descoberta ou invenção original, engajando-o nos processos de axiomatização, definição, conjectura e prova.

Podemos inferir daí, a indicação de um ensino voltado para o desenvolvimento de conceitos. Neste sentido, Proença e Pirola (2009) desenvolveram um estudo exploratório com alunos do Ensino Médio voltado para a formação de conceitos geométricos. Com este estudo eles chegam a conclusão de que:

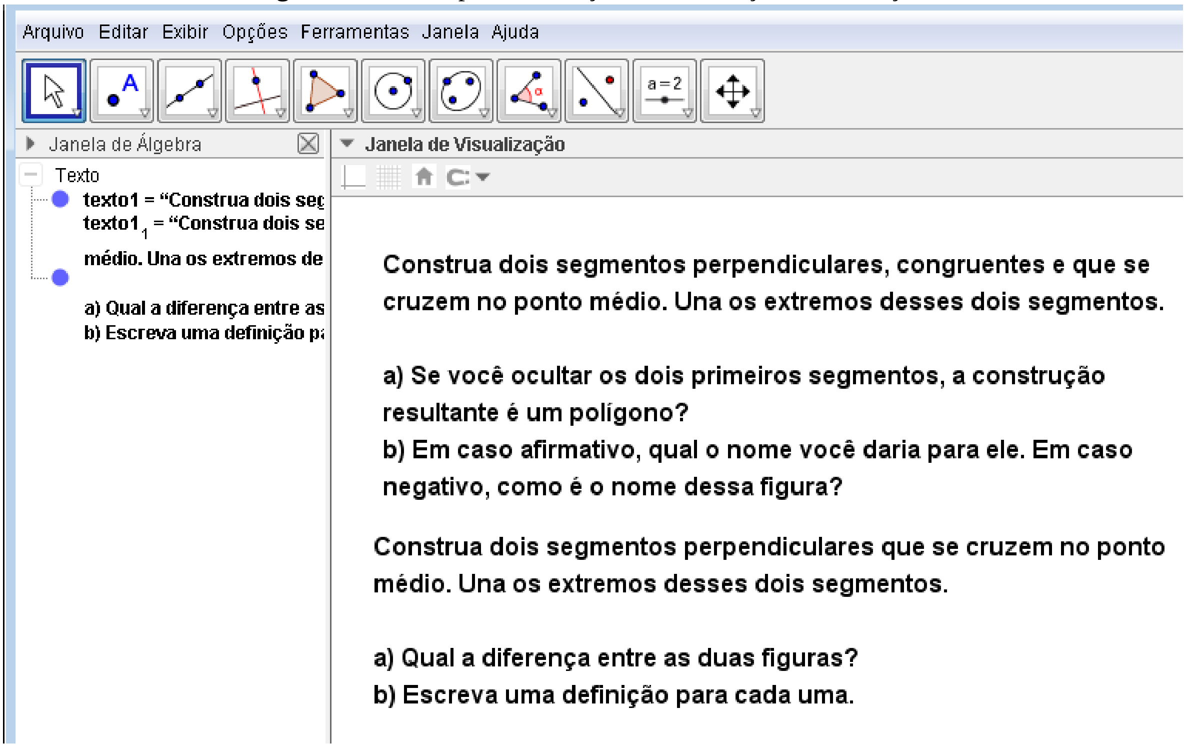
> De modo geral, de acordo com as dificuldades de alunos do Ensino Médio sobre o conhecimento conceitual de polígonos e de poliedros, o ensino de Geometria deveria levar em consideração as formas de favorecer a aprendizagem dos atributos definidores e dos exemplos e não exemplos. Isso poderia ser feito a partir da utilização de *softwares* geométricos. (PROENÇA; PIROLA, 2009, p. 142)

De fato, diversas pesquisas têm buscado explorar as características de *softwares* de geometria dinâmica para o ensino. Podemos citar o exemplo de Nogueira Farias e Farias (2007) que relatam um trabalho com Cabri Géomètrie voltado para que os alunos identificassem características variante e invariantes em figuras geométricas planas. Temos também, o trabalho de Afonso, Hall e Martins (2013) que trabalharam na construção de módulos interativos no GeoGebra direcionados para o ensino do porquê das fórmulas de cálculo de área. Destacamos ainda o trabalho de Melo, Draghi e Saldivia (2015), no qual foi elaborada uma Sequência Didática baseada na Teoria das Situações Didáticas para o ensino de congruência de triângulos inicialmente desenvolvida no ambiente lápis e papel e posteriormente no Geogebra. Com o uso do *software* GeoGebra ainda temos os trabalhos de Lopes (2013) e de Arnal-Bailera e Belloc (2015) respectivamente sobre uma Sequência Didática para o ensino de Trigonometria e o outro para a construção da ideia de quadrado.

Os exemplos listados são uma pequena amostra de como o uso de tecnologias digitais tem permeado diversas práticas sociais, não sendo diferente para o processo de ensino da matemática em geral e principalmente da geometria. Isso se deve graças a existência de diversos aplicativos gratuitos para uma gama variada de equipamentos informáticos como os computadores, os *tablets* e os *smartphones*. Também há *softwares* que são multe plataforma, como o GeoGebra, ou seja, pode ser utilizado em diferentes sistemas operacionais em diferentes dispositivos eletrônicos.

Uma das principais potencialidades do *softwares* de Geometria dinâmica é que, por meio da exploração de um único desenho dinâmico, o aluno pode ter contato com diferentes definições (ou formas de se definir) de um objeto matemático. Além disso, os *softwares* permitem a preparação de Situações de Construção de Definição (OUVRIER-BUFFET, 2004) evitando que as definições sejam apresentadas como algo pronto e acabado logo no início do processo de estudo. Por exemplo, na situação presente na Figura 2.4, o aluno começa a ter contato com os atributos definidores do quadrado e do losango desde a etapa da construção da figura. Essa construção é realizada baseada em princípios básicos de geometria, por exemplo, o perpendicularismo das diagonais e a noção de ponto médio. Ao mesmo tempo são utilizadas as principais ferramentas do GeoGebra, o que oportuniza aos estudantes aprenderem (revisarem) conceitos geométricos ao mesmo tempo que aprendem a utilizar o *software*.

Figura 2.4 – Exemplo de Situação de Construção de Definição.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Por meio da exploração das construções presentes na Figura 2.4 intenciona-se que os alunos construam a definição do quadrado e do losango tendo como base as características das diagonais, em vez de se basearem na medidas dos ângulos internos e dos lados. Assim, vemos que o uso de tecnologias digitais para a elaboração de situações de construção de definição possibilitam que o aluno tenha contato com diferentes tipos de definição de um mesmo objeto. Neste caso, o uso da tecnologia digital agrega um diferencial a situação, que é a de possibilitar que uma única representação possa ser explorada de diferentes formas, revelando, por meio de fenômenos visuais, as propriedades da figura geométrica. Torna-se muito mais prático para o aprendiz evidenciar elementos (por exemplo, medir ângulos e segmentos) e observar uma gama maior de características da representação para com elas construir diferentes tipos de definição.

Essa pesquisa teve como principal ferramenta de intervenção o GeoGebra, sobre o qual buscamos Analisar o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do *software* GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental. Acreditávamos que, dada a natureza dinâmica desse *software*, poderíamos elaborar uma Sequência Didática que possa contribuir com o trabalho com diferentes formas de se definir polígono e outros entes geométricos inerentes a ele. Desse modo, essa pesquisa teria potencial para contribuir com a Educação Matemática enquanto campo de pesquisa e também enquanto prática de sala de aula.

3 METODOLOGIA

De um ponto de vista mais amplo, essa é uma pesquisa que se insere no campo de investigação da Didática da Matemática. Sobre pesquisas dessa natureza, Almouloud (2007) escreve que elas são, essencialmente, do tipo Experimental. Porém, não podemos afirmar que é Experimental em sentido estrito, pois esta pesquisa ignorou a natureza aleatória de algumas etapas, por exemplo, a escolha da instituição de ensino, onde foi desenvolvida a pesquisa. Essa escolha se deu por razões como: a disponibilidade de um laboratório de informática e por possuir alunos no nível de ensino indicado para esta investigação.

Por outro lado, Lakatos e Marconi (2003, p. 188) afirmam que as pesquisas do tipo Experimental "consistem em investigações de pesquisas empíricas cujo objetivo principal é o teste de hipóteses que dizem respeito a relações de tipo causa-efeito". Essa afirmação descreve bem a nossa investigação, na qual vemos o caráter empírico manifesto na implementação da Sequência Didática (SD) que foi elaborada para evidenciar o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do GeoGebra.

Essa investigação se ajusta melhor aos moldes da Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD) enquanto metodologia de pesquisa (HENRIQUES, 2016). Esse percurso metodológico está dividido em duas fases: Definição e Análises preliminares; e Organização, Análise e Aplicação de uma Sequência Didática. Cada uma dessas fases está subdividida em quatro etapas, sobre as quais discorreremos, nos parágrafos que seguem, pontuando o que realizamos em cada uma das etapas.

3.1 1ª Etapa: Tomada de Decisões Iniciais

Nesta primeira etapa, foi definido que o tema seria a análise e construção da definição de polígono por meio de uma SD. Ainda nessa fase, expressamos por escrito a problemática apresentada na seção 1.2, a qual está diretamente relacionada com o tema escolhido, construção da definição de polígono. Por fim, avaliamos e definimos que encontraríamos o suporte teórico necessário para alcançarmos o objetivo desta investigação na Teoria das Situações Didáticas (TSD), pois ela apresenta um conjunto de conceitos que direciona nosso olhar e nos permite analisar os fenômenos didáticos que emergem da relação entre o professor, o aluno, e o saber em um meio. Também decidimos nos basear nas ideias da Teoria Antropológica do Didático

(TAD), uma vez que ela nos permitiu analisar o tema a nível das diferentes instituições intervenientes no processo de ensino e aprendizagem.

3.2 2ª Etapa: Identificação de Instituições

Nesta etapa, buscamos identificar em que Instituição de Referência[22] nosso objeto do saber matemático (definição de polígono) tem sua epistemologia e organização reveladas. Essa identificação foi guiada, inicialmente, pelo quadro apesentado em Henriques (2011), o qual está representado na Figura 3.1. Assim, tomamos por Instituição de Referência: o Ministério da Educação e Cultura, por ser o responsável pela organização do sistema de educação brasileiro; e os livros didáticos, que são artefatos de uso reconhecido em diferentes tipos e níveis de ensino, sendo em muitos casos o único material de apoio para os estudos dos alunos.

Figura 3.1 – Elementos constituintes de uma instituição.

Fonte: HENRIQUES (2011, p. 3).

Ainda nessa etapa, definimos onde a SD, a qual seria elaborada no início da segunda fase dessa metodologia, seria implementada. Intuímos que o 6º ano do Ensino Fundamental seria nossa Instituição de Aplicação[23]. Essa intuição se baseia em nossas experiências como aluno e como professor na Educação Básica, na qual pudemos observar que a definição de polígono aparece como objeto a ser ensinado. No entanto, a confirmação do 6º ano enquanto Instituição de Aplicação só foi ratificada pelas análises realizadas na 4ª etapa desta metodologia.

3.3 3ª Etapa: Escolha de Elementos Institucionais

[22]São dispositivos sociais que trazem representações do conceito que vamos abordar, assim como as formas de uso dessas representações em diferentes práticas, por exemplo, resolução de problemas e definição de outros conceitos.

[23]Esta instituição é o nosso campo de coleta de dados, é onde poderemos encontrar os sujeitos dessa pesquisa (alunos) e identificar as práticas efetiva no entorno do objeto matemático em estudo (definição de polígono).

Uma vez identificadas as instituições, tomamos para análise alguns elementos delas e, assim, iniciamos 3ª etapa do nosso percurso metodológico. Os PCN (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) foram selecionados por representarem a visão do Ministério da Educação e Cultura sobre o tema da pesquisa. Além desses documentos, tomamos o livro didático do 6º ano do Ensino Fundamental adotado pela escola, na qual desenvolvemos a pesquisa. Selecionamos também alguns livros utilizados no Ensino Superior, que versam sobre o nosso objeto de pesquisa e cujos autores são reconhecidos pela comunidade matemática. Estes livros foram escolhidos por serem considerados ferramentas presentes no processo de formação tanto do aluno da Educação Básica, quanto do professor de matemática.

3.4 4ª Etapa: Estudo e Apresentação da Análise Institucional de Referência

Uma vez feita as escolhas dos elementos institucionais, iniciamos um processo de análise descritiva desses elementos. Essas análises, que compõem a 4ª etapa da metodologia, foram norteadas pelo nosso objeto de estudo e pela problemática, ambos identificados na 1ª etapa desta metodologia de pesquisa. Assim, começamos por uma análise ecológica dos PCN (BRASIL, 1997a; BRASIL, 1997b; BRASIL, 1998) e da BNCC (BRASIL, 2017). Nesse tipo de análise, observamos se de fato a definição de polígono é um objeto de estudo no 6º ano do Ensino Fundamental (*habitat*), com quais outros objetos matemáticos ele se relaciona e qual o papel desempenhado por essa definição nessas relações (*nicho*).

Tanto o *habitat* quanto o *nicho* podem ser identificados, caso existam, por meio da leitura das indicações dos documentos. Por exemplo, ao lermos a seguinte citação dos PCN: “O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.” (BRASIL, 1998, p. 51), nos são reveladas características do *habitat* das noções geométricas, que podem ser figuras planas e espaciais, ou seja, esse local de vida dessas noções está permeado de ações que envolvem números e medidas (de comprimento, de ângulo, etc.). Além disso, a expressão “identificar regularidades” revela uma possível relação das noções geométricas com um dos elementos essenciais do pensamento algébrico, que são as regularidades. Assim, as noções geométricas desempenham a função de objeto a ser explorado para que as regularidades sejam percebidas ao serem submetidos, por exemplo, a medições. Essa função desempenhada pelas noções geométricas nesse *habitat* é o que denomina-se como *nicho*.

Ainda nesta etapa de Estudo e Apresentação de Análise Institucional de Referência, fizemos uma análise ecológica mais minuciosa do livro didático do 6º ano do Ensino Fundamental. Essa análise foi realizada em três níveis organizacionais: global, regional e local (HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE, 2012). A nível global, organizamos em uma tabela os capítulos que abrigam nosso objeto matemático de referência, identificamos assim, a quantidade de seções e de páginas dedicadas a ele. No nível regional, a análise foi estruturada em uma tabela contendo os títulos das seções dos capítulos identificados anteriormente, e ainda contabilizamos as definições de (ou relacionada com) polígono nessas seções. Além disso, registramos quantos teoremas, fórmulas, exemplos e exercícios estão relacionados com essa definição e quantas páginas estavam ocupadas por cada uma das seções. O terceiro nível dessa análise (Local), foi realizado dentro das subseções, cujos elementos tabelados no nível anterior por seção foram separados por subseção para serem submetidos a outro tipo de análise objetivando modelar que tipos de práticas são propostas para se chegar definição de polígono e como esta definição é utilizada.

Esse último tipo de análise mencionada, é denominada de Análise Praxeológica (CHEVALLARD, 2002), a qual está fundamentada em quatro noções[24]: Tarefa, que é a ação a ser realizada acompanhada de um determinativo; Técnica, é o modo de efetuar a Tarefa, podendo existir mais de uma Técnica relacionada a mesma Tarefa; Tecnologia, que é um discurso elaborado para justificar e explicar o funcionamento da Técnica; e a Teoria, que é um discurso que fundamenta a Tecnologia.

Pautando-nos nessas noções, fomos capazes de descrever (modelar) como o ensino relativo à definição de polígono está proposto e organizado no livro didático que analisamos. Assim, ao observarmos o bloco composto pela Tarefa e pela Técnica, denominado saber-fazer (CHEVALLARD, 1998), pudemos notar quais tipos de práticas são ensinadas e cobrada aos alunos. Enquanto isso, o bloco formado pela Tecnologia e Teoria nos revelaram os saberes geométricos que estão em jogo de forma implícita ou explícita.

Dessa forma, finalizamos a primeira fase da AI&SD enquanto metodologia de pesquisa. E com os resultados desta análise, obtivemos informações necessárias para a elaboração de uma Sequência Didática que foi aplicada com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

[24] Essas quatro noções, bem como sua função, já foram explicadas na seção 2.1.

3.5 5ª Etapa: Organização de uma Sequência Didática

A referida elaboração constituiu a 5ª etapa da nossa pesquisa, que é ao mesmo tempo a primeira etapa da segunda fase da AI&SD, ou seja, Organização, Análise e Aplicação de uma Sequência Didática. Neste momento, tomamos por base nossas reflexões sobre o conteúdo dos PCN, da BNCC e dos livros analisados, bem como as características do *software* de geometria dinâmica GeoGebra para desenvolvermos um conjunto de Tarefas. Essas informações colhidas serviram de base, mas nosso olhar se voltou para sala de aula, ou mais precisamente, para as relações entre o professor, o aluno e o saber, estabelecidas num meio.

Esses são os elementos fundamentais da Teoria das Situações Didáticas, assim como os tipos de situação – situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização – que são imprescindíveis para a elaboração da Sequência Didática. Na verdade, a sequência elaborada é um conjunto de situações didáticas que foram construídas para que o aluno ao longo do processo estabelecesse uma relação com a definição de polígono.

Assim, em cada situação que compunha a SD havia uma fase na qual o aluno tinha que realizar e mover elementos de uma construção geométrica no GeoGebra de forma experimental sem ter que explicitar uma estratégia para isso (situação de ação). Neste momento foi solicitado ao aluno que mobilizasse conhecimentos anteriores para realizar uma construção utilizando as ferramentas do GeoGebra apresentando ou não justificativas geométricas. A apresentação de uma justificativa geométrica foi interpretada como indício de que o aluno havia passado por um processo de ensino aprendizagem anterior, que efetivamente modificou os conhecimentos desse aluno. Caso não apresentasse uma justificativa matemática, era considerado como indício de que o aluno ou não passou por um processo de ensino aprendizagem referente aos polígonos ou que este processo não gerou uma aprendizagem efetiva. E ao movimentar os elementos destas construções, os alunos observavam o comportamento, ou seja, as reações do meio, as quais respeitavam as premissas utilizadas na construção.

Na continuação, movido por um questionamento, o aluno deveria formular uma explicação para o comportamento da construção (situação de formulação). Assim, a reação do *software* a ação do aluno geraria informações para que ele formulasse um conjunto de relações que são a base para os novos conhecimentos.

Desse modo, uma vez que o aluno tivesse uma candidata a explicação para o padrão observado durante a manipulação, ele entraria na fase da situação de validação, na qual ele busca argumentos para compor uma prova (para si e para seus pares) de que a característica da construção observada por ele existe de fato. Essa situação de validação seria gerada por solicitações (ou perguntas) do tipo: por que isso acontece? e se movesse esse vértice, continua sendo verdade? isso depende do tamanho dos lados ou não? Por que?

A seguir, o aplicador da SD intervinha diretamente no processo a fim de que o conhecimento envolvido extrapolasse o contexto do qual emergiu. Essa última fase é chamada de situação de institucionalização, na qual o aplicador, partindo daquilo que os alunos falaram e escreveram, discutiria e formalizaria uma definição de polígono construída pelo grupo de alunos.

No tocante a organização global da SD que foi elaborada (Ver APÊNDICE A e APÊNDICE B), temos que ela era composta de situações didáticas, as quais, por sua vez, contém um conjunto de Tarefas. Essas Tarefas foram divididas em três seções, de acordo com o quadro apresentado por Henriques (2016), como se pode ver na Figura 3.2. Neste caso T1, T2, ..., Tk_1 [25] são as tarefas da Sessão I e, T1, T2, ..., Tk_2 são as tarefas da Sessão II, assim sucessivamente.

Figura 3.2 – Descrição da organização de uma Sequência Didática

Sessão I	➔	Sessão II	➔	...	➔	Sessão P
T1		T1		...		T1
T2		T2		...		T2
⋮		⋮		⋮		⋮
Tk_1		Tk_2		...		Tk_P

Condições de realização e evolução de R(X, O)

Fonte: HENRIQUES (2016, p. 9).

A primeira sessão da SD foi pensada para a familiarização do aluno com o GeoGebra e para trabalhar, num ambiente computacional dinâmico, com algumas noções fundamentais da geometria[26] que são utilizadas na definição de polígono. Essa sessão inicial estava composta de seis atividades, dentre as quais:

- A Atividade 1 trata de quantas retas é possível traçar por um, dois e três pontos no plano;
- A Atividade 2 discorre sobre os conceitos de segmento de reta e semirreta;
- A Atividade 3 trata do desenvolvimento do conceito de ângulo;
- A Atividade 4 aborda o que são retas perpendiculares;
- A Atividade 5 trata do paralelismo de retas e seu reconhecimento em ambiente dinâmico;

[25] K_1, K_2 e K_p não são necessariamente iguais, pois uma seção pode ter mais tarefas que as outras. Assim, os índices da variável K servem nessa notação apenas para explicitar que a quantidade de tarefas em cada seção pode diferir. Além disso, a numeração das tarefas reinicia ao passar de uma seção para outra.

[26] Essas noções fundamentais são o que encontramos na literatura denominado por "Atributos definidores" (KLAUSMEIER; GOODWIN, 1977, apud PROENÇA; PIROLA, 2009).

- E a Atividade 6 aborda as características de figuras planas que serão utilizadas na construção da definição de polígono.

A segunda sessão foi planejada para convidar o aluno a realizar construções ou explorá-las com o objetivo de que eles construam suas imagens conceituais[27] relativas aos polígonos. Esta seção é composta por oito atividades que vão desde o conceito geral de polígono até a definição e classificação dos quadriláteros. Assim:

- A Atividade 7 trata da classificação de figuras planas e contribui para construção da classe dos polígonos;
- A Atividade 8 aborda o conceito de polígono como região plana;
- A Atividade 9 aborda a definição de polígono convexos e não convexos;
- A Atividade 10 trata das características que definem polígono regulares;
- A Atividade 11 trata da definição e classificação dos triângulos conforme as características de seus lados;
- A Atividade 12 aborda a construção das definições de triângulos acutângulos, retângulos, e obtusângulos;
- A Atividade 13 inicia a definição dos quadriláteros notáveis com os conceitos de trapézio, paralelogramo e quadrilátero qualquer;
- A Atividade 14 trata da relação hierárquica entre as definições de paralelogramo, losango, retângulo e quadrado.

Estas duas sessões estavam estruturadas de forma que o professor pudesse acompanhar e avaliar a construção da relação do sujeito com o objeto matemático de forma processual, tarefa após tarefa. É notório, a partir dessa breve descrição das quatorze atividades, que esta sequência extrapola o objetivo geral desta pesquisa. Esta Sequência Didática foi elaborada assim, devido aos resultados da análise que realizamos nos documentos oficiais e no livro didático na 4ª etapa (descrita na seção 3.4) dessa pesquisa.

3.6 6ª Etapa: Análise *a priori*

[27] É algo não-verbal associado em nossa mente com o nome do conceito (ZASLAVSKY; SHIR, 2005, p. 318).

Após elaborarmos a Sequência Didática referida, iniciamos o processo de Análise *a priori*. Essa análise foi orientada pelas organizações praxeológicas identificadas na 4ª etapa e pelos conhecimentos que desejávamos que os alunos construíssem. Assim, de acordo com Henriques (2016), buscamos antever as possíveis resoluções que os alunos apresentariam para cada tarefa proposta, as formas pelas quais o professor pesquisador poderia controlar a implementação e os resultados que esperavam para cada tarefa, ao fim de cada sessão. Além disso, identificamos as variáveis didáticas, que seriam postas em jogo para auxiliar os alunos e explicar as escolhas que eles fariam durante a implementação.

Com esta sexta etapa, finalizamos o que Henriques (2016) chama de Pesquisa Interna, pois até este momento, o trabalho foi realizado sem a interferência de sujeitos externos a pesquisa. Também, até esta etapa o professor pesquisador estava passando pelo processo de familiarização com o objeto de pesquisa e com a problemática. Uma vez cumprida estas etapas de pesquisa, entramos na chamada Pesquisa Externa, pois agora o público alvo, bem como os outros elementos da instituição de aplicação (professores, diretores, pais, etc.) passariam a influenciar diretamente no andamento pesquisa. Essa Pesquisa Externa é composta pelas duas últimas etapas da segunda fase da AI&SD como podemos ler nos parágrafos que seguem.

3.7 7ª Etapa: Aplicação da Sequência

A 7ª etapa da metodologia foi iniciada com a submissão do projeto de pesquisa ao Comitê de Ética de Pesquisa da Universidade Estadual de Santa Cruz. Uma vez que o projeto foi aprovado por esse Comitê, nos dirigimos à escola que continha nossa Instituição de Aplicação, o 6º ano do Ensino Fundamental, na qual apresentamos o projeto à direção e ao professor do 6º ano. A direção da escola enviou um comunicado por escrito aos pais dos alunos, isso foi feito, pois se trata de uma prática comum da instituição para toda atividade realizada no ambiente escolar, independente da iniciativa partir de membros da instituição ou não. Após a aprovação por parte destes elementos institucionais, nos apresentamos aos sujeitos da pesquisa, os alunos do 6º ano. Em seguida, tivemos dois encontros com eles: a apresentação, coleta de assinaturas dos termos e a implementação da primeira sessão; e a implementação da segunda sessão.

Na apresentação, explicamos como seria desenvolvida a pesquisa, como se daria a participação deles, caso aceitassem fazer parte, lemos o Termo de Assentimento Livre

Esclarecido (APÊNDICE C) mitigando qualquer dúvida que surgisse no momento, solicitamos que eles assinassem e que levassem para seus responsáveis o Temo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE) (ver APÊNDICE D), o qual foi recolhido no dia seguinte, quando ocorreu o segundo encontro com os sujeitos desta pesquisa.

Mesmo tendo realizado a análise *a priori* descrita na 6ª etapa desta metodologia, decidimos realizar um teste piloto a fim de identificar problemas que poderiam surgir durante aplicação das atividades que dificultassem o processo de ensino e aprendizagem. Caso não fosse identificado problema significativo, os dados coletados seriam destinados à análise, porém não foi o que ocorreu. Esse teste piloto foi realizado em uma escola pública da rede municipal de uma cidade da região centro-oeste da Bahia, a escolha desta instituição de ensino se deu por termos contato com o pessoal da direção, os quais mostraram-se bem receptivos ao projeto de pesquisa.

Neste processo de teste piloto da Sequência Didática, contamos com a participação de 5 alunos do 6º ano, que assentiram participar mediante o consentimento dos respectivos responsáveis. Assim, eles foram conduzidos, no turno oposto ao de suas aulas, para a Sala de Leitura da escola, a qual é destinada a realização de diversas atividades, principalmente, reforço de Matemática e Língua Portuguesa. Esses alunos foram organizados em uma dupla e um trio. Cada um desses dois grupos recebeu um *notebook* com o GeoGebra instalado e uma pasta salva na Área de Trabalho contendo arquivos do GeoGebra com construções previamente elaboradas e que seriam utilizadas em algumas Atividades. Uma vez acomodados, e feito os esclarecimentos iniciais sobre a pesquisa descritos nos dois primeiros parágrafos dessa seção, iniciamos uma breve explicação sobre interface gráfica e o funcionamento do GeoGebra, posteriormente, entregamos as Atividades.

No primeiro encontro com estes estudantes, foram aplicadas as Atividades 1, 2, 3 e 4, as quais forma entregues uma a uma e foram respondidas pelos alunos. Os conhecimentos trabalhados em cada Atividade foram institucionalizados pelo professor pesquisador. Durante o processo de resolução das atividades, o professor pesquisador ficou à disposição dos alunos, orientando em caso de dúvidas e efetuando devoluções a fim de que não desistissem de responder as Atividades. No segundo encontro, segunda sessão da Sequência Didática, aplicamos as Atividades 5, 6, 7, 8 e 9. As demais Atividades que compunham a Sequência Didática não foram aplicadas por uma questão de tempo disponível. Esse tempo era relativamente escasso e inflexível, pois a instituição escolar estava em um momento de culminância de alguns projetos e preparativo para as provas finais da última unidade do ano letivo. A primeira e a segunda sessão tiveram a duração igual a 3 horas e meia.

Com este teste piloto identificamos a necessidades de realizar modificações no enunciado e em arquivos usados em algumas das Atividades. Devido a essa necessidade de modificação, decidimos realizar novamente a aplicação da Sequência Didática com as reformulações que julgamos necessárias. A aplicação foi realizada também na rede pública (desta vez na rede estadual) de uma cidade da região centro-sul do estado da Bahia. A escolha dessa instituição de ensino decorre de que um dos pesquisadores responsáveis por essa pesquisa reside na cidade e desenvolve um trabalho com professores de matemática da escola.

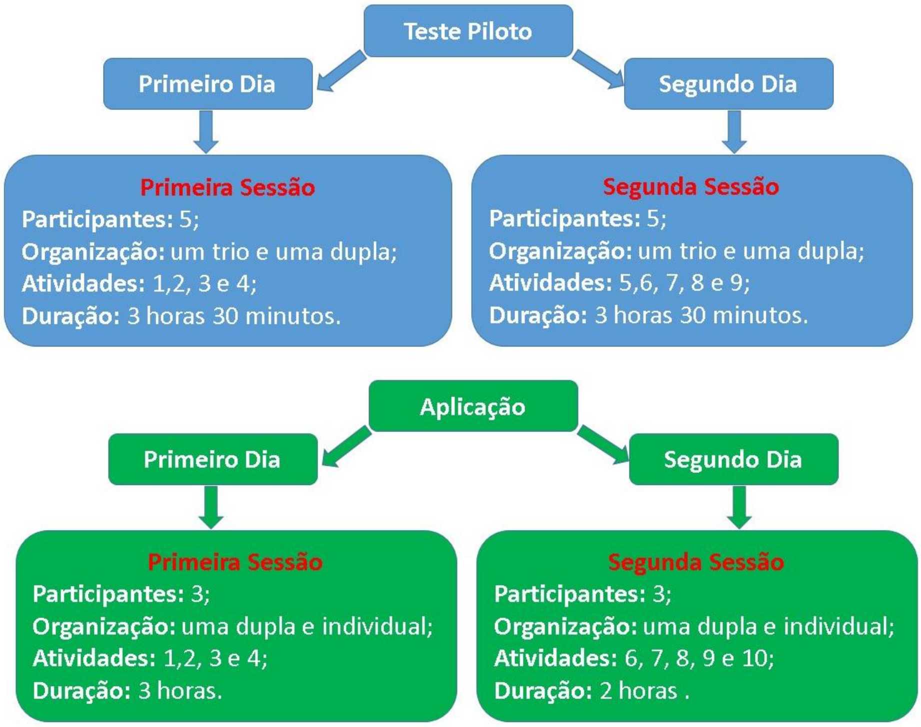
Participaram da aplicação da Sequência Didática, mediante o consentimento dos responsáveis, 3 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, aos quais atribuímos os nomes fictícios Manolo, Luigi e Daniel. O local de realização foi uma sala da escola que já foi dedicada a um laboratório de informática, mas que atualmente não conta com computador e que é utilizada para reunião e sala de vídeo. Essa aplicação ocorreu na última semana de aula – a qual estava sendo dedicada a entrega dos resultados da última Unidade – no turno normal de aula dos alunos participantes.

Na primeira sessão da Sequência didática, Luigi e Daniel formaram uma dupla e Manolo ficou só, mas estabelecia diálogos constante com um dos pesquisadores. Da mesma forma, estes alunos tiveram a sua disposição *notebooks* que trouxemos e que foram utilizados para manipular e realizar as construções necessárias. Além disso, também receberam as atividades impressas uma a uma. Neste primeiro encontro, foram aplicadas as Atividades 1, 2, 3 e 4, e teve a duração de 3 horas.

O segundo encontro, realizado no dia seguinte, foram aplicadas as Atividades 6, 7, 8, 9 e 10, a qual foi realizada em aproximadamente 2 horas. A causa desse tempo de aplicação significativamente menor é atribuída ao fato de não exigirmos em todas as Atividades uma resposta escrita nas folhas contendo as Atividades que foram entregues aos alunos. Nessa segunda sessão, Daniel chegou atrasado, por esse motivo, havíamos iniciado a aplicação com Luigi e Manolo formando uma dupla. Quando Daniel se apresentou para participar estávamos na aplicação da Atividade 9, mesmo assim ele quis continuar a responder, por isso permitimos sua presença, mas dessa vez ele ficou dialogando com um dos pesquisadores em vez de Manolo

Da mesma forma, algumas atividades não foram aplicadas devido ao tempo limitado. Nessa aplicação é possível notar que a Atividade 5 não foi aplicada, pois julgamos que os conceitos abordados nela contribuiriam mais para construção de definições de quadriláteros notáveis, os quais seriam trabalhados nas Atividades 13 e 14, as quais já não seriam aplicadas. A seleção das Atividade a serem aplicadas e as que não seriam passou, principalmente, pelo crivo da questão de pesquisa, ou seja, só foram implementadas aquelas que avaliamos ser imprescindíveis para o cumprimento do objetivo da pesquisa relatada neste texto. A organização do teste piloto e da aplicação da Sequência Didática está sintetizada na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Sínteses do teste piloto e da aplicação da Sequência Didática.



Fonte: Elaborado pelos autores

Todos os registros escritos dos alunos, referentes às Atividades, foram coletados ao final de cada uma delas. Também os arquivos do GeoGebra foram salvos para uma possível confrontação posterior do Protocolo de Construção[28] da manipulação dos alunos com suas respostas escritas. Estes materiais, juntamente com as observações do ambiente escolar registradas pelo professor pesquisador, compuseram o Protocolo Experimental que foi analisado na última etapa de nossa metodologia.

O teste piloto serviu para aperfeiçoar a Sequência Didática, sendo assim, na análise descrita na próxima seção, utilizamos apenas o protocolo experimental –composto pelos arquivos do GeoGebra utilizados em cada Atividade, registros escritos e gravações de áudio dos diálogos entre os integrantes das duplas e o professor – oriundo das práticas dos três alunos que tiveram sua participação autorizada na aplicação da Sequência Didática.

3.8 8ª Etapa: Análise *a posteriori* e Validação

[28] É um registro que o GeoGebra salva do processo de construção contendo ponto, retas, segmentos e outros elementos criados, bem como seus valores posições, nomes, etc.

Essa 8ª e última etapa, a Análise *a posteriori* e validação, é que nos permitiu responder nossa questão de pesquisa*: Como acontece o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do software GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental?* Durante esta etapa analisamos as práticas efetivas dos alunos por meio dos registros escritos individuais, nos quais constam suas resoluções para cada tarefa, e em alguns casos foi necessário recorrer a comparação entre os Protocolos de Construção e às gravações de áudio das aplicações das duas sessões.

A análise das práticas efetivas (respostas) dos alunos para cada tarefa a que nos referimos no parágrafo anterior, se deu inicialmente pela observação de que o aluno escreveu a resposta igual ou semelhante a que previmos na 6º etapa. Independente da resposta apresentada ser considerada correta ou não, recorremos ao arquivo do GeoGebra para entender o processo que o levou àquela conclusão. Daí a importância do Protocolo de Construção enquanto dado para nossa pesquisa, o qual evidencia todo o processo de construção realizado pelo aluno. Nos casos em que não ficavam evidentes a partir da análise desses elementos, recorremos às gravações de áudio e observamos se na fala do aluno havia elementos que nos permitisse dizer se houve ou não aprendizagem.

O que observamos nesses dados, foi essencialmente o processo – as ações, formulações e argumentações dos alunos – e como o GeoGebra influenciava nas ações, nas técnicas empregadas na exploração, na construção e no incentivo a discussão entre os alunos. Analisamos também quais atributos definidores eram identificados e usados pelos alunos, quais tipos de definições eles elaboravam e se elas eram coerentes com as identificadas no livro didático. Nos casos em que os alunos demonstravam ter conhecimentos sobre os polígonos, verificamos se ao longo do processo, a imagem mental dos alunos sobre a definição desse objeto matemático era modificada.

4 ANÁLISES

Este capítulo é constituído por quatro análises que estão no centro dessa pesquisa. A primeira análise, apresentada na seção 4.1, é composta pela observação e reflexão sobre polígonos, que é o objeto matemático de referência. Por isso, analisamos o livro *Os Elementos*, dada sua importância e influência sobre o Ensino de Geometria durante séculos, e também comparamos a abordagem dos polígonos em alguns livros que aparecem como referência nos cursos de graduação em matemática no país.

A segunda análise, apresentada na seção 4.2, que constitui este capítulo, é direcionada aos elementos institucionais que são indicados para serem objetos de Ensino de Geometria na Educação Básica, mais precisamente na etapa do Ensino Fundamental. Assim, analisamos os documentos oficiais, que são os principais elementos do Saber a Ser Ensinado, e o livro didático adotado pela instituição de ensino para ser usado no 6º ano do EF.

Baseados nessas duas análises, construímos uma Sequência Didática visando que os alunos construíssem a definição de polígono. E é essa sequência que foi submetida às duas últimas análises, *a priori* e *a posteriori*, as quais podem ser lidas na seção 4.3. Na análise *a priori*, buscamos prever fatos – possíveis soluções, dificuldades – que ocorreriam durante a aplicação da sequência. Na análise *a posteriori*, confrontamos a análise anterior com os resultados obtidos na implementação, é por meio da análise a posteriori que obtivemos elementos para responder a questão de pesquisa que norteia essa dissertação.

4.1 Análise Histórica e Epistemológica sobre Polígono

Esta seção está dividida em duas subseções. Na primeira analisamos a apresentação da definição de polígono no livro *Os Elementos*, que norteou o ensino de geometria por séculos. Na sequência, comparamos um conjunto de livros que são referências em cursos de matemática de universidades de diferentes regiões brasileiras.

4.1.1 O Saber Sábio: os polígonos em Os Elementos

O autor do livro pode ter sua existência contestada, mas a influência exercida pelo livro *Os Elementos* é incontestável. Este livro foi escrito pelo autor grego Euclides enquanto vivia na cidade de Alexandria por volta de 300 a.C. Embora não seja o único escrito por esse autor, ele é sem dúvida o de maior sucesso, o que pode ser comprovado pelo fato de *Os Elementos* ser o segundo livro mais publicado, perdendo apenas para a Bíblia (EVES, 2004; TOMEI, 2006). Mas, a que se deve tamanho sucesso?

Essa questão ganha mais relevância quando Tomei (2006) diz que muitos dos resultados encontrados em *Os Elementos*, não foram obtidos por Euclides, ou seja, esse livro tende mais para um compêndio da matemática conhecida na época do que apresentação de resultados inéditos. Segundo esse autor, o diferencial dessa obra estava no emprego original, em dimensão nunca vista antes, do método dedutivo para apresentar o saber matemático. Esse saber não se restringia apenas às geometrias espacial e plana, mas também a tópicos de teoria dos números (EVES, 2004). Além disso, eles eram apresentados a partir de seus conceitos e noções mais elementares – como é o caso do ponto, da reta e do plano, no que diz respeito à geometria – para construções mais elaboradas.

Tomei (2006, p. 22) ainda destaca que "por muitos séculos, *Os Elementos* foi uma obra tão respeitada que não fazia sentido redigir um novo compêndio sobre os temas nela tratados: restava então acrescentar dados ao texto disponível". Sendo assim, este livro recebeu diversos comentários, traduções (boas e ruins), versões resumidas para emprego no ensino, e mais recentemente ganhou versões digitais. Com o tempo e a evolução do Saber Matemático, o uso de Os Elementos diminuiu, porém sua importância histórica é incontestável, uma vez que ele traz elementos que são capazes de nos conduzir a possíveis respostas para os seguintes questionamentos: que tipos de definição aparecem? Como estão organizadas as definições dos diferentes polígonos? Por que existe uma palavra, círculo, para denominar a região delimitada por uma linha, circunferência, e o mesmo não acontece com os polígonos?

Diante disso, buscamos entender como os polígonos eram tratados nessa obra. Assim, começamos a observação dessa obra destacando as seguintes definições de Euclides (1944, p. 5): "XIII – Têrmo se diz aquilo, que é extremidade de alguma cousa."; "XIV – Figura é um espaço fechado por um ou mais têrmos". A combinação dessas duas definições nos conduz tanto ideia de figuras planas quanto as figuras espaciais, nas quais o *Têrmo* representaria a linha (reta ou curva) e superfície (plana ou curva), respectivamente. Com isso, vemos que o autor define um elemento de forma extremamente genérica, o qual é utilizado para construir a definição de *figura*. Nessa segunda definição, a expressão "espaço fechado" permite a interpretação de que a região interna também faz parte da figura. Desse modo, podemos inferir que desde o tempo de Euclides as figuras geométricas são concebidas como uma partição do plano ou do espaço, ou seja, um polígono seria interpretado como uma partição com características específicas.

Contudo, essa interpretação se estende para os conceitos de círculo e circunferência, como podemos ver na seguinte definição: “XV – Círculo é uma figura plana fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que todas as linhas retas, que de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si” (EUCLIDES, 1944, p. 5). Nesta definição, a circunferência é apresentada como o conjunto de extremos do segmento, que hoje denominamos raio, ou seja, ela é um *Têrmo* com características essenciais para a construção da ideia de círculo. Por meio dessa definição, o círculo pode ser interpretado como um conjunto de segmentos que compartilham um extremo, ponto central, e que o outro extremo forma uma linha especial, circunferência. A circunferência desempenha um papel imprescindível à compreensão do círculo enquanto uma figura plana peculiar.

Essa característica particular da “periferia” do círculo, não ocorre com definição equivalente à de polígono, como podemos ler: “XX – Figuras retilíneas são as que são formadas com linhas retas.” (EUCLIDES, 1944, p. 6). Por meio dessa definição vemos que as figuras retilíneas são limitadas exclusivamente por retas, que é uma noção elementar já utilizada em outras definições, ao contrário da circunferência que emerge do conceito de círculo, ou seja, tem seu *habitat* e *nicho* dependentes do círculo. Outro aspecto que nos chama a atenção, é que a planicidade dessas figuras retilíneas não é destacada, parece-nos que o fato de seus limites serem compostos por linhas planas levam os autores a ideia de que todas devem ser coplanares, o que não é verdade.

Essas figuras retilíneas são divididas em três grandes categorias, triláteros, quadriláteros, e os multiláteros que são definidos da seguinte forma: “XXI – As triláteras são aquelas que são formadas com três linhas retas”; “XXII – As quadriláteras são feitas por quatro linhas retas.”; “XXIII – As multiláteras são as que são feitas por mais de quatro linhas retas”. Temos três definições estruturais que derivam da característica comum de serem constituídos por linhas retas, mas que conferem uma organização partitiva para as figuras retilíneas.

Internamente, os triláteros apresentam uma organização em definição hierárquica entre os isósceles e os equiláteros: “XXIV – Entre as figuras triláteras o triângulo equilátero é o que tem três lados iguais”; “XXV – Triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais”. Diferente do que ocorre com os quadriláteros, que são apresentados em cinco conjuntos disjuntos: quadrados; retângulos; rombo; romboide e trapézios.

> XXX – Entre as figuras quadriláteras, o quadrado é o que é juntamente equilátero e retângulo
> XXXI – E a figura, que de uma parte, for mais comprida, pode ser retângula, mas não equilátera
> XXXII – Mas o rombo é uma figura equilátera, e não retângula
> XXXIII – Romboide é uma figura, que tendo os lados opostos iguais, nem é equilátera, nem equiângula
> XXXIV – Todas as mais figuras quadriláteras, que não são as referidas, se chamam trapézios. (EUCLIDES, 1944, p. 6)

A apresentação das definições é iniciada por aquela que tem mais atributos definidores, quadrado, os quais vão sendo um a um negados e dando origem às definições de outros quadriláteros. A negação da equidade dos lados dos quadrados dá origem ao conjunto dos retângulos não quadrados, a negação da equidade dos ângulos internos origina a definição de rombo, que equivale ao losango não quadrados. Nota-se também que os romboides, figura geométrica equivalente aos paralelogramos, são definidos baseado na igualdade dos lados opostos em vez do paralelismo dos lados que atualmente é utilizado na definição dos paralelogramos e inclusive influencia na escolha do nome. Nesse conjunto de definições, cabe aos trapézios comportar todas as demais figuras quadriláteras. Para ser considerado um trapézio, a figura geométrica não necessita ter um par de lados paralelos.

Assim, observamos que o paralelismo não era um atributo utilizado na construção das definições dos quadriláteros. Além disso, vemos que as *figuras retilíneas* são concebidas como regiões do plano denominadas por uma única palavra, com exceção do círculo o qual é limitado por uma curva com denominação própria, circunferência. As figuras retilíneas, atualmente são chamadas de polígono, nome esse de origem grega por ser formado pelas palavras gregas “poli” = muitos e “gono” = ângulo. Desse modo, se considerarmos os ângulos como regiões do plano, o polígono será a interseção dos ângulos que o forma. No entanto, Euclides (1944, p. 4), define ângulos planos como “inclinação recíproca de duas linhas”, por isso que a atual denominação dessa classe de figuras geométricas delimitadas unicamente por segmentos de retas podem receber uma dupla interpretação: *região plana* ou *conjunto de segmentos*.

As definições relativas aos polígonos, encontradas nesta obra importante para a matemática, revelam que desde a organização da matemática em uma estrutura lógico dedutiva, a noção de polígono não evidencia uma diferenciação entre região e linha que limita a região do plano. E não há indícios de qualquer prejuízo à compreensão do conceito de polígono que decorra dessa dupla interpretação. Em *softwares* como GeoGebra, quando se constrói um polígono, ele reconhece tanto a região quanto a linha que o delimita como um só objeto geométrico, o que pode ser consequência da transposição informática da Organização Matemática de *Os Elementos* para construção desse programa.

Contudo, observamos que há a necessidade de se enfatizar a relação de inclusão entre os segmentos (que limitam o polígono) e o plano. Mais uma vez, as características dos *softwares* de Geometria Dinâmica, em particular aqueles que possuem uma janela na qual é possível representar objetos geométricos tridimensionais, se mostram promissores para evidenciar a necessidade de que todos os elementos que compõem o polígono sejam coplanares.

Porém, como já dissemos, *Os Elementos* de Euclides não é considerado na atualidade a principal referência para o Ensino de Geometria como foi no passado. Assim, as observações feitas nessa seção propiciam uma compreensão das origens da teoria geométrica que está posta para ser ensinada atualmente. Diante disso, na próxima seção descrevemos como alguns autores de livros de geometria atuais (da década de 1970 até fins da década de 1990) definem o polígono e observamos qual das duas concepções anteriores eles adotam.

4.1.2 O Saber Sábio: os polígonos nas referências atuais

Nesta subseção trataremos de entender a essência do objeto matemático denominado polígono. Para que possamos fazer isso, selecionamos livros que aparecem como indicações nas ementas dos cursos de matemática (licenciatura ou bacharelado) de universidades[29] de diferentes regiões do Brasil. Nos questionamos sobre o que é um polígono? Ou, como os polígonos são definidos? Quais são os elementos fundamentais de um polígono?

Norteados por estes questionamentos, fizemos um estudo em cinco livros de geometria (CASTRUCCI, 1978; MORGADO; WAGNER; JORGE, 1973; MOISE; DOWNS,1971; CARVALHO, 1982; DOLCE; POMPEO, 1993a) que são utilizados em cursos de nível superior. Assim, observamos no sumário de cada livro qual (ou quais) capítulo(s) tratava(m) desse objeto matemático. Em seguida, procedemos com um estudo baseado na identificação da definição de polígono e dos elementos relacionados a esse objeto.

Logo de início, pudemos identificar três "caminhos" seguidos pelos autores: definir triângulo; definir região plana convexa; definir linha poligonal. O primeiro caminho foi utilizado apenas por Moise e Downs (1971, p. 68), assim eles afirmam que "se A, B e C forem três pontos não-colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC é chamado um triângulo e é representado por ΔABC". Feito isso, eles nomeiam esses pontos como vértices, os segmentos

[29] Observamos a ementa da Universidade Federal da Bahia, que pode ser consultada no endereço: https://colmat.ufba.br/componentes-curriculares. Também consultamos o site da Universidade de São Paulo: https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=45&codcur=45024&codhab=1&tipo=N. E da Universidade Federal do Pará: http://www.matematica.icen.ufpa.br/index.php?option=com_content &amo;view=article&id=105&Itemid=55.

como lados e escreve que “cada triângulo ΔABC determina três ângulos”. Na sequência, eles apresentam uma série de definições para preparar o caminho para definir uma região triangular. Nesse processo de preparação, eles definem ponto interior e exterior a um ângulo da seguinte forma:

> Seja ∠BAC um ângulo no plano E. Um ponto P está no *interior* do ∠BAC se (1) P e B estiverem do mesmos lado da reta AC e (2) P e C estiverem do mesmo lado da reta AB. O *exterior* do ∠BAC é o conjunto de todos os pontos de E que não estão no ângulo nem no seu interior. (MOISE; DOWNS, 1971, p. 68)

Certamente que nesta definição quando os autores falam em “lado da reta” eles estão se referindo ao “mesmo semiplano”. Essa observação é relevante, pois é a partir desta definição que os autores caracterizam ponto do interior de um triângulo como aquele que está no interior dos três ângulos determinados pelo triângulo. Por conseguinte, os autores apresentam região triangular como resultante da união entre o triângulo e os pontos de seu interior. Com este exemplo, percebemos como uma noção presente em uma definição pode influenciar nas definições que decorrem desta, ressaltando assim a relevância de se tomar cuidado com a linguagem empregada para que não possibilite interpretações incorretas.

Dando continuidade, é a partir dessa noção de região triangular que Moise e Downs (1971, p. 271) definem a região poligonal como “a reunião de um número finito de regiões triangulares, em um plano, de tal modo que, se duas se interceptam, a interseção é um ponto ou um segmento”. Deste modo, podemos inferir que, assim como a região triangular é a união do triângulo com os pontos internos, a região poligonal também é um ente binário composto por pontos interiores a uma reunião de segmentos de reta não-colineares, a qual podemos chamar de poligonal.

Por outro lado, embora siga a ideia de definir região plana convexa primeiro, Carvalho (1982) também define *figura plana convexa* de forma semelhante a região poligonal apresentada por Moise e Downs (1971). Porém, antes de falarmos sobre o que este autor entende por figuras e como elas se relacionam com o conceito de polígono, vamos apresentar a cadeia de definições trazidas pelo autor, as quais convergem na definição de polígono.

Essa sequência de definições é iniciada em Carvalho (1982, p. 21) com a definição de região plana convexa, a qual é compatível com a definição de Lima (2007, p. 8) para figura plana convexa e a de Castrucci (1978). Estes três autores falam de um conjunto de pontos no plano, tais que, dados dois deles distintos, o segmento que os une está totalmente contido no conjunto. Assim, podemos afirmar que um segmento é uma região convexa, porém sem o que

Carvalho (1982) vai chamar de contorno, que é aquele conjunto de pontos pelos quais é possível traçar uma reta qualquer, na qual uma das semirretas possui pontos em comum com a região e a outra não.

A noção de contorno é usada para definir figura plana convexa como a união da região convexa com seu contorno. Desse modo, Carvalho (1982), assim como Moise e Downs (1971), buscam diferenciar o conjunto dos pontos que compõem uma região do plano daquilo que em topologia é denominado de pontos de fronteiras[30]. Assim, traçando uma breve comparação entre os dois caminhos seguidos por esses dois autores, Moise e Downs (1971) apresentam uma forma mais intuitiva, uma vez que não faz referências a noções topológicas (nem explícita, nem implicitamente), trabalhando assim exclusivamente nos limites da geometria euclidiana plana. Uma possível consequência da escolha de Carvalho (1982) é que ao definir polígono, ele não faz uso da noção de contorno nem de região convexa como veremos em sequência.

Em seguida, encontramos as definições de linha poligonal aberta e fechada como "figuras resultantes" da união aos pares de uma quantidade finita de pontos[31] dispostos em "determinada ordem". Aqui, inicia-se certa confusão, pois o autor afirma que linha poligonal fechada pode ser denominada por "polígono". Contudo, ele define região poligonal convexa utilizando o termo "polígono" no texto e, em seguida, afirma "que a região poligonal e seu contorno formam o que já definimos como polígono" (CARVALHO, 1982, p. 22). Polígono é a região, o contorno ou é a união dos dois? As inconsistências não param por aí, pois pela definição de poligonal aberta e de diagonal apresentada no livro, podemos afirmar que o segmento que une os extremos da poligonal aberta é uma diagonal, o que ratifica o cuidado com as definições.

Diferentemente de Carvalho (1982) e Moise e Downs (1971), Castrucci (1978), Morgado, Wagner e Jorge (1973) e Dolce e Pompeo (1993a) seguem o "caminho" da definição de linha poligonal. No entanto, entre os três trabalhos, somente Morgado, Wagner e Jorge (1973) diferenciam linhas poligonais abertas das fechadas, sendo que a definição da fechada é análoga a definição de polígono apresentada pelos outros autores. Os três livros trazem a mesma ideia de polígono como um conjunto contendo no mínimo três segmentos de retas. Os extremos desses segmentos formam uma sequência de pontos, dos quais três consecutivos não são

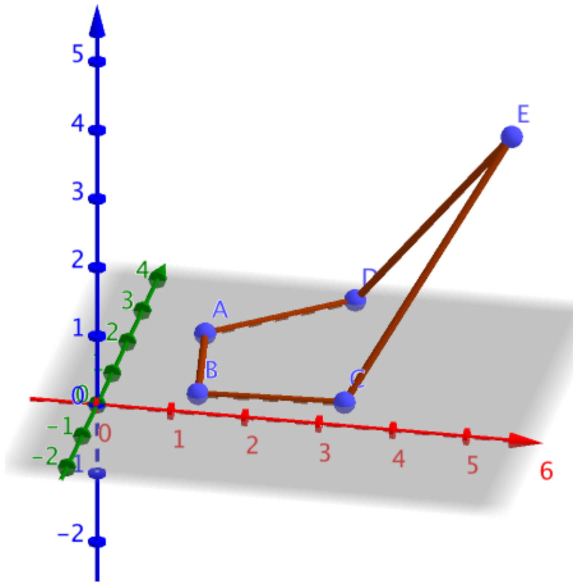
---

[30] Seja A um subconjunto de um espaço métrico ε. Se a bola aberta centrada num ponto $q \in A$ contiver algum ponto que não pertence a A, dizemos então que q pertence a fronteira de A. (WU, 2006, p. 122)

[31] Carvalho (1982) não fala sobre uma quantidade mínima de pontos. Moise e Downs (1971) não fala em linha poligonal, mas fala que são necessários 3 pontos para um triângulo. Castrucci (1978) fala que são necessários 2 ou mais pontos. Morgado, Wagner e Jorge (1973) fala de "vários pontos", mas dá a entender que esse "vários" é uma quantidade maior ou igual a 3.

colineares. No entanto, a natureza coplanar desta sequência de pontos, só é explicitada por Dolce e Pompeo (1993a). Essa coplanaridade dos pontos (vértices) é, sem dúvida, um aspecto fundamental, pois os polígonos também podem ser representados no espaço tridimensional. Caso a natureza coplanar não seja destacada poderemos ter uma curva como a representada na Figura 4.1, a qual é na verdade a união de dois polígonos contidos em dois planos distintos.

Figura 4.1: Exemplo de um polígono sem a exigência da coplanaridade dos vértices



Fonte: Elaborado pelos autores.

Refletindo a respeito dessas definições, começar um trabalho sobre polígonos pela definição de triângulos, assim como fazem Moise e Downs (1971), facilitaria a abordagem posterior sobre a decomposição de polígonos em triângulos para o cálculo de áreas e outros fins.

Do modo contrário, definir regiões planas convexas além de segmento de reta exigiria dos alunos uma noção bastante apurada de plano enquanto conjunto de pontos. É bem verdade que o ensino de geometria nas séries iniciais da Educação Básica também envolve noções de topologia (BRASIL, 1997b) como dentro, fora, exterior, inteiro, ao lado, a frente entre outras noções. No entanto, a forma como Carvalho (1982) apresenta a noção de contorno, além de não ser consistente, mostrou-se prescindível para a definição de linha poligonal fechada a qual ele chama de polígono.

Assim, fundamentando-nos nas exposições dos autores citados nesta seção, parece-nos coerente adotarmos para a construção de uma definição de polígono, junto a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, o mesmo processo que adotaram Castrucci (1978), Morgado, Wagner e Jorge (1973) e Dolce e Pompeo (1993a). O caminho adotado por eles baseia-se nas noções de plano, reta e ponto, em seguida, definem pontos não-colineares, coplanares e de segmento de reta. Com isso, teríamos elementos suficientes para definir linhas poligonais aberta e fechada, sendo esta última o que chamamos de polígono.

Mesmo antes de se evocar o conceito de ângulo, é possível uma série de classificações dos polígonos como simples ou entrecruzados, baseando-se na intersecção dos lados (segmentos) não adjacentes. Poderíamos também classificá-los como convexos ou não convexo de forma estática (sem a necessidade de imaginar o movimento de qualquer elemento), por meio da noção de reta de apoio (LIMA, 2007; DOLCE e POMPEO, 1993a), ou de forma dinâmica como na definição 2.1 de Lima (2007, p. 8) que escreve "Um polígono diz-se convexo quando a região por ele limitada é uma figura plana convexa".

A verificação desta convexidade da figura é feita tomando-se dois pontos quaisquer da figura, traçando o segmento que os une e observando se todos os pontos do segmento também pertencem a figura. Assim, notamos a necessidade de imaginar esses pontos e o segmento se movimentando, tomando diferentes posições, para a partir disso, classificar o polígono como convexo ou não.

Essa forma dinâmica de se verificar a convexidade de um polígono nos remete ao funcionamento dos *softwares* de Geometria Dinâmica. Ao construirmos um polígono no GeoGebra, por exemplo, poderíamos criar dois pontos, cujo lugar geométrico deles é o contorno do polígono. Dadas as características da construção, mesmo um aluno de 6º ano do Ensino Fundamental, que desconheça a diferença entre polígonos convexo e não convexo, poderia investigar esta figura geométrica e perceber o comportamento do segmento que une os dois pontos criados sobre o contorno do polígono. Nesse processo, o aluno agregaria novos elementos à sua imagem conceitual de polígono por meio de uma situação didática que o leva a explorar e observar um fenômeno visual que revela o atributo definidor que distingue os polígonos em duas classes, convexo e não convexos.

Baseado na análise das definições realizadas nesta subseção, podemos afirmar que definir polígono considerado somente as características do seu contorno, ou seja a linha poligonal, não gera obstáculo à aprendizagem do aluno. Não identificamos consequência negativa que possa derivar da não-utilização da noção de região interna do polígono. Assim, nem mesmo a noção de área delimitada por um polígono seria prejudicada com a abordagem de polígonos considerando apenas a linha poligonal que o constitui. Contudo, salientamos que levar em consideração, de início, a região interna na construção da definição de polígono, tampouco torna esse processo mais complexo para um aluno do 6º ano do Ensino Fundamental.

Porém, cabe aqui fazer um comentário que envolve a definição de poliedros, por exemplo, a apresentada por Dolce e Pompeo (1993b, p. 123) em uma obra destinada a geometria espacial. Esses autores afirmam que as faces de regiões poliédricas são polígonos, mais precisamente, que “superfícies poliédricas limitadas convexas é a reunião de um número finito de polígonos planos convexos (ou região poligonal convexa)”, percebemos que polígono é uma região. Essa definição de polígono entra em contradição com a definição que estes mesmos autores (DOLCE; POMPEO, 1993a) apresentam em uma obra destinada à geometria plana. Segundo eles um polígono é uma reunião de segmentos, ou seja, é uma linha. Parece-nos que a concepção de polígono adotada, varia conforme a necessidade dos autores.

Diante das reflexões sobre as definições apresentadas nesta seção, questionamos sobre qual dessas formas seria a melhor aproveitada para a construção de uma Sequência Didática? A busca pela resposta desse questionamento nos conduziu a realizar a Análise Institucional apresentada na seção subsequente, na qual analisamos documentos oficiais que versam sobre a educação no Brasil e do livro adotado pela escola.

4.2 Análise Institucional

4.2.1 O Saber a Ser Ensinado: os documentos oficiais e o livro institucional

Nosso objetivo principal com essas análises foi identificar as funções desempenhadas (*nichos*) pelos polígonos e como os documentos tratam o processo de construção da definição nos anos iniciais do ensino fundamental e no 6ºano. Além disso, buscamos identificar quais tipos de polígonos são explicitamente citados e com quais objetos matemáticos eles estabelecem relação (*habitats*). Por fim, observamos estes pontos e a Organização Praxeológica no entorno dos polígonos no livro didático adotado pela instituição de aplicação, que é o 6º ano.

4.2.1.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é um documento produzido pelo Ministério da Educação e Cultua (MEC) no ano de 1997, e que está dividido em dez volumes. O primeiro volume, Introdução, justifica a necessidade da criação do documento apresentando dados referentes à Educação Básica que indicavam uma carência de reorganização e o estabelecimento de objetivos mais adequados a realidade brasileira em toda sua extensão. Além disso, esse volume inicial apresenta os fundamentos teóricos que norteiam a essência dos demais volumes.

Outros seis, dos dez volumes, são dedicados a explicitação das indicações mais específicas para o que os PCN chamam de Áreas de Conhecimento. Os três últimos volumes, são dedicados a justificar e explicar a integração de questões sociais ao currículo da Educação Básica (EB), sendo que estas questões são apresentadas em termos de Temas Transversais. Assim, temos a distribuição que podemos observar no Quadro 4.1.

Quadro 4.1: Distribuição dos volumes dos PCN por Áreas de Conhecimento e por Temas Transversais

Volume 1	Introdução
Volume 2	Língua Portuguesa
Volume 3	Matemática
Volume 4	Ciências Naturais
Volume 5	História e Geografia
Volume 6	Arte
Volume 7	Educação Física
Volume 8	Apresentação dos Temas Transversais e Ética
Volume 9	Meio Ambiente e Saúde
Volume 10	Pluralidade Cultural e Orientação Sexual

Fonte: BRASIL (1997a).

No Quadro 4.1, os volumes 1 e 3 estão destacados, pois eles serão objeto de nossas análises. A escolha do Volume 1 se dá pelo fato de que ele nos fornece a visão geral das necessidades do sistema educacional brasileiro, segundo a Noosfera constituída na época de sua elaboração. Enquanto que, no Volume 3 estão dispostas a visão e as indicações específicas para o processo de ensino aprendizagem de Matemática.

No volume 1, indica-se que uma das intenções desse documento é discutir elementos que compõe a prática escolar a fim de que realmente alcance seus objetivos. Por exemplo, discutir sobre o que e como se pode trabalhar desde as séries iniciais até os anos finais para atingir as metas. Para tal, propõe-se uma organização do Ensino Fundamental (EF) em ciclos, a qual é uma estrutura organizacional que já vinha sendo utilizada por alguns países. Essa estrutura em ciclos é proposta com o intuito de "superar a segmentação excessiva produzida pelo regime seriado e de buscar princípios de ordenação que possibilitem maior integração do conhecimento" (BRASIL, 1997a, p. 42).

Segundo os PCN, o Ensino Fundamental é particionado em quatros ciclos, compostos por duas séries. Em temos da estruturação do Ensino Fundamental de nove anos atualmente vigente, o Primeiro Ciclo abrange o 2º e 3º ano, o Segundo Ciclo o 4º e o 5º ano, Terceiro Ciclo 6º e 7º ano, e o Quarto Ciclo o 8º e 9º ano. Para cada ciclo são listados um conjunto de conteúdo, os quais são apresentados como pertencentes a três categorias: conteúdos conceituais; conteúdos procedimentais; e conteúdos atitudinais.

Os conteúdos conceituais estão relacionados com o desenvolvimento de *capacidades* intelectuais manifestas pela operação mental com símbolos, ideias, e representações da realidade. Eles são desenvolvidos pelos alunos através da aquisição de informações e por experimentarem situações diversas, atribuindo assim, significado ao conteúdo. Esses conteúdos conceituais são apresentados no Volume 3, atrelados aos conteúdos procedimentais, os quais "expressam um saber fazer, que envolve tomar decisões e realizar uma série de ações, de forma ordenada e não aleatória, para atingir uma meta" (BRASIL, 1997a, p. 52). Com isso, vemos indícios de que, embora não seja possível identificar Organizações Praxeológicas completas (Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria) nos PCN, há algo mais do que uma lista de conteúdos a serem estudados pelos alunos em cada ciclo.

Por exemplo, quando encontramos indicado como um Conhecimento Conceitual e Procedimental para o Terceiro Ciclo a "Composição e decomposição de figuras planas" (BRASIL, 1997b, p. 53), podemos notar que as figuras planas são objetos de estudo propostos para essa etapa do EF. Além disso, podemos intuir que a Tarefa, *decompor um hexágono em triângulos*, tem razoável potencial de formar parte do Saber Ensinado no 6º ou 7º ano. Contudo, se já pairam incertezas sobre quais Tarefas realmente podemos encontrar na instituição Terceiro Ciclo, então especificar as demais noções que compõe a Organização Matemática para cada objeto do saber, seria pura especulação. Nesse sentido, continuamos esta análise em busca de elementos que revelem, ao menos, a ecologia dos objetos do saber matemático, ou seja, quais são e onde estes objetos "vivem" (*habitat*), e também quais funções eles desempenham nesta ecologia (*nicho*).

No que diz respeito aos conhecimentos atitudinais, eles são apontados como um meio de transmissão explícita e implicitamente de valores que são considerados desejáveis pela sociedade. Para que a aprendizagem desses conteúdos ocorra faz-se necessário uma prática coerente na escolha de temas a serem abordados em sala e especial atenção a fatores emocionais e aos diferentes valores e atitudes que os alunos trazem de suas comunidades.

Esses três tipos de conteúdo, conceitual, procedimental e atitudinal, aparecem nos PCN dentro de uma estrutura organizacional maior, que são os "blocos de conteúdos e/ou organizações temáticas [...] que representam recortes internos à área e visam explicitar objetos de estudo essenciais à aprendizagem" (BRASIL, 1997a, p. 53). No caso da área da Matemática, os conteúdos estão organizados em quatro blocos que são: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação.

Antes de entrarmos na análise desses blocos, é relevante destacar que tipo de ensino e aprendizagem é defendido pelos PCN. Esse destaque é necessário até para que se possa compreender melhor a forma como os três tipos de conteúdos são apresentados no corpo do documento. Sendo assim, Brasil (1997a, p. 36) deixa explícita a necessidade de se "ressignificar a unidade entre aprendizagem e ensino, uma vez que, em última instância, sem aprendizagem o ensino não se realiza". Se compararmos essa declaração com a concepção do processo de ensino e aprendizagem que assumimos no capítulo anterior, baseado nas ideias da Teoria das Situações Didáticas, vemos que há confluência de ideias. O fato de que a Sequência Didática que elaboramos baseados na problemática e na TSD comungar da ideia de interdependência e unidade entre ensino e aprendizagem, dão um *status* de legitimidade do ponto de vista institucional. Ou seja, a sequência, enquanto componente do Saber Ensinado, não altera substancialmente o que está posto como prática desejável para o Ensino Fundamental.

Além disso, a organização das atividades desenvolvidas em sala, organizadas em situações de ação, formulação, validação e institucionalização coincide com a visão de que "nada pode substituir a atuação do próprio aluno na tarefa de construir significados sobre os conteúdos da aprendizagem" (BRASIL, 1997a, p. 37). Feita estas considerações, podemos direcionar nossa análise ao Volume 3 dedicado à área da Matemática.

O volume referente a área da Matemática, assim como em todos os outros, é iniciado com apresentação do referencial teórico sobre as características do ensinar e aprender matemática no Ensino Fundamental. Esta seção é sucedida pelos Objetivos Gerais para Matemática, os quais são expressos como capacidades que os alunos devem desenvolver. Em ambas as publicações[32], Brasil (1997; 1998), dedicados à área de Matemática, a segunda parte trata especificamente de cada ciclo, primeiro e segundo ciclo em um documento e, terceiro e quarto ciclo no outro documento. Em cada um deles os objetivos, conteúdos e critérios de avaliação são apresentados levando em consideração as peculiaridades de cada etapa do Ensino Fundamental.

Como a organização em ciclos é uma forma de diminuir os efeitos da distribuição dos conteúdos por série, vemos a necessidade de se analisar como o polígono e seus atributos definidores aparecem nos documentos tanto do Terceiro Ciclo, que é onde está o 6º ano, quanto nos dos ciclos anteriores.

Quadro 4.2: Extratos dos PCN que revelam o início do tratamento dos polígonos no EF

Objetivo Do Primeiro Ciclo	"Perceber semelhanças e diferenças entre objetos no espaço, identificando formas tridimensionais ou bidimensionais, em situações que envolvam descrições orais, construções e representações."

[32] Os documentos referentes à área de Matemática foram publicadas em dois anos subsequentes. A publicação referente ao primeiro e segundo ciclo foram disponibilizados em 1997, enquanto que os referentes ao terceiro e quarto ciclo, em 1998.

Conteúdo Conceitual E Procedimental	"Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos."

Fonte: BRASIL (1997b, p. 47 e 51).

Os trechos constituintes do Quadro 4.2, referente ao Primeiro Ciclo, deixa evidente que o trabalho com alguns polígonos, principalmente os quadriláteros, estão atrelados ao estudo das formas tridimensionais. Contudo, a busca pelas "diferenças", sugerida nos dois extratos destacados, pode levar os alunos a desenvolverem a habilidade de abstrair uma das dimensões dos objetos tridimensionais e assim, construir uma relação pessoal com o principal atributo definidor de polígono, que é coplanaridade.

Ainda no Segundo Ciclo, percebemos que as formas tridimensionais seguem como objeto central no estudo da geometria, e uma gradual atenção vai sendo dada às figuras geométricas planas, inicialmente como detentoras de características das figuras espaciais. Assim, o estudo das características das faces das figuras tridimensionais e suas planificações aparecem como o solo propício para o surgimento e desenvolvimento dos polígonos e outras figuras planas. A partir dessas observações, podemos identificar uma primeira função desempenhada pelos polígonos, que a representação de faces tanto no espaço, quanto no plano ao constituírem as planificações. Temos assim, um *nicho* geométrico dos polígonos que chamaremos de *nicho espacial*, o qual se estabelece no habitat dos poliedros.

No tocante às atividades de definição, podemos identificar como atribuição do professor estimular nos alunos a "observação de características das figuras [...]o que lhes permite identificar propriedades e, desse modo, estabelecer algumas classificações" (BRASIL 1997b, p. 58). Nos objetivos Conteúdos Conceituais e Procedimentais este documento é mais explícito no que diz respeito ao que deve ser identificado e explorado nessa atividade de definição. Assim, as semelhanças e diferenças entre os polígonos devem ser expressas em termos do número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, paralelismo e perpendicularismo de lados (BRASIL, 1997b, p. 60).

Vemos com essas indicações que o polígono está posto como o objeto de estudo com um *habitat próprio*, independente das figuras tridimensionais, no qual os conceitos de paralelismo e perpendicularismo desempenham a função de importantes atributos definidores. Assim, temos que, no Segundo Ciclo, os alunos devem ser submetidos ao processo de estudo dos principais conceitos e propriedades que são utilizados no processo de construção de definição.

Nesta etapa do EF identificamos relativo destaque dado aos triângulos. Essa ênfase é perceptível pela indicação de exploração da rigidez triangular e no trabalho com a decomposição e composição de figuras planas com o intuito de se identificar que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares. Essa sugestão dos PCN nos remete ao processo de definição de polígono como reunião de triângulos (MOISE; DOWNS, 1971) descrito na subseção 4.1.2. Contudo, não é possível afirmar que esse é o real intuito do documento, pois esta atividade de decomposição de polígonos em triângulos pode ser utilizada no estudo da medida dos ângulos internos bem como no cálculo de área.

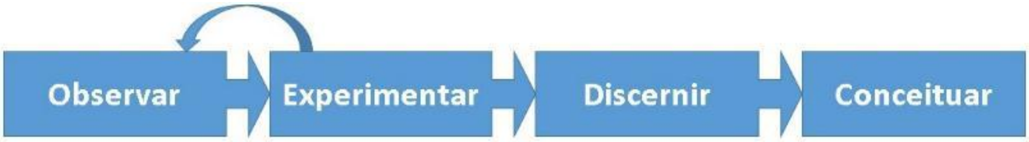
Os Conteúdos Atitudinais referentes ao Segundo Ciclo também apresentam considerações acerca dos conhecimentos geométricos. Indica-se o desenvolvimento da "sensibilidade para observar simetrias e outras características das formas geométricas, na natureza, nas artes, nas edificações" (BRASIL, 1997b, p. 62). A partir disso, podemos intuir, por exemplo, a capacidade de reconhecer o uso de polígonos em pinturas e em construções de telhados como uma virtude ou habilidade desejável pela sociedade. Assim, identificamos um *nicho* das aplicações dos polígonos na realidade, o qual denominamos de *nicho artístico-realístico*.

Além disso, o "hábito em analisar todos os elementos significativos presentes em uma representação gráfica, evitando interpretações parciais e precipitadas" (BRASIL, 1997b, p. 58, 62) é realmente imprescindível para o processo de construção de definições, principalmente as definições econômicas. Por meio desse hábito, a escolha das propriedades que comporão uma definição torna-se um processo mais efetivo. É comum os alunos definirem quadrado como quadrilátero com lados congruentes, que é uma característica importante, porém retrata uma visão parcial do conceito de quadrado.

Não só no bloco Espaço e Forma encontramos referências aos polígonos e suas propriedades. Por exemplo, encontramos nas Orientações Didáticas referentes ao bloco Números e Operações do Segundo Ciclo o seguinte exemplo: "Qual é o valor do perímetro de uma figura retangular que mede 13,2 cm de um lado e 7,7 cm do outro?" (BRASIL, 1997b, p. 80). Essa questão é apresentada como um modelo de problema a ser proposto para que os alunos desenvolvam a habilidade referente ao cálculo aproximado, contudo, vemos que a propriedade da congruência dos lados opostos do retângulo é ponto chave para resolução. O uso dessa propriedade fica implícito na análise da questão quando os PCN supõem que os alunos podem efetuar as operações 2 x 13 + 2 x 8, nas quais o fator 2 é uma indicação do reconhecimento da congruência dos lados opostos. Assim, este é um indicativo da existência de uma função desempenhada pelos retângulos no habitat das operações aritméticas, o qual chamaremos de *nicho numérico*.

Nas Orientações Didáticas referentes ao bloco Espaço e Forma, encontramos um caminho para definição indicado para os alunos do Segundo Ciclo. Esse percurso pode ser percebido quando é afirmado que "por meio da *observação e experimentação* [os alunos] começam a *discernir as características de uma figura*, e a *usar as propriedades para conceituar classes de formas*" (BRASIL, 1997b, p. 82, grifo nosso). Assim, podemos identificar na Figura 4.2 claramente quatro passos essenciais que culminam com a conceituação do objeto matemático em estudo.

Figura 4.2: Esquema do processo de definição baseado nas indicações dos PCN



Fonte: Elaborado pelos autores.

É possível notar que os passos de observar e experimentar podem ocorrer em ordem inversa, em um ciclo de observações e experimentações, ou mesmo simultaneamente, até que se possa discernir elementos (propriedades e características) do objeto matemático em estudo para ao final desse processo conceituar o objeto. Podemos entender esse "conceituar" de duas formas: como reconhecer as propriedades e caracterizar o objeto com pertencente a um conjunto específico; ou identificar atributos definidores a serem utilizados na construção de uma definição. A primeira forma é o processo de *verificação* de uma definição já conhecida, enquanto que a segunda trata do processo de *construção* de uma definição.

O último destaque que damos às indicações para o Segundo Ciclo a respeito do ensino de geometria, mais especificamente sobre o trabalho com os polígonos, é o uso da composição e decomposição de figuras para assim classificá-las de acordo com a presença ou não de *eixos de simetria*. "Dessa exploração resultará o reconhecimento de figuras[...] bidimensionais (como quadrados, retângulos, círculos, triângulos, pentágonos, etc.) e a identificação de suas propriedades." (BRASIL, 1997b, p. 82).

Existe uma evidente defesa da competência de resolver problemas como objetivo principal do ensino de geometria no Terceiro Ciclo. Neste sentido, indica-se atividades de observação, exploração, construção, decomposição, composição, ampliação e redução de figuras, bem como, conjecturar sobre propriedades destas. Assim, afirma-se que o ensino da geometria privilegiará a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 68).

Percebemos pela leitura dos documentos referentes ao Terceiro Ciclo que os polígonos seguem desempenhando funções no *habitat das figuras tridimensionais*, contudo notamos uma “expansão” do habitat próprio dos polígonos. Pois, além de descrever semelhanças e diferenças entre as figuras planas (incluindo polígono e não-polígono) propõe-se um trabalho no qual os alunos estabeleçam “relações entre elas e utilizando nomenclatura própria” (BRASIL, 1998, p. 73). Em geometria, o nome dos objetos, quase que de forma geral, estão diretamente relacionados a principal propriedade daquele objeto que o diferencia dos outros pertencentes ao mesmo conjunto como é o caso dos triângulos e dos retângulos, cujos nomes revelam, respectivamente, possuir apenas três ângulos internos, e possuir ângulos internos retos.

Este documento também revela os principais critérios a serem utilizados na classificação das figuras planas. De início, dividem-se em círculos, polígonos e outras figuras. Na sequência indica-se uma série de critérios de classificação, os quais estão claramente direcionados ao estudo dos polígonos, a saber, propõe-se o trabalho com a classificação a partir: do “número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados” (BRASIL, 1998, p. 73). Por meio da observação desses critérios, é possível propor situações nas quais os alunos entrem em atividade matemática de construção de definições.

Para além do *habitat próprio*, os polígonos estendem seu alcance e influência em outros *habitats*, tais como o das operações aritméticas. Por exemplo, neste ciclo indica-se o estudo “da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como a determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado” (BRASIL, 1998, p. 72). Este é mais um exemplo do *nicho numérico* que havia sido identificado nas indicações para o ciclo anterior.

Essas indicações, por serem referentes a todo o Terceiro Ciclo, apresentam elementos a serem tratados em dois anos distintos, 6º e 7º anos. Por assim ser, e pelo fato de que esta pesquisa se volta especialmente para o trabalho com a definição de polígono apenas no 6º ano, mesmo diante destas informações, necessitamos de uma fonte que nos fornecesse elementos do Saber a Ser Ensinado específicos do 6º ano. Diante disso, recorremos as informações presente do mais novo documento proposto pela *Noosfera* educacional, que é a Base Nacional Comum Curricular.

4.2.1.2 A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é essencialmente um conjunto de normas construído para nortear a construção do currículo das diferentes redes (municipal e estadual) de ensino. A partir desse documento, o governo e seus agentes definem "o conjunto orgânico e progressivo de *aprendizagens essenciais* que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017, p.7, grifo nosso). Essas aprendizagens básicas são declaradas como oriundas de (ou validada por) discussões realizadas em âmbito nacional, e que só poderão ser materializadas mediante um conjunto de oito ações, das quais destacamos: "selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender" (BRASIL, 2017, p. 12). Damos este destaque porque acreditamos que esta investigação contribui para sua realização ao selecionarmos um objeto pertencente às aprendizagens essenciais (polígonos) e produzimos, aplicamos e avaliamos um recurso didático com apoio tecnológico, que é a Sequência Didática que elaboramos.

O processo de aprendizagem destacado na BNCC está fundamentado na noção de competência, a qual é concebida como "conhecimento mobilizado, operado e aplicado em situação" (BRASIL, 2017, p. 12). "Assim, ser competente significa ser capaz de, ao se defrontar com um problema, ativar e utilizar o conhecimento construído" (p.16). Podemos, a partir disso, verificar uma coerência entre o processo de ensino e aprendizagem que está implícito nos PCN e na BNCC, uma vez que ambos os documentos se remetem à aprendizagem por adaptação do aprendiz a uma situação proposta, essa que é a mesma defendida, de modo geral, pela TSD.

Essa noção de competência é sem dúvida a peça estrutural de grande destaque na BNCC, pois, assim como podemos ver na Figura 4.3, ela é o ponto de partida do qual são derivados os demais elementos que dão forma a este documento.

Figura 4.3: Estrutura da BNCC

Fonte: Elaborado pelos autores.

As Competências Gerais da BNCC são em um total de dez e perpassam individualmente cada Área de Conhecimento – Linguagem, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências

Humanas – e também estabelecem relações entre elas. Como podemos ler, a quinta competência apresenta que:

> 5. Utilizar tecnologias digitais de comunicação e informação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas do cotidiano (incluindo as escolares) ao se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e resolver problemas (BRASIL, 2017, p.18).

Podemos ver que o uso de Tecnologias Digitais (TD) é uma competência a ser desenvolvida nas quatro Áreas, portanto, este tipo de tecnologia deve fazer parte das práticas institucionais do Ensino Fundamental, pois a BNCC é um documento referente a este nível. Além disso, esse documento deixa claro que não é qualquer tipo de prática institucional com o uso de TD que é aceita, ou seja, ações que atribuam significado aos objetos de aprendizagem, que gerem reflexões e desenvolvam uma visão crítica nos alunos são desejáveis. Isso, nos remete ao que Valente (1997) chama de uso inteligente do computador na educação, uma vez que sugere uma mudança na prática pedagógica que deve levar o aluno a refletir sobre e não simplesmente absorver informações.

Quando adentramos na parte desse documento que é dedicado à área da Matemática, encontramos a quinta Competência Geral, citada anteriormente, traduzida como “5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2017, p. 223). Assim, está explícito que as tecnologias digitais podem ser utilizadas na resolução de problemas matemáticos oriundos de diversas áreas.

Contudo, também é destacado que “a Matemática, independentemente de suas aplicações práticas, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes” (BRASIL, 2017, p. 223). Assim, podemos inferir que para se desenvolver a competência relativa ao uso de Tecnologia Digital, faz-se necessária a proposição de situações que os alunos não saibam de imediato como resolver, que é uma das características do conceito de situações didáticas. Outro aspecto relevante é que, estas situações didáticas não devem ser obrigatoriamente ligadas a um contexto extra matemático para que contribua para o aprendizado do aluno.

Essa e todas as outras Competências Específicas da Matemática são compostas por habilidades, cujo desenvolvimento é organizado e orientado em cinco Unidades Temáticas: Números; Álgebra; Grandezas e medidas; Geometria; Probabilidade e estatística. Na explicação inicial sobre cada uma dessas unidades, é possível encontrar elementos da ecologia relativa aos polígonos. Por exemplo, semelhante ao que ocorre nos PCN, na BNCC é possível identificar um *nicho espacial*: “espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa” Brasil (2017, p. 228). Essa indicação de características das figuras pode ser interpretada, em nosso entendimento, como um primeiro passo para construção das definições.

Diferente do que se indica nos PCN referentes aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, uma das expectativas identificadas na BNCC é a de que os alunos nomeiem os polígonos, especificando quais são as fontes desses nomes: “propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos” (BRASIL, 2017, p. 228). Assim, identificamos a existência de um *habitat próprio dos polígonos* ainda nos Anos Iniciais e, como esse nome é dado com base em características da figura, podemos afirmar que é direito do aluno do Ensino Fundamental ter acesso a situações de construção de definições, ainda que estas definições não sejam exploradas. Diante disso, podemos questionar: como esse trabalho deve ser realizado?

Mais uma vez não encontramos indicações explícitas de uma praxeologia completa (Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria) relativa à construção da definição de polígono, no entanto, alguns recursos didáticos são sugeridos. Por exemplo, a BNCC sugere o uso de papel quadriculado, ou plano cartesiano, e *softwares* de Geometria Dinâmica no estudo de simetria presente em alguns polígonos, e como esses recursos didáticos são oficialmente pertencentes a instituição, nada impede que eles sejam utilizados na preparação de situações didáticas voltadas para que os alunos identifiquem propriedades e nomeiem os polígonos. Desse modo, temos o uso de *software* de Geometria Dinâmica como recurso de identificação de simetrias e de outros atributos definidores, o que nos leva a concluir que o *habitat dos polígonos* não se desenvolve apenas no ambiente papel-e-lápis, mas também no tecnológico.

Esse mesmo trabalho de identificação de atributos definidores é sugerido para os Anos Finais do Ensino Fundamental, no qual a transformação de figuras geométricas é indicada para a identificação de propriedades como elementos invariantes, indicação que casa com o processo de construção de definições. Ainda nessa parte explicativa sobre a Unidade Temática denominada Geometria, podemos identificar elementos institucionais que nos mostram a existência de um *nicho* dos quadrados no *habitat* das unidades de medidas de área. Outro ponto de concordância entre os Anos Iniciais e os Anos Finais está no uso de recursos didáticos como “*softwares* de geometria dinâmica [que] têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas” (BRASIL, 2017, p. 232).

Em cada uma das cinco Unidades Temáticas há um conjunto de Objetos de Conhecimento os quais estão relacionados com um conjunto de habilidades. No 1º ano do Ensino Fundamental, identificamos um trabalho relativos às figuras, que se inicia com o reconhecimento de padrões figurais até identificação e denominação de figuras planas, por meio de um trabalho que caracteriza o já mencionado *nicho espacial*.

Os PCN e a BNCC compartilham uma característica que é a presença marcante desse *nicho espacial*. É sugerido na Unidade Geometria, do 2º ano, como Objeto de Conhecimento as "figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características" (BRASIL, 2017, p. 238). E, a habilidade associada a ele diz respeito ao reconhecimento e comparação de figuras – explicitamente o quadrado, o retângulo e o triângulo – "por meio de características comuns e representações em diferentes disposições ou em sólidos" (BRASIL, 2017, p. 239).

Neste mesmo ano, na Unidade Grandezas e medidas, o contorno do polígono aparece como objeto do processo de estudo, uma vez que é indicada a utilização de situações que levem os alunos a efetuarem medições sobre ele. E na Unidade Probabilidade e estatística identificamos um Objeto de Conhecimento que pode encontrar *nicho* no *habitat dos polígonos*, quando se solicita dos alunos a coleta, classificação e representação de dados em uma tabela. Esses dados podem ser as características de um polígono em tabelas, o que permitiria aos alunos perceber e organizar semelhanças e diferenças entre algumas figuras geométricas.

No 3º ano do Ensino Fundamental, o *nicho numérico* do retângulo pode ser percebido no *habitat* da operação aritmética de multiplicação. Na BNCC há a indicação de que os alunos devem desenvolver a habilidade de "Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros" (BRASIL, 2017, p. 243). Neste caso, é utilizada a propriedade da congruência dos lados opostos do retângulo para garantir que, por exemplo, em um conjunto de cadeiras disposta em forma retangular, cada fileira possui a mesma quantidade de cadeiras. Assim, a Tarefa de calcular o número de cadeiras equivale, em termos de Técnica, à calcular a medida da área do retângulo, ou seja, multiplicar as dimensões (medidas dos lados) do retângulo é análogo a multiplicar a quantidade de cadeiras em cada fileira pela quantidade de fileiras. Os resultados podem pertencer a conjuntos numéricos diferentes, pois a área é uma grandeza contínua, enquanto que o número de cadeiras é uma grandeza discreta, mas Técnicas empregadas para obtenção desses resultados é a mesma.

Na Unidade Geometria da BNCC referente ao 3º ano, o *nicho espacial* dos polígonos persiste por meio da indicação do estudo da planificação de prismas retos e pirâmides, no qual os polígonos desempenham a função de representar as faces desses poliedros. Nesta etapa do Ensino Fundamental também encontramos um *habitat* próprio dos polígonos, por meio do desenvolvimento da habilidade de "Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices" (BRASIL, 2017, p. 245). Sugere-se assim, o trabalho com os elementos dos polígonos que são essenciais para construção da definição deles. Essa ação de "classificar" pode se dá por meio dos tipos de definições hierárquicas, estruturais ou partitivas, descritas no capítulo anterior, propiciando ao aluno o contato com diversas formas de se definir um mesmo objeto.

Outro Objeto de Conhecimento que faz parte das aprendizagens essenciais encontradas na BNCC é a "Congruência de figuras geométricas planas" (BRASIL, 2017, p. 244), a qual vem associada a habilidade de "Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais" (BRASIL, 2017, p. 245). No ambiente das Tecnologias Digitais, essa habilidade pode ser desenvolvida por meio da proposição do Tipo de Tarefa 1, identificada por Acosta Gempeler (2004), reproduzir um desenho dinâmico dado. Pois, nesse Tipo de Tarefa, o aluno produz figuras semelhantes, bastando somente solicitar que os lados da figura produzida sejam congruentes aos da inicial e preservem os ângulos (de forma implícita).

Para o 4º ano encontramos o mesmo tipo de trabalho que caracteriza o *nicho numérico* identificado no ano anterior. Enquanto isso, na Unidade de Geometria indica-se o trabalho com as noções de intersecção, transversalidade, paralelismo e perpendicularismo de retas, que são ideias importantes para construção de definição de polígono. Além dessas noções, a BNCC indica o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento da habilidade de "Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais" (BRASIL, 2017, p. 249) e simetrias. Com isso, vemos que o 4º ano do Ensino Fundamental é uma instituição onde podemos encontrar o *habitat* de diversos atributos definidores dos polígonos. Também é possível identificar um *nicho* dos quadrados no habitat das grandezas e medidas, onde esse polígono é utilizado como unidade de medida de área em trabalhos com malha quadriculada.

Esse último *nicho* citado, também é encontrado no 5º ano do EF, porém não se restringe apenas aos quadrados, pelo contrário, os polígonos de forma geral são o centro de investigação da relação entre área e perímetro. Essa investigação matemática, pode ser realizada com outros recursos didáticos já citados na BNCC, porém é inegável que as características dinâmicas de *softwares* como o GeoGebra podem oferecer e contribuir significativamente para esta exploração. Assim, os desenhos dinâmicos (ACOSTA GEMPELER, 2004), ou representações concreto-abstratas (GRAVINA, SANTAROSA, 1998), poderiam permitir aos alunos o acesso instantâneo à variação das medidas da área e do perímetro de um polígono ao passo que eles movimentam a construção.

As Tecnologias Digitais continuam bastante influentes na Unidade de Geometria, pois aparecem nas habilidades associadas aos Objetos de Conhecimento “Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos” e “Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes” (BRASIL, 2017, p. 252). As habilidades associadas a estes Objetos de Conhecimento, giram no entorno do reconhecimento de características como número de lados e vértices, congruência e número de ângulos e proporcionalidade de lados. Esse reconhecimento tanto pode ser realizado com trabalho no ambiente papel-e-lápis quanto com o uso das Tecnologias Digitais, e é feito com o intuito de que os alunos utilizem essas características para nomear e comparar polígonos.

Mais uma vez o quadrado encontra espaço na Unidade Grandezas e medidas, desta vez no 6º ano do EF e não como unidade de medida, mas como objeto de estudo, mais precisamente, a relação de proporcionalidade de seus lados com a medida do perímetro é explorada. Porém, não só o quadrado tem um *nicho* nesta Unidade Temática, pois a habilidade de “Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas [...] área (triângulos e retângulos)” (BRASIL, 2017, p. 259) dá aos triângulos e retângulos uma função neste *habitat*. Outro aspecto que se mantém é o *nicho espacial*, ele se manifesta no estudo dos prismas e das pirâmides, no qual busca-se que os alunos sejam capazes de determinar a quantidade de faces, vértices e arestas de um prisma ou pirâmide a partir do polígono da base.

Além disso, no 6º ano, aparece como Objeto de Conhecimento os “Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados” (BRASIL, 2017, p. 258). Esse estudo dos polígonos está associado ao desenvolvimento de habilidades que se mesclam com a (emergem de) atividade de construção de definição de polígono regulares e não regulares, triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos, e dos quadriláteros. Isso pode ser comprovado, por exemplo, pelo trecho: “Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e *reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles*” (BRASIL, 2017, p. 259, grifo nosso). O trecho da citação grifado nos leva a inferir que a definição de diversos quadriláteros deve ser do tipo hierárquica (ZASLAVSKY; SHIR, 2005), pois são elas que guardam esta característica de estabelecer relação de inclusão de conjuntos entre as definições. Embora esse tipo de definição possa ser considerado como reconhecida na instituição do 6º ano do EF, nada impede que se realize trabalhos com outros tipos de definição dos mesmos objetos, o que pode contribuir para o enriquecimento da imagem mental que o aluno tem do polígono.

Além disso, três habilidades que fazem parte das aprendizagens essenciais apresentadas na BNCC, são destacados:

> Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono. [...] Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. [...] Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (BRASIL, 2017, p. 257-259).

Essas habilidades abordam, respectivamente, a representação cartesiana de pontos, o conceito e exploração de figuras planas semelhantes, e o perpendicularismo e paralelismo no estudo dos quadriláteros. São habilidades relacionadas a objetos matemáticos distintos, mas que podem ser abordadas com um único recurso didático, o *software* de Geometria Dinâmica. Assim, um trabalho com os polígonos representados no ambiente computacional pode propiciar o desenvolvimento simultâneo dessas habilidades. Notamos que o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica é mais explicitamente mencionado e associado ao desenvolvimento de habilidades específicas ligadas ao Objeto de Conhecimento, diferente do que ocorre nos PCN, cuja indicação é mais genérica.

Com essa análise institucional, identificamos que os polígonos encontram *habitat* no Ensino Fundamental, pelo menos, do 1º ao 6º ano. Notamos ainda que os polígonos emergem do *habitat* dos poliedros, no qual identificamos o *nicho espacial*, ou seja, a primeira função desempenhada pelos polígonos no Ensino Fundamental é a de representar as faces de poliedros. Entretanto, os polígonos não estabelecem relações apenas com objetos geométricos, o que pode ser comprovado pela identificação do *nicho numérico* e o *nicho* dos quadrados nas unidades de medidas.

No que diz respeito a definição de polígono, neste documentos encontramos uma série de indicações implícitas de situações construção, comparação e decomposição de polígonos, as quais podem ser organizadas de tal forma que os alunos identifiquem os atributos definidores e construam a definição de alguns polígonos. Outro aspecto de grande destaque neste documento, é a indicação do uso de *softwares* de Geometria Dinâmica, ou seja, existe um evidente reconhecimento por parte da instituição do uso desses programas no Ensino de Geometria. No entanto, consideramos o reconhecimento explícito do estudo dos triângulos e quadriláteros como o principal resultado da análise institucional da BNCC.

Baseando-nos nas análises tanto da BNCC quanto dos PCN (BRASIL, 1998) e fundamentados pelos elementos teóricos expostos no Capítulo 2, iniciamos na subseção que segue a apresentação do livro didático adotado pela instituição. Este que é, na maioria das escolas públicas brasileiras, para os alunos a fonte oficial de acesso aos saberes reconhecidos pela instituição, que pode ser acessada dentro e fora da sala de aula. Sendo assim, na próxima subseção apresentamos as análises a nível global, regional e local do livro didático fundamentando-nos no modelo proposto por Henriques, Nagamine e Nagamine (2012).

4.2.1.3 Livro Didático

O livro adotado pela instituição e que será objeto de nossa análise nesta subseção é o Projeto Araribá: matemática (GAY, 2014). Trata-se de uma obra coletiva, produzida pela Editora Moderna, tendo como editora responsável Mara Regina Garcia Gay, que é bacharel e licenciada em Matemática. Após a contracapa e a ficha catalográfica, o livro traz uma apresentação, a qual é constituída por um texto dirigido ao aluno. Está escrito que o livro foi elaborado com o objetivo de que os alunos descubram que aprender matemática pode ser uma experiência interessante e que eles ampliem seus conhecimentos, bem como, sua visão de mundo. Os autores aconselham os alunos a fazerem todas as atividades e a aproveitarem as informações presentes no livro, e conclui afirmando que os alunos encontrarão dificuldades, mas que eles devem persistir, pois ao final alcançarão uma satisfação pessoal.

Na sequência são dedicadas duas páginas para a apresentação dos principais elementos estruturais do livro, suas seções e um breve resumo do que aparece nelas, e os tipos de atividades propostas no livro. O livro é composto por 6 Partes, dentro das quais se distribuem, de forma não equitativa, 18 Unidades, que são equivalentes a capítulos. Nas duas primeiras páginas de cada Parte, "Páginas de Abertura", é apresentado um elemento motivador, por exemplo, na Parte 1 aparecem informações sobre a primeira vez que o Brasil foi campeão mundial de handebol feminino.

Após essas Páginas de Abertura, iniciam-se as unidades com uma apresentação dos conteúdos seguido de diversas atividades, as quais são agrupadas em blocos denominados "Vamos Fazer" e "Vamos Aplicar". Ao final de todas as Unidades aparece uma seção chamada "Atividade Integrada" onde são propostos exercícios para que os alunos "consolidem o conhecimento" (GAY, 2014, p. 4). Há, além dessa, seções que aparecem em algumas Unidades e em outras não. Por exemplo, a seção "Trabalhando com a Informação" que visa desenvolver a interpretação e comparação de dados, a seção "Compreendendo um texto", destinada ao desenvolvimento da competência leitora. Ainda temos as seções "Educação Financeira", "Problemas para Resolver" e "Trabalho em Equipe. Ao final de cada Parte, se fazem presentes as seções "Para Finalizar: organizem suas ideias" e "Para Finalizar: para conhecer mais" destinadas a que os alunos analisem o que foi estudado na Parte, e sugerem vídeos, livros e sites para os alunos aprofundarem mais o tema.

No Quadro 4.3 apresentamos as 18 Unidades (capítulos) que compõem este volume, acompanhados de seus títulos, que fazem referência aos objetos matemáticos estudados em cada uma delas, e as quantidades de seções e páginas por Unidade.

Quadro 4.3: Estrutura organizacional global de Gay (2014)

Unidades	Assunto	Seções	Páginas
	Elementos Pré-textuais	--	7
PARTE 1 - Números Naturais e Operações			2
1	Números Naturais	6	20
2	Adição e subtração com números naturais	6	20
3	Multiplicação e divisão com números naturais	4	23
4	Sequências	7	13
PARTE 2 - Figuras Geométricas e Simetria			2
5	Geometria: noções iniciais	5	19
6	Simetria	6	13
PARTE 3 - Múltiplos e Divisores, Frações e Porcentagem			2
7	Divisibilidade	6	12
8	Mínimo múltiplo comum (mmc) e Máximo Divisor Comum (mdc)	5	11
9	Frações	5	11
10	Operações com frações	11	22
PARTE 4 - Números decimais e Operações			2
11	Números Decimais	4	12
12	Operações com números decimais	10	24
PARTE 5 - Ângulos, polígonos e círculos			2
13	Ângulos	5	22
14	**Polígonos**	**4**	**12**
15	Circunferência e Círculo	9	16
PARTE 6 - Medidas e Geometria			2
16	Grandezas, medidas de comprimento e de Superfícies	4	15
17	Perímetro e Área	4	10
18	Medidas de massa, volume e capacidade	10	21
--	Anexos	--	16
--	Respostas	--	19
--	Bibliografia	--	1
	Total:	111	351

Fonte: Elaborado pelos autores.

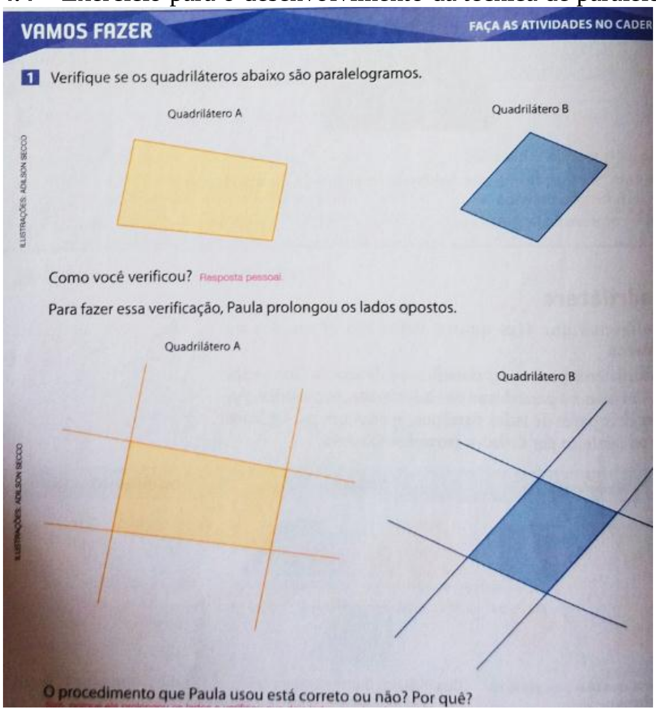
Cada Unidade é dividida em seções, cujas quantidades variam de 4 a 11, tendo em média 6 seções por Unidade. Logo após as Unidades estão localizados os Anexos, onde encontramos Planificações das superfícies de sólidos geométricos (pirâmide, prismas e outros poliedros). Após os anexos, estão expostas as respostas de todos os exercícios propostos organizados por

Unidade e que recebem uma numeração que reinicia a cada página, por último, encontram-se as referências bibliográficas.

As Unidades são iniciadas com a primeira seção, sem texto introdutório. Em cada seção há um tema que é relacionado com o conteúdo a ser trabalhado nela. Depois, há uma curta explanação sobre o tema e o conteúdo, finalizada com as definições e noções básicas. Em seguida, apresenta-se o primeiro bloco de exercícios denominado “Vamos Fazer”, o qual é sucedido por outro bloco, o “Vamos Aplicar”. Essa é a estrutura padrão das seções, contudo, algumas não apresentam o bloco Vamos Fazer, como é o caso da segunda seção da Unidade 14.

Essas explanações breves sobre os conteúdos seguidas de uma diversidade de exercícios pode ser um indício da concepção de aprendizagem seguida pelos autores. A primeira impressão que nos dá, é que eles estão propondo uma maior participação dos alunos na construção de seus conhecimentos. É possível notar que o bloco de exercícios Vamos Fazer é proposto de tal forma que os alunos desenvolvam algumas Técnicas e novos conceitos, conforme pode ser observado na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Exercício para o desenvolvimento da técnica de paralelogramos



Fonte: GAY (2014, p. 246)

Nessa figura, vemos o exercício 1 no qual é proposto que o aluno realize ações – prolongamento e observação dos lados – para identificar se um quadrilátero dado é de fato um paralelogramo. Assim, sob o ponto de vista das dimensões do processo de estudo (CHEVALLARD, 1998), esse bloco é gerador dos momentos de Primeiro Encontro, Exploração e Trabalho com a Técnica.

A observação da estrutura organizacional global no Quadro 4.3, nos permite observar que a Unidade 14 é dedicada especialmente aos polígonos, cuja definição é o objeto matemático sobre o qual esta investigação se debruça. Assim, é desta Unidade que emergem os elementos que compõem a estrutura organizacional regional, apresentada no Quadro 4.4, construída com o objetivo de evidenciar como a definição de polígono é tratada neste livro didático.

Quadro 4.4: Estrutura organizacional regional da Unidade 14 de Gay (2014)

Seção	**Título da Seção**	**Def.**	**Teo.**	**Ex.**	**Exo.**	**Pq.**	**P.**
1	Polígono	4	1	4	8	2	3,5
2	Triângulos	7	0	6	4	1	2
3	Quadriláteros	7	3	6	17	1	4,5
	Atividade Integrada	0	3	0	13	1	2
Total		**18**	**7**	**16**	**42**	**5**	**12**
Def.= definições, Teo. = teoremas, Ex.= exemplos, Exo. = exercícios, Pq.= pacotes[33], P.=páginas.							

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao adentrarmos na Unidade 14, notamos que as seções e subseções possuem uma quantidade considerável de definições associadas ao conceito de polígono. Porém, os elementos que são destacados neste modelo de análise regional, não são suficientes para expor uma Organização Praxeológica completa, que nos possibilitaria compreender o processo de construção da definição, tampouco como elas são usadas. Por esta razão, sentimos necessidade de aprofundar a análise do livro didático, adotado pela instituição, a um nível local.

A análise local do livro nos direciona a observar os elementos que compõe cada seção e subseção. Nela podemos vislumbrar, por exemplo, como as definições se relacionam entre si e com os demais elementos, exercícios, exemplos e teoremas. Assim, quando observamos a seção 1 da Unidade 14, notamos que ela está dividida em três partes: a primeira destinada a introduzir e definir polígono; a segunda, intitulada "Elementos dos polígonos", trata de levar o aluno a identificar lados, ângulos e diagonais de um polígono; e a terceira, são os exercícios propostos.

A primeira parte da primeira seção, é iniciada com uma pintura, na qual é possível identificar um conjunto de formas pintadas com uma pequena variedade de cores, mas que preenchem todo o espaço retangular do quadro. Vemos assim, que o *nicho artístico-realístico* é tomado como ponto de partida das várias ideias utilizadas para apresentar a definição de polígono. Os autores do livro destacam seis dessas formas, depois as separa de acordo com o tipo de linha que determinam seu contorno. Três das seis formas têm seus contornos "formados apenas por segmentos retas" (GAY, 2014, p. 240), por isso são agrupadas e seus contornos são

[33] Pacotes é um conjunto de exercícios que são resolvidos a partir de uma mesma Técnica (HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE; 2012).

chamados de *linha poligonal*. O segundo grupo de figuras, composto pelas outras três, cujos "contornos não é formado apenas por segmentos de reta" (GAY, 2014, p. 240), ou seja, um misto de linhas retas e curvas, seus contornos são denominados de *linha não poligonal*. Essas são as duas primeiras definições identificadas na Unidade 14.

Neste momento, as linhas não poligonais são postas de lado, e as linhas poligonais são classificadas em quatro grupos: abertas não simples; abertas simples; fechadas não simples; e fechadas simples. A característica utilizada para dizer se uma linha poligonal é simples ou não simples é o fato de haver ou não um "cruzamento" entre dois segmentos que compõem a poligonal. Com respeito às características aberta e fechada, os autores não evidenciam qualquer ideia ou procedimento a ser utilizado pelo aluno na identificação.

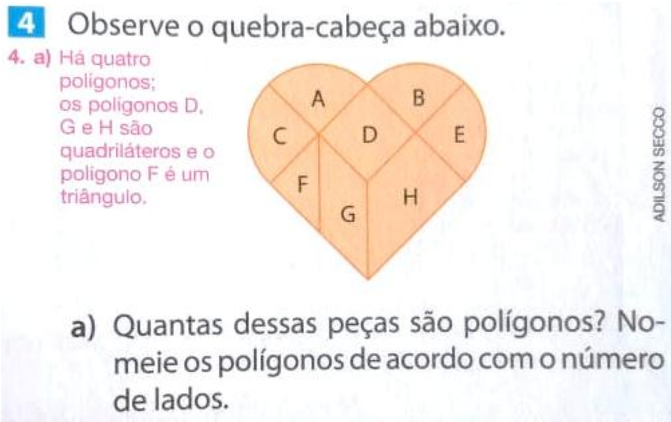
Dando continuidade ao processo, os autores utilizam o teorema "Uma linha poligonal *plana* fechada e simples divide o plano em duas regiões, ambas com infinitos pontos e sem pontos em comum" (GAY, 2014, p. 240, grifo nosso) para evidenciar o último atributo definidor a ser empregado na escrita da definição de polígono, que é a *região (interna e externa)*. Grifamos o termo "plana" no trecho, pois notamos que em nenhum momento do processo de construção da definição de polígono, descrito até aqui, os autores mencionaram a necessidade de que os segmentos de retas, que compõem as linhas poligonais, sejam coplanares.

Esta, que é uma das características primordiais dos polígonos, aparenta ser parcialmente esquecida ou negligenciada, como já havíamos destacado na seção 4.1.1 deste mesmo capítulo. Este requisito surge no meio do processo, o que pode levar os alunos a deixarem que ele passe despercebido. Como o trabalho com polígonos emerge, na instituição Ensino Fundamental, atrelado ao estudo dos objetos tridimensionais (ver seções 4.2.1.1 e 4.2.1.2), não evidenciar a coplanaridade pode permitir a interpretação de que a união de duas faces de um poliedro é um polígono.

Contudo, a necessidade de que os segmentos de reta que compõem os polígonos sejam coplanares é destacado pelos autores quando apresentam a seguinte definição: "Uma linha poligonal plana fechada e simples com sua região interna é um **polígono**" (GAY, 2014, p. 240, grifo do autor). O fato de considerar a região interna como sendo, ou não, parte do polígono é algo que foi observado e discutido na seção 4.1 e que parece não ter grandes influências sobre a interpretação e aplicação da definição de polígono.

Por meio desse processo podemos identificar uma Organização Matemática relativa ao conceito de polígono, a qual é explicitada no Quadro 4.5. Porém, a organização não aparece no livro didático tal como está exposta no Quadro 4.5, assim, seu conteúdo é fruto de nossa interpretação baseada nos conceitos da TAD que nos servem de lentes para olharmos para os diversos exercícios presentes no livro didático, por exemplo o exercício 4 da página 243 o qual é mostrado na Figura 4.5.

Figura 4.5 – Exercício extraído do livro didático



Fonte: GAY (2014, p. 243)

Nota-se que na Figura 4.5, o desenho em formato de coração é repartido em oito figuras planas, as quais devem ser indicadas como polígono ou não. A parir desses exercícios podemos inferir que, no item (a) é solicitado que os alunos realizem a Tarefa presente no Quadro 4.5. O bloco saber fazer, da OM apresentada no Quadro 4.5, é inteiramente contemplado nesta seção, porém os elementos que constituem o bloco tecnológico-teórico são expostos em capítulos anteriores (Unidades 5 e 13).

Quadro 4.5: Organização Matemática relativa a identificação de um polígono

Tarefa	Identificar se uma figura dada é um polígono.
Técnica	Tem por base a verificação da definição de polígono. Assim, iniciamos verificando se a figura é plana, ou seja, todos os seus pontos pertencem a um único plano. Em caso positivo, observamos se seu contorno é composto exclusivamente por segmentos de reta. Continuamos a observar o contorno da figura para identificar se todos os vértices consecutivos estão ligados por um segmento, sem que nenhum se cruze (poligonal simples). Caso seja possível observar esses aspectos, podemos dizer que este contorno, unido a região interna delimitada por ele, é um polígono.
Tecnologia	"Uma linha poligonal fechada e simples com sua região interna é um polígono." (GAY, 2004, p. 240). Essa definição reúne todos os atributos definidores que deve-se identificar para avaliar se uma figura plana é ou não um polígono.
Teoria	As noções de ponto reta e plano da Geometria Euclidiana Plana é que subsidiam a definição de linha poligonal e de região, das quais deriva a definição de polígono.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na segunda parte da primeira seção, intitulada "Elementos dos polígonos", apresenta-se um pentágono convexo e irregular, no qual são identificados os lados, os vértices, as diagonais e os ângulos internos. Abaixo dessa representação gráfica dos elementos aparecem suas notações $\overline{XY}$, para os segmentos que representam os lados, se X e Y forem consecutivos, e as diagonais, se não forem consecutivos, e $X\hat{Y}Z$ para os ângulos internos, onde X, Y e Z são vértices consecutivos do polígono. Notamos que, em nenhum momento os autores comentam sobre a diferença entre lado e diagonal, tampouco fazem algum comentário que aproxime o aluno de uma possível definição para diagonal, ou sequer dá um não-exemplo de diagonal. Desse modo, deixa-se esse elemento do bloco tecnológico-teórico a cargo da interpretação do aluno sobre um único exemplo, em que o polígono é convenientemente convexo.

Algo semelhante ocorre com os ângulos internos, os quais são destacados e identificados no único exemplo dado. Os ângulos externos não são mencionados nesta seção e em nenhuma outra. Com isso podemos afirmar que o ângulo externo de um polígono não é um objeto reconhecido pela instituição, ou seja, ele não aparece no *habitat* e não tem *nicho* na ecologia dos polígonos no livro didático adotado pela nossa instituição de referência, 6º ano do EF.

Finalizada a análise local da segunda parte da primeira seção da Unidade 14, passamos a observar a estrutura organizacional local da terceira parte que é composta por dois blocos de exercícios, "Vamos Fazer" e "Vamos Aplicar". O primeiro bloco é composto por três atividades voltadas para que os alunos reconheçam polígonos e identifiquem alguns de seus elementos. A primeira dessas atividades busca que os alunos percebam que as faces dos poliedros têm o formato de polígonos, para isso, apresenta uma imagem, Figura 4.6, que faz sugestão a uma técnica de representação das faces de um poliedro no plano (planificação).

Figura 4.6 – Técnica de planificação de um poliedro.

Fonte: GAY (2014, p. 241)

A partir da Figura 4.6, podemos inferir que a Tarefa, planificar um poliedro, é realizada por meio da Técnica de *contornar e "rolagem"*, na qual apoia-se uma das faces sobre a superfície plana, marca-se o contorno da face e "rola" o poliedro sobre a superfície para realizar o contorno da outra face. Embora essa Técnica seja reinvocada da seção 4 da Unidade 5 deste volume, a atividade solicita que o aluno analise a face de seis poliedros e que as represente em seu caderno sem a manipulação direta do sólido. Mesmo assim, dentro do *habitat* predominante dos polígonos, encontramos o *nicho espacial*.

Baseados na Teoria das Situações Didáticas, observamos que os autores iniciam uma situação de institucionalização precipitada sobre teorema, "as faces dos poliedros são polígonos" (GAY, 2014, p. 241). Essa situação de institucionalização no início da atividade acaba por impedir que os alunos evoquem a Organização Matemática apresentada no Quadro 4.5, que foi construída pelos autores antes dos blocos de exercício.

A segunda atividade é destinada a que os alunos percebam que nos polígonos o número de lados, vértices e ângulos internos são iguais e que os nomes deles são dados baseados nessas quantidades. Para este fim, propõe-se o preenchimento de uma tabela (item *a*) e posteriormente que eles desenhem os nove polígonos listados (item *b*). No item *c*, busca-se que os alunos observem, dentre os polígonos construídos, se há algum cujos lados e ângulos internos sejam todos congruentes. O livro que utilizamos para essa análise foi a edição para o professor, no qual existem notas com respostas e explicações para o professor. Assim, no item *c* os autores solicitam que o professor "verifique se os alunos perceberam se os polígonos são regulares ou não. Não se preocupe com a nomenclatura, pois o objetivo deste item é analisar a observação feita pelos alunos" (GAY, 2014, p. 242).

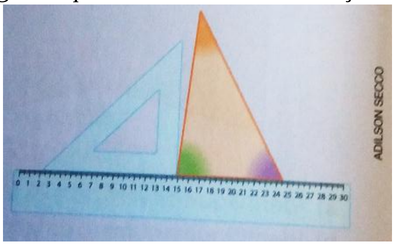
O segundo bloco de exercícios, "Vamos Aplicar", é composto por cinco exercícios. Os dois primeiros solicitam que os alunos construam linhas poligonais de um determinado tipo, e no outro que desenhem um polígono dados um conjunto de características caso seja possível. Esse segundo exercício é semelhante ao tipo de tarefa T2 da pesquisa de Acosta Gempeler (2004), que citamos no referencial teórico, a saber, "Produzir um desenho dinâmico a partir de uma série de condições dadas". A terceira questão solicita que os alunos identifiquem os elementos de um polígono dado. As duas últimas questões solicitam que os alunos realizem uma tarefa semelhante a que foi destacada no Quadro 4.5. Finalizado esse bloco de exercícios, inicia-se a segunda seção dedicada aos triângulos.

A estrutura organizacional local dessa seção nos revela duas partes: a exposição da classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos internos; e um bloco de exercícios. Os autores apresentam os triângulos diretamente como sendo "polígonos que têm três lados" (GAY, 2014, p. l), informa que eles podem ser classificados quanto a medida dos lados e apresenta as definições de triângulos equiláteros, isósceles e escaleno. Em seguida, os autores afirmam que os triângulos podem ser classificados de acordo com a medida de seus ângulos e apresentam as definições de triângulo retângulo, acutângulo, e obtusângulo.

Acreditamos que, ainda hoje, "o livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileiro" (BRASIL, 1997a, p. 67), por assim ser, essa prática descrita no parágrafo anterior pode ser considerada como um reforço a "definomania" (VELOSO, 1998). Assim, sabendo que o livro adotado é tido como a fonte de informações e práticas reconhecidas institucionalmente, essa forma de apresentação de elementos do bloco Tecnológico-teórico incentiva a simples memorização dos conceitos e não sua compreensão.

Dando continuidade à análise a nível local da segunda seção, observamos que no bloco de exercícios, a primeira atividade objetiva que os alunos desenvolvam uma técnica de verificação, no ambiente papel-e-lápis, para os triângulos retângulos com uso de régua e esquadro. Neste processo (Técnica régua-esquadro) a régua é utilizada como forma de prolongar um dos lados do triângulo que é adjacente ao ângulo interno do triângulo, o qual é aparentemente reto, e utiliza o ângulo reto do esquadro para verificar se os dois são suplementares como vemos na Figura 4.7. Em caso positivo, o triângulo é dito retângulo, pois possui um ângulo interno reto.

Figura 4.7: Técnica régua-esquadro utilizada na validação de triângulos retângulos



Fonte: GAY (2014, p. 244).

Essa técnica está baseada na hipótese de que os alunos sempre se depararão com "representações perfeitas" das figuras geométricas, ou seja, construções realizadas com um grau elevado de precisão nas medidas de ângulos e comprimentos. É fácil perceber que nem sempre os alunos se depararão com esse tipo de representação, e assim sendo, essa técnica pode se converter em um obstáculo didático[34] para aprendizagens futuras. A dificuldade emergente desse obstáculo é que os alunos são conduzidos a trabalharem somente com um único tipo de representação, possivelmente passando a ignorar sinais gráficos como os de congruência de lados e de ângulos, do paralelismo ou perpendicularismo de retas, etc.

Com estes exemplos vemos que o livro segue uma praxeologia usual, ou seja, inicia com a apresentação dos elementos que compõe o *logos* (bloco tecnológico-teórico) para posteriormente construir os elementos da *praxe* (bloco saber-fazer).

A segunda atividade desse bloco de exercícios, institucionaliza o uso do plano cartesiano e da representação em par ordenado de pontos no trabalho com os polígonos. Na questão há três itens contendo três pares ordenados que representam os vértices de triângulos a serem representados em planos distintos. *Softwares* de Geometria Dinâmica como o GeoGebra têm uma relação muito íntima com este tipo de representação, e o fato de ser reconhecida pela instituição, torna a elaboração de situações com o uso desses *softwares* mais natural.

[34] Segundo Brousseau (2008) os obstáculos são conhecimentos que têm seu funcionamento limitado e que podem dificultar a aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos não são necessariamente ruins, por exemplo, Brousseau (2008) afirma que os obstáculos epistemológicos, que são inerentes às características do objeto matemático, são benéficos para o processo de ensino e aprendizagem. Contudo os Obstáculos Didáticos, aqueles gerados a partir das escolhas feitas pelo docente, ou seja, aqueles que podem e devem ser evitados, pois não trazem contribuições significativas para compreensão do conceito matemático em estudo.

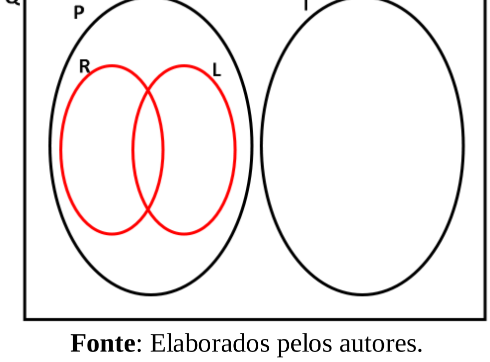
A terceira atividade volta-se à identificação de quais triângulos têm eixos de simetria e quantos são. A Técnica que é empregada para verificar a existência de simetria, nesta atividade, é a da *dobradura*, a qual é iniciada, trabalhada e desenvolvida na Unidade 6 do Livro Didático até o ponto do reconhecimento de simetria sem a necessidade de se manipular o representante da figura. Segundo os autores, o que se espera é que os alunos reconheçam que apenas os triângulos escalenos não possuem eixo de simetria.

Esse estudo da simetria dos triângulos é utilizado na última atividade do bloco para que o aluno faça inferência de que a medida dos ângulos da base (lado de medida, em geral, distinta dos outros dois) de um triângulo isósceles são iguais. A percepção de simetria é transformada em uma ferramenta de apreensão de novas propriedades do polígono, ou seja, a simetria deixa de ser apenas uma característica e passa a ser, também, um elemento tecnológico.

A terceira seção da Unidade 14 do livro didático, destinada ao estudo dos quadriláteros segue a mesma linha de apresentação *a priori* das definições, que são os principais elementos do bloco Tecnológico-teórico. As definições apresentadas são de natureza partitiva (ZASLAVSKY; SHIR, 2005) e que separam os quadriláteros em três grandes conjuntos. Os “outros quadriláteros” *não* possuem lados paralelos, os trapézios possuem *apenas* um par de lados paralelos, e os paralelogramos possuem dois pares de lados paralelos.

Os autores dão um destaque aos paralelogramos ao dedicarem uma subseção para agrupá-los em três grupos, retângulos, losangos, e quadrados. Com isso notamos uma mudança no tipo de definição para hierárquica, onde os três grupos estão contidos nos paralelogramos e, os quadrados, em especial, são os elementos da intersecção dos retângulos com os losangos. Nessa estrutura organizacional das definições, o quadrado desempenha um importante papel. É ele quem dá a natureza hierárquica às definições contidas nos paralelogramos, pois ele impossibilita a interpretação da definição dos retângulos e losangos como conjuntos disjuntos. A Figura 4.8 nos dá uma visão geral de como se dá a organização das definições relativas ao polígonos de quatro lados.

Figura 4.8: Organização da apresentação das definições dos polígonos de quatro lados em Gay (2014)



Fonte: Elaborados pelos autores.

Nessa figura, **Q** representa o conjunto dos quadriláteros, **P** dos paralelogramos, **T** dos trapézios, **R** dos retângulos e **L** dos losangos. Assim, vemos que **R** e **L** possuem uma interseção não vazia, que constitui o conjunto dos quadrados e o conjunto $\boldsymbol{Q} - (\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{T})$, também não vazio, compreende os “outros quadriláteros”. Temos nesse livro seis definições ligadas pela característica comum de possuírem quatro lados, mas que possuem uma relação um tanto quanto complexa dentro do conjunto **Q**.

Após a apresentação das definições, encontra-se no livro didático o bloco de exercícios “Vamos Fazer” composto por quatro atividades, sendo que a primeira delas é dedicada ao desenvolvimento de uma Técnica para verificar se um quadrilátero dado é um paralelogramo. A Técnica consiste no *prolongamento dos lados* para observar se as retas de lados opostos tendem a se cruzar, ou ainda, se ambas têm a mesma inclinação, ou seja, efetua-se a *análise do paralelismo dos lados não adjacentes de um quadrilátero*. Assim, vemos se constituir uma Organização Matemática cujo bloco saber-fazer é composto pela Tarefa *verificar se um quadrilátero dado é um paralelogramo* e a Técnica anterior.

Essa Técnica é semelhante à apresentada na figura 4.7, em termos de limitação, pois ela também é baseada nas representações. A observação da inclinação das retas que contém os lados opostos só seria eficaz se fosse realizada por métodos algébricos, ou seja, determinando a equação das duas retas e analisando-as. Porém, nesse nível do ensino fundamental essa verificação seria inviável, pois os conhecimentos necessários ainda não foram estudados. Além disso, ela ignora a possibilidade da representação vir acompanhada de marcadores que indiquem o paralelismo dos lados.

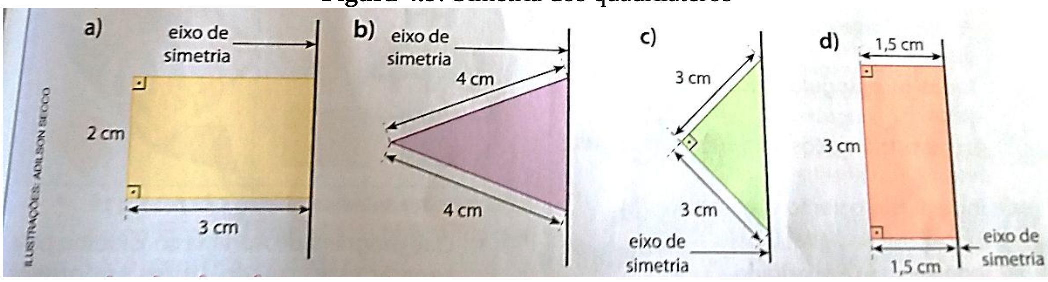
Essa *praxe* está baseada no bloco tecnológico-teórico cujo elemento central é a definição dos paralelogramos como “quadriláteros que têm dois pares de lados paralelos”. Essa definição se alimenta da definição de polígono e das posições relativas de duas retas, que fazem parte dos objetos de estudo da Geometria Euclidiana Plana. Neste sentido, prolongar os lados de um quadrilátero consiste em evidenciar segmentos maiores da reta que os contém, e quanto maior for esse prolongamento, mais evidente fica a inclinação relativa entre as retas. Então, se as inclinações são diferentes, as retas que contém os lados opostos do quadrilátero tendem a se intersectar em algum ponto, logo as retas não são paralelas. Assim, dois lados são ditos paralelos se as retas que os contém também são paralelas.

A segunda atividade utiliza a malha quadriculada como recurso para facilitar a verificação de paralelismo entre os lados de um quadrilátero. Em alguns momentos, a linhas da malha coincidem com a reta suporte dos lados dos quadriláteros, em outros a inclinação dos lados ficam evidentes pela posição deles em relação aos quadradinhos da malha. Assim, o uso da malha se apresenta como uma segunda Técnica de visualização que compartilha do mesmo *logos* da Técnica anterior.

Na sequência, a terceira atividade busca que os alunos avaliem como verdadeiros ou falsos um conjunto de proposições reativas à organização dos paralelogramos: “Todo quadrado é um retângulo”; “Todo Retângulo é um quadrado”; “Todo paralelogramo é um losango”; e “Todo losango é um paralelogramo” (GAY, 2014, p. 247). Esse exercício é resolvido baseado na interpretação que os alunos tiveram das definições listadas no início da seção.

Esse bloco de exercícios é finalizado com uma atividade que aplica o conceito de simetria no estudo das características dos quadriláteros. Na atividade é apresentado o conjunto de imagens presentes na Figura 4.9 e solicita que os alunos determinem a medida dos lados que não estão aparecendo.

Figura 4.9: Simetria dos quadriláteros

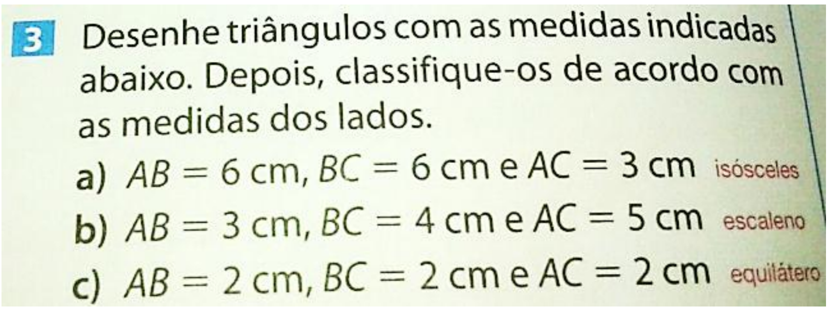


Fonte: GAY (2014, p. 247).

No bloco de exercícios seguintes, as organizações matemáticas identificadas anteriormente são postas em uso na realização de três grandes categorias de exercícios: construção ou classificação de polígonos; validação de proposições; e decomposição de polígonos em triângulos.

Referente à primeira categoria estão contidos os exercícios 1, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12 e 13, dos quais destacamos o 3 (Ver Figura 4.10), no qual é informado ao aluno as medidas dos lados de triângulos, que eles devem construir e classificá-los como isósceles, escaleno ou equilátero. Contudo, não é apresentada uma técnica envolvendo instrumentos como compasso, régua, ou *software* para executar essa construção, o que nos leva a inferir que esses triângulos devem ser construídos a partir da tentativa e erro.

Figura 4.10: Exercício 3 que solicita a construção de triângulos



3 Desenhe triângulos com as medidas indicadas abaixo. Depois, classifique-os de acordo com as medidas dos lados.

a) $AB = 6$ cm, $BC = 6$ cm e $AC = 3$ cm isósceles

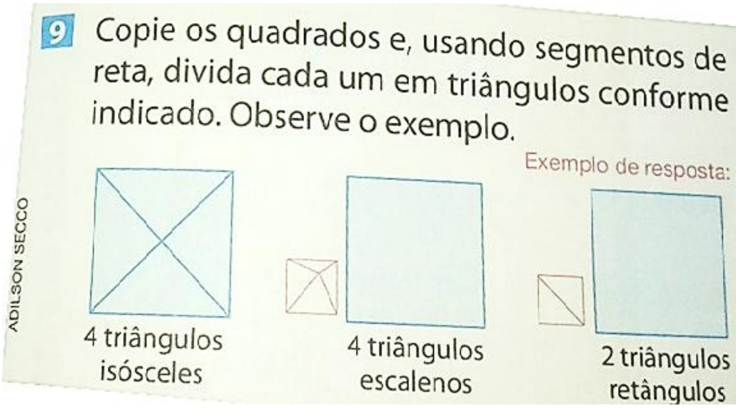
b) $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm e $AC = 5$ cm escaleno

c) $AB = 2$ cm, $BC = 2$ cm e $AC = 2$ cm equilátero

Fonte: GAY (2014, p. 248)

A segunda categoria é composta pelos exercícios 2, 7 e 8, dos quais apenas o 8 solicita dos estudantes uma justificativa para o fato de que todo triângulo equilátero é também isósceles, enquanto que 2 e 7 solicitam apenas que digam se é verdadeiro ou falso. O exercício 9 é o único que compõe a terceira categoria, decomposição de polígonos em triângulos, nele três quadrados são decompostos respectivamente em triângulos isósceles, escalenos e retângulos, como podemos ver na Figura 4.11 na qual as respostas dadas pelos autores do livro aparecem em vermelho.

Figura 4.11: Exercício de decomposição do quadrado em triângulos

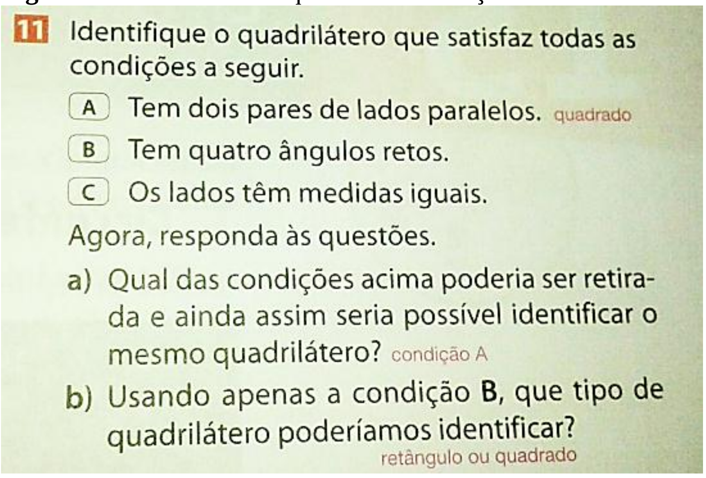


Fonte: GAY (2014, p. 249)

A primeira decomposição é dada como exemplo e as outras duas são propostas para que os alunos resolvam. Contudo, nem a decomposição resolvida nem as propostas são acompanhadas de uma discussão do porquê que basta traçar as diagonais do quadrado para decompô-lo em triângulos isósceles. Tampouco, no terceiro item é feita uma indicação de que o professor deva discutir com os alunos o fato de que os dois triângulos retângulos obtidos também são isósceles. Nota-se que essa situação poderia ser melhor explorada, possibilitando aos alunos refletirem e descobrirem outras propriedades do quadrado, mesmo que de maneira intuitiva, uma vez que a escolha do quadrado não foi aleatória. Deixar a responsabilidade por essa reflexão sobre o potencial dessa e de outras questões, em uma Unidade que possui 42 exercícios, nas mãos do professor, é equivalente a destinar atividades de grande potencial a uma abordagem superficial, em nosso entendimento.

A Unidade 14 é finalizada com o bloco de “Atividades Integradas”, o qual é composto por 13 exercícios, cuja maioria se enquadra nas três categorias apontadas anteriormente, diferindo apenas as questões 7, 11 e 13. A 7 consiste num problema em que os alunos têm que identificar a quantidade de quadriláteros e de pentágonos que há em um conjunto a partir da informação de que somando a quantidade dos lados obtém-se 31 como resultado. Enquanto que na questão 13 é solicitado dos alunos que contabilizem o número de quadrados em uma figura dada. A questão que damos maior destaque é a 11, que segue representada na Figura 4.12.

Figura 4.12: Exercício 11 que aborda definições não-econômicas



Fonte: GAY (2014, p. 251).

Essa questão tem como “pano de fundo” uma das características das definições que é, segundo Zaslavsky e Shir (2005), fonte de discordância entre alguns pesquisadores, que é a necessidade de que uma definição seja econômica (ou mínima). De acordo com esses autores, há pesquisadores que consideram inconcebível uma definição que não seja econômica enquanto outros “toleram” algumas redundâncias, a depender do contexto que essas definições emergem. Por meio das características A, B e C, tomadas de forma individual, obtemos, respectivamente, os paralelogramos, retângulos e losangos. A parir da combinação de A e B obtemos a definição não-econômica dos retângulos, e a combinação A e C nos fornece uma definição não-econômica de losango, enquanto que B e C combinadas constituem a classe dos quadrados.

Neste aspecto a atividade demonstra seu potencial de dar acesso aos alunos a pelo menos dois tipos de definição que podem ser usadas para resolverem problemas que requerem a mobilização de propriedades do polígono. Além disso, segundo Zaslavsky e Shir (2005), quando um aluno tem acesso a mais de um tipo de definição de um mesmo objeto do saber, ele enriquece a imagem conceitual que possui desse objeto. Porém, a resposta sugerida pelo livro ao item (b), pode ser interpretada como se o conjunto dos quadrados não estivesse contido no conjunto dos retângulos, o que não é verdade, de acordo com a definição hierárquica apresentada entre os quadriláteros.

Com a análise desses livros identificamos uma série de situações, expressas tanto na forma de exercícios quanto de exemplos, que poderiam gerar maiores discussões e consequentemente, contribuir ainda mais para aprendizagem dos alunos caso fossem mais exploradas. Também identificamos que as várias situações estão de acordo com os documentos oficiais (PCN e BNCC) para o 6º ano do Ensino Fundamental.

No que diz respeito ao processo de construção de definições, o livro didático analisado apresentou uma organização que favorece a apresentação *a priori* das definições, prática essa criticada por autores como Veloso (1998) e De Villiers, Govender e Patterson (2009). Podemos a partir dessa análise afirmar que na verdade não existe um “processo de construção de definição”, mas sim uma exposição de definições que devem ser interpretadas e aplicadas, pelos alunos, na resolução dos exercícios.

4.3 O Saber Ensinado:

Nesta seção, apresentamos a Sequência Didática elaborada com base nas análises prévias expostas nesse capítulo. Para sermos coerentes com estes resultados e com as exigências da Instituição de Aplicação, adotamos na SD a definição de Gay (2004, p. 240), a saber: “Uma linha poligonal plana fechada e simples com sua região interna é um polígono”. Essa definição além de ser a do livro didático, ela também é compatível com a encontrada em *Os Elementos* e é a que provavelmente foi adotada para construção do GeoGebra.

Por se tratar de um produto educacional desenvolvido tanto para pesquisa, quanto para que possa ser utilizado em sala de aula, a Sequência Didática é analisada tendo como base principal a Teoria das Situações Didáticas (TSD). Esse protagonismo da TSD se justifica pelo fato dela oferecer um modelo de análise que, a nosso ver, melhor acomoda os fenômenos didáticos que ocorrem em sala. Isso porque, ela está fundamentada no triângulo didático formado pelas relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, ou seja, a TSD leva em consideração os elementos fundamentais para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra.

Desse modo, apresentamos elementos do Saber Ensinado, ou seja, a Sequência Didática, acompanhada do planejamento (análise *a priori*) e uma reflexão (análise *a posteriori*) do que ocorreu durante a aplicação da sequência. A sequência é composta por quatorze atividades (APÊNDICE A), devidamente numeradas. Com essa Sequência Didática pretendíamos abordar os conceitos geométricos necessários à construção da definição de polígono e a classificação interna deste. Contudo, para o cumprimento do objetivo desta pesquisa – analisar o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do *software* GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental – não necessitávamos do resultado da aplicação de todas as quatorze atividades. Sendo assim, e pelo fato de que a aplicação ocorreu no final do ano letivo, momento em que a instituição de ensino tem diversos projetos culminando e a proximidade das avaliações finais, decidimos aplicar apenas as Atividades 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 e 10, as quais seguem acompanhadas da análise a priori e a posteriori. As demais atividades – 5, 11, 12, 13 e 14 – são apresentadas no APÊNDICE B juntamente com sua análise *a priori*.

Como consta no capítulo destinado à metodologia, participaram da socialização da Sequência Didática um total de 8 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Desses, 5 estiveram presentes no teste piloto, os quais foram separados em uma dupla e um trio, cujos nomes fictícios são: Diogo e Renato; Rafael, Efraim e Aina. Os dados coletados nesse teste piloto foram utilizados para aperfeiçoar a Sequência Didática, e apenas em casos de extrema necessidade, foram citados na análise *a posteriori* das Atividades. Da aplicação da Sequência Didática participaram uma dupla (Daniel e Luigi) e um aluno (Manolo) respondeu individualmente, mas contou com um dos pesquisadores para estabelecer diálogos.

4.3.1 Familiarização com o GeoGebra.

Por conhecermos a realidade do ambiente escolar no qual a sequência foi implementada, previmos acertadamente que os alunos participantes nunca haviam manipulado o *software* GeoGebra em todo seu percurso escolar. Assim sendo, antes de propormos a primeira atividade da sequência, realizamos um momento de familiarização com a interface e funcionalidades básicas do GeoGebra. Tínhamos por objetivo, nesse momento, estabelecer os termos elementares que seriam utilizados na comunicação em sala. Por exemplo, se o professor pesquisador [35]solicitasse para o aluno abrir a quinta caixa de ferramenta, então o aluno saberia que deveria ir na Barra de Ferramenta e contar as caixas até cinco e clicar no triângulo no canto inferior direito dessa caixa.

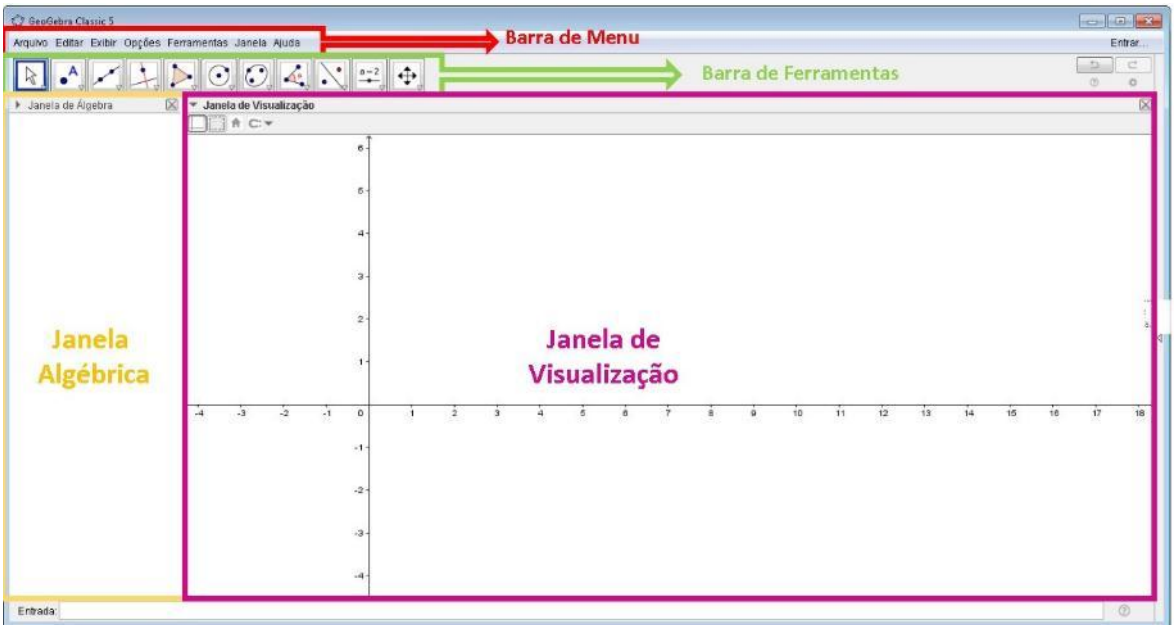
Assim, a familiarização com o *software* foi iniciada com a apresentação da barra de menu, conforme Figura 4.13, que é uma parte comum em aplicativos para *desktops* e *notebooks*,

[35] A partir de agora utilizaremos a palavra “professor” para se referir de forma simplificada ao “professor pesquisador” que aplicou a Sequência Didática.

variando apenas as opções internas de cada um dos menus. Em seguida falamos que o GeoGebra é um programa utilizado principalmente no estudo de Geometria e que tem várias ferramentas, as quais podem ser acessadas pela barra composta originalmente por onze caixas, conforme Figura 4.13. Então solicitamos que eles clicassem em um pequeno triângulo que há no canto inferior direito de cada caixa para que pudessem observar as demais ferramentas contidas em cada caixa. Dissemos também, que bastava clicar uma vez sobre uma das ferramentas para que esta fosse selecionada e pudesse ser utilizada.

A partir disso, solicitamos que eles procurassem a ferramenta Ponto, a selecionassem e clicassem na região branca abaixo e à direita da barra de ferramentas. Eles observariam que pontos eram marcados quando clicavam, então dissemos a eles que esta região se chamava Janela de Visualização (conforme Figura 4.13) e que nela realizaríamos a maior parte das atividades. Em seguida, também falamos sobre a Janela Algébrica, que nela aparecem os objetos que são criados na Janela de Visualização. Depois ensinamos como salvar um arquivo do GeoGebra acessando o menu "Arquivo" e clicando em "Gravar".

Figura 4.13: Interface gráfica do GeoGebra



Fonte: Elaborado pelos autores.

Além disso, ensinamos como eles poderiam exibir e ocultar os eixos coordenados e a malha quadriculada da Janela de Visualização. Aproveitamos este momento também para solicitar que eles, ao registrarem suas respostas na folha da atividade, caso cometessem algum erro, que não borrassem, mas que simplesmente tachassem a parte errada, isso porque até os erros cometidos por eles podem revelar elementos do modelo implícito.

Esse momento de familiarização foi necessário para que os alunos estabelecessem o primeiro contato com o principal componente do meio, que é o GeoGebra, e com isso, reduziria a dependência deles de informações, dadas pelo professor-pesquisador, de como realizar as ações solicitadas em cada atividade. Dessa forma, foi garantido um mínimo de independência dos alunos na realização e exploração das construções geométricas.

4.3.2 Análise *a priori* e *a posteriori* da Sequência Didática

Uma vez realizada essa familiarização, iniciou-se a aplicação da Atividade 1. Os alunos foram organizados em uma dupla e um sentado individualmente, eles tinham um *notebook* com o GeoGebra a sua disposição. O processo de devolução foi facilitado, pois os estudantes estavam, desde o momento do convite para participarem, bastante curiosos e motivados. Assim, bastou que o professor entregasse a folha de papel A4 contendo a Atividade 1 e, eles perguntaram se já poderiam iniciar a resolver a Atividade 1.

ATIVIDADE 1

Crie dois pontos  na Janela de Visualização.

a) Sem manipular o GeoGebra, escreva quantas retas distintas é possível traçar passando pelos dois pontos que você criou.
b) Crie mais um ponto. Quantas retas  você pode construir passando por esses três pontos? (Pode usar o GeoGebra)
c) E se fosse só um ponto, quantas retas você conseguiria traçar?

Análise *a priori*:

Para essa atividade objetivamos, de uma maneira geral, familiarizar os alunos com as representações de ponto e reta no *software*. Cabe destacar que os itens (a), (b) e (c) além de colaborar para o cumprimento do objetivo geral, podem favorecer a identificação de conhecimentos prévios dos alunos a respeito dos postulados da determinação de retas no plano (passando por um, por dois e por três pontos distintos). Ao final, faríamos a institucionalização segundo dois pontos de vista, o ponto de vista do *software* e o ponto de vista matemático. Assim, teríamos:

- ***Software***: Explorar o que ocorre na Janela de Álgebra quando um ponto é criado, com o intuito de que o aluno explore a representação dos elementos de cada construção tanto na Janela de Visualização, quanto na Janela Algébrica;
- **Matemática**: Por dois pontos distintos passa uma única reta. E por um ponto passam infinitas retas.

As variáveis didáticas destacadas foram: quantidade de pontos e posição dos pontos. Com relação à variável quantidade de pontos iniciamos com **dois** pontos, pois é o mínimo de pontos que o GeoGebra exige para que se possa traçar uma reta. Contudo, variamos esse valor para **três** pontos, cuja escolha se justifica para verificar se os alunos conseguiriam identificar que a cada conjunto de dois pontos eles poderiam traçar apenas uma reta. Por fim, atribuímos a essa variável o valor **um**, pois esse valor poderia favorecer que fosse gerada uma discussão sobre o porquê de por dois pontos distintos passar apenas uma reta. Já com relação ao valor atribuído à variável posição dos pontos, foi deixado livre, no caso do item b), a fim de despadronizar os resultados. Cada dupla marcaria os três pontos nas posições que desejassem, gerando assim uma diversidade de configurações, contudo esperaríamos que as respostas fossem iguais.

Caso os alunos, mesmo após o momento de familiarização, ainda não tivessem “intimidade” com o uso do computador faríamos intervenções sinalizado que seria necessário que eles procurassem a ferramenta, cujo desenho aparece no enunciado da questão e clicar uma única vez para selecioná-la. Outra informação que pode ser útil para eles, é a de que basta manter o cursor do mouse sobre a ferramenta que aparece um balão no GeoGebra informando como usar a ferramenta.

No tocante ao item (a), esperávamos que os alunos respondessem uma quantidade aleatória, por não saberem que por dois pontos distintos passa uma única reta, ou por imaginarem que uma reta que passe, por exemplo, pelo ponto A e não passe pelo ponto B, também deveria ser contabilizada. Desse modo, as resposta podem variar entre uma, duas ou três retas.

Os itens (b) e (c), envolvem resultados basilares da Geometria Euclidiana Plana. Sendo que o último desses itens se fundamenta em um dos postulados de Euclides, ou seja, por dois pontos distintos é possível traçar uma única reta. A partir desse postulado, é possível inferir que, se temos apenas um ponto A do plano e desejamos traçar uma reta por ele, então necessitaríamos de outro ponto B, o qual poderia assumir infinitas posições no plano. Por isso é que, dado um ponto A é possível traçar infinitas retas passando por ele.

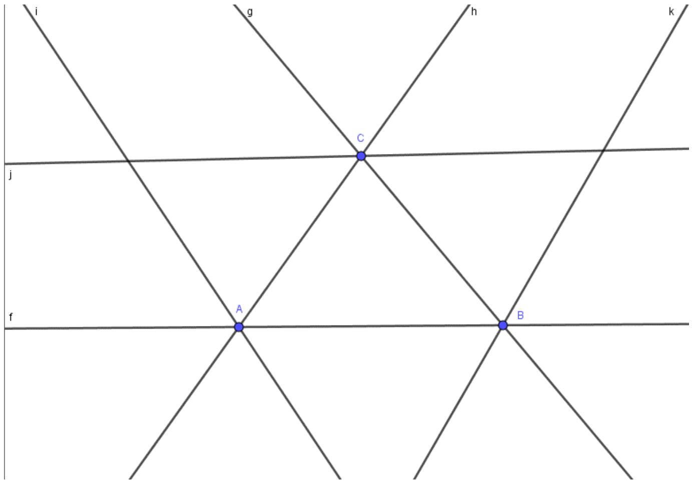
Esse mesmo princípio matemático compõe a matemática transposta para construir o GeoGebra, pois para se traçar uma reta nele, faz-se necessário, no mínimo clicar em dois pontos. Esse fato poderia induzir os alunos a apresentarem como resposta ao item (c) que por apenas um ponto não é possível traçar uma reta.

Entretanto o foco da Atividade 1 é que os alunos se habituem a manusear o *software* e alternar entre ferramentas. Além disso, com esses itens, os estudantes serão iniciados na dinâmica das situações propostas: ação (construção e/ou manipulação); observação da retroação do meio (GeoGebra); responder o questionamento. Assim, com essa primeira atividade, as cláusulas do contrato didático que regerão a implementação de toda a sequência passam a ser acordadas e escritas.

É de suma importância que ao final o professor deixe claro para os alunos que essa atividade, aparentemente “fácil”, com o intuito principal que eles se acostumem com o GeoGebra. Feito isso, o professor pode iniciar a situação de institucionalização pedindo que algumas duplas de alunos leiam suas respostas. Em seguida, com a projeção do *software* no quadro, o professor pode mostrar que quando se tem apenas dois pontos A e B, qualquer outra reta que eles tentem construir passando pelos dois pontos (A e B), ao mesmo tempo, coincidirão com a primeira, por isso, se diz que só é possível traçar uma reta por dois pontos.

Ainda no momento da institucionalização, no item (b) o professor pode formar três pares de pontos (A, B; A, C; e B, C) e utilizar o resultado do item (a) para prever que por três pontos só é possível traçar três retas que passem por eles dois a dois. É possível notar que esse item além de estar embasado no postulado de Euclides abordado no item a), a teoria relacionada a Combinações Simples também influencia no resultado considerado correto, bem como nos possíveis erros dos alunos. A quantidade de retas que é possível traçar por três pontos distintos é determinada pela $C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$, ou seja, a combinação simples de três pontos dois a dois. Porém, é possível que os alunos apresentem um valor natural maior que 3 e menor ou igual a 6, onde o valor 6 seria obtido pela adição da quantidade retas que passam obrigatoriamente por dois dos pontos A, B e C com as que passam por apenas um dos pontos, semelhante ao que é mostrado na Figura 4.14. Cabe salientar que os alunos poderiam apresentar essas respostas pautados exclusivamente na experimentação.

Figura 4.14 – Possível resposta para o item b)



Fonte: Elaborado pelos autores.

Além disso, é possível que os alunos criem o terceiro ponto C de tal modo que ele seja colinear à A e B. O resultado deste feito, seria que eles tendessem a dizer que só é possível traçar uma reta. Nesse caso, o professor deverá intervir realizando uma nova devolução, questionando-os: E se os pontos não estivessem alinhados, quantas retas vocês conseguiriam traçar?

Para a institucionalização do item (c), o professor poderia utilizar a função de “Habilitar Rastro” do GeoGebra, pois a “quantidade” de retas que podem ser traçadas por um único ponto é “muito grande”, na verdade infinitas e essa função poderia contribuir com uma melhor visualização. Esse método evitaria que seja necessária a criação de outros pontos e outas retas. Além disso, deixaria os alunos familiarizados com o a ideia de “rastro” de objetos, que será utilizada também na Atividade 2.

Análise *a posteriori*:

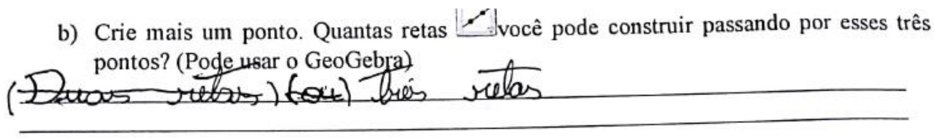
A implementação da Atividade 1 teve a duração de, aproximadamente, 25 minutos e todos os alunos apresentaram respostas corretas para o item (a) conforme descrito na análise *a priori*. Enquanto pensava e discutia sobre a resposta, Manolo disse:

Manolo Porque assim ... Eu acho que é uma reta porque ela primeiro começa do ponto A ai determina o ponto B, como a professora ensinou.

Assim, podemos notar que o aluno evocou um conhecimento prévio em uma situação diferente da que a professora de sua turma utilizou para o ensino em um momento anterior à aplicação, o que nos permite afirmar que os alunos já possuíam conhecimentos acerca desse postulado. De semelhante forma, Daniel e Luigi apresentaram a mesma resposta assim que compreenderam o que este item solicitava.

No que diz respeito ao item (b), Manolo traçou a reta passando por A e B, depois outra reta passando por B e C, mas ficou em dúvida se poderia usar novamente os pontos A e C para traçar nova reta. Essa mesma dúvida pairou na a dupla Daniel e Luigi, por isso que eles registraram a resposta que pode ser vista na Figura 4.15.

Figura 4.15 – Resposta da dupla Daniel e Luigi para o item (b) da Atividade 1


b) Crie mais um ponto. Quantas retas você pode construir passando por esses três pontos? (Pode usar o GeoGebra)

(~~Duas retas~~) (ou) três retas

Fonte: Dados da Pesquisa.

Diante do fato dos alunos não saberem se a resposta que deveriam apresentar era “duas retas” ou “três retas”, o professor sentiu necessidade de realizada nova devolução, assim, ele sugeriu que os alunos experimentassem com o GeoGebra. E após os alunos traçarem as retas AB e BC o professor questionou se eles conseguiriam traçar mais uma reta, o que os levou a traçarem a reta AC. Vimos com isso, que como o meio permitiu que eles traçassem a terceira reta, eles se convenceram de que a resposta correta seria “três retas” ao invés de duas, por isso é possível ver que na Figura 4.15 parte da resposta está tachada, indicando que os alunos a reconheceram como errada.

Embora o dinamismo do GeoGebra não tenha sido utilizado, ficou evidente que os alunos começaram a aceitar as retroações do *software* como uma fonte confiável de prova, ou seja, o GeoGebra começa a se configurar como o principal instrumento no momento da validação. O que levou os alunos a modificarem o modelo explícito apresentado por eles.

Semelhante uso do GeoGebra foi identificado durante a resolução do item (c), pois a resposta externada por Manolo foi a que, por um ponto, só é possível traçar uma reta. Diante disso, o professor novamente pediu que ele testasse, ou seja, traçasse a reta que ele havia falado. Ele traçou e insistiu na mesma resposta. Então, o professor fez uma nova devolução: “Passa só essa ou passa mais alguma?”. Então ele afirmou que poderia ser traçado até três retas, o professor deixou que ele traçasse as outras duas retas e observou que essa resposta foi motivada pelo fato de que o aluno queria utilizar os três pontos do item anterior e não apenas um ponto que é solicitado nesse item.

Então o professor chamou a atenção dele para o que enunciado da questão pedia, assim, iniciou-se o seguinte diálogo:

Manolo: Eu acho que agora estou entendendo. Espera ai.
Professor: Tenta fazer no GeoGebra.

Manolo: Tá vendo o ponto A, está vendo? Eu estou imaginando que ele pode ser assim [traça uma reta AB] ...ou ele pode ser assim [traça uma reta AC] ... ou ele pode ser assim [traça uma reta AD]
Professor: Ele pode ser de mais algum jeito?
Manolo: Não!
Professor: Por que só pode ser desses três jeitos?
Manolo: Não. Ele pode. Ele pode ser do jeito... ele pode ser assim também, ó.
Professor: E pode ser de mais algum jeito?
Manolo: Só isso mesmo.
Professor: Será que você não consegue traçar outra ai? Tente traçar mais uma.
Manolo: É...
Professor: Hum...Ou é! pode traçar mais outra? Tente fazer mais. Está passando só aquela ou está passando mais? Pode traçar mais?
Manolo: Pode! E mais, e mais e mais.
Professor: Quantas retas então?
Manolo: Então... pode ser ... Então, pode traçar várias linhas, não é? Pode traçar várias. Então a resposta é essa.

É possível inferir desse diálogo que o estudante não sabia, de início, a resposta correta para a situação que lhe propomos, mas que essa foi construída ao longo do processo. Para que Manolo percebesse que por uma ponto pode-se traçar infinitas retas, o professor teve que efetuar diversas devoluções desafiando-o a tentar traçar mais retas. A cada devolução, Manolo entrava novamente numa situação adidática de ação, seguida de uma formulação onde ele aceitava incluir mais uma reta na sua resposta. Como não tinha argumentos para validar sua resposta, ele aceitava as devoluções, até que se convenceu da infinidade de possibilidades de posição para as retas serem traçadas.

A dupla formada por Daniel e Luigi não teve problema para responder o item (c), porque lembraram do que estudaram nas aulas de geometria anteriormente. Sendo assim, o professor iniciou a situação de institucionalização, a qual ocorreu como o previsto na análise a priori, sintetizando por meio de registros no quadro das observações de cada item da Atividade 1, com base nas respostas dadas pelos.

ATIVIDADE 2

Abra a o arquivo do GeoGebra ATIVIDADE 2 e mova  os pontos G, H e I.

a) O que você pode observar?
b) Descreva o movimento de cada um dos três pontos.

Acessar no navegador: https://ggbm.at/n8ayvkrt

Baixar: https://www.dropbox.com/s/8h3bkpk8xr13206/ATIVIDADE%202.ggb?dl=0

Análise *a priori*:

Essa Atividade tem por objetivo desenvolver as noções de segmento de reta e semirreta. Desse modo, explora a noção de reta como conjunto de pontos alinhados para que os alunos construam as definições de segmento de reta e semirreta. Durante a institucionalização, apresentaríamos aos alunos a definição de semirreta encontrada em Dolce e Pompeo (1993a, p. 8), a saber: “Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do semento de reta $\overline{AB}$com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB”. Além disso, faríamos uma breve descrição da notação de semirreta evidenciando que a primeira letra é sempre a origem da semirreta. No tocante aos segmentos de retas, estes seriam institucionalizados como conjunto de pontos, pertencentes a uma mesma reta, que estão entre dois pontos dessa reta, incluindo eles (pontos E e F na construção). E que os pontos (E e F) são chamados de **extremos** do segmento, e por isso que um segmento de reta é identificado por seus extremos: segmento $\overline{EF}$.

Com respeito às variáveis didáticas, foi possível identificar três tipos: exibição da reta; ordem da exploração; rastro. A estas foram atribuídos os seguintes valores descritos nos tópicos a seguir:

- **Exibição da reta**: foram dispostas na **posição horizontal e quase paralelas**, que é uma posição prototípica a fim de que a posição não chamasse tanta atenção dos alunos; **segmento de reta e semirreta acompanhados de suas respectivas retas suportes**, a fim de indicar que ambos são subconjuntos de uma reta;
- **Ordem da exploração**: **1º segmento de reta**, **2º semirreta**, **3º reta**. A ordem se deve ao fato de que as características do movimento de um ponto G sobre um segmento é um fenômeno visual mais facilmente observável. Aos poucos as limitações de movimentação são desfeitas; passa-se de um movimento limitado à direita e a esquerda (ponto G pertencente ao segmento) para um limitado apenas em um sentido (ponto H pertencente à semirreta) e, por fim, para liberdade “total”, porém restrito à reta;
- **Rastro**: **habilitado**. O movimento poderia ser observado mesmo sem ele, contudo seu uso ressalta o fato de que em cada posição ocupada pelos pontos G, H e I, há ali um ponto.

A devolução dessa atividade contaria com o interesse dos alunos em aprender a utilizar um programa de computador até então desconhecido por eles. Uma vez feita a devolução, os estudantes iniciariam uma situação de ação, que se fundamenta na faceta dinâmica do GeoGebra, mais precisamente, explora as potencialidades da ferramenta Mover, e da função Habilitar Rastro, que exibe as posições assumidas por um elemento móvel da construção.

O rastro dos pontos G, H e I estão habilitados, dessa forma, quando o aluno tentar movê-los o percurso de cada um dos pontos sobre as retas, às quais pertencem, serão evidenciados. Com base nesses rastros, os alunos poderão notar que o ponto G só pode se deslocar sobre um pequeno" pedaço" da reta, mais precisamente, entre os pontos E e F. Enquanto que, o ponto H, pode ser deslocado indefinidamente para direita, transpassando os limites do segmento CD, sem poder contudo ser deslocado para a esquerda para além do ponto C. Nessa atividade, o ponto I possui um comportamento diferente de G e de H, pois ele pode ser deslocado indefinidamente sobre toda a reta à qual pertence.

Dadas estas características da construção, os alunos seriam capazes de observar as limitações dos deslocamentos de cada ponto, e assim, construir um *modelo implícito* que descreve o comportamento de cada ponto. Nesse contexto, o item (a) da atividade, tem por função levar os alunos a externarem suas observações, formulando assim um *modelo explícito*. O desencadear desses fatos caracterizam uma situação de formulação.

Como as atividades serão respondidas em dupla, a situação de validação emergirá da discussão dos alunos, ao tentarem entrar em acordo sobre o que e como devem escrever. Eles conversariam entre si sobre o que cada um observou e caso concordem escreveriam o que ambos pensaram, contudo se não concordarem, eles terão que argumentar na tentativa de defender sua visão dos fatos. Nesse momento o professor visitaria duplas a fim de ver se de fato eles estão discutindo para entrar em consenso ou se apenas um dos alunos está respondendo.

Na descrição do movimento dos pontos, solicitado no item (b), espera-se obter os atributos definidores principais de segmento de reta e semirreta, que é limitado entre dois pontos (extremos) e possuir apenas um extremo (origem), respectivamente. Esses elementos serão utilizados na situação de institucionalização, na qual o professor enunciará que em cada posição ocupada pelo ponto G existe na verdade outro ponto, e assim, o segmento é um conjunto de pontos alinhados que possuem dois pontos extremos, ou seja, o segmento de reta é um "pedaço" da reta. Com respeito à semirreta, o professor evidenciará que esta tem uma origem, mas que é infinita. Isso pode ser feito arrastando a Janela de Visualização e o ponto H, ou ainda "Animando" o ponto, fazendo-o se deslocar até sumir da tela, dando a ideia de que ele pode se mover indefinidamente em um sentido.

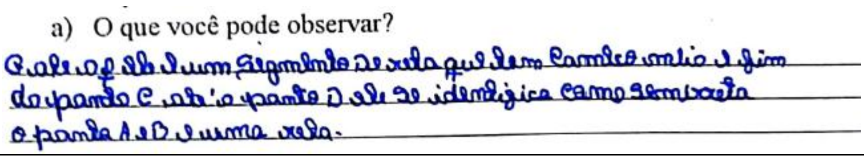
Esse processo é considerado por nós como o ideal, no entanto, é possível que os alunos se prendam ao fato de que não podem mover os pontos livremente, ou seja, não podem tirá-los da reta. Além disso, é possível que eles se atenham exclusivamente a informar que os pontos G, H e I deixam um rastro sem descrever como é esse rastro. E ainda, que os pontos só podem ser movidos para a direita e para a esquerda. Contudo, o professor pode questioná-los: O ponto

G se move livremente sobre a reta? Ele pode ser colocado em qualquer parte da reta?; O ponto G pode ser colocado a direita do ponto F ou a esquerda do ponto E? E fazer perguntas semelhantes a respeito dos pontos H e I. Assim, seria possível que os aluno não registrassem na folha da atividade uma descrição consistente do movimento de cada ponto, todavia, ao serem questionados, eles poderiam revelar oralmente mais detalhes de suas observações.

Análise *a posteriori*:

Por meio da análise dos registros foi possível perceber que Manolo, como esperado para o momento do ano letivo, já tinha conhecimento dos conceitos explorados nessa atividade. Isso fica evidente no extrato apresentado na Figura 4.16.

Figura 4.16 – Resposta apresentada por Manolo para o item (a) da Atividade 2

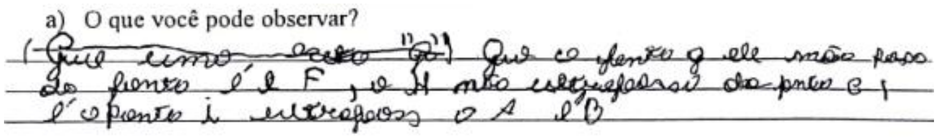


G até o F ele é um segmento de reta que tem começo meio e fim.
Do ponto C até o ponto D ele se identifica como semirreta.
O ponto A e B é uma reta.[36]

Fonte: Dados da Pesquisa.

É possível notar que este estudante apresentou o nome seguido do principal atributo definidor, por exemplo, o segmento de reta seguido da informação de que este objeto geométrico possui começo e fim, ou seja, possui dois extremos. Temos assim, que este aluno foi capaz de reconhecer o objeto matemático em uma situação matemática diferente da que lhe foi proposta anteriormente. No entanto, Daniel e Luigi não demonstraram ter, por meio do seu registro Figura 4.17, uma relação pessoal com esse saber.

Figura 4.17 – Resposta apresentada por Daniel e Luigi para o item (a) da Atividade 2



Que o ponto G ele não passa do ponto E e F, o H não ultrapassa do ponto C, e o ponto I ultrapassa o A e B.

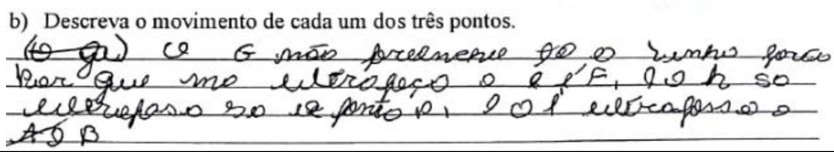
Fonte: Dados da Pesquisa.

É possível notar que Daniel e Luigi conseguem observar todas as características inerentes à manipulação que realizaram, contudo eles não revelam elementos que nos permita

[36] Decidimos apresentar o registro juntamente com a transcrição para tornar a leitura mais fluida, e assim faremos ao longo do texto sempre que julgarmos necessário.

afirmar, ou mesmo negar, que eles, assim como Manolo, já tinham aprendido o que é um segmento e uma semirreta. Além disso, fica evidente que ao descreverem suas observações, esses dois alunos antecipam a resposta do item (b) que solicita uma descrição do movimento dos pontos G, H e I. Nos pareceu que eles não perceberam que de certo modo já haviam respondido o item (b) e apresentaram a resposta da Figura 4.18.

Figura 4.18 – Resposta apresentada por Daniel e Luigi para o item (b) da Atividade 2



O ponto G não preenche toda a linha fora porque não ultrapassa o E e F, e o H só ultrapassa o ponto D, e o ponto I ultrapassa o A e B.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Nota-se que há por parte de Daniel e Luigi uma tentativa de reescrever o que já tinham apresentado no item (a). Esse fato é um provável efeito do contrato didático pré-estabelecido, o qual possui uma cláusula que diz: para cada pergunta, deve-se apresentar uma resposta diferente. Esses estudantes não foram capazes de reconhecer que já haviam respondido, e que não seria um problema, pois de certa forma o item (b) consistia apenas numa forma de instigar o olhar dos estudantes para os atributos mais importantes.

Nessa atividade a dinamicidade do GeoGebra já passa a ser explorada pelos alunos durante a situação de ação, que consistiu na busca pela descrição do movimento de cada ponto, e também pelo professor no memento da institucionalização. Podemos observar nos dois últimos extratos a presença da dinamicidade traduzida pelas palavras “ultrapassa” e, no registro de Manolo, “passa”, como indicadoras do quão marcante é essa propriedade do GeoGebra no processo de exploração das construções. Para a implementação dessa Atividade foram gastos, aproximadamente, 20 minutos desde a entrega da folha A4 com a Atividade até o fim da institucionalização.

ATIVIDADE 3

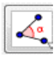
Crie três pontos A, B e C no plano, e trace as semirretas BA e BC usando a ferramenta 

.

a) Habilite o Rastro[37] da semirreta BA, faça com que o ponto A coincida com o ponto C, depois mova o ponto A para seu local de origem.
b) O que você pode observar?

[37] Clique com o botão direito do mouse sobre a semirreta e selecione a opção 

.

c) Desabilite o Rastro e selecione a ferramenta Ângulo  e clique nos pontos A, B e C, nessa ordem.
d) Observe o que aconteceu.
e) Mova o ponto A ou C (nos dois sentidos) e observe o que acontece com o ângulo.
f) Qual o maior valor que você consegue obter? E o menor?
g) Escreva, com suas palavras, o que é um ângulo?
h) Abra o arquivo <u>ATIVIDADE 3</u> e investigue movendo os pontos. O que você pode observar?
i) Separe os ângulos em grupos.
j) Que nome você daria a cada um dos grupos de ângulos?

Acessar no navegador: https://ggbm.at/szhqzjrt

Baixar: https://www.dropbox.com/s/dyrydlzejvt67b1/ATIVIDADE%203.ggb?dl=0

Análise *a priori*:

Os itens que compõem essa Atividade formam três grupos, os quais estão destinados ao desenvolvimento de um objetivo específico. Assim, os itens (a) e (b) têm como objetivo compreender a definição de ângulo como região do plano delimitada por duas semirretas de mesma origem. Enquanto que os itens c), d), e), f) e g) foram postos com o intuito de favorecer o entendimento de que os ângulos podem ser associados a um número que diz respeito a "abertura" relativa entre as duas semirretas. Diferente do que ocorre com os itens h), i) e j) que visa levar o aluno a perceber que os ângulos podem ser classificados como agudo, reto ou obtuso, de acordo com suas medidas.

Nestas atividades são postas em jogo quatro tipos de variáveis didáticas que influenciam no alcance dos objetivos. A primeira delas é a **Amplitude do ângulo**, a qual assume um valor inicial **livre**, pois ângulo a ser construído para que os alunos explorem poderia ser determinado pelo professor dentro de um intervalo que vai de 0º a 360º. Contudo esse valor foi deixado a critério dos estudantes uma vez que o processo de construção solicitado na Atividade 3 não exige a determinação prévia desse valor. A partir do item (h) essa variável assume os seguintes valores: **90º**; ou **]0º, 90º [**; ou **]90º, 360º]**.

A segunda variável é o **Rastro**, o qual assume inicialmente o valor **habilitado** e, posteriormente **desabilitado**. O primeiro valor atribuído a essa variável, habilitado, tem a função de destacar uma das regiões do plano delimitada pelas semirretas, ou seja, gerar um fenômeno visual. Enquanto que o valor posteriormente atribuído, desabilitado, tem por função facilitar a visualização da medida do ângulo.

A terceira variável didática destacada nesta atividade é o **Arredondamento**, a qual deriva do fato de que em todas as medidas que apresenta, o GeoGebra permite calculá-las com precisão de 0 a 15 casas decimais. Nesta atividade, mais especificamente para responder aos itens de (c) a (f), é preferível atribuir a esta variável o valor **0**, para que os alunos percebam que o maior valor do ângulo é 360º e o menor é 0º, contudo deixamos o valor padrão, 2, para essa variável.

Por fim, a quarta variável é a **Exibição das semirretas**, às quais foram atribuídos os valores **visível** e **oculto**. Os dois valores são utilizados gerando assim um fenômeno visual que poderia contribuir na classificação dos ângulos.

Essa é uma das atividades mais longas de toda a sequência, isso porque, ela aborda o conceito de ângulo, o qual em alguns casos pode ser definido como a abertura relativa entre duas semirretas de mesma origem, ou como uma região do plano delimitada por duas semirretas de mesma origem. A definição do livro didático analisado diz que: “ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem em um plano com uma das regiões determinadas por elas” (Gay, 2014, p. 224). Além disso, esta atividade é finalizada com o estudo da classificação dos ângulos quanto a suas medidas.

É evidente que o livro adota a concepção de ângulo como região plana, entretanto, isso diverge do que foi adotado na construção do *softwares* utilizado para construção da sequência, ângulo é união de duas semirretas de mesma origem. O GeoGebra não oferece ferramenta para evidenciar a região delimitada pelas duas semirretas, ele apenas oferece a ferramenta Ângulo que fornece a medida da abertura relativa entre as semirretas de mesma origem. Contudo, a função de Habilitar o rastro pode ser aplicada para que não se tenha um desencontro em relação a definição de ângulo que elegemos, enquanto região. Nesse contexto, a Atividade 3 inicia pautada na concepção de ângulo como região plana, em seguida como abertura, para posteriormente solicitar que os alunos apresentem uma definição baseando-se nas duas concepções.

Logo de início, o professor solicitaria que o estudante que estava manipulando o GeoGebra troque de lugar com o que estava escrevendo, a fim de que ambos desempenhem as funções de *operador* e de *escrivão*. Essa troca de funções está fundamentada na ideia de que a aprendizagem decorre da interação com o meio antagônico, assim, se não houvesse essa troca, o escrivão poderia assumir um papel passivo no desenvolvimento das Atividades.

Em seguida, o professor anunciaria que a Atividade 3 vai envolver o conceito de semirreta que eles acabaram de estudar, porém, vão usá-lo para construir outras figuras. Com isso, espera-se que os alunos fiquem um pouco curiosos e tomem para si a responsabilidade de resolver a atividade, ou seja, o processo de devolução da situação se baseia no despertar a curiosidade dos alunos.

Feito isso, inicia-se a situação de ação, na qual, durante a construção das semirretas BA e BC os alunos podem não perceber o fato de que ambas têm como origem o ponto B. Desse modo, faz-se necessário que o professor transite pela sala para observar se os alunos fizeram a construção como se esperava. Caso alguma dupla não construa corretamente, o professor deveria relembrá-los do que foi discutido na Atividade2 sobre a origem da semirreta.

Outro problema que pode ocorrer durante a situação de ação, ainda no item (a), é que os alunos, mesmo com a nota de rodapé explicando como habilitar o rastro de um objeto, eles não consigam fazer sozinhos. Se esse problema for generalizado, o professor pode usar o *software* projetado na lousa para mostrar como se faz para habilitar o rastro. E isso pode ser feito sem qualquer prejuízo para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de ângulo, pois trata-se apenas de uma dificuldade técnica derivada da falta de familiaridade com o GeoGebra. A Tarefa "Fazer com que o ponto A *coincida* com o ponto C" também pode gerar dificuldades, no entanto, só ocorrerá caso os estudantes não tenham consolidado a noção de coincidência em Geometria.

No item (b), espera-se que os alunos afirmem que uma região do plano ficou escurecida e a outra em branco, ou seja, que eles notem, de forma implícita, que as duas semirretas de mesma origem dividem o plano em duas regiões distintas. Como a região não será colorida uniformemente, mas sim preenchida por semirretas, é possível que os alunos afirmem que observaram que muitas semirretas foram criadas. Como Brousseau (2008) afirma que as quatro situações não seguem necessariamente uma ordem pré-definida, veremos ocorrer quase que simultaneamente ao momento da ação, a situação de formulação, pois o comportamento do meio em colorir uma das regiões é instantâneo. Para que as informações decorrentes das ações dos alunos até este momento não se percam, o professor poderá institucionalizar que as duas semirretas dividem o plano em duas regiões, e que o nome de cada uma delas será visto na continuação da atividade. Com isso, essa institucionalização parcial servirá também como uma forma de devolução dos demais itens da Atividade 3, além de possibilitar ao professor explicar que a depender da velocidade com a qual eles deslocam a semirreta AB, toda uma parte do plano será colorida e que essa região é o objeto de estudo da Atividade 3.

Como o GeoGebra marca um ângulo ou outro a depender da ordem em que se clica nos pontos, no item (c), pode ocorrer que os alunos meçam o outro ângulo, ou seja, a região do plano que ficou branca ao deslocarem a semirreta BA. Nesse caso, o professor pode orientá-los que cliquem na ordem inversa dos pontos (C, B e por último A). Esse é uma característica benéfica para o processo de ensino e aprendizagem, porque isso evidenciará que as semirretas de mesma origem na verdade determinam dois ângulos no plano e não apenas um.

Uma vez realizada esta ação pelos alunos, o item (d) se destina a prover elementos iniciais para formulação de um modelo implícito da situação, ou seja, eles irão observar que um número foi associado a cada uma das regiões. E o item (e) tem por objetivo fornecer mais elementos para este modelo, uma vez que a observação da construção poderá levar os alunos observarem que a medida associada aumenta quando a inclinação relativa das retas também aumenta, e a medida diminui se as semirretas são aproximadas. Essa observação poderia levar os alunos a formularem implicitamente o ângulo como a medida da abertura relativa de duas semirretas.

Neste contexto de exploração, o item (f) está posto para complementar as informações sobre a medida dos ângulos. Tem-se por objetivo que os alunos percebam que os ângulos podem ser associados a medidas que variam de 0º a 360º. Contudo, devido ao nível de precisão do GeoGebra, que por padrão mostra o valor do ângulo com duas casas decimais de aproximação, os alunos podem não conseguir identificar que o maior valor de um ângulo é de 360º.

Diante disso, optamos por modificar[38] (*variável didática*) o padrão de arredondamento do GeoGebra para "0 casas decimais". Essa nossa escolha se fundamentou na tentativa de otimizar o tempo dedicado à aplicação e discussão, contudo, julgamos que em um contexto natural de sala de aula, a discussão sobre aproximação poderá contribuir para o aprendizado do aluno. Essa manipulação da variável didática arredondamento é legítima, pois o estudo de ângulo será mais aprofundado e consolidado em anos posteriores, nos quais serão estudados os submúltiplos do grau, *minutos* e *segundos*.

Poderá ocorrer ainda que os alunos se limitem a executar o movimento com mesma amplitude solicitada no item (a) o que acarretaria na observação da variação apenas da medida original do ângulo criado até 0º. Nesse caso, caberá ao docente efetuar uma nova devolução questionando-os da seguinte forma: Vocês conseguem mover uma das semirretas de tal forma que obtenham uma medida maior do que esta que vocês disseram? O que contribuirá para que eles encontrem valores mais próximos de 360º.

O item (g) tem por finalidade registrar tudo o que os alunos vivenciaram até este momento na atividade, para isso eles formulariam um modelo explícito. Mais uma vez, a situação de validação ocorrerá quando os integrantes da dupla tentem entrar em acordo sobre o

[38] No menu *Opções*, escolher *Arredondamento* e marcar *0 Casas Decimais*. Posteriormente, deve-se novamente selecionar o menu *Opções* e clicar em *Gravar Configurações*. Esse processo pode ser desfeito para a aplicação de outras atividades.

que devem registrar na folha da Atividade 3. Pode ocorrer que, os alunos apresentem características dos ângulos que foram trabalhadas apenas do item (c) até o (f), ou seja, escrevam apenas sobre as medidas.

Por essa razão, é aconselhável que o professor inicie outra institucionalização parcial após os alunos realizarem o registro do item (g). Agindo assim, aumentará as chances de sucesso nos demais itens dessa atividade. Outro ponto importante desse item é que, nele os alunos registrarão atributos definidores, ou até mesmo, uma definição de ângulo, uma vez que no momento da aplicação da sequência os alunos já devem ter passado pelo estudo deste objeto geométrico.

No item (h) é solicitado que os alunos abram uma construção contendo seis ângulos e que manipule-os a fim de perceber que alguns desses ângulos desaparecem quando sua medida é igual ou inferior a 90º (ângulos $A\hat{B}C$ e $M\hat{N}O$), enquanto que outros desaparecem quando sua medida é maior ou igual a 90º (ângulos $G\hat{H}I$ e $J\hat{K}L$), e que também há outros cuja medida é constante e igual a 90º (ângulos $D\hat{E}F$ e $P\hat{Q}U$). Os itens (i) e (j) solicitam, respectivamente que os alunos, baseados em suas observações, classifiquem os ângulos e nomeie cada um dos grupos. Nestes itens, espera-se que os discentes separem os seis ângulos da construção em três grupos. Os nomes atribuídos podem variar, e essa é a intenção, pois deseja-se mostrar para eles a necessidade da padronização dos nomes dos objetos matemáticos para que haja uma compreensão de todos.

Provavelmente será preciso que o professor intervenha para que os alunos realizem a classificação dos ângulos, pois eles podem se ater exclusivamente a que alguns ângulos desaparecem e outros não. Assim, o professor deverá questioná-los sobre: Quando é que os ângulo somem? O que é que você pode me dizer a respeito da medida dele quando ele some?; E qual a medida dos ângulos que não desaparecem?

A discussão sobre os nomes deverá estar presente durante a situação de institucionalização final da Atividade 3. Além disso, nesse momento o professor deve retomar a noção de ângulo como região do plano delimitada por duas semirretas e como a inclinação relativa de duas semirretas de mesma origem. É possível que os alunos já tenham estudado estes conteúdos, mas caso contrário, as respostas dadas nos itens (b), (g) e (h) poderão ser avaliadas, bem como a participação nos momentos de institucionalização, a fim de dizer se eles aprenderam ou não os conceitos trabalhados.

Uma vez que os alunos tenham passados por todos estes passos, o professor institucionalizaria as seguintes definições e notações oriundas do livro didático adotado pela instituição de ensino participante da aplicação da Sequência Didática:

i) Ângulo como "a união de duas semirretas de mesma origem em um plano com uma das regiões determinadas por elas" (Gay, 2014, p. 224);
ii) B é o ponto de intersecção das semirretas e é o vértice do ângulo $A\hat{B}C$.
iii) Institucionalizar a notação de ângulos;
iv) Os ângulos podem ser classificados em agudo, se a sua medida for menor que 90º, reto, se a sua medida for igual a 90º, e obtuso, se a sua medida for maior que 90º:
    a. "Um ângulo é **reto** quando sua medida é igual a 90º. Um ângulo de ¼ de volta é um ângulo reto." (GAY, 2014, p. 225)
    b. "É chamado agudo o ângulo de medida maior que 0º e menor que 90º" (GAY, 2014, p. 225)
    c. "É chamado obtuso o ângulo de medida maior que 90º e menor que 180º." (GAY, 2014, p. 225)

Análise *a posteriori*:

Assim que recebeu a folha com a Atividade 3, Manolo afirmou que:

Manolo: Agora me acostumei com esse negócio.

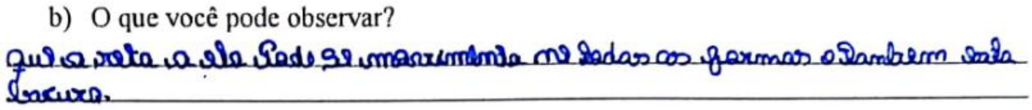
Demonstrando assim, que em apenas duas atividades o GeoGebra já se tornou uma ferramenta de estudo para ele.

Como previsto, durante a situação de ação os alunos não observaram que tinham que construir duas semirretas de mesma origem, e assim, alguns deles traçaram a semirreta BA e CB. O professor interviu como previsto na análise *a priori* relembrando que o ponto B é a origem das duas semirretas e efetuou nova devolução ao solicitar que eles realizassem o traçado das semirretas novamente.

Outra dificuldade, prevista na análise a priori, verificada na implementação, foi a de habilitar o rastro da semirreta BA. Pudemos constatar que a nota de rodapé explicando como fazer não foi efetiva, na realidade alguns alunos nem notaram que ela existia, e os que chegaram a ler o conteúdo dessa nota não conseguiram habilitar o rastro sozinhos, pedindo auxílio ao professor, o qual explicou passo a passo como habilitar e como desabilitar.

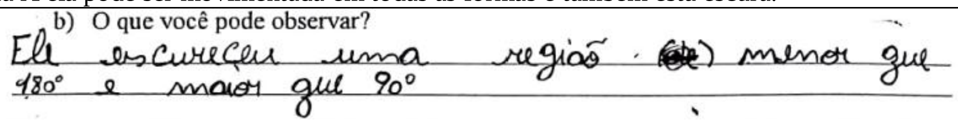
Uma vez vencidos estes problemas, os alunos registraram as observações presentes, como podemos ver na Figura 4.19 (na Figura 4.19a consta o registro de Manolo, na Figura 4.19b consta o registro de Daniel e Luigi) referentes ao item (b) da Atividade 3.

Figura 4.19 – Resposta apresentada por Manolo, Daniel e Luigi para o item (b) da Atividade 3


b) O que você pode observar?

a

Que a reta A ela pode ser movimentada em todas as formas e também está escura.


b) O que você pode observar?

b

Ele escureceu uma região menor que 180º e maior que 90º.

Fonte: Dados da Pesquisa.

É possível observar, em ambos os registros, que essa etapa da Atividade 3 cumpriu sua função, pois todos os alunos conseguiram notar a região escurecida e destacada da branca. No registro de Manolo (Figura 4.19a), podemos observar a influência do caráter dinâmico da construção na resposta desse aluno. Ele observou que a semirreta podia ser rotacionada em todas as direções. O fato dele ter chamado a semirreta de “reta” foi uma espécie de transferência da fala para a escrita de um erro comum que observamos neste estudante durante toda a aplicação das Atividades, em alguns momentos o professor corrigia, mas persistia trocando semirreta e segmento de reta por reta.

Na Figura 4.19b, podemos observar que Daniel e Luigi utilizam o termo “região”, e essa palavra foi utilizada pelo professor para efetua uma devolução. Em um dado momento, eles questionaram o docente sobre o que deveriam escrever, então este respondeu fazendo o seguinte questionamento:

Professor: O que aconteceu com essa *região* quando vocês fizeram o ponto A coincidir com o ponto C?

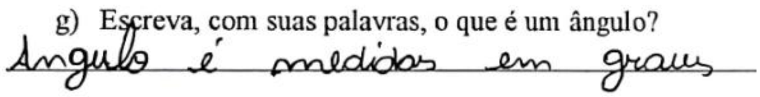
Procedendo assim, o professor colocou-se na fronteira entre efetuar uma devolução para que os alunos refletissem sobre as retroações do meio e, provocar o Efeito Topaze facilitando demasiadamente a resolução da atividade. Isso poderia ter levado os alunos a incluírem no contrato didático uma cláusula de sempre esperar que o professor interprete para eles os fenômenos visuais decorrentes da manipulação do GeoGebra.

Essa dupla registrou também um intervalo da medida do ângulo, porém o professor observou que esse registro foi realizado na Tarefa do item (f), o qual será analisado no decorrer desse texto. O que podemos inferir desse registro a posteriori dos alunos é que, eles passaram a considerar a medida da abertura entre as duas semirretas como um atributo importante da construção e, por isso, eles sentiram-se impelidos a modificar o modelo explícito formulado anteriormente. Isso é um indício de que houve uma modificação no conhecimento prévio.

Uma segunda interpretação, divergente dessa, para esse fenômeno didático é de que, ainda no item (b), os alunos não associaram a construção com algum objeto matemático que eles haviam estudado, nesse caso, ângulo. Porém, no decorrer da atividade, ao medirem o ângulo, o objeto do saber foi reconhecido. Sob esse ponto de vista, é possível inferir que o processo de estudo desse objeto enfatizou sua medida, o que levou os alunos a dar mais atenção a ela.

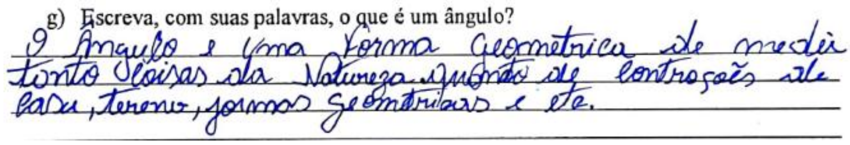
Esse segundo ponto de vista ganha mais subsídios ao analisarmos os registros dos alunos para o item (g), o qual solicitava que eles escrevessem, com suas palavras, o que é um ângulo. Assim, os alunos apresentaram os registros presentes na Figura 4.20.

Figura 4.20 – Resposta apresentada por Manolo, Daniel e Luigi para o item (g) da Atividade 3



a

Ângulo é medidas em graus.



b

O ângulo é uma forma geométrica de medir tanto coisas da natureza quanto de construções de casa, terreno, formas geométricas e etc.

Fonte: Dados da Pesquisa.

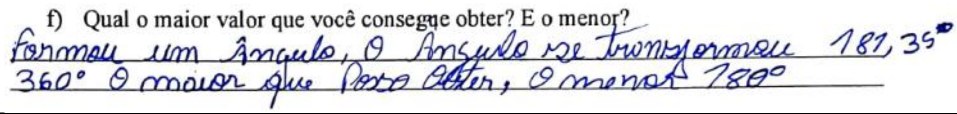
Quando nos deparamos com o registro de Daniel e Luigi (conforme Figura 4.20a), imaginamos inicialmente que o fato deles terem mencionado na “definição” de ângulo apenas a medida, decorria das ações e formulações solicitadas nos itens (c), (d), (e) e (f). Esses itens estão direcionados para que os alunos observem que o ângulo (enquanto região plana) pode ser associado a um número real que varia de 0º a 360º, ou seja, esses itens enfatizam a medida de ângulo. Contudo, ao lermos o registro de Manolo (conforme Figura 4.20b), percebemos que essa ênfase na medida decorre de um processo de estudo anterior à aplicação da Sequência Didática. É possível notar que ele cita exemplos que aparecem no livro didático para evidenciar a aplicação desse objeto matemático no mundo real e na própria matemática.

Não é surpreendente que os alunos retenham, em suas imagens mentais sobre ângulo, apenas as medidas e simplesmente ignorem o fato dele ser uma região. Esse é um efeito natural, se imaginarmos que tipos de práticas, ou seja, em que tipos de Organizações Praxeológicas os alunos terão que mobilizar o conceito de ângulo. Normalmente, as situações que requererão a medida dos ângulos, tais como a classificação de um polígono como regular ou não-regular, que pode ser feito pela medida dos ângulos internos deste. Outro exemplo, pertencente aos estudos no Ensino Superior, quando se estuda os Ângulos entre vetores, também o que é observado é a medida destes, e não a região.

Além disso, é muito mais simples para os alunos assimilarem e notarem uma utilidade para a medida do ângulo do que para uma região que se estende infinitamente, sendo limitada lateralmente por semirretas, e que escapam aos limites da sua imaginação. Números são mais “palpáveis” do que o uma região infinita. E o professor de matemática, o escritor de livros didáticos e os diferentes elementos da *Noosfera* preocupam-se em enfatizar aquilo que os alunos realmente irão necessitar tanto na continuação dos seus estudos quanto em situações cotidianas.

Sentimos a necessidade de antecipar a exposição da análise do item (g) pelas razões expressas acima, contudo, retornamos para os itens (c), (d), (e) e (f). Desses quatro itens, os três primeiros estão voltados a direcionar as ações e as formulações dos alunos para a medida dos ângulos. Enquanto que o item (f) questiona os alunos sobre a variação da medida dos ângulos. Com respeito ao valor da variável didática Arredondamento, decidimos experimentar sua influência nas observações dos alunos, sendo assim, mantivemos o seu valor igual a 2 casas decimais. Notamos que, de fato, os alunos registraram exatamente o valor que observavam, conforme se mostra na Figura 4.21, mas quando questionados sobre qual era o valor aproximado, eles respondiam, por exemplo, 360º.

Figura 4.21 – Resposta apresentada por Manolo para o item (f) da Atividade 3


f) Qual o maior valor que você consegue obter? E o menor?
Formou um ângulo, o ângulo se transformou 181,35º
360º o maior que posso obter, o menor 180º

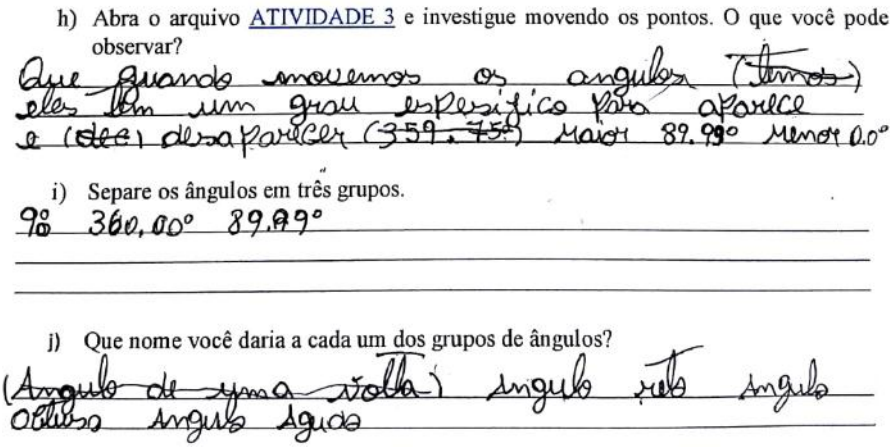
Formou um ângulo, o ângulo se transformou 181,35º 360º o maior que posso obter, o menor 180º

Fonte: Dados da Pesquisa.

Podemos observar na Figura 4.21 que Manolo afirma que o ângulo só pode assumir valores no intervalo [180º, 360º]. Não por coincidência, o menor valor é próximo à medida do ângulo que ele construiu inicialmente. Esse foi um fenômeno observado também no teste piloto dessa sequência, onde a maioria dos participantes registravam o valor da medida do ângulo assim que foi criado como sendo o menor valor. O professor notou esse fato após eles registrarem na folha da atividade, mas ele solicitou que tentassem obter um valor ainda menor e eles perceberam que a menor medida do ângulo era 0º.

A partir do item (h), diante da quantidade de construções no arquivo da Atividade 3 os alunos não sabiam o que observar. O professor teve que realizar diversas devoluções para que os alunos persistissem na busca pela solução. Por exemplo, ele teve que fazer perguntas do tipo: Quando é que esse ângulo desaparece? Com qual medida esse ângulo ABC desaparece?; Qual o maior e o menor valor que você consegue obter movendo esse ângulo? A partir desses questionamentos, conseguiu-se obter respostas semelhantes a apresentada na Figura 4.22.

Figura 4.22 – Resposta apresentada por Daniel e Luigi para os itens (h), (i) e (j) da Atividade 3



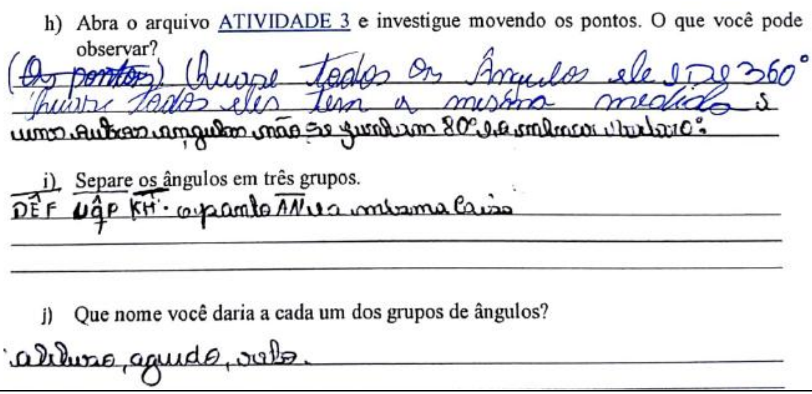
h) Que quando movemos os ângulos eles têm um grau específico para aparecer e desaparecer maior 89.99º menor 0.0º i) 90º 360.00º 89.99º j) Ângulo reto ângulo obtuso ângulo Agudo.

Fonte: Dados da Pesquisa.

É possível notar que Daniel e Luigi conseguiram verificar que os ângulos tinham que estar com suas medidas em um determinado intervalo para estarem visíveis. Na resposta do item (h), por exemplo, eles falam dos ângulos agudos que medem um valor $x, tal\ que\ 0° \leq x < 90°$. O professor solicitou que eles procurassem outro ângulo no Arquivo 3 que tivesse a mesma característica e que formasse um grupo. Essa dupla apresentou uma classificação para os ângulos que pode ser considerada correta, mas para isso precisou de muito auxílio do professor, o que não seria viável em uma turma com 30 alunos ou mais.

Manolo apresentou registros escritos nada coerentes, com alguns trechos que não nos permitia afirmar se ele de fato conseguiu ou não perceber as características dos ângulos e agrupá-los, conforme é mostrado na Figura 4.23.

Figura 4.23 – Resposta apresentada por Manolo para os itens (h), (i) e (j) da Atividade 3



h) Quase todos os ângulos ele é de 360º quase todos eles tem a mesma medida uns outros ângulos não se juntam 80º é o menor valor

i) $D\hat{E}F, U\hat{Q}P, \hat{K}\hat{H}$. O ponto $\overline{AN}$ é a mesma coisa. j) obtuso, agudo, reto.

Fonte: Dados da Pesquisa.

No registro do item (h) acreditamos que Manolo separou os ângulos em dois grupos: os que podem assumir valores maiores que 90º e os que não podem. O excerto que mais nos deixou em dúvida se ele havia respondido corretamente ou não a atividade, foi o item (i), pois não tínhamos certeza de que ele havia percebido que os ângulos $D\hat{E}F\ e\ U\hat{Q}P$ formam um grupo, e o J$\hat{K}L, G\hat{H}I$ outro grupo e que os ângulos de vértices nos pontos A e N formavam o terceiro grupo solicitado. Como as respostas estavam confusas, decidimos recorrer às gravações de áudio, nas quais identificamos o momento onde Manolo chamou o professor e estabeleceu o seguinte diálogo:

Manolo: Sim professor, esse ângulos aqui [*provavelmente se referindo ao ângulo $A\hat{B}C$*], ele vai até 89º. Esse [$J\hat{K}L$] vai de 360º a 90º

Professor: Sim, e esse de cá [*ângulo $D\hat{E}F$*], varia como?

Manolo: Esses quadrados [*se referindo a marcação gráfica de ângulos retos*] eles é só até 90º mesmo.

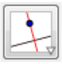
Assim obtivemos a certeza de que este aluno conseguiu compreender o que estava sendo proposto na situação. Após isso, Manolo entra novamente, por conta própria em situação de ação onde manipula os demais ângulos e identifica os pares. No que diz respeito aos nomes das classes de ângulos, item (j), como eles se lembravam do nome “ângulos retos”, e estavam tentando se lembrar dos outros nomes, o professor os informou.

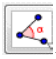
Vemos que, embora os alunos tenham estudado esses tipos de ângulos anteriormente, eles não os reconheceram, isso porque eles estavam acostumados com uma representação estática. No entanto, vemos que esta parte da Atividade 3 conduziu os alunos por todos os momentos de uma situação didática. Primeiramente eles entraram na situação e Ação, na qual exploraram os ângulos, perceberam que alguns desapareciam e iniciaram uma situação de formulação, na qual tentaram determinar sob que circunstâncias eles desapareciam. A situação de Validação se deu em momentos como os apresentados no diálogo anterior, em que os alunos manipulavam novamente a construção para mostrar ao professor o que havia observado e acompanhado de uma prova visual. E a institucionalização foi realizada pelo professor ao final, tendo este adiantado apenas os nomes que seriam dados a cada grupo de ângulos.

O GeoGebra nesse contexto foi fundamental, pois sem o fenômeno visual, desaparecimento dos ângulos, os alunos certamente não teriam se envolvido na atividade, tampouco teriam observado as características de cada grupo. Nessa atividade, desenvolveu-se um tipo de exploração que dificilmente poderia ser realizada em outro ambiente que não fosse de geometria dinâmica. Assim, o GeoGebra é tido como uma fonte geradora de fenômenos visuais que desestabiliza os conhecimentos prévios dos alunos e que propicia novas dimensões do significado de um objeto matemático.

Como dissemos na análise *a priori*, essa atividade foi a mais longa de todas, tendo a implementação com duração de, aproximadamente, 57 minutos, mesmos os alunos se mostrando mais hábeis como a manipulação do GeoGebra.

ATIVIDADE 4

Trace uma reta AB. Crie um ponto C sobre $\overleftrightarrow{AB}$. Selecione a ferramenta Reta Perpendicular  e clique na reta e no ponto C.

a) Observe o que aconteceu e descreva.
b) Crie dois pontos D e E sobre a nova reta de tal modo que o ponto C fique entre eles. Meça os ângulos $B\hat{C}D$, $E\hat{C}B$, $A\hat{C}E$ e $D\hat{C}A$ usando . O que você pode observar?
c) Investigue a construção e descreva o que são retas perpendiculares.

Análise *a priori*:

Por meio desta atividade buscamos tornar possível ao aluno perceber que retas perpendiculares são retas concorrentes que formam ângulos retos entre si. As variáveis didáticas que influenciam no cumprimento deste objetivo foram: **Ângulos**; e **Posição do Ponto C**. Com respeito à primeira delas temos que dada a configuração e posições relativas entre os pontos estabelecidos pela construção, seria possível medir 12 ângulos cujo vértice é o ponto C. Por exemplo, iniciando ponto B, poderíamos criar $B\hat{C}D, B\hat{C}A, B\hat{C}E$, medindo 90º, 180º e 270º, respectivamente. Contudo, foi atribuído a essa variável os valores ângulos $\boldsymbol{B\hat{C}D, E\hat{C}B, A\hat{C}E}$ **e** $\boldsymbol{D\hat{C}A}$, que são os ângulos que os alunos irão medir. Enquanto que, em relação à posição do ponto C, ele poderia ser colocado sobre a semirreta de origem em B e que não contém o ponto A; sobre o segmento AB; ou sobre a semirreta de origem em A e que não contém o ponto B. Além disso, pretendíamos institucionalizar a definição de retas perpendiculares presentes no livro didático analisado, a saber: "Quando duas retas concorrentes formam quatro ângulos retos, dizemos que elas são retas perpendiculares" (GAY, 2014, p. 230).

No item (a) dessa Atividade, os alunos perceberiam que uma nova reta foi criada, desse modo, os dois itens que seguem são direcionados para a investigação da relação dessa nova reta, com a reta AB. No item b) a resposta fornecida pelos alunos poderia variar a depender de qual local na reta eles criaram o ponto C, a saber:

- Se o ponto C foi colocado na semirreta de origem em A e que **não** contém o ponto B, eles observariam que os ângulos ACE e DCA medem 270º e BCD e ECB medem 90º;
- Se o ponto C foi colocado sobre o segmento AB, os quatro ângulos seriam congruentes medindo 90º;
- Se o ponto C foi colocado na semirreta de origem em B e que **não** contém o ponto A, eles observariam que os ângulos ACE e DCA medem 90º e BCD e ECB medem 270º;

O desejável é que eles coloquem o ponto C sobre o segmento AB, porém, se o professor identificar que alguma das duplas incorreu em alguma das outras duas situações, ele deve intervir solicitando que movimentem o ponto C, assim, eles verificariam todos os três casos, e isso geraria uma discussão pertinente no momento da institucionalização. Além disso, o item (c) solicita que os estudantes explorem a construção o que pode levá-los a observar os três casos anteriormente mencionados.

Caso os alunos não consigam elaborar uma descrição para retas paralelas baseados nas suas investigações sobre a construção, o professor poderia questioná-los: “O que acontece quando vocês movem o ponto C?”; “Quanto é 270º dividido por 3?”. O professor poderia em seguida pedir que eles ocultem os ângulos, deixando visível apenas um cuja medida é igual a270º, e assim questionaria “esse ângulo está medindo quantas regiões?” e com isso, os alunos observariam que os ângulos que estão sendo identificados com medida 270º estão na verdade abrangem 3 regiões, cada uma medindo 90º.

Toda essa multiplicidade de resultados obtido a partir da medição dos ângulos entre as retas se deve ao fato do GeoGebra funcionar de tal forma que, a posição relativa entre os pontos e a ordem em que o usuário clica neles para formar o ângulo influencia em que ângulo seria medido.

Com isso vemos que a posição do ponto C sobre a reta é variável didática mais importante da atividade, e deixá-la livre para o aluno alterar seu valor (entre o segmento ou fora dele) poderia gerar dificuldade na realização da atividade, mas permitirá a compreensão de que a reta perpendicular forma ângulos retos independentemente do local que ela esteja situada. Destacamos que o caráter dinâmico da construção traz o benefício de permitir que o aluno supere uma representação prototípica de retas perpendiculares.

Entretanto, dada toda essa ênfase aos ângulos formados pelas retas e não a elas, os alunos podem chegar a deixar as retas de lado e no item (c) e descrever as características dos ângulos (medidas invariáveis e iguais a 90º). Até mesmo pensar que retas paralelas são ângulos.

Em uma turma relativamente grande, o professor poderia aguardar o momento da institucionalização para desfazer essa confusão.

Durante a situação de institucionalização, o professor poderia, baseado no que acontece com a construção quando ponto C está sobre o segmento AB, afirmar que retas perpendiculares são aquelas que se interceptam e formando ângulos retos. Ou seja, é um caso particular das retas concorrentes. Além disso, o docente poderia dizer para os alunos que essa técnica para reconhecimento do perpendicularismo entre retas baseada nas medidas dos ângulos que formados pelas retas, também serve para as relações *reta-segmento* e *segmento-segmento*.

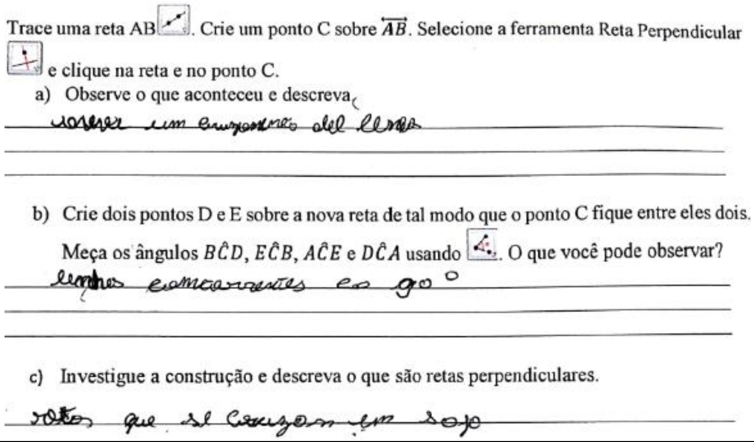
Análise *a posteriori*:

A situação adidática de ação é iniciada com o traçado das retas perpendiculares, e momentaneamente interrompida com a questão presente no item (a). Antes de registrar sua resposta, o participante Manolo utilizou a função habilitar rastro para verificar se a reta criada com a ferramenta Reta Perpendicular era uma reta. Então ele criou um ponto sobre ela, habilitou o rastro do ponto e o moveu observando que este ponto percorria toda a reta. Esse é um exemplo de que, para este aluno, as ações realizadas na Atividade 2 constituíram técnica para o reconhecimento de uma reta. Esta é uma concepção equivocada, pois a referida atividade, o que estava em questão era o ponto, ou seja, era solicitado que se observasse se o ponto pertencia a uma reta, a uma semirreta ou a um segmento de reta.

Alguns alunos abriram o caderno em busca do que haviam estudado tentando localizar o que é uma reta perpendicular. Ao encontrar eles se atentaram apenas ao desenho e não a definição, ou seja, viram a representação e duas retas paralelas e gesticularam como se desenhassem duas retas paralelas no ar, e fizeram o mesmo com as retas concorrentes e perpendiculares. A partir disso é possível afirmar que esses alunos, embora tenham passado por um processo de estudo sobre posições relativas entre retas, eles permaneciam com o foco no desenho e não nas características que favorecessem o reconhecimento.

Por acreditarmos que o GeoGebra tinha o potencial de levar os alunos a observarem as propriedades e não apenas uma posição estática, nós decidimos propor essa Atividade 4. E nossas expectativas aparentemente foram atendidas, pois logo após a situação de ação, que consistiu no traçado de duas retas perpendiculares entre si e medição dos ângulos formados por elas, por exemplo, Daniel e Luigi apresentaram os registros presentes na Figura 4.24.

Figura 4.24 – Resposta apresentada por Daniel e Luigi para os itens (a), (b) e (c) da Atividade 4


Trace uma reta AB. Crie um ponto C sobre $\overleftrightarrow{AB}$. Selecione a ferramenta Reta Perpendicular e clique na reta e no ponto C.

a) Observe o que aconteceu e descreva.

b) Crie dois pontos D e E sobre a nova reta de tal modo que o ponto C fique entre eles dois. Meça os ângulos $B\hat{C}D$, $E\hat{C}B$, $A\hat{C}E$ e $D\hat{C}A$ usando . O que você pode observar?

c) Investigue a construção e descreva o que são retas perpendiculares.

a) Houve um cruzamento de linhas.
b) Linhas concorrentes com 90º
j) Retas que se cruzam em [*última palavra incompreensível*]

Fonte: Dados da Pesquisa.

Nota-se que no item (b) esses estudantes apresentaram o que poderia ser considerado uma definição de retas perpendiculares. O que comprova que a Atividade 4 cumpre seu papel de levar os alunos a descobrirem os principais atributos definidores das retas perpendiculares: se cruzam e formam ângulos de 90º. Porém, foi possível mais uma vez ver o efeito da cláusula do contrato didático que diz: para questões diferentes, deve-se apresentar respostas diferentes. Por essa razão, que Daniel e Luigi apresentaram no item (c) uma descrição das retas perpendiculares apenas focado no cruzamento sem maiores detalhes.

Manolo demonstrou insegurança na hora de medir os ângulos e interpretar o que via, inclusive chegou a registrar que o ângulo $D\hat{C}A$ media 0º. Ao perceber que ele não conseguiria extrair de sua construção característica útil para definição das retas perpendiculares, o professor efetuou nova devolução solicitando que ele movesse o ponto C de tal forma que ficasse entre os pontos A e B. Depois de ter realizado essa ação, Manolo percebeu que os quatro ângulos assumiram a mesma medida, 90º. Contudo, isso não foi suficiente para que ele registrasse, no item (c), uma descrição coerente para retas perpendiculares. Ele escreveu que “São duas retas que possuem duas linhas na mesma reta”. Sendo assim, o momento da institucionalização ganhou a atribuição de organizar essas observações desconectadas.

Durante o processo de institucionalização, o professor realizou a construção solicitada na Atividade 4 e mostrou o que acontece com os ângulos em cada posição do ponto C. Explicou que em duas posições alguns ângulos assumem a medida de 270º por que ele estava medindo na verdade três ângulos de medidas iguais a 90º. Todo o processo de aplicação da Atividade 4 durou, aproximadamente, 27 minutos desde a entrega da Atividade até o fim da institucionalização.

ATIVIDADE 6
Investigue as três construções do arquivo ATIVIDADE 6 e responda:

a) Quais as semelhanças entre as construções?
b) Quais são as diferenças entre elas?
c) Imagine que um de seus colegas faltou à aula hoje e que você precisa mandar uma mensagem pelo WhatsApp dizendo o que ocorreu na aula. Como você descreveria na mensagem cada uma das construções da ATIVIDADE 6? Escreva.

Acessar pelo navegador: https://ggbm.at/phd5sbhn

Baixar: https://www.dropbox.com/s/guruf82q761929e/ATIVIDADE%206.ggb?dl=0

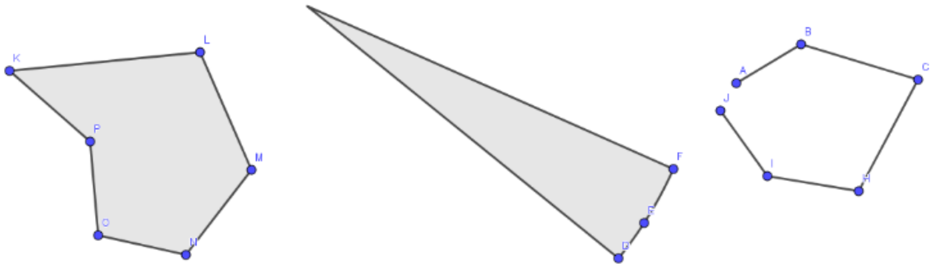
Análise *a priori*:

Essa atividade tem três objetivos principais que formam uma cadeia. Primeiro buscamos que os alunos explorem algumas formas geométricas planas, que eles desenvolvam a habilidade de descrever cada uma das figuras geométricas da construção. Desses dois objetivos emergem o terceiro que é que os alunos venham a construir um vocabulário (por exemplo, é formado apenas por linhas retas, é aberto, é fechado, possui linhas curvas, etc.) para realizar a classificação das formas presentes na futura ATIVIDADE 7.

Para que estes objetivos fossem alcançados, duas variáveis didáticas, aqui denominadas de **linha** e **região** foram escolhidas, por exemplo, a linha das construções poderiam ser de dois tipos, **reta** ou **curva**. Enquanto que para a variável região foram atribuídos os valores **aberta** e **fechada**. Dessas variáveis didáticas foram derivados os elementos que seriam institucionalizados, ou seja, que figuras geométricas planas formadas somente por segmentos de retas: contornos formados apenas por segmentos de reta são chamados de linha poligonal. Também, que estas figuras podem ser fechadas e abertas.

O que se espera com essa Atividade, mais especificamente com os itens (a) e (b) é a maior diversidade de respostas possível. Espera-se que os alunos listem entre as semelhanças diversos **atributos definidores e irrelevantes** também. Por exemplo, o fato de todos terem segmentos de retas em seu contorno, ou mesmo a cor das duas primeiras figuras ser cinza, conforme pode ser visto na Figura 4.25. Dentre as diferenças listadas pelos alunos, esperamos que surja o fato da primeira e da segunda figura serem fechadas e terem região interna colorida, diferente do que acontece com a terceira figura, que é aberta. A exploração realizada pelos alunos sobre as construções deve evidenciar a parte curva da segunda figura, que é outro atributo definidor crucial para diferenciar o polígono das demais figuras planas.

Figura 4.25 – Construções utilizadas na Atividade 6



Fonte: Elaborado pelos autores.

É possível que, como na Atividade 5 (ver APÊNDICES A e B) eles tiveram que medir dois segmentos, nessa atividade eles também efetuem medições a procura de semelhanças e diferenças. Caso o professor identifique essa ação em algumas duplas, ele pode questionar se elas encontraram alguma semelhança e pedir que observem primeiramente as formas e se não acharem semelhanças e diferenças, que recorram a medições de segmentos e ângulos. Ou seja, o docente deve tentar dissuadi-los a investigar as medidas, pois o único padrão que ele poderá observar assim é que os segmentos de reta que compõe o contorno da segunda construção são congruentes, pois são raios de uma mesma circunferência.

É importante que durante o a situação de ação, e o momento em que os alunos estejam registrando as respostas dos dois primeiros itens, que o professor observe o que estão escrevendo, e como estão manipulando o *software*, pois todas estas informações serão utilizadas na situação de institucionalização. Caso nenhuma dupla tenha observado a curvatura da segunda figura, o professor deve perguntar aos alunos se eles não detectaram alguma diferença a mais em relação à primeira figura, dessa forma ele efetua nova devolução da situação a fim de investigarem mais. Optamos por não deixar muito evidente a curvatura para que os alunos se acostumem a explorar ao máximo as figuras em busca dos detalhes que podem ser revelados graças à dinamicidade do GeoGebra. Porém, a curvatura da segunda figura pode não ser tão evidente para os alunos, e assim, eles podem dizer que ela é semelhante à primeira.

Após a listagem dessas semelhanças e diferenças, o item (c) solicita uma descrição de cada figura. Essa descrição individual é análoga ao processo de escrita de uma definição. Contudo, é possível que atributos irrelevantes constem e, é ainda mais provável que as descrições, vistas como definições, sejam não-econômicas, ou seja, compostas por atributos definidores, mas que não são imprescindíveis à caracterização da figura. Em casos mais extremos, é possível que nenhum atributo definidor apareça na mensagem solicitada. Caso o professor identifique uma situação dessas, ele poderá questionar os alunos o seguinte: com isso que vocês escreveram, daria para uma pessoa que nunca viu as construções fazer um desenho igual?

Essa atividade segue o modelo das outras no que se refere a como provavelmente ocorrerá a situação de validação, que é no momento do registro na folha contendo o enunciado da Atividade 6. E na institucionalização, o professor poderia pedir que os alunos falassem quais foram as semelhanças e diferenças que eles escreveram, perguntar se eles usaram essas características para responder o item (c). Nesse momento, é importante que o professor faça com que os alunos percebam que a cor das figuras não é uma característica tão importante. Feito isso, ele pode dizer que em geometria, as três são ditas “figuras planas”, a terceira é chamada de linha poligonal por ser formada apenas por segmentos de retas, os quais formam ângulos entre si. O docente pode concluir que a primeira figura é também limitada por apenas segmentos de reta, mas que tem outras características que serão estudadas na próxima atividade. Desse modo, pretende-se que os alunos se interessem em continuar respondendo as próximas atividades, assim ocorrendo, estará feita a devolução da Atividade 7.

Análise *a posteriori*:

Essa Atividade foi a primeira a ser aplicada na segunda sessão da Sequência Didática e teve a duração de, aproximadamente, 19 minutos. Essa sessão foi iniciada com a presença de um par de alunos, Manolo e Luigi, que na sessão anterior não formavam uma dupla, mas que tiveram que formar, pois Daniel chegou com significativo atraso, quando estávamos aplicando a Atividade 9. Sendo assim, focamos a análise na nova dupla formada por Manolo e Luigi e em alguns momentos citamos dados oriundos das ações de Daniel.

Ao fazer uma breve reflexão sobre o que havia ocorrido na primeira sessão, notamos que os alunos evidenciaram que não se expressavam tão bem de forma escrita. Percebemos que eles falavam sobre fenômenos visuais decorrentes da manipulação das construções no GeoGebra, muitas vezes o que eles falavam, divergia muito daquilo que registravam nas folhas das Atividades. Por acreditarmos que isso era efeito de alguma cláusula do contrato didático, que requeria que eles se expressassem mais de forma verbal do que escrita, decidimos experimentar qual o efeito de não exigir uma resposta escrita tendo em vista melhorar o tempo de realização das Atividades. Contudo, reconhecemos a importância de que os alunos sejam incentivados a apresentar registros escritos em diferentes componentes de sua formação escolar, como é o caso da matemática, pois escrever bem é uma habilidade valorizada pela sociedade, mesmo assim, devido ao pouco tempo disponível para aplicação, optamos principalmente por registro verbal.

Na Atividade 6 ainda solicitamos as respostas por escrito para os itens (a) e (b). Manolo, assim que viu as três construções, disse que já sabia uma semelhança e, quando indagado pelo professor disse que elas são "figuras poligonais". E explicou o que é isso dizendo:

Manolo: Polígonos investem em ângulos, elas persistem em ... como assim ... em retas, semirretas, figuras planas. Entendeu?

. Diante dessa explicação, o professor reconheceu que ele possuía algum conhecimento sobre polígonos. Nota-se, certa confusão nas ideias expressas pelo aluno, contudo ele evidencia os principais elementos constituintes de um polígono.

Esses elementos certamente compõem a imagem conceitual sobre polígono que este aluno detém. Se olharmos para o que é uma definição em sua essência, considerando seus diferentes tipos e características, podemos dizer que ela é um conjunto de elementos, descritos em língua materna, e que permite a comunicação das diferentes características do objeto definido. Assim, podemos entender, a partir da fala de Manolo, que para ele, um polígono é um objeto que é uma figura plana, que tem ângulo e, por meio de um esforço maior, podemos interpretar "reta, semirreta" como uma referência aos lados compostos por segmentos de retas. A imagem mental que um aluno possui sobre um conceito não é algo que possa ser diretamente acessado pelo professor. Assim, com o intuito de verificar se de fato ele era capaz de reconhecer as características de uma figura poligonal, o professor perguntou-lhe se a segunda figura também era uma figura poligonal, e obteve a seguinte resposta:

Professor: Agora investigue essa segunda figura aqui para ver se é o que você chamou de figura poligonal.
Manolo: Essa do meio?
Professor: É. Pode mexer ai a vontade nos pontos para ver se é o que você chama de poligonal. E mexa as outras também.
Manolo: Oh, quando a gente mexe aqui com ela, ela parece que é um... Como é o nome daquela forma geométrica? Eu me esqueci.
Professor: Não precisa se preocupar com o nome.
Luigi Um, dois, três, quatro, cinco, seis [*contando os lados da primeira construção*] ... Hexágono!
Manolo: É! Acho que é hexágono.
Luigi: Esse ai é um pentágono, mas o outro [*segunda construção*] é ...
Professor: E, ai? O que é que você acha? Essas figuras são iguais? Qual diferença você destacaria entre as figuras?
Manolo: É que esses polígonos eles parecem uma figura geométrica. Tipo, o círculo mesmo. Para mim ele [*segunda construção*] representa um ângulo. Porque ele é um ângulo que não... Eu estava tentando fechar. Eu não sei se ele fecha. Ou! Ele abre mais!
...
Professor: A segunda, será que é um polígono?
Luigi: Se ficar naquela posição inicial, ela era um polígono.
Professor: Hum... Porque o lado parecia reto.
Luigi: É porque era um triângulo

Professor:	Hum... E agora já não é mais, porque ficou redondo, né? E a última? O que é que vocês acham?
Luigi:	É. Ele é um polígono.
Professor:	Mexa naquele ponto [A]. E agora ele é um polígono
Manolo:	Oh, quando ele está... quando ele é aberto, ele não é. Quando ele é uma coisa aberta assim, ele não é polígono não.
Professor:	Você concorda com ele Luigi?
Luigi:	Como está assim [*aberto*], não é não.
Manolo:	Só quando é fechado é um polígono.
Professor:	Fecha lá de novo. E ai agora?
Manolo:	Quando está fecha do, ai é um polígono.
Professor:	O primeiro é um polígono?
Manolo:	O primeiro é um polígono. O segundo é um polígono também. Não!
Professor:	É ou não é?
Manolo:	O segundo, ele não é um polígono, porque ele é aberto. E o terceiro, ele é polígono.
Professor:	Tem diferença entre o primeiro e o terceiro? Olhe ai!
Manolo:	O primeiro, ele é assim ... uma forma mais reta. Ele tem mais retas, é uma coisa assim mais certa. E a segunda é que as retas delas são diferentes. Umas são maiores outras menores...
Professor:	A segunda que você fala é a daqui ou a de cá?
Manolo:	A terceira.
Professor:	E você Luigi, concorda? Vê mais alguma diferença?
Luigi:	Hum hum. E esse daqui tem mais. Esse tem cinco esse tem seis.

Esse diálogo deixa evidente que estes alunos já havia estudando sobre polígonos, pois até reconhecem que a primeira construção é um polígono de seis lados e informam seu nome. Também é possível notar que o GeoGebra, quando manipulado, levou Manolo a mudar sua opinião sobre a natureza das figuras. Vemos que a Técnica denominada Análise emergem no processo juntamente com a $S\tau_3$, Deslocamento de Verificação (ver Quadro 2.2 na página 50), para investigar a conjectura de que todos os lados da segunda construção são segmentos de retas. No entanto, quando ele manipulou a segunda construção e percebeu que esta possuía um dos seus “lados” curvo, o que o levou de imediato a reformular sua resposta.

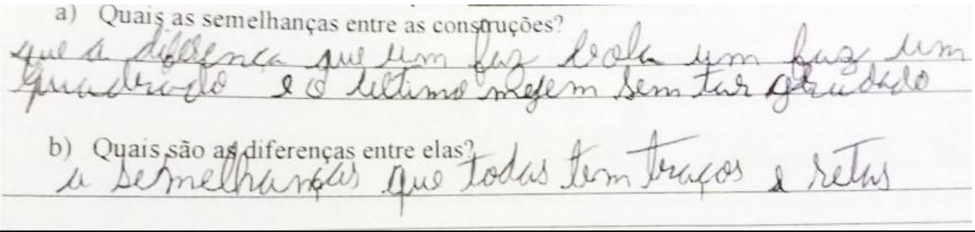
Temos assim que, este estudante elaborou uma hipótese sobre a natureza das construções, baseada em seus conhecimentos prévios sobre polígonos, então ele entrou em uma situação de ação, cuja retroação do meio (GeoGebra) provocou a derrubada de sua hipótese inicial ao revelar características antes não percebidas. Isso, o levou a iniciar uma nova situação de formulação, na qual ele elaborou um modelo explícito que excluía a segunda construção da classe dos polígonos. Esse foi um efeito em cadeia, que o levou também a questionar sobre se a terceira também era um polígono ou não.

Com o intuito de validar sua primeira hipótese – que a terceira construção é um polígono – ele moveu um dos pontos, dando-lhe uma configuração fechada, diferente da original, pois dessa forma ele estaria correto. Além dessa tentativa de confirmação, podemos inferir dessa ação que eles têm conhecimento de que um polígono é uma linha fechada. E essa inferência é posteriormente confirmada pela fala de Manolo. Nesse contexto, o fato da Sequência Didática ter sido construída tendo como ferramenta principal o GeoGebra, permitiu que os alunos expressassem seus conhecimentos por meio da *ação sobre a construção*.

Processo semelhante é observado na fala de Luigi, que ao comentar sobre a segunda figura afirma que esta seria um polígono, caso fosse mantida sua forma inicial. Com respeito à terceira construção, Manolo e Luigi transpõem seus conhecimentos desenvolvidos no ambiente papel-e-lápis e afirmam categoricamente que, se a figura é disposta de forma fechada, ela é um polígono, mas se aberta, não o é. É como se eles analisassem um filme quadro a quadro, ou seja, para eles, o desenho dinâmico não tem propriedades que devem resistir a manipulação, as propriedades que valem são aquelas que podem ser observadas naquele instante. Assim, temos que, o trabalho persistente (e exclusivamente) com desenhos estáticos é capaz de modificar a interpretação de desenhos dinâmicos.

É possível notar também que Luigi e Manolo entram em uma situação de validação, quando eles expõem para o professor o que os motiva a dizer se uma figura é um polígono ou não. Os principais argumentos que eles utilizaram foram: é fechado; é aberto; possuem ou não possuem linhas arredondadas. Essas foram justamente as características que desejávamos, e previmos na análise *a priori*, que surgisse. Nesse momento, paira a dúvida: será que estes estudantes teriam identificado essas características caso não tivessem estudado sobre polígonos em um momento anterior? A resposta para essa pergunta é sim, e pode ser comprovada pelo registro, conforme exposto na Figura 4.26, de uma das duplas que participaram do teste piloto

Figura 4.26 – Resposta apresentada por uma dupla participante do teste piloto para a Atividade 6


a) Quais as semelhanças entre as construções?
que a diferença que um faz bola um faz um quadrado e o último mexem sem tar grudado
b) Quais são as diferenças entre elas?
a semelhanças que todas tem traços e retas

a) Que a diferença que um faz bola um faz um quadrado e o último mexe sem estar grudado.
b) A semelhança é que todos têm traços e retas.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Os estudantes se equivocaram na hora de escrever, e registraram as diferenças no item (a) e as semelhanças no (b). Contudo, é possível notar que incluíram na lista das diferenças o lado arredondado ("bola") da segunda figura e, a abertura da terceira figura, que foi registrado como "sem estar grudado". Estes alunos, no momento da aplicação deste teste piloto ainda não tinham passado por um processo de estudo sobre polígono no presente ano letivo.

Logo após o diálogo exposto anteriormente, Manolo e Luigi iniciaram o registro de suas respostas e gastaram um tempo significativo nesse processo. Sendo assim, decidimos colocar nossa estratégia em prática no momento da resolução do item (c), e solicitamos que eles simplesmente falassem a resposta, conforme o trecho transcrito a seguir:

Manolo:	Que a primeira figura é um hexágono, que é uma figura que ela tem retas, ela tem semirretas, também. Ela é uma figura plana, que é a face. A segunda figura é uma esfera meio aberta, que pode medir um ângulo onde está aberto. E que ela não é um polígono. A terceira figura, ela é um polígono. Ela tem... um, dois, três, quatro, cinco...ela tem cinco retas e é uma figura poligonal
Professor:	E tu [*Luigi*], como você descreveria as figuras?
Luigi:	Que a primeira é um hexágono, que é também de uma região plana. E a segunda figura é de uma esfera, só que um pouco mais aberta, e tem um ângulo nessa abertura. E a terceira, é um polígono, mas só que é um pentágono e quando aberta ela deixa de ser um pentágono, por causa de que ela fica um pouco aberta, a região dela

É possível notar que eles retomaram tudo que já haviam dito durante toda a resolução da Atividade 6. Porém, o que eles procuram fazer na verdade é uma classificação, em lugar de uma descrição, por isso procuram lembrar os nomes: hexágono. Nota-se na fala desses alunos que, eles se lembram de muitas características dos polígonos, contudo, são incapazes de reconhecer a terceira figura como uma linha poligonal. De fato, durante a análise do livro didático, vemos que o conceito de linha poligonal é evocado no início do processo de construção da definição de polígono, e em seguida é deixada de lado, ou seja, não é empregada em nenhuma situação. Acreditamos que este seja o motivo do esquecimento deste conceito e o foco dado aos polígonos.

ATIVIDADE 7

Investigue as construções presentes no arquivo ATIVIDADE 7 do GeoGebra.

a) Se você fosse separar em dois grupos, como você separaria?
b) Quais características você usou para agrupar as construções?
c) Apague as figuras do grupo menor. Se você fosse separar o grupo maior em dois grupos, como você separaria?
d) Quais características você usou para agrupar as construções?
e) Apague novamente as figuras do grupo menor. Se você fosse separar o grupo maior em dois grupos, como você separaria?
f) Quais características você usou para agrupar as construções?

Acessar pelo navegador: https://ggbm.at/nyfr8sgq
Baixar: https://www.dropbox.com/s/k302p9bsrps2eaa/ATIVIDADE%207.ggb?dl=0

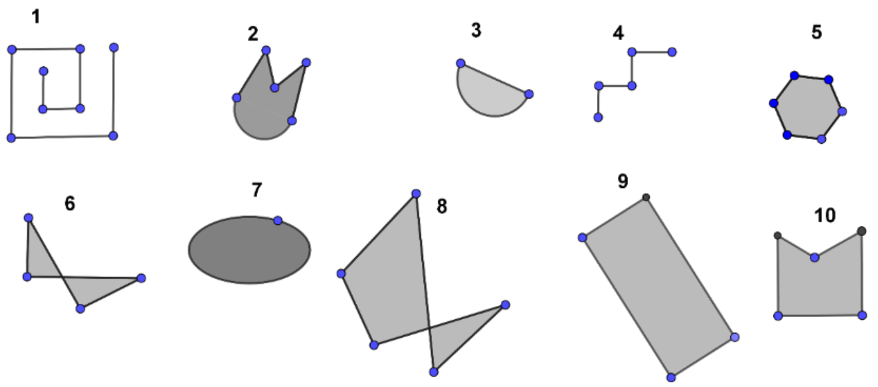
Análise *a priori*:

Essa atividade teve por objetivo favorecer que os alunos construam a definição de polígono, por meio da classificação e descrição de características das figuras. Para que este objetivo fosse alcançado, foram atribuídos valores diferentes às mesmas variáveis da Atividade 6, **linha** e **região**. A primeira variável recebe quatro valores a mais do que na atividade anterior, além de **reta** ou **curva**, há também os valores **simples**, **não simples, abertas** e **fechadas**. Enquanto que à variável região foram atribuídos os valores **com região** e **sem região**. A partir das características assumidas pela Atividade 7 ao atribuirmos estes valores às variáveis didáticas e pelos resultados das ações dos estudantes, pretendíamos, para o momento da institucionalização descrever o formato das construções de cada grupo e institucionalizar a definição de polígono como "Uma linha poligonal fechada e simples com sua região interna é um polígono." (GAY, 2004, p. 240).

Podemos afirmar que esta é a principal atividade da sequência, pois é dela que deve emergir as características dos polígonos que serão utilizadas na construção de sua definição durante a situação de institucionalização. É bem verdade que essas característica já emergiram na Atividade 6, mas aqui será o momento de os alunos aplicá-las estas características para criarem um grupo de figuras que contenham apenas polígonos. Em conformidade com a Análise Institucional realizada, tanto os documentos quanto o livro didático apresentam o Gênero de Tarefa "*classificar*" como crucial no processo de construção da definição de polígono. Esse gênero foi transposto para a Atividade 7 como "*separar*", pois acreditamos que este seja mais compreensível para os alunos. Assim, pedimos para que os alunos separassem as figuras presentes em um arquivo do GeoGebra em grupos.

No referido arquivo, constam dez figuras geométricas planas, sendo: a primeira uma linha poligonal aberta disposta em forma de espiral; a segunda uma poligonal unida aos extremos de um semicírculo; a terceira um semicírculo; a quarta uma linha poligonal disposta em forma de escada; a quinta um hexágono regular; a sexta uma linha poligonal fechada não-simples formada por quatro segmentos de reta; a sétima uma elipse; a oitava uma linha poligonal fechada não-simples formada por cinco segmentos de reta; a nona uma região retangular; a décima um pentágono não-convexo. Essas dez figuras estavam dispostas como se pode ver na Figura 4.27.

Figura 4.27 – Arquivo do GeoGebra utilizado na Atividade 7 da Sequência Didática



Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesse contexto, a situação de ação é iniciada quando os estudantes começam a manipular estas figuras a fim de identificar suas características. O fato deles terem entrado em contato na Atividade 6 com uma figura que possuía uma curva como uma de suas linhas da fronteira, mas que estava disposta de tal forma que aparentava ser reta, isso os levaria a não se aterem aos desenhos como se eles fossem estáticos.

O item (a), assim como o (c) e o (e), determinam que sejam formados apenas dois grupos. Existe na verdade, uma repetição da mesma pergunta até que os alunos construam um grupo formado apenas com polígonos. É possível que os alunos tenham uma má interpretação do enunciado do item (a) e considerem que têm que formar grupos contendo duas figuras, ou mesmo dois grupos com a mesma quantidade de figuras, o que claramente é efeito de um contrato didático pré-estabelecido, uma analogia frequentemente utilizada no ensino da divisão. Diante disso, excetuando a má interpretação, que deve ser esclarecida pelo docente e realizada uma nova devolução, esperávamos pela seguinte resposta:

- **Possível resposta 1**: no item (a) {1,4,5,6,8, 9, 10} formados apenas por segmentos de retas, {2, 3, 7} formados por linhas retas e curvas; no item (c) {5, 6, 8, 9, 10} figuras planas fechadas, {1, 4} linhas abertas; no item (e) {5, 9, 10} polígonos, {6, 8} poligonais entrecruzadas.
- **Possível resposta 2:** no item (a) {1, 4} são linhas abertas, {2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10} são linhas fechadas; no item (c) {2, 3, 7} tem um lado curvo, {5, 6, 8, 9, 10} contorno formado apenas por segmentos de reta; item (e) {6, 8} possuem lados que se cruzam, {5, 9, 10} polígonos;

A partir desses resultados, nos itens (b), (d) e (f) os alunos seriam levados a escrever as características mínimas que cada figura deve gozar para que possa ser incluído em cada grupo, com isso, ao escreverem as características do subconjunto {5, 9, 10} eles estariam escrevendo uma definição para o polígono, a qual será discutida durante a situação de institucionalização.

Desse momento em diante, as atividade se voltam para consolidação da definição do polígono por meio da identificação de suas características e a construção de Técnica para a identificação de uma figura plana com sendo polígono ou não. Assim, a Atividade 8 forma com a Atividade 7 uma única Situação Didática, em que na Atividade 7 os alunos vivenciam a situação de ação e de formulação, enquanto que na Atividade 8 ocorrerá as situações de validação e uma institucionalização geral sobre polígonos.

Antes de passarmos para a análise *a posteriori*, julgamos pertinente ressaltar a importância de termos realizado um teste piloto antes da aplicação dessa Sequência Didática. Nas Atividades anteriores, realizamos apenas pequenas correções, trocas de palavras, nada que seja relevante destacar. Contudo na Atividade 7, os ajustes baseados nos resultados observados no teste piloto foram mais relevantes. Para começar o número de itens foi aumentado de dois para seis. É verdade que os itens (c), (d), (e) e (f) são repetições dos itens (a) e (b), porém isso se deve ao fato de que, no teste piloto, o professor teve que repetir as questões dos dois primeiros itens até que os alunos conseguissem construir um grupo de figuras que só contivesse polígonos. Sendo assim, para dar mais autonomia para os alunos no processo de resolução, decidimos acrescentar os itens (c), (d), (e) e (f).

Essas modificações decorrentes do teste piloto se estendem ao arquivo do GeoGebra utilizado nessa Atividade. Também foram acrescentadas as construções geométricas 6 e 8 (Ver Figura 4.27). O principal intuito dessa inclusão, é de adequar o que seria observado pelos alunos à definição de polígono adotada pelo livro didático e por essa pesquisa, na qual a linha poligonal que forma o polígono não pode se cruzar. O resultado da aplicação da Atividade 7 com essas modificações pode ser vista a seguir.

Análise *a posteriori*:

O processo implementação da Atividade 7 durou, aproximadamente, 35 minutos. No início desse processo, Manolo interpreta o enunciado do item (a) como se ele tivesse que dividir a figura ao meio, depois ele classifica a primeira figura com não-poligonal. O professor sente a necessidade de efetuar nova devolução da atividade, pois o aluno estava se distanciando muito do que era solicitado. Não é porque a aprendizagem ocorre por meio da ação autónoma do aluno sobre o meio que o professor não deva intervir, pelo contrário, o professor tem a função de prezar pelo bom andamento do processo de ensino e aprendizagem. Por assim ser, o professor interviu no que Manolo estava fazendo e, após a intervenção do professor, ele entendeu que deveria criar grupos. Porém, Manolo e Luigi, pensaram que deveriam formar grupos contendo duas figuras, em vez de dois grupos.

Professor: E você, Luigi?
Luigi: Esse número 2 eu juntava com esse 3 por causa desse... tem essa metade aqui [*aponta para a parte curvada das figuras 2 e 3*], que é igual a essa.
Professor: Juntava com mais quem, Luigi? E com mais alguma você iria juntar?
...
Luigi: Com a 6.
Professor: Por que?
Luigi: Por causa da parte de cima também.
Professor: E ai, você colocaria a 2, a 3 e a 6 de um lado, e as outras você colocaria do outro lado?
Luigi: Não.
Professor: Só podem ser dois grupos.
Manolo: Eu juntaria número 1 com número quatro. E eu juntaria número 3 com número 6
Professor: Não. É assim ... Imagine que vocês só tem duas cestas, e vocês têm essas figuras ai na mão. E vocês só vão poder colocar nesses dois lugares. O que vocês fariam? Quais vocês jogariam aqui [*desenha um cesto em uma folha*], e quais vocês jogariam aqui [*desenha outro cesto*]? Baseado nas características dela.

Nem no enunciado da questão, nem na fala do professor, foi mencionado que os alunos deveriam formar pares. Acreditamos que este fenômeno emerge do trabalho que é realizado no estudo da aritmética, mais precisamente do ensino da divisão. Para tentar contornar este dificuldade, o professor teve que usar a analogia com cestas para os alunos entenderem o que tinham que fazer. Isso não se caracteriza como uso excessivo da analogia (BROUSSEAU, 2008; ALMOULOUD, 2007), pois não desvia a atenção dos alunos das informações dadas pela Atividade, tampouco visa auxiliá-los na memorização de alguma informação sobre o objeto matemático em estudo. O emprego da analogia, nesse caso, foi para esclarecer o que realmente lhes era solicitado, e de fato surtiu esse efeito, como é possível notar na continuação do diálogo a seguir.

Manolo: Eu jogaria o número 6 com o número 3 aqui.
Professor: E você diria que essa cesta aqui, é a cesta que você está colocando o que dentro?
Manolo: As figuras.
Professor: Mas as figuras que tem o que?
Manolo: A aparência igual.
Professor: Aparência igual? E elas têm o que de aparência igual? Porque você falou que colocaria a 3 aqui. A 3 tem o que de aparência igual com a 6?
Manolo: Se eu juntar a 3 com a 6 fica igual... ela vai ficar mais ou menos igual a essa daqui.

Aqui Manolo emprega uma estratégia para formação dos grupos que não previmos na análise a priori. Ele utiliza a composição de figuras planas, ou seja, ele tenta reunir duas regiões para formar uma que se assemelhe a outra presente no Arquivo 7 (ver Figura 4.27). Esse comportamento também foi observado em duas duplas participantes do teste piloto da sequência, eles juntavam a figura durante a situação de ação, ou seja, enquanto exploravam as construções, contudo não utilizaram a composição de figuras como estratégia de agrupamento. É natural que, diante da possibilidade de manipular as figuras, os estudantes tentem formar novas, principalmente se lhes forem familiares, a partir da junção das que têm ao seu alcance.

O GeoGebra, enquanto constituinte do meio, oferece muitas possibilidades de manipulação das construções e uma gama elevada de característica que podem emergir dessas manipulações, as quais podem levar os alunos a caminhos que divergem do conhecimento desejado. Realizar essas diferentes explorações pode contribuir para aguçar o olhar dos estudantes na busca por regularidades, que são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático. Diferir aquilo que é uma mera coincidência – ou que não tem uma intenção didática por trás – daquilo que é realmente uma característica que une todo um conjunto de objetos. Por exemplo, a forma como Luigi realiza o agrupamento das dez figuras da Atividade 7, como se pode ler na transcrição a seguir:

Professor:	Você faria assim Luigi?
Luigi:	Eu não. Nessa eu colocaria a 6, a 8, a 9, a 10, a 5, a 4 e a 1.
Professor:	Por que?
Luigi:	Porque essas daqui parecem muito com polígonos. Essa daqui parece tipo um triângulo. A daqui é um retângulo, é praticamente um quadrilátero. O daqui parece um pentágono. Essas são poligonais, são polígonos que são abertos
Professor:	Aqui você disse que colocaria a 1, a 4, a 5, a 6, a 8, a 9, a 10
Luigi:	E essas daqui são tipo regiões esféricas. Essas partes aqui são tipo a metade de uma esfera

Luigi apresenta a Possível Resposta 1 prevista na análise a priori, baseando-se nos seus conhecimentos prévios sobre polígonos. Mesmo cometendo o erro de afirmar que linhas poligonais abertas são polígonos, ele demonstra ter superado a inclinação pela formação de duplas de figuras e passa a empregar uma propriedade coerente na formação dos grupos. Não dissemos que é coerente simplesmente por coincidir com uma das que previmos, mas sim por que este mesmo aluno havia demonstrado durante a resolução da Atividade 6 que sabia que os polígonos são regiões delimitadas por segmentos de retas. Assim, é o emprego do conhecimento prévio que é aplicado no momento de validação, ou seja, quando ele explica para o professor porque as figuras 1, 4, 5, 6, 8, 9 e 10 compõem um dos grupos, que nos leva a afirmar que a resposta dele é coerente.

Mesmo diante das argumentações de Luigi, Manolo discorda, em partes, da forma como as figuras foram agrupadas. Podemos acompanhar a contra-argumentação de Manolo no diálogo transcrito a seguir:

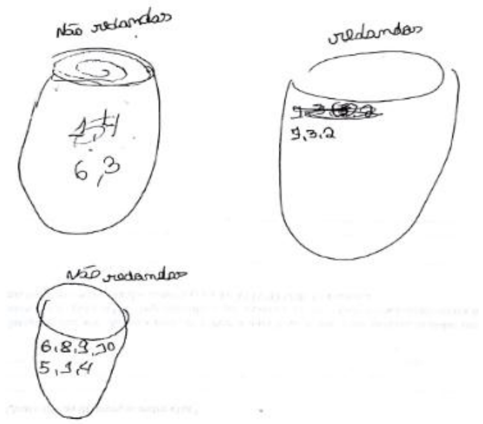
Professor:	Você concorda com o que Luigi falou?
Manolo:	Eu só não concordo o número 4 porque ele não é uma figura poligonal, que ele é aberto.
Professor:	Mas ele falou assim: Coisas redondas e coisa não redondas. E ai? Se fosse pensar em coisas redondas e coisas não redondas, você concorda com ele ou não?

Manolo: Concordaria. Eu só não concordaria com o número 4 e número 1.
Professor: Mas para você o número 4 é uma coisa redonda ou não redonda?
Manolo: É não redonda.

Nota-se que Manolo considera a necessidade de se acrescentar uma propriedade para formação inicial desses grupos. Ele destaca o fato de que as figuras 1 e 4 são abertas e, por isso, diferenciam-se das outras que Luigi incluiu no grupo. Diante disso, o professor teve que retomar qual a propriedade que estava sendo utilizada naquele momento para realizar o agrupamento, mas Manolo, mesmo concordando, insiste em retirar duas figuras do grupo.

Essa retirada, evidencia uma tendência em formar grupos com quantidades iguais de figuras. Para esse aluno, devido ao contrato didático, que ele é signatário desde o começo da escolarização, os gêneros de tarefa “dividir”, “separar” e “agrupar” fazem referência a criar dois conjuntos com quantidades iguais de elementos, a menos que se solicite o contrário. Mas após o professor explicar que os conjuntos não tinham que ter necessariamente a mesma quantidade, ele concordou com essa classificação e registrou a resposta conforme a Figura 4.28.

Figura 4.28 – Resposta apresentada por Manolo e Luigi para o item (a) da Atividade 7



Fonte: Dados da Pesquisa.

No cesto correspondente ao grupo dos *redondos*, encontra-se rasurado uma resposta que incluía a figura 5 nesse grupo. Para muitos estudantes, que participaram tanto do teste piloto, quanto da implementação, o hexágono regular era visto como uma figura arredondada.

Como previsto na Possível Resposta 1, os alunos utilizaram a característica fechada e aberta para classificar as figuras do cesto *não redondos*. Segundo Manolo, as figura 1, 4, 6 e 8 deveriam compor o grupo das *figuras abertas*, e as figuras 5, 9 e 10 formavam as *fechadas*. Com respeito ao primeiro grupo, esse aluno argumenta que:

Manolo: Mesmo que ela não tenha essa abertura, ela é meio aberta.

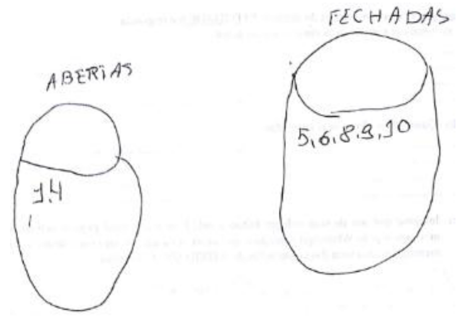
O fato das figuras 6 e 8 possuírem lados que se cruzavam levou este aluno a classificá-las como abertas. Ele reconhece que estas duas figuras, assim com a 1 e a 4 são diferentes das demais. Luigi discorda dessa argumentação de Manolo, e diz:

Luigi: Tem umas que são abertas, mas tem umas que estão mais fechadas, os lados delas se cruzam, só que fechadas.

Nota-se que nessa situação de validação o argumento de Manolo estava fragilizado, pois ele não sabia explicar o real motivo da inclusão das figuras 6 e 8 no grupo dos abertos, o que ocorreu é que ele não soube como descrever o cruzamento dos lados dessas figuras. Ao contrário, Luigi reconhece e descreve o cruzamento dos lados em seu argumento, convencendo Manolo a mudar sua resposta. É possível afirmar que faltava a Manolo um repertório, um vocabulário geométrico, que lhe permitisse descrever o que via. Um dos fatores que podem levar os alunos a desenvolverem esse repertório de características é submetê-los, durante o processo de ensino e aprendizagem, a observação e descrição de diferentes objetos, e se possível, as diferentes representações do mesmo objeto. O dinamismo do GeoGebra pode favorecer essa necessidade de submeter o aluno a diferentes figuras por meio da manipulação das construções realizadas nele.

Esse papel do *software* de geometria dinâmica é usado na sequência, pois Manolo aceita o argumento de Luigi e o professor ensina a como verificar se uma figura é aberta ou fechada seguindo os vértices com os dedos. Depois, o professor sugere que eles manipulem as figuras 6 e 8 para verificar se de fato são fechadas, e eles comprovam que são fechadas ao desfazerem o cruzamento dos lados e chegam na resposta registrada na Figura 4.29.

Figura 4.29 – Resposta apresentada por Manolo e Luigi para o item (c) da Atividade 7

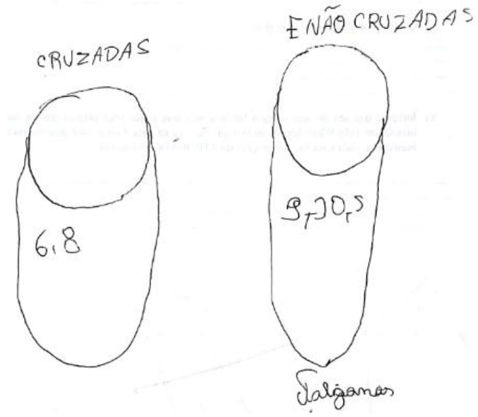


Fonte: Dados da Pesquisa.

Assim, mais uma vez os alunos aplicam a $s\tau_3$ (ver Quadro 2.2 na página 50), para verificação da conjectura de Luigi sobre a abertura das figuras 6 e 8. Ao efetuarem o deslocamento, verificarem que a região permanecia colorida e, principalmente, que não conseguiam deslocar os vértices de modo semelhante ao que faziam com a terceira figura da Atividade 6, eles se convenceram de que se tratava de figuras fechadas. O efeito visual que comprovou essa propriedade (ser fechada) das figuras foi a resistência ao movimento.

No item (e) Luigi sugere que sejam feitos dois grupos, um denominado poligonais fechados (6 e 8) e outro polígonos (5, 9 e 10), mas o professor questiona se o grupo dos polígonos também não são fechados e por que eles separaram nesses dois grupos. Manolo afirma que o primeiro grupo foi formado, pois as figuras “são triangulares”. Os dois alunos observaram que quando dois lados se cruzavam, sempre formava triângulos, então, como triângulos são figuras mais comuns para eles, em vez de falarem sobre o cruzamento dos lados, a propriedade mais marcante para caracterização do primeiro grupo era ser composto por pelo menos um triângulo. As formas que são mais familiares aos alunos predominam sobre as demais características, chegando a substituir, momentaneamente, o cruzamento dos lados, que foi tão explorado na resolução do item (c).

Figura 4.30 – Resposta apresentada por Manolo e Luigi para o item (e) da Atividade 7



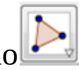
Fonte: Dados da Pesquisa.

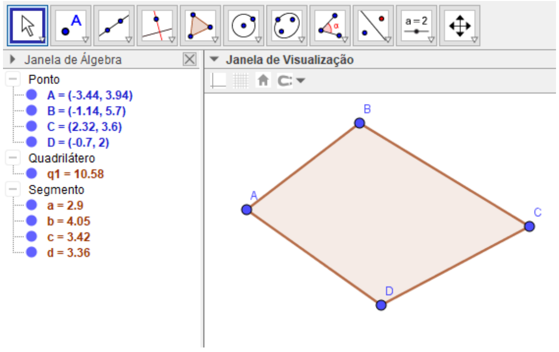
O professor institucionaliza uma definição alternativa para polígono ao listar características que essas figuras planas não gozam e que foram verificadas até o presente momento do processo de estudo:

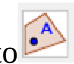
Professor:	Então vocês já viram que para ser polígono não pode ser circular, não é isso? Não pode ser o que mais?
Luigi:	O cruzamento também não pode ter.
Professor:	Não pode ser o que mais?
Luigi:	Não pode ser aberto.

O professor institucionalizou que polígono é uma figura cujos lados são segmentos, e cria uma espécie de lista de verificações para identificar se uma figura plana é ou não um polígono. Essa na verdade é uma ação que se faz naturalmente. A definição é uma forma de se expressar, de forma articulada e coerente, as principais propriedades de um objeto matemático. Porém, a “aplicação” da definição se dá por suas partes, ou seja, observa-se se o objeto analisado goza das propriedades uma a uma da forma que está descrita na definição. Supomos que com essa lista de verificação, os alunos seriam capazes de dizer se uma figura plana que lhes é apresentada é ou não um polígono. E é justamente esse reconhecimento que é solicitado na Atividade 8.

ATIVIDADE 8

Rigoberta criou os quatro pontos A, B, C e D no plano, selecionou a Ferramenta Polígono  e clicou nesses pontos na seguinte sequência: A, B, C, D e A. Assim, ela obteve a construção abaixo:



a) Essa figura é um polígono? Justifique com base nas características estudadas na Atividade 7.
b) E se a sequência de pontos fosse A, B, D, C, A, formaria um polígono? Justifique com base nas características estudadas na Atividade 7.
c) Você deve ter notado que o GeoGebra colore uma parte do plano quando construímos um polígono. Crie pontos no plano e construa um polígono. Use a ferramenta Ponto Sobre Objeto  para criar um ponto sobre o polígono. Movimente esse ponto. O que você pode observar?
d) Você consegue arrastar esse ponto para a região exterior ao polígono (branca do plano)? Por que isso acontece?
e) Selecione a ferramenta Ângulo  e clique na região colorida. O que você pode observar?

Análise *a priori*:

Nessa atividade buscamos que os alunos se apropriassem ainda mais da definição de polígono, para isso, traçamos cinco objetivos. O primeiro deles, aplicar as técnicas de reconhecimento de um polígono no ambiente dinâmico do GeoGebra, que é o elo de ligação da Atividade 8 com a Atividade 7. A partir disso, adentramos no objeto matemático em estudo, ao buscarmos que os alunos viessem a entender como se dá a notação de polígono, reconhecer os principais elementos de um polígono e identificar os ângulos internos de um polígono. Por último, esta atividade objetivava desenvolver a noção de ponto sobre objeto (especificamente, sobre polígono).

Para esses fins, foi identificada a variável didática **ordem dos pontos**, à qual foram atribuídos dois valores: **ABCDA**, que gera um polígono; e **ABDCA**, que não gera um polígono.

Esses valores foram conferidos a esta variável porque dado um conjunto de pontos na Janela de Visualização, é possível, utilizando a ferramenta Polígono, clicar neles em qualquer ordem, porém nem todas as sequências de pontos formarão um polígono. A segunda variável didática posta em jogo foi a **natureza do ponto**, à ela foi atribuído três valores **livre**, **fixo** e **sobre objeto**, esse terceiro valor foi utilizado no item (c) para limitar o movimento do ponto ao polígono, destacando assim que este é composto, também, por uma região.

Ao final desta atividade desejávamos institucionalizar os seguintes itens:

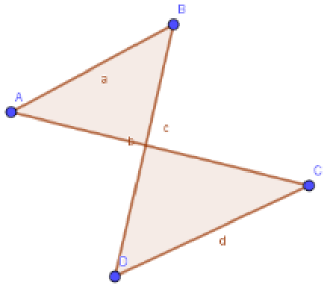
- Que polígono é uma partição do plano. Ou seja, ele determina no plano duas regiões diferentes; ele e o conjunto de pontos que não pertence a ele. Daí a definição: "Uma linha poligonal plana fechada e simples com sua região interna é um **polígono**" (GAY, 2014, p. 240, grifo do autor).
- Notação de polígonos;
- Institucionalizar ângulos internos lados e vértices de um polígono;

A Atividade 8 começa de forma diferente das outras, pois não solicita que os alunos construam, nem que abra um arquivo do GeoGebra contendo uma construção. De fato, os alunos não necessitam realizar uma construção para apresentarem uma resposta ao que lhes é questionado no item (a), uma vez que têm acesso a uma representação estática da figura a ser classificada como polígono ou não. Assim, para responder a esse item os alunos não são obrigados a realizar uma ação "visível", bastando a ele relembrar as características estudadas na Atividade 7 para analisar a figura e, elaborar uma resposta. Dessa forma, espera-se que eles afirmem que a construção realizada por Rigoberta é sim um polígono e que justifiquem essa afirmativa baseando-se no fato de que seu contorno é formado por segmentos de retas dispostos em um "circuito" fechado sem se cruzarem.

Contudo, devido à cláusula do contrato didático que vem sendo negociada desde a primeira atividade, que determina que as respostas a cada item sempre são precedidas de uma manipulação do GeoGebra, é possível que os alunos tentem reproduzir a construção de Rigoberta antes de apresentarem suas respostas. Caso isso realmente ocorra, o próprio enunciado da Atividade 8 dá todas as instruções de como foi realizada a construção, além de apresentar o resultado final. Desse modo, se uma ou mais duplas quiserem realizar a construção, o professor deve permitir que eles o façam, até porque no item (b) é imprescindível que os alunos pelo menos reproduzam os pontos constituintes da construção de Rigoberta.

Ao clicarem na sequência de pontos que o item (b) propõe, os alunos se depararão com uma figura semelhante à apresentada na Figura 4.31.

Figura 4.31 – Figura geométrica plana resultante da construção proposta no item (b)



Fonte: Elaborado pelos autores.

Espera-se que, diante desta figura, os alunos afirmem que não se trata de um polígono e baseiem suas justificativas no fato de que dois dos seus lados se cruzam. Como é entregue apenas uma cópia da atividade para cada dupla, antes que um deles possa escrever a resposta, será necessário que apresente para seu colega essa justificativa ocorrendo assim uma situação de validação. Nessa situação, os alunos podem ou não divergir de opinião sobre a figura, cabendo a cada um apresentar os argumentos validando aquilo que vêm formulando desde a Atividade 7.

Vale destacar que o GeoGebra reconhece a Figura 4.31 como um polígono, ele só impede a construção caso o usuário tente fazer dois lados cruzarem em um dos pontos escolhidos para ser vértice. Por exemplo, se a ordem dos cliques fossem ABCDBA não geraria um polígono. O *software* tem esse comportamento, pois o cruzamento dos lados que pode ser visto na Figura 4.30 não resiste ao deslocamento. O GeoGebra não entende que estes lados sejam cruzados, mas sim que esse cruzamento é decorrente da posição em que os vértices estão naquele instante.

De acordo com os resultados da Análise Institucional, principalmente do livro didático, decidimos adotar uma definição de polígono que exclui as figuras poligonais cujos lados se cruzem. Porém, é sabido que existem obras que incluem regiões planas como a da Figura 4.30 na classe dos polígonos, e há também toda uma teoria matemática sobre os ditos Polígonos Regulares Estrelados, que tem como uma de suas principais características o cruzamento de seus lados.

O item (c) chama a atenção dos estudantes para o que será estudado, a região do plano que compõe o polígono. Esse item deixa livre para cada dupla decidir quantos lados terá o polígono construído, isso com o intuito de que fique evidente que o resultado não se aplica a um caso específico, também para fomentar uma discussão entre os integrantes da dupla. É possível que eles queiram testar com mais de um polígono. Durante a situação de ação, eles movimentarão o ponto pertencente ao polígono criado e notarão que este não sai da região interna ou da "fronteira", e é isso que se deseja que eles formulem e registrem.

O item (d) corrobora para a percepção de que o polígono é uma região destacada do plano. Os alunos notariam que existe a “região branca”, que é a região externa do polígono, e a “região colorida”, que é o próprio polígono. Acreditamos que dificilmente os alunos apresentariam uma justificativa coerente para o fato do ponto criado não poder ser arrastado para região externa ao polígono, pois eles não tiveram ainda um estudo consistente sobre a relação de pertinência e por não terem uma visão consolidada de região plana como um conjunto de pontos. Existe a possibilidade de que o aluno não utilize a ferramenta Ponto sobre Objeto, mas sim a ferramenta Ponto, criando assim um ponto qualquer que pode ser arrastado livremente por toda a Janela de Visualização. O professor deve ficar atento a isso, porque, caso ocorra, pode comprometer o funcionamento dos itens (c) e (d) ao evitar que o fenômeno visual ocorra.

O item (e) é relativamente simples, visa apenas que os alunos observem que os lados dos polígonos formam ângulos entre si. Essa informação poderá ser utilizada pelo docente durante a institucionalização para justificar o nome desse objeto matemático em estudo.

Na situação de institucionalização, o professor deverá explicar que, de cada vértice de um polígono saem somente dois segmentos de reta; e que dois lados de um polígono só se encontram em suas extremidades. Ele também deve falar sobre a notação de polígono, que se dá pela indicação da ordem dos pontos que são seus vértices sem repetições, para isso ele pode retomar a construção de Rigoberta e a do item (b).

Ao final da institucionalização o professor pode solicitar que os estudantes escrevam o que é um polígono, para ver como eles passam a observar outros elementos.

Nesta Atividade, os itens (a) e (b) forma modificados, baseado nos resultados do teste piloto, para chamar a atenção dos alunos para as características observadas ainda na Atividade 7. Além disso, o item (b) teve a ordem dos pontos que os alunos deveria clicar alterada a fim de que os eles tivessem contato com um não-exemplo de polígono, pois esse contato traz também contribuições para o aprendizado de um objeto matemático específico (ZASLAVSKY; SCHIR, 2005), uma vez que o aluno pode estabelecer comparações

Análise *a posteriori*:

Com relação ao questionamento da figura construída por Rigoberta ser um polígono, Manolo justificou da seguinte forma:

Manolo: Porque é fechada.

E Luigi completou, dizendo que:

Luigi: Não é circular, também, e não tem cruzamento.

Essa resposta é apresentada dissociada do uso do GeoGebra e baseada apenas no emprego da lista de verificações institucionalizadas durante a Atividade 7. Os itens dessa lista foram claramente incorporados na técnica de reconhecimento/avaliação de uma figura plana como polígono, e os alunos a empregam tanto em situações em ambientes dinâmicos quanto estáticos, sendo um indício de efetiva aprendizagem, de acordo com a TSD dando respostas novas a situação que antes não dominavam.

Essa lista é novamente utilizada, ainda durante a construção solicitada no item (b), assim que o segmento DB cruzou o AC, Luigi reconheceu que a figura resultante não seria um polígono. O professor pergunta “Formaria um polígono?”, Manolo responde que não e Luigi concorda justificando não ser um polígono porque cruza.

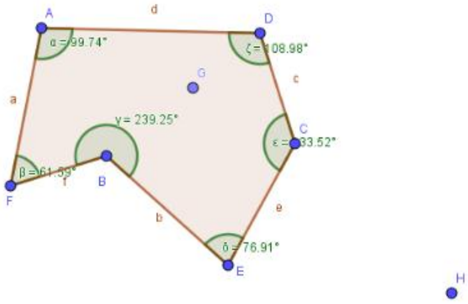
É notório que houve uma mudança na imagem conceitual sobre polígonos dos estudantes, pois eles deixam de chamar de polígono qualquer figura formada por segmentos de reta, como ocorria no início da aplicação da Sequência, e passam a só empregar o termo para denominar aquelas figuras que gozam das três características que compõem a lista de verificação.

Ao finalizar a construção do polígono solicitado no item (c), se deu o diálogo que segue:

Manolo: Não é um polígono, pois tem curva.
Professor: Cadê a curva? Você [*Luigi*] concorda com ele? E se concorda com ele que tem curva, mostra a curva.
Luigi: Eu acho que não tem. Ele é um polígono, porque...
Manolo: É um polígono!
Professor: É ou não um polígono? Ele convenceu você [*Manolo*]? Por que? Vamos lembrar porque ele é um polígono. Ele é o que?
Luigi: Porque ele é fechado, ele não tem cruzamento e não é aberto.
Professor: Não é aberto, não tem cruzamento... E tem curva ai?
Luigi: Não.

Pelo que pode ser observado no contexto da aplicação, a “curva” identificada por Manolo é a parte formada pelos segmentos BF e BE do polígono conforme pode ser visto na Figura 4.32.

Figura 4.32 – Figura geométrica plana resultante da construção proposta no item (c) da Atividade 8



Fonte: Dados da Pesquisa.

Essa fala de Manolo se deve a que ele, possivelmente, só reconhece uma figura plana como polígono se esta for convexa. Provavelmente a imagem conceitual sobre polígonos desse aluno ainda o permitia reconhecer essa figura como polígono, mas como ele sabia que lhe seria solicitada uma justificativa, ele se antecipa e interpreta, possivelmente, a não convexidade como uma curva. Contudo, ele demonstra não ter muita segurança do que afirmou, pois aceita mudar sua opinião, pautando-se apenas na discordância de Luigi, sem a necessidade da apresentação de qualquer argumento.

O professor percebe que Manolo não reconheceu a figura como polígono, porque ela era não convexa (possivelmente), contudo deixou essa discussão para a próxima Atividade e revisou com os alunos se o polígono da Figura 4.32 realmente cumpria todos os requisitos da lista de verificação. Com esse ocorrido, fica evidente a utilidade de se institucionalizar os conhecimentos construídos em cada situação. Pois, se as características (no formato de lista) de um polígono não tivessem sido discutidas e consolidadas como verdadeiras, provavelmente, o professor teria que ingressar na discussão sobre convexidade, tornando a lista de atributos definidores extensa. Isso geraria uma definição não econômica, pois estaria composta por atributos definidores que poderiam ser deduzidos a partir dos outros.

Manolo finaliza a construção (da Figura 4.32, sem os ângulos) criando o ponto G sobre o polígono e inicia uma situação de ação manipulando o ponto criado. Essa manipulação leva Manolo a observar que o ponto "não pode sair do polígono". O professor não valida o que foi dito por Manolo, pelo contrário, incentiva que Luigi também explore a construção e decida se concorda ou não com a informação formulada por Manolo. Essa postura do professor, se deve a dois fatores: primeiro, a aprendizagem ocorre pela interação do aprendiz com o meio, assim, fazia-se necessário que Luigi agisse e tirasse suas próprias conclusões; segundo, a sequência da atividade requeria uma justificativa sobre o comportamento do ponto G, para isso, todos os alunos deveriam explorar a construção para terem elementos para formular uma resposta pessoal.

Essas interpretações sobre a retroação do GeoGebra à tentativa de retirar o ponto G de sobre o polígono é apresentada ao item (d) conforme a transcrição a seguir:

Professor: Por que você acha que não consegue fazer isso [*arrastar o ponto para parte branca*]?
Manolo: Porque se fosse aberta, conseguiria, mas ela é fechada.
Professor: E tu concordas com ele?
Luigi: Hum, hum! Porque esse polígono é fechado.
Professor: E esse ponto, você lembra como ele foi criado?
Luigi: Eu estava pensando nisso... Ele foi criado em cima do objeto.
Professor: E sobre qual objeto foi que você criou ele?
Luigi: O polígono.

Vemos nesse trecho dois vieses de justificativa para a restrição do movimento do ponto G: o viés da matemática e o da tecnologia. Manolo apresenta uma justificativa matemática ao evocar um atributo definidor dos polígonos (é uma linha poligonal fechada). Evidencia-se assim, que ele não utiliza a noção de pertencimento do ponto ao polígono, mas sim que o fato da linha poligonal ser fechada é o que impede a "saída" do ponto.

Não é possível afirmar com precisão, mas Luigi, após concordar com Manolo e ser questionado pelo professor, parece compreender que o ponto G pertence ao polígono. Ele interpreta as ações realizadas durante a criação do ponto usando uma ferramenta do GeoGebra e a exigência de que o ponto fosse criado sobre o objeto. A partir disso, ele percebe que esse ponto é especial no sentido de que foi criado e deve permanecer sobre o polígono.

Diante dessa resposta de Luigi, que se fundamenta nas características peculiares do meio utilizado (GeoGebra), o professor propôs que utilizassem a ferramenta Ponto e criassem um ponto qualquer (ponto H da Figura 4.32) na janela de visualização. Pediu que movimentassem e observassem o comportamento desse novo ponto. Assim os alunos perceberam que conseguiam colocar ele em qualquer lugar. Como podemos perceber nas falas de Manolo e Luigi:

Manolo: Aquele que a gente criou foi criado no próprio objeto mesmo.
Luigi: Para não ultrapassar o objeto.

Essas explorações realizadas pelos alunos tanto com o ponto sobre o polígono quanto o ponto qualquer do plano, só foi possível graças as características do GeoGebra, cuja ferramenta Ponto Sobre Objeto possibilita a exploração de diferentes lugares geométricos. Essa ferramenta, associada à sub-técnica $s\tau_2$(deslocamento de exploração, ver Quadro 2.2 na página 50), permitiu ampliar as observações dos alunos sobre os polígonos para além da linha poligonal. Essas escolhas didáticas têm o potencial de levar a compreensão do polígono como um lugar geométrico não restrito ao seu contorno, mas abrangendo também toda uma partição do plano.

Além disso, o GeoGebra tem outras funcionalidades que geram fenômenos visuais, por exemplo, o efeito de clicar sobre um polígono com a ferramenta Ângulo selecionada, o que provoca a medição de todos os ângulos internos instantaneamente. Essa ação foi proposta aos alunos no item (e), a partir da qual eles realizaram observações sobre a retroação do meio. Manolo, por exemplo, observou as medidas dos ângulos, enquanto que Luigi observou que "essa ferramenta [*Ângulo*] serve para criar os ângulos". Então o professor inicia a institucionalização geral sobre os elementos e a definição de polígono, vejamos o diálogo:

Professor: De certa forma o que vocês observaram foi que a união desses dois lados formam ângulos. Aí tem os vértices, que são os pontos, tirando esse daqui [*o ponto G criado sobre objeto*], claro, que ele não é um vértice, ele é um ponto qualquer do polígono. Os polígonos têm os vértices, ele tem os lados, que são os segmentos, e esses segmentos formam entre si ângulos. Como esses ângulos estão aqui no interior do polígono, eles são ditos ângulos internos do polígono. Entenderam? Esses são os elementos principais do polígono.
Agora vocês já sabem o que é um polígono, não é? Para não esquecer mais nunca. O que é mesmo que ele tem que ter par ser um polígono?

Luigi: Ele tem que ser uma área que não pode ser aberta, não pode ter cruzamento e não pode ser circular.

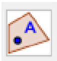
Luigi revela ter assimilado o conceito de polígono como região, ao empregar a expressão "é uma área". Mesmo que o uso desse termo, área, seja empregado equivocadamente, pois consiste em uma medida, mas Luigi o aplica como se fosse sinônimo de região. Atribuímos esse fato à exploração proposta nessa Atividade 8, pois até meados dela os estudantes se referiam a polígonos exclusivamente sobre seu contorno.

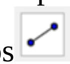
Essa definição apresentada por Luigi pode ser classificada como uma alternativa, pois diverge da que é comumente apresentada nos livros que foram analisados na Seção 4.2 deste capítulo, além de estar construída pautada na negação de propriedades. Não é possível discernir com precisão se essa é uma definição hierárquica ou partitiva. Contudo, o fato do aluno utilizar a negação, nos conduz a ideia de que ele está excluindo as linhas poligonais abertas e as fechadas que tem segmentos que se cruzam. Essas características são diferentes da definição identificada nos livros de geometria usados no nível superior e que foram analisados, os quais apresentam polígono como um subconjunto das linhas poligonais.

Outra característica que podemos observar nessa definição é a economia, pois nenhum dos atributos definidores utilizados, pode ser deduzido a partir dos outros. Contudo, atribuímos o fato dessa definição apresentada ser econômica a dois fatores: primeiro, o professor durante a Atividade 7deu-se por satisfeito quando os alunos falaram os três atributos que compunham a lista de verificação; segundo, que a Atividade 7 não permitia que os alunos deduzissem mais características dos polígonos.

Dada a organização do sistema de ensino brasileiro em uma quantidade de anos letivos limitados, e com dias letivos também demarcados temporalmente, o tempo gasto para realização de uma atividade é um fator relevante. Por assim ser, decidimos verificar, a partir na Atividade 6, os efeitos de solicitar uma resposta escrita aos alunos sobre o tempo da aula. Assim, se não for solicitado um registro escrito dos alunos, o tempo de aplicação dessa Atividade 8 é de aproximadamente 13 minutos, contra quase 30 minutos da aplicação do teste piloto. Nós tivemos a impressão de que respostas apresentadas verbalmente contribuem para redução do tempo necessário para aplicação e, despreocupado de requerer um registro escrito, o professor tem mais tempo para fomentar discussões entre as duplas de alunos. Porém, novamente ressaltamos a importância de que os alunos sejam incentivados a escrever nas aulas de matemática, e que essa opção nossa decorre do pouco tempo que tinham disponível para implementação. Essa mesma estratégia continua sendo empregada na implementação da Atividade 9, que é analisada a seguir.

ATIVIDADE 9

Observe a construção do arquivo ATIVIDADE 9. Utilizando a ferramenta Ponto em Objeto , e crie dois pontos F e G sobre o Polígono 1, e mais dois pontos, H e I, sobre o Polígono 2.

a) Os pontos F, G, H e I pertencem ao polígono ou são livres no plano? Justifique.
b) Trace os segmentos  FG e HI, movimente os pontos por todo o polígono ao qual pertencem.
c) Descreva o que acontece com o segmento FG em relação ao Polígono 1.
d) Descreva o que acontece com o segmento HI em relação ao Polígono 2.
e) O que você pode observar de diferente em cada situação?

Acessar pelo navegador: https://ggbm.at/yyupwwnt

Baixar: https://www.dropbox.com/s/1ueytikf0wu0tm5/ATIVIDADE%209.ggb?dl=0

Análise *a priori*:

Essa atividade tem duplo objetivo. O primeiro deles é construir as definições de polígonos convexos e não convexos, demonstrado nossa preocupação com que o aluno aprenda o conceito. Enquanto que o segundo objetivo, desenvolver uma técnica de verificação da convexidade de um polígono em um ambiente dinâmico, está focado no desenvolvimento do saber-fazer no aluno. Para este fim, atribuímos os valores **convexo** e **não convexo** à variável didática **polígono**. Assim, construímos dois polígonos um convexo e outro não que seriam explorados pelos alunos conforme as instruções da Atividade 9. A partir da exploração realizada por eles seríamos capazes de institucionalizar a seguinte definição: Se dados dois pontos pertencente ao polígono, o segmento que os une está sempre contido no polígono, então o polígono é dito convexo, caso contrário, é dito não convexo.

A opção pelo uso da ferramenta Ponto sobre Objeto na atividade anterior, se deve, em parte, por evidenciar ainda mais a existência de duas regiões no plano ao se construir um polígono e por seu potencial de aplicação no reconhecimento da convexidade dos polígonos. Assim, essa Atividade volta-se para o desenvolvimento da Técnica do Segmento Interno para a avaliação da convexidade de um polígono.

A técnica a ser empregada foi escolhida porque seu funcionamento é mais simples de ser compreendido: se, independentemente da posição dos extremos, o segmento está inteiramente contido no polígono, então este é convexo, caso contrário o polígono é não convexo.

Outra opção seria utilizar as retas suportes dos lados e verificar se o polígono sempre fica contido e um dos semiplanos determinado por essas retas, em nosso entendimento poderia acarretar em dificuldade da construção da definição de polígono convexo, sendo necessário dá muitas dicas e incorrem em efeitos indesejáveis de contrato didático. O que acarretaria em um movimento contrário ao que foi identificado por meio da análise do livro didático, que é a concepção de polígono como a união indissociável entre uma linha poligonal fechada e a região delimitada por esta.

Nesse contexto, o item (a) destina-se à verificar se os alunos entenderam o que é um ponto pertencente a um objeto. Enquanto que o item (b) constitui o passo crucial para o desenvolvimento da técnica. O que é feito nesse item é uma derivação do que Acosta Gempeler (2004) chama de enriquecer a figura, pois consiste em destacar um segmento interno a fim de investigar as características da construção.

Toda a situação de ação que o aluno realizaria, nesse momento inicial, para responder ao item (c), ele estaria aplicando a técnica sem saber. Nesse item, espera-se que os alunos formulem uma descrição para o movimento do segmento GH e que afirmem que em nenhum momento ele, ou parte dele, sai do polígono, o segmento está sempre contido no polígono. E o professor, caso observe respostas muito divergentes desta, pode efetuar nova devolução e pedir aos alunos que ao descreverem levem em consideração a posição do segmento em relação ao polígono e a região externa deste, garantindo assim que o foco esteja na verificação da convexidade. O item (d) é análogo ao (c), diferindo apenas que o Polígono 2 é não convexo, e por assim ser, há determinadas posições ocupadas pelos ponto H e I em que o segmento HI fica parcialmente fora do polígono, o segmento não está contido no polígono.

O item (e), induz o aluno a realizar um comparativo entre as posições ocupadas por um segmento cujos extremos pertencem a um polígono convexo e outro segmento cujos extremos são pertencente a um polígono não convexo. É por meio desse comparativo que os atributos definidores dessas duas classes de polígonos emergirão da situação. O professor pode desafiar os alunos mais uma vez perguntando se de fato, na primeira situação (item (c)) não tinha posição assumida pelos pontos G e H que o segmento ficasse de fora total ou parcialmente.

Durante a institucionalização, o professor deve explorar essas diferenças de escritas pelos alunos para construir a definição tanto dos polígonos convexos quanto dos não convexos. Assim, ele pode ir perguntando e juntando as respostas dos alunos para conseguir escrever uma definição.

Essa foi a atividade que mais recebeu modificações após o teste piloto. Na Atividade 9 utilizada no teste piloto, o arquivo do GeoGebra utilizado possuir apenas uma construção, a qual estava disposta inicialmente de forma semelhante ao Polígono 1 (convexo) (ver Figura 4.33) e que os alunos deveriam movimentar um de seus pontos de tal forma que ficasse semelhante ao Polígono 2 (não-convexo). No entanto, percebemos que essa modificação na configuração o polígono poderia levar os alunos a pensarem que um polígono pode ser convexo e não-convexo ao mesmo tempo. Sendo assim, decidimos modificar o arquivo do GeoGebra utilizado, resultando no que pode ser visto na Figura 4. 33, porém sem os segmentos FG e HI.

Devido a esta modificações necessárias no arquivo, também tivemos que modificar os enunciados da Atividade 9 para que estes fizessem referência aos dois polígonos 1 e 2. Além disso, na versão anterior, os alunos tinham que manipular apenas um segmento em vez de dois para observar as diferenças entre os polígonos convexos e não-convexos. Por essa razão, o item (c) foi “duplicado” dando origem ao item (d), os quais passam a forcar, respectivamente, no comportamento do segmento FG em relação ao Polígono 1, e no comportamento do segmento HI em relação ao Polígono 2. Por fim, acrescentamos o item (e) destinado a estabelecer uma comparação entre as explorações anteriores. O resultado da implementação dessa atividade após estas modificações pode ser observada a seguir.

Análise *a posteriori*:

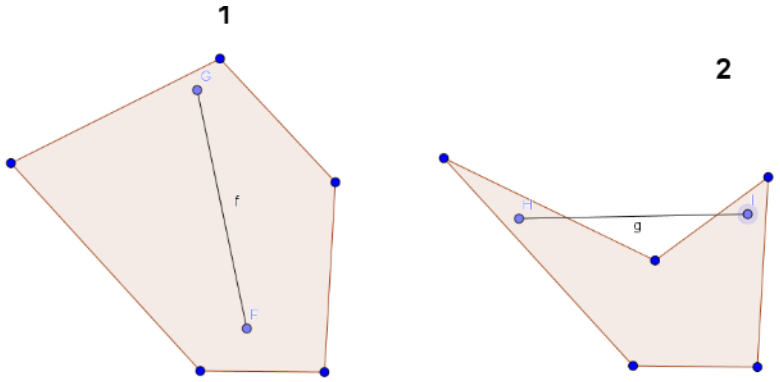
Toda Técnica desenvolvida durante o processo de ensino aprendizagem deve ter uma função específica, e para ser fixada nas práticas efetivas dos estudantes, esta deve ser exercitada. É o que ocorre com a Técnica de verificação da relação de pertinência de um ponto a um polígono, desenvolvida na Atividade 8, e que torna a ser evocada por Manolo no início da Atividade 9, como se pode ver a seguir:

Professor: Vejam aí se esses pontos pertencem ao polígono.
Manolo: A gente tem que movimentar ele né?

Nota-se quando o professor solicita a realização da Tarefa, *verificar se um ponto pertence ao polígono*, que Manolo associa imediatamente à Técnica que havia utilizado anteriormente. Assim, este estudante entra em uma situação de ação, na qual movimenta os pontos F, G, H e I, e observa uma retroação do meio, o qual impede que estes pontos sejam retirados de sobre o polígono, permitindo a ele validar que estes pontos pertencem aos polígonos.

Na continuação, é solicitado que os alunos apliquem a sub-técnica $S\tau_1$ (ver Quadro 2.2 da página 50), a qual consiste em realizar construções auxiliares que facilitem na visualização de propriedades. Assim, os alunos traçaram os segmentos de reta FG e HI, que podem ser vistos na Figura 4.33.

Figura 4.33 – Polígonos 1 e 2 que compunham a construção utilizada na Atividade 9



Fonte: Dados da Pesquisa.

Após isso, Luigi e Manolo iniciaram uma investigação procurando se havia uma posição dos extremos que fizessem com que os segmentos de retas ficassem total ou parcialmente na região externa ao polígono.

Manolo: Mesmo assim ele também não sai.
Professor: Nenhum segmento sai?
Manolo: Nenhum.
Professor: Nenhuma parte desses segmentos sai?
Manolo: Desse [*segmento FG*] não.
Professor: Veja o outro então.

Manolo: Também não.
Professor: Mexe aí. Mexe o ponto H para aqui.
Luigi: Sai.
Manolo: Agora saiu. Ah, ele sai, ó!

Até este momento, Manolo e Luigi exploram as construções que foram enriquecidas por eles. Nota-se que Manolo se precipita em afirmar que nenhum dos segmentos pode ser retirado nem total nem parcialmente do polígono que o contém, o que leva o professor a sentir a necessidade de realizar nova devolução solicitando que ele mexa especificamente o ponto H. O resultado dessa nova exploração foi que, os alunos perceberam a principal característica que diferencia os polígonos convexos dos não convexos. Depois, inicia-se o processo da construção de argumentos que justifiquem o fato de que um segmento com extremidades no Polígono 2, HI, pode ser parcialmente retirado dele e o segmento interno do Polígono 1, FG, não pode ser retirado.

Professor: Vocês conseguem fazer a mesma coisa com o segmento de cá [*referindo-se ao segmento FG*]?
Manolo: Não.
Luigi: Ele tem que ter uma face tipo assim.
Manolo: Ele tem uma face que é aberta. Ele não é assim ...
Luigi: É.
Professor: Então o que é que acontece com o segmento FG?
Luigi: Ele não sai.
Manolo: Mas o de cá [*segmento HI*] sai. Sabe por que ele sai? Ele é meio...
Luigi: Ele tem uma curvinha assim para baixo.
Professor: Então essa era a curva que você falou na outra [*Atividade*]. Já chegou a uma conclusão, que o daqui não sai e que no outro sai. Vocês iriam escrever o que?
Luigi: Que um sai e que o outro não sai, por causa do formato do polígono.
Professor: Fala direitinho ai.
Manolo: Ele tem um formato meio...
Luigi: É tipo uma ladeirinha assim.

Ambos os estudantes utilizam equivocadamente o nome “face” para se referir ao lado do polígono, mesmo tendo estudado os elementos que compõem um polígono na Atividade 8. Se desconsiderarmos esse erro no emprego de nomenclatura, podemos notar que, por causa do fenômeno visual (saída parcial do segmento HI), os alunos se atentaram para a forma dos lados dos polígonos e tentaram descrever a diferença entre a disposição dos segmentos de retas que compunham os dois polígonos da construção.

Inicialmente, nessa tentativa de descrição, Luigi retoma o termo que Manolo havia utilizado em uma atividade anterior e diz que o Polígono 2 tem uma “curvinha”, que logo após é chamada de “ladeirinha”. Essa característica do lado do Polígono 2, que os alunos tentam descrever, é denominada por Lima (2007, p. 9) como “um *ziguezague*” e definido “ABCD como uma poligonal com três lados AB, BC e CD, dispostos de modo que AB e CD se situem em margens opostas da reta (que contém o segmento) BC” (LIMA, 2007, p. 9-10).

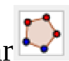
Diante desta definição, é compreensível a dificuldade que os alunos tiveram para descrever a diferença entre os lados, pois Lima (2007) lança mão da ideia de “margem” de uma reta para fazer referência aos dois semiplanos determinados por uma reta. Enfim, vemos claramente que uma definição formal do que eles visualizavam é algo relativamente abstrato demais par eles conseguirem formular uma descrição mais precisa. Contudo, o termo “ladeirinha” se aproxima bastante do que esperávamos obter como resposta, ou seja, pensávamos que eles fossem falar em “entradas”.

Podemos afirmar, a partir do que foi observado, que a Atividade 9 cumpriu seu papel em permitir que os alunos tivessem contato com o atributo definidor mais evidente dos polígonos convexos e não convexos, que é o formato dos lados que formam um ziguezague. E eles também foram capazes de perceber que nos polígonos convexos, todos os segmentos que unem dois pontos distintos do polígono, estão contidos nele.

Essa características foi evocada pelo professor no momento da institucionalização, ressaltando a Técnica da classificação de um polígono como convexos ou não convexo num ambiente de geometria dinâmica, a qual consiste no traçado e deslocamento de um segmento com extremidades pertencentes ao polígono em análise. Contudo, o professor também institucionalizou a observação do formato dos lados – observar se possui “entrada” – como forma de identificar a convexidade de um polígono.

Outro fator que merece destaque foi o tempo gasto para exploração, discussão, resolução e institucionalização que levou menos de 10 minutos. Temos que reconhecer que a cada atividade os alunos se tornavam mais práticos com o GeoGebra, fator que contribuiu, também, para redução do tempo. Contudo, a exigência de respostas apenas oral influenciou no tempo, que consideramos adequado para uma futura incorporação dessa atividade nas práticas de sala de aula externas a esta pesquisa.

ATIVIDADE 10

Utilizando a ferramenta Polígono Regular  do GeoGebra, construa um polígono de 7 lados. Investigue.

a) O que você pode dizer a respeito das medidas dos lados desse polígono?
b) O que você pode dizer quanto à medida dos ângulos internos?
c) O que você pode dizer quanto a convexidade desse polígono?

d) Construa dois outros polígonos usando a mesma ferramenta, mas com quantidade de lados diferentes. O que você observou nos itens a), b) e c) acontece nos polígonos que você construiu?
e) Escreva, com base no que você observou, o que é um Polígono Regular.

Análise a priori:

Para a construção dessa atividade, cujo objetivo é construir a definição de polígono regular, atribuímos à variável didática **número de lados** o valor $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$. A variação do valor dessa variável didática durante a atividade garantirá que o aluno perceba que a congruência entre os lados e a congruência entre os ângulos internos é independente do número de lados do polígono. Esse foco dado aos lados nos permitiria ao final da atividade institucionalizar que polígonos regulares são aqueles cujos lados e os ângulos internos são congruentes. Além disso, a nível de Técnica, institucionalizaríamos que para verificar se um polígono é regular, basta observar se seus lados e ângulos internos são congruentes

Esta atividade está voltada para construção da definição de Polígono Regular, essencialmente, visa que os alunos construam, explorem e identifiquem que há uma classe de polígonos convexos cujos lados são congruentes entre si, assim como seus ângulos internos.

Para realização da construção será utilizada exclusivamente a ferramenta Polígono Regular. E para exploração serão utilizadas as ferramentas: Distância, Comprimento ou Perímetro; Ponto Sobre Objeto; e Ângulos. O uso dessas ferramentas se destinará a evidenciar outros elementos inerentes à figura (enriquecer a figura). Como é característico desse tipo de *software*, a ferramenta Mover será utilizada para garantir que as congruências não são mera casualidade.

Neste contexto, a situação de ação é iniciada com a construção do polígono de 7 lados solicitado no enunciado. O professor deve estar preparado para uma possível dificuldade que certamente surgirá durante essa construção: a ferramenta indicada para a construção solicita o número *vértices* do polígono e não de lados. Contudo, esta é uma ótima oportunidade para que os alunos percebam que o número de lados de um polígono é igual ao número de vértices. Essa discussão pode ser imediatamente feita quando surgir a dúvida, ou poderá ser postergada para a situação de institucionalização ao final da atividade.

O item (a) direciona a atenção dos alunos para que eles investiguem a medida dos lados dessa construção. Ao manipularem a figura, eles poderão conjecturar a igualdade da medida dos lados e, caso isso não ocorra, o professor poderá questionar: Quanto mede cada lado?

O item (b), por sua vez, direciona o olhar dos estudantes para a medida dos ângulos internos. Quando o GeoGebra cria um ângulo, já o faz acompanhado de sua medida. Desse modo, o que realmente pode ocorrer é que alguns alunos ainda não tenham se familiarizado com o uso da ferramenta Ângulo e acabem por medir outros ângulos que não são internos ao polígono, simplesmente porque clicaram em uma ordem diferente dos vértices. De fato, é muito comum erros de alunos decorrentes da simples escolha da ordem dos pontos a serem selecionados durante a marcação (medição) dos ângulos. Como visto na atividade anterior, o GeoGebra oferece uma funcionalidade que agiliza a medição dos ângulos interno de um polígono, ao clicar na região interna, ele marca todos os ângulos internos automaticamente. Essa potencialidade poderá ser ensinada àqueles alunos que apresentem dúvidas ao determinar a ordem dos pontos que devem clicar para medir os ângulos.

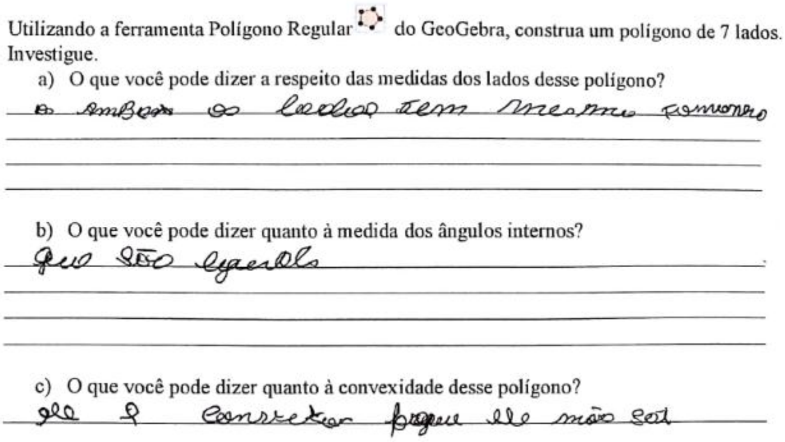
Esses dois itens revelariam os dois principais atributos definidores dos polígonos regulares, que são “lados congruentes” e “ângulos internos congruentes”. Enquanto que o item c) visa que os estudantes ponham em prática a técnica de reconhecimento de convexidade de polígonos aprendida na Atividade 9, revelando assim, mais uma característica dos polígonos regulares. Contudo, o fato de analisarem a convexidade do polígono, faria com que eles desenvolvessem uma definição não econômica para os polígonos convexos. Por exemplo, se o aluno acrescenta à definição, além dos dois atributos definidores citados, que os polígonos regulares “são convexos” ele estaria adicionando à definição um atributo definidor que pode ser deduzido dos outros dois. Ou seja, a convexidade do polígono regular deriva da congruência dos seus ângulos internos.

Neste cenário, o item (d) tem a função de conduzir os alunos a um certo nível de generalização, ao induzi-los a desprender-se de um caso particular (polígono de 7 lados). Após isso, o item (e) destina-se ao registro daquilo que os alunos apreenderam das informações derivadas da reação do meio à medição e à manipulação das construções. Esse registro pode ser entendido como uma definição de polígono regular construída pelo próprio aluno, por assim ser, durante o momento de institucionalização o professor poderá dar maior ênfase a discussão dessas definições e traçar comparativo com a definição institucional, aquela presente no livro didático.

Análise *a posteriori*

Como esta foi a última atividade a ser aplicada e vimos que ainda tínhamos tempo, solicitamos que os alunos tornassem a registrar suas respostas. Pela simples leitura dos registros escritos dos estudantes, Figura 4.34, nós poderíamos, de antemão, afirmar que a Atividade 10 cumpriu seu objetivo de favorecer que os alunos a percebam os principais atributos definidores dos polígonos regulares.

Figura 4.34 – Registro apresentado por Daniel relativo aos itens (a), (b) e (c) da Atividade 10


Utilizando a ferramenta Polígono Regular do GeoGebra, construa um polígono de 7 lados. Investigue.

a) O que você pode dizer a respeito das medidas dos lados desse polígono?

b) O que você pode dizer quanto à medida dos ângulos internos?

c) O que você pode dizer quanto à convexidade desse polígono?

Os ambos os lados têm mesmo tamanho.
Que são iguais.
Ele é convexo porque não sai.

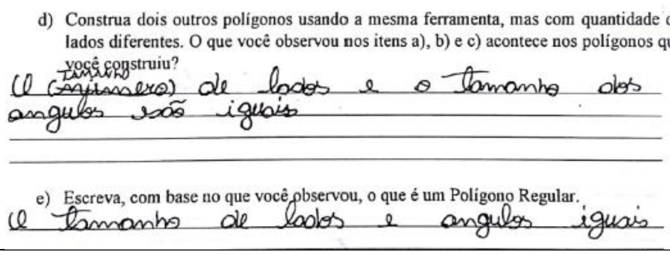
Fonte: Dados da Pesquisa.

É possível afirmar que a partir das construções e explorações solicitadas na Atividade 10 Daniel, foi capaz de identificar que os polígonos regulares são aqueles que possuem lados congruentes e ângulo internos congruentes. Ainda destacamos o fato de que este estudante, além de afirmar corretamente que os polígonos regulares são convexos, ele apresenta uma justificativa para sua afirmação, a qual não foi solicitada. Nessa justificativa, ele evoca a técnica dinâmica do reconhecimento de convexidade desenvolvida na Atividade 9, em vez de fazer referência ao formato do lado.

Manolo e Luigi apresentaram respostas semelhantes para estes itens, por isso não serão expostas aqui, mas a justificativa, apresentada oralmente, dessa dupla, revela que eles se basearam no formato dos lados do polígono para dizer se este era convexo. Além disso, a análise das áudio-gravações possibilitou relembrar que Manolo ao se deparar com o polígono regular de 7 lados, afirmou que este não possuía os lados congruentes. Diante disso, o professor solicitou que ele utilizasse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro para efetuar a medição dos lados desse polígono. Essa exploração fez com que este aluno se convencesse, antes mesmo de medir todos os lados, de que os lados do heptágono regular são sim congruentes entre si.

Assim, apresentamos a seguir na Figura 4.35 a resposta desses alunos para os itens (d) e (e).

Figura 4.35 – Registro apresentado por Luigi e Manolo relativo aos itens (d) e (e) da Atividade 10


d) Construa dois outros polígonos usando a mesma ferramenta, mas com quantidade de lados diferentes. O que você observou nos itens a), b) e c) acontece nos polígonos que você construiu?

O (~~número~~) tamanho de lados e o tamanho dos ângulos são iguais

e) Escreva, com base no que você observou, o que é um Polígono Regular.

O tamanho de lados e ângulos iguais

O (~~número~~) tamanho de lados e o tamanho dos ângulos são iguais. O tamanho de lados e ângulos iguais.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Podemos observar que a construção e exploração de mais dois polígonos regulares levou Manolo e Luigi a registrarem, no item (d), as mesmas observações que Daniel nos itens anteriores. Contudo, damos maior destaque à definição apresentada por Manolo e Luigi, a qual é novamente econômica.

Esperávamos que eles também incluíssem a convexidade dos polígonos regulares, no entanto, eles nos surpreenderam ao registrar na definição apenas a congruência dos lados e a congruência dos ângulos como atributos definidores. De fato, a partir desses dois atributos é possível deduzir outras tantas propriedades dessa classe de polígono, por exemplo, a convexidade. Porém, a ausência dessa última característica impede-nos de classificar essa definição como hierárquica, pois não é possível estabelecer uma relação direta com a classe dos polígonos convexos.

Reconhecemos que o caráter exploratório dessa situação didática só foi possível graças à ferramenta Polígono Regular, que foi utilizada para gerar os objetos alvos da investigação dos alunos. Acrescente-se a isso, o fato de que a construção de alguns polígonos regulares é um processo relativamente trabalhoso, pois deve garantir as congruências. Desse modo, o fato do GeoGebra gerar automaticamente representantes dessa classe de polígono, facilitou bastante o desenvolvimento da atividade, possibilitou que a atenção dos alunos fossem direcionadas exclusivamente para exploração e identificação dos atributos definidores e reduziu a quase zero as dificuldades que seriam enfrentadas para obtenção dos três polígonos regulares que foram utilizados na Atividade 10.

Assim, neste capítulo foram realizadas uma série de análises que nos permitiram conhecer melhor a essência da definição de polígono. Vimos que este objeto oscila entre duas “personalidades”, região plana e linha poligonal. Mesmo assim foi possível optar por uma dessas definições de polígono, graças à Análise Institucional. Essa análise sobre documento oficiais e um livro didático revelou que os polígonos desempenham um importante papel no *habitat* das figuras geométricas espaciais e tem várias funções em diferentes campos da matemática. Isso, nos levou a inferir que a definição de polígono a ser adotada para construção da Sequência Didática seria a de polígono como uma região plana.

Os dados oriundos da aplicação da Sequência Didática foram também expostos e analisados, trazendo a luz algumas influências do GeoGebra no processo de construção da definição de polígono. Neste capítulo pudemos notar que o *software* auxiliou na construção de técnicas por meio da realização e exploração de construções e, principalmente, na exploração da região interna do polígono na construção de definição, por exemplo, a de polígono convexo. Podemos afirmar que as análise apresentadas neste capítulo cumpriu sua função ao nos auxiliar a dar uma resposta para nossa questão de pesquisa, a qual é apresentada no próximo capítulo, o das Considerações Finais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa relatada nesta dissertação teve como objetivo principal: **analisar o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do *software* GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental**. Para o cumprimento deste objetivo, antes mesmo de podermos analisar a construção, necessitávamos saber qual é a definição de polígono. Nessa busca inicial, analisamos o livro *Os Elementos* de Euclides e literaturas específicas de Geometria, que dizem respeito ao tema polígonos, e o livro didático adotado pela instituição de ensino que colaborou no desenvolvimento dessa investigação. Assim, identificamos dois pontos de vistas sobre o conceito de polígonos: região delimitada por uma linha poligonal unida a essa linha; e apenas a linha poligonal.

Embora essas duas concepções sejam matematicamente relevantes, talvez até conflitantes, há indícios de que, adotar uma ou outra definição, não gera um obstáculo didático à aprendizagem do conceito de polígono. Mesmo que tenhamos identificado, que em sua fonte histórico-epistemológica mais antiga, *Os Elementos*, as "figuras retilíneas" (polígonos) sejam definidos como região, esta é diferenciada das demais figuras planas pelo seu contorno. Pudemos notar, pela análise do livro didático, o qual também adota a concepção de polígono como região, que a maioria das práticas realizadas com polígonos no 6º ano do ensino fundamental, são realizadas com seu contorno.

Por assim ser, inferimos que a definição de polígono como uma linha, encontrada principalmente nas referências atuais, deve decorrer de uma transformação que o Saber Sábio sobre polígonos passou ao longo da história, motivado pelo foco dado ao contorno nas aplicações deste conhecimento matemático na resolução de problemas diversos.

Além disso, essa análise dos elementos do Saber Sábio nos levaram a observar três caminhos, seguidos pelos autores dos livros que servem como referência atual, para definir polígono: *definir triângulo*; *definir região plana convexa*; e *definir linha poligonal*. Fomos levados a concluir que o caminho *definir linha poligonal*, no qual os polígonos são concebidos como uma linha, seria o mais adequado para o 6º ano. Esse resultado deriva do fato que este caminho pode ser utilizado tanto para construção da definição de polígono como linha, quanto como região. Também foi possível notar que, adotar uma definição de polígono como região, aparentemente não traria grandes dificuldades para compreensão do conceito de polígono, além de ser a concepção adotada pela instituição de ensino participante da pesquisa.

No entanto, para que pudéssemos elaborar a Sequência Didática, que a nosso ver é o principal resultado desta pesquisa, necessitávamos saber o que estava posto como Saber a Ser Ensinado. Para isso, analisamos os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular, nos quais identificamos dois locais de vida dos polígonos, onde estes estão postos para serem estudados e se estabelecem relações com outros objetos do Saber Matemático. Estamos nos referindo ao:

- *Habitat próprio*: no qual o polígono está posto como o objeto central de estudo, e os conceitos de paralelismo e perpendicularismo desempenham a função de importantes atributos definidores.
- *Habitat das figuras tridimensionais*: este que é o *habitat* das figuras espaciais onde os polígonos encontram seu *nicho espacial*.

Nesses *habitats* identificamos três tipos de funções desempenhadas pelos polígonos, as quais são denominadas de *nicho*. Os três tipos a que nos referimos são:

- *Nicho espacial*: é a representação de faces dos poliedros, tanto no espaço, quanto no plano ao constituírem as planificações.
- *Nicho artístico-realístico*: são as aplicações dos polígonos na realidade, em pinturas e em construções de telhados.
- *Nicho numérico*: função desempenhada pelos retângulos no habitat das operações aritméticas.

Outros resultados decorrentes da análise desses documentos oficiais, que influenciaram diretamente na elaboração da sequência, foi o reconhecimento dos triângulos e quadriláteros como os polígonos que devem receber maior destaque no processo de estudo dos polígonos. O que nos levou a dedicar as quatro últimas Atividades da Sequência Didática a este assunto, que por ventura do período do ano letivo, no qual adentramos à instituição de ensino, repleto de atividades internas, não puderam ser aplicas. A presença do GeoGebra com recurso didático também foi validado institucionalmente como um instrumento com grande potencial de contribuir para a aprendizagem de matemática. Além disso, a geometria transposta para a construção do GeoGebra também considera os polígonos como uma região, fato este que foi ao encontro do previsto no livro didático, por essa razão, para elaborarmos a Sequência Didática decidimos adotar a definição de polígono como região.

No que concerne ao processo de construção das definições, identificamos nos PCN um esquema composto de quatro passos. O primeiro é a *observação* de formas geométricas planas, a qual é sucedida por uma *exploração* dessas figuras, a fim de identificar outros atributos definidores que não foram imediatamente notados. Esses dois primeiros passos podem ocorrer de modo cíclico até que os alunos sejam capazes de *discernir* a figura que estão manipulando, de tantas outras. Esse discernimento é fundamental para que eles consigam realizar a *conceituação* da figura, estabelecendo uma ligação entre os atributos definidores e assim construam uma (ou modifiquem uma pré-existente) imagem conceitual sobre aquela figura. Esse processo de construção da definição é completamente divergente do que foi possível identificar no livro didático analisado. Nele, na realidade, não há um processo, mas sim uma exposição das definições. Diante disso, e por conta da adoção da concepção de aprendizagem defendida pela Teoria das Situações Didáticas, avaliamos que o processo de definição, proposto pelos PCN, melhor se adequaria à Sequência Didática elaborada.

Durante a implementação da sequência, pudemos observar a influência do GeoGebra, como principal elemento constituinte do meio, sobre o processo de definição. Inicialmente, o GeoGebra foi convertido no principal instrumento do processo de validação, ou seja, ele passou a ser utilizado como uma forma de prova visual, na qual o emissor (os alunos) tentavam levar o interlocutor (professor ou colegas) a visualizarem o mesmo fenômeno visual que eles. Com a observação desse fenômeno, ocorria uma modificação dos conhecimentos, ao fornecer novos atributos definidores à imagem conceitual dos estudantes sobre polígonos.

Em um processo de construção de definição, o GeoGebra oferece uma variedade de tipos de exploração que o aprendiz pode fazer sobre uma construção que o levará a observar uma diversidade de características do polígono. Algumas dessas características podem ser consideradas irrelevantes para o processo de ensino e aprendizagem sobre polígonos, contudo outras tantas são atributos definidores relevantes deste objeto matemático.

As construções feitas no GeoGebra, e que compunham as Atividades da Sequência Didática, guardavam propriedades que resistiam ao deslocamento, característico dos *softwares* de geometria dinâmica. Por exemplo, o fato dos polígonos serem delimitados por linhas poligonais fechadas, foi percebido graças a resistência da construção, que mesmo tendo seus vértices movimentados, permaneciam delimitando uma região do plano.

A ordem que foram colocadas as quatorze atividades, também influenciou no resultado final, pois permitiu que os alunos fossem, aos poucos, modificando seus conhecimentos sobre polígonos até serem capazes de elaborar uma definição para esta classe de figuras planas. Diante destes pontos relevantes da pesquisa, podemos formular uma resposta para a questão de pesquisa central: **como acontece o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do *software* GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental?**

O processo de definição de polígono mediado pelo *software* GeoGebra é iniciado com a familiarização do aprendiz com este ambiente computacional. Neste momento, ele deve reconhecer objetos geométricos que já fazem parte de seus conhecimentos no novo ambiente, o que o levará a desenvolver uma visão do GeoGebra como uma fonte de informações confiáveis e verdadeiras. Essas informações são derivadas dos processos de construção e exploração de desenhos dinâmicos, cujas propriedades são resistentes ao deslocamento.

Os aprendizes, ao serem submetidos a situações de exploração de construções específicas, como as que compõem a Sequência Didática elaborada, ele observará fenômenos visuais que lhes revelará atributos definidores, aumentando seu "vocabulário geométrico", que lhe permitirá classificar objetos geométricos diversos. Ao passo que desenvolvem este repertório de características dos polígonos, estes alunos são submetidos a situações de exploração e classificação.

Na sequência o aluno deve ser submetido a situações que o leve a pôr em uso os atributos que identificou. A construção de "listas de verificação" é uma boa opção para que construa uma técnica de reconhecimento de figuras planas como polígonos. Todo o processo só é viável se o *software* oferece ferramentas que viabilizem as construções e as explorações que os alunos necessitam realizar. Como ocorreu com a ferramenta Ponto Sobre Objeto do GeoGebra, que permitiu que os alunos explorassem a região interna do polígono, possibilitando assim a construção da definição de polígono com uma região plana delimitada por segmentos de retas que não se cruzam.

Com respeito à aplicação da Sequência Didática, acreditamos que, o fato dela ter sido aplicada em um curto espaço de tempo, reduziu a observação de outros aspectos positivos para a construção da definição de polígono. Defendemos que a sequência não deve ser aplicada em dias seguidos, pois os alunos necessitam "acomodar" tudo que foi discutido e institucionalizado e ir se familiarizando com realização de exercícios de fixação. Assim sugerimos que numa pesquisa futura, ou mesmo o uso em sala de aula, que seja realizada uma aplicação dividida em quatro sessões, nas quais: na primeira sessão sejam aplicadas as Atividade 1, 2 e 3, e se possível dividir a Atividade 3 em duas aplicando do item (h) em diante separadamente; a segunda seção deve ser composta pelas Atividade 4 e 5; a terceira seção, que consideramos a mais importante, por abordarem diretamente o conceito de polígono, composta pelas Atividades 6, 7, 8, 9 e 10; e a quarta seção, seria dedicada ao estudo dos triângulos e quadriláteros, ou seja, composta pelas Atividade 11, 12, 13 e 14.

É um fato curioso que o livro didático analisado tenha adotado a mesma definição de polígono como região plana, assim como *Os Elementos* de Euclides. Desse modo, sugerimos que sejam analisados outros livros. E que se faça a identificação das organização praxeológicas de forma mais explícita de livros de diferentes coleções, a fim de identificar as práticas que são mais comuns na instituição do 6º ano do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao ensino de polígono.

Além disso, sugerimos, para uma pesquisa futura, que seja realizada uma análise histórico-epistemológica de outras obras de grande relevância para o Saber Geométrico, por exemplo: *La Géométrie* (A Geometria) de René Descartes; e *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria) de David Hilbert. E caso esta pesquisa se expanda até a análise da literatura atualmente utilizada como referência, sugerimos que a análise também leve em consideração como os autores definem poliedros, com o intuito de observar se a incoerência – definir polígono como linha poligonal e dizer que as faces dos poliedros são polígonos – se mantém nessas obras.

No que diz respeito à escolha metodológica, a Análise Institucional & Sequência Didática a julgamos acertada. A forma como as oito etapas dessa metodologia detalham e ordenam cada processo do desenvolvimento de uma pesquisa, mostrou-se como um auxílio coerente para um pesquisador iniciante. Além disso, a AI&SD casa perfeitamente com a Teoria Antropológica do Didático e com a Teoria das Situações Didáticas, que foram adotadas nessa investigação. Aliás, pudemos observar como estas duas teorias e a metodologia se complementaram permitindo que cumpríssemos o objetivo da pesquisa.

A Teoria Antropológica do Didático nos forneceu, principalmente, elementos para olharmos matematicamente para os polígonos, o que está posto pela Noosfera para seu ensino. É no momento do ensino e aprendizagem que a Teoria das Situações Didáticas contribuiu mais ao nos permitir olhar para as relações entres o professor, o aluno e o saber matemático (polígono) e como o meio escolhido, cujo principal componente foi o GeoGebra, influenciou nos resultados obtidos. Graças a essas duas teorias foi possível notar que o uso de um *software* de Geometria Dinâmica provocou o surgimento de mudanças na forma que os alunos se referem aos objetos matemáticos estudados bem como eles agem sobre esses objetos.

Além dessas teorias propriamente ditas, outros estudos fizeram parte da base teórica dessa pesquisa, que diz respeito ao processo de construção de definições, as quais, em geral, estão ausentes na sala de aula, mas que demonstram serem importantes, conforme os autores referenciados que as defendem. Durante o processo inicial dessa investigação notamos que há uma lacuna significativa na literatura em Educação Matemática no Brasil sobre pesquisas que contribuam para a diminuição da "definomania".

Dessa forma, notamos a necessidade de mais trabalhos como este e o de Jesus (2008), que fez uma investigação com demonstrações e construção geométricas no ambiente papel e lápis cujo tema central era a mediatriz, esse autor decidiu favorecer a construção da definição desse objeto matemático. Além disso, as facilidades de acesso a informação por diferentes meios, principalmente os informatizados, vêm tornando cada vez mais obsoleta a prática de expor conhecimentos em sala de aula, uma vez que as definições podem ser acessadas pelos alunos sem que eles tenham que estar fechados em uma sala de aula.

Foi possível notar que apenas algumas das técnicas e sub-técnicas presentes no Quadro 2.2 (o qual deriva dos resultados apresentados por Acosta Gempeler (2004)) foram utilizadas na Sequência Didática que elaboramos. No entanto, apontamos que as demais técnicas poderiam ser aplicadas na construção de novas Sequências Didáticas, que utilizem como principal recurso um *software* de Geometria Dinâmica, sobre diferentes conceitos matemáticos. Vemos nessas técnicas e sub-técnicas um potencial para contribuir para a diminuição da definomania no ensino da matemática.

Existem alguns atributos dos objetos matemáticos ensinados que são ignorados nas diferentes práticas institucionais. No caso dos polígonos, mesmo as instituições que os reconhecem como regiões, focam o processo de estudo sobre a linha poligonal que compõe o contorno e não fazem referência à região interna, como comprovamos na análise do livro didático. Isso se configura como um vazio didático[39], para o qual esta pesquisa contribuiu, em certa medida, para sua diminuição, ao propormos, por exemplo, a exploração e observação de pontos internos dos polígonos no processo construção da definição de polígonos convexos.

[39] Um vazio didático ocorre quando há saberes acerca de um objeto de estudo, os quais não são devidamente mobilizados pelo sujeito, o que conduz a um comprometimento do ensino e do processo de resolução de problemas relativos a este objeto do saber.

REFERÊNCIAS

ACOSTA GEMPELER, M. E. La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías. In: CONGRESO INTERNACIONAL DE LA TAD, 1, v. 1. 2004, Jaén. **Anais**... Disponível em: < http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Acosta.pdf >. Acesso em: 11 ago. 2018

AFONSO, A.; HALL, A.; MARTINS, R. A. GeoGebra na construção de módulos dinâmicos de apoio ao ensino do cálculo de áreas. **Indagativa Didactica**, vol. 5, n. 1, p. 171-183, 2013. Disponível em: < http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/2426 >. Acesso em: 11 ago. 2018.

AIRES, A. P.; CAMPOS, H.; POCAS, R. Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. **Relime**, México, v. 18, n. 2, p. 151-176, 2015. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362015000200002&lng=es&nrm=iso>. Acesso em 11 ago. 2018.

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Atuais Tendências Didático-Pedagógicas no Ensino de Geometria: um olhar sobre os anais dos ENEM's. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, v. 1, 2004, Recife. **Anais**... Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/Index.htm >. Acesso em: 11 ago. 2018.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007.

ARNAL-BAILERA, A.; BELLOC, B. G. Construyendo la idea de cuadrado: un ejemplo de la integración de GeoGebra en el currículo de 1º de primaria. **ReiDoCrea**, v. 4, p. 129-135, 2015. Disponível em: < http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/37015/ReiDoCrea-Vol.4-Art.19.pdf;jsessionid=15EBE130B35A144BF69ED1B2347F2291?sequence=1 >. Acesso em: 11 ago. 2018

BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. Algumas Particularidades de Ambiente de Geometria Dinâmica na Educação Geométrica. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, ISSN 2237- 9657, v. 6, n. 2, p 46-64, 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35378 >. Acesso em 11 ago. 2018.

BALACHEFF, N. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. **Les Cahiers du Laboratoire Leibniz**, Grenoble, n. 109, 2004.

BATTISTI, I. K.; NEHRING, C. M. A. Mediação Docente em uma Aula de Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural. **Nuances: estudos sobre Educação**, Presidente Prudente-SP, v. 25, n. 2, p. 65-85, maio/ago. 2014. Disponível em: <http://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/view/2818/ 2688>. Acesso em: 06 dez. 2017.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; CHIARI, A. S. S. Tecnologias Digitais e a Relação entre Teoria e Prática: uma análise da produção em trinta anos de BOLEMA. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1115-1140, dez. 2015. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2015000301115&script=sci_abstract&tlng=pt>. Acesso em: 29 jan. 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, 1997a.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC, 1997b.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, v. 2, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica**. Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base, Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/bDM4YP>. Acesso em: 07 ago. 2018.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papeis do professor. In: PARRA, C. (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas. 1996.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. Prospective teachers work on defining quadrilaterals through an exploratory approach. **Didactica Mathematicae**, ISSN: 2353-0960, v. 38, p.33-56, 2016. Disponível em: < https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/didactica-mathematicae/article/view/1926 >. Acesso em: 11 ago. 2018.

CARVALHO, B. A. **Desenho geométrico.** Rio de Janeiro: Ao livro Técnico, 1982.

CASTRUCCI, B. **Fundamentos de geometria:** estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978. 195 p.

CHAVANTE, E. R. **Convergências: matemática, 6º ano**. 1. ed. São Paulo: Edições SM, ISBN 9788541809580, 2015. (Convergências)

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathematiques**, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992. Disponível em: < http://www.numdam.org/article/PSMIR_1991___S6_160_0.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2019.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. 3. ed, Buenos Aires: Aique, 2000. 196 p. (Psicologia cognitiva y educacición).

CHEVALLARD, Y. Organiser l’étude1: Structures et fonctions. In: Dorier, J.L.; Artaud, M.; Artigue, M.; Berthelot, R. (eds.). Actes de la XI école d’été de didactique des mathématiques. Grenoble**: La Pensée Sauvage**, p. 3-32, 2002. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52>. Acesso em: 11 ago. 2018.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**: L’approche anthropologique. In: L’UNIVERSITE D’ETE, 1998, p.91-118. Actes de l’Université d’été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998

CHEVALLARD, Y. BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem. Tradução de Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artes Medicas, 2001.

CHEVALLARD, Y. Approche Anthropologique du Rapport au Savoir et Didactique des Mathematics. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n. 1, p. 1-8, 2009. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf >. Acesso em: 11 ago. 2018.

COSTA, A. P.; SANTOS, M. C. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 5, n. 2, 2016. Disponível em:< https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/issue /view/1745 > Acesso em: 28 out. 2017.

DÉCHEN, T.; CARNEIRO, R. F. Tendências no ensino de geometria: um olhar para os anais dos encontros paulista de Educação Matemática. In: CONGRESSO DE LEITURA DO BRASIL, 16, 2007, Campinas. **Anais do 16º COLE**, 2007. Disponível em: < http://alb.org.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss03_03.pdf >. Acesso em: 11 ago. 2018.

DE VILLIERS, M.; GOVENDER, R.; PATTERSON. Defining in geometry. In: **Understanding Geometry for a Changing World**, NCTM, p.189 – 203, 2009.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9:** geometria plana. v. 9, 7 ed. São Paulo: Atual, 1993a.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria espacial. v. 10, ed. 5. São Paulo: Atual, 1993b.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2007.

ESPINOZA, L.; AZCÁRATE, C. Organizaciones matemáticas y didácticas em torno al objeto de “limite de función” :una propuesta metodológica para el análisis**. Enseñanza de Las Ciencias**, v. 18, n. 3, p. 355-368. Institut de Ciències de l'Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2000. Diponível em: < https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21683>. Acesso em: 29 jan. 2019.

EVES, H. **Introdução a história da matemática.** ISBN 852680657-2, Campinas, SP: Universidade de Campinas, 2004.

EUCLIDES. **Elementos de geometria.** São Paulo: Cultura, 1944.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Ver. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FONSECA, M. C. F. R.; LOPES, M. P.; BORBA, M. G. G.; GOMES, M. L. M.; DAYRELL, M. M. M. S. S. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental**: três questões para formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. p. 77-111. São Paulo: EDUC, 2008.

GAY, M. R. G. (ed.). **Projeto Araribá**: matemática. São Paulo: Moderna, 4.ed., v. 1, 2014.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4, 1998, Brasília. **Anais...** Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: <lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.PDF>. Acesso em: 30 abr. 2018.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J. P.; FARIAS, L. M. S. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do *software* Maple. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 9, n. 1, p. 51-81, 2007. Disponível em: < https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/585>. Acesso em: 11 ago. 2018.

HENRIQUES, A. **Reflexões sobre análises institucionais e sequência didática**: o caso do estudo de integrais múltiplas. (Progressão de Carreira do Magistério Superior, de Adjunto a Titular). UESC-BA, 2011. Disponível em: https://sites.google.com/site/gpemac/dissertacoes-de-mestrado. Acesso em 17 out. 2017.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1261-1288, Dec. 2012. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000400008&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 29 jan. 2019.

HENRIQUES, A. Análise Institucional & Sequência Didática como metodologia de pesquisa. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1, 2016, Bonito. **Anais**... Mato Grosso do Sul, 2016. Disponível em: < http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/Trabalhos/AFONSO%20HENRIQUES.pdf >. Acesso em: 11 ago. 2018.

JESUS, G. B. **Construções geométricas**: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada. 2008. 234 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabrri-Géomètre. **Em Aberto**, Brasília, v. 14, n. 62. abr./jun. 1994. Disponível em: < http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/1964 >. Acesso em: 11 ago. 2018.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia cientifica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino.** 3.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. (Coleção do professor de matemática).

LOPES, M. M. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 631-644, 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sciarttext&pid=S0103-636X2013000300019&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 03 nov. 2017.

LOURENÇO, M. T. C. **O ensino de geometria através da pavimentação do plano**. 2014. 121 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

MARSDEN, J. E.; TROMBA, A. J. **Cálculo Vectorial**. 5. ed. Nova York: Addison-Wesley Iberoamericana, 2004.

MARTÍNEZ, J. P.; GIRONÉS, G. T. Razonamiento Configural y Procedimientos de Verificación en Contexto Geométrico. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 16, n. 3, p. 339-368, 2013.

MELO, S. R.; DRAGHI, D.; SALDIVIA, F. Enseñando geometría utilizando el Software Dinámico Geogebra: análise didáctico de una propuesta de enseñanza. **Revista de Informes Científicos**. 2015, v. 8, n. 1, p. 221-243. Disponível em <http://secyt.unpa.edu.ar/journal/index.php/ICTUNPA/article/view/ICT-UNPA-134-2015>. Acesso em: 12 ago. 2018.

MOISE, E. E.; DOWNS JR., F. L. **Geometria moderna. v.** 2, São Paulo; Brasília: E. Blucher; Ed. da Univ. de Brasília, 1971.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria 1.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1973. 138 p.

NOGUEIRA FARIAS, V. L.; FARIAS, L. M. S. Construção de situações de aprendizagem em geometria plana utilizando o *software* cabri-geomètre: o deslocamento no ambiente computacional cabri-geomètre. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, v.1, 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 10 ago. 2018.

OLIVEIRA, A. T.; PALIS, G. R. O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação de professores de matemática. **Relime**, México , v. 14, n. 3, p. 335-359, nov. 2011 . Disponível em <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000300004&lng=es&nrm=iso>. Acesso em: 09 dez. 2017.

OLIVEIRA, G. P.; GOLÇALVES, M. D.; MARQUETTI, C. Reflexões Acerca da Tecnologia e sua Inserção na Pesquisa em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 472-489, 2015. Disponível em:< https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25665 >. Acesso em: 12 ago. 2018.

OUVRIER-BUFFET, C. **Construction de definitions/construction de concept**: vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématriques. 2003, 316 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 2003. Disponível em: < https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/document >. Acesso em: 12 ago. 2018.

OUVRIER-BOUFFET, C. Construction of Mathematical Definitions: an epistemological and didactical study. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28, v. 3, p. 473-480, Grenoble, 2004. **Proceedings**…Grenoble: Laboratoire Leibniz, 2004. Disponível em: < http://emis.impa.br/EMIS/proceedings/PME28/RR/RR203_Ouvrier-Buffet.pdf >. Acesso em: 12 ago. 2018.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIS, L. C. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké**, São Paulo, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul/dez. 1996.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. In: REUNIÃO NACIONAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 23, 2000, Caxambu. **Anais**... Disponível em: <http://23reuniao.anped.org.br/textos/1919t.PDF>. Acesso em: 13 nov. 2017.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 1, n. 1, dez. 1993. ISSN 2176-1744. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724>. Acesso em: 07 ago. 2018.

PAULA, S. C. R.; RODRIGUES, C. K.; SILVA, J. C. **Educação Matemática e Tecnologia**: articulando práticas geométricas. Curitiba: Appris, 2016.

PROEÇA, M. C.; PIROLA, N. A. A formação de Conceitos no Ensino de Matemática e Física: Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio. In: CALDEIRA, A. org. **Ensino de ciências e matemática, II**: temas sobre a formação de conceitos [online]. São Paulo: Editora UNESP; São Paulo: Cultura Acadêmica, ISBN 978-85-7983-041-9. 2009. Disponível em: < http://books.scielo.org/id/htnbt >. Acesso em: 11 ago. 2018.

RAMIRO, L. **Situações didáticas no ensino de geometria com o aplicativo GeoGebra**. 2014. 115 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/127559>. Acesso em: 29 jan. 2019.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na Educação Básica**: fotografia e a escrita na sala de aula. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SILVA, M. S.; SOUZA, D. S.; SANTOS, V. J. J. Tendências Didático-Pedagógicas para o Ensino de Geometria Reveladas nos Anais dos EDUCON's. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. 6, 2013, Canoas. **Anais**... Rio Grande do Sul: ULBRA, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/769/640>. Acesso em:12 ago. 2018.

TOMEI, C. **Euclides:** a conquista do espaço. ISBN 858802335-2, São Paulo: Odysseus, 2006. (Imortais da Ciência)

TAPSON, F. **Dicionário Oxford de Matemática Essencial**. Tradução de Eduardo Wagner. São Paulo, Oxford University Press, 1 ed., 2012.

VALENTE, J. A. Informática na educação: conformar ou transformar a escola. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 13, n. 24, p. 41-49, jul/dez. 1995.

VALENTE, J. A. O uso inteligente do computador na educação. **Pátio**, v. 1, n. 1, Ed. Artes Médicas Sul, p. 19-21. 1997.

VELOSO, E. **Geometria**: Temas actuais. Lisboa: IIE, 1998.

WU, S. T. **Introdução a Modelagem de Sólidos**. [S. I.]: Virtual Books. UNICAMP, 2006. Disponível em: <http://www.dca.fee.unicamp.br/courses/IA841/2s2006/notas/cap6.pdf>. Acessado em 05 de jan. 2018.

ZASLAVSKY, O.; SHIR, K. Student's Conseptions of Mathematical Definition. **Journal for Reseach in Mathemátics Education**, v. 36, n. 4, p. 317-347. 2005.

APÊNDICE A

ATIVIDADE 1

Crie dois pontos  na Janela de Visualização.

d) Sem manipular o GeoGebra, escreva quantas retas diferentes é possível traçar passando pelos dois pontos que você criou.

e) Crie mais um ponto. Quantas retas  você pode construir passando por esses três pontos? (Pode usar o GeoGebra)

f) E se fosse só um ponto, quantas retas você conseguiria traçar?

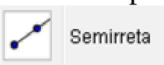
ATIVIDADE 2

Abra o arquivo do GeoGebra ATIVIDADE 2 e mova  os pontos G, H e I.

c) O que você pode observar?

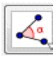
d) Descreva o movimento de cada um dos três pontos.

ATIVIDADE 3

Crie três pontos A, B e C no plano, e trace as semirretas BA e BC usando a ferramenta 

.

k) Habilite o Rastro[40] da semirreta BA, faça com que o ponto A coincida com o ponto C, depois mova o ponto A para seu local de origem.
l) O que você pode observar?

m) Desabilite o Rastro e selecione a ferramenta Ângulo  e clique nos pontos A, B e C, nessa ordem.
n) Observe o que aconteceu.
o) Mova o ponto A ou C (nos dois sentidos) e observe o que acontece com o ângulo.
p) Qual o maior valor que você consegue obter? E o menor?

q) Escreva, com suas palavras, o que é um ângulo?

r) Abra o arquivo ATIVIDADE 3 e investigue movendo os pontos. O que você pode observar?

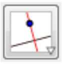
s) Separe os ângulos em três grupos.

t) Que nome você daria a cada um dos grupos de ângulos?

[40] Clique com o botão direito do mouse sobre a semirreta e selecione a opção 

.

ATIVIDADE 4

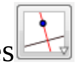
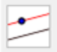
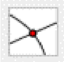
Trace uma reta AB. Crie um ponto C sobre $\overleftrightarrow{AB}$. Selecione a ferramenta Reta Perpendicular  e clique na reta e no ponto C.

d) Observe o que aconteceu e descreva.

e) Crie dois pontos D e E sobre a nova reta de tal modo que o ponto C fique entre eles dois. Meça os ângulos $B\hat{C}D$, $E\hat{C}B$, $A\hat{C}E$ e $D\hat{C}A$ usando . O que você pode observar?

f) Investigue a construção e descreva o que são retas perpendiculares.

ATIVIDADE 5

Trace uma reta AB e trace duas retas perpendiculares, uma passando pelo ponto A e outra pelo ponto B. Crie um ponto C sobre a reta perpendicular traçada pelo ponto B. Agora trace uma reta paralela à reta AB e que passe pelo ponto C. Marque o ponto de interseção  entre a reta paralela traçada e a outra perpendicular, denomine esse ponde de D.

a) Quais as medidas dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$? (Use a ferramenta)

b) Investigue. O que pode observar?

c) Caso fossem marcados pontos diferentes de C e D na reta CD o que dizer da distância desses pontos a reta AB? Confirme sua resposta experimentando com o GeoGebra.

d) Faça o ponto C coincidir com o ponto B. O que acontece?

ATIVIDADE 6

Investigue as três construções do arquivo ATIVIDADE 6 e responda:

a) Quais as semelhanças entre as construções?

____
____
____
____

b) Quais são as diferenças entre elas?

____
____
____
____

c) Imagine que um de seus colegas faltou à aula hoje e que você precisa mandar uma mensagem pelo WhatsApp dizendo o que ocorreu na aula. Como você descreveria na mensagem cada uma das construções da ATIVIDADE 6? Escreva.

____
____
____
____

ATIVIDADE 7

Investigue as construções presentes no arquivo ATIVIDADE 7 do GeoGebra.

a) Se você fosse separar em dois grupos, como você separaria?

b) Quais características você usou para agrupar as construções?

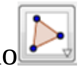
c) Apague as figuras do grupo menor. Se você fosse separar o grupo maior em dois grupos, como você separaria?

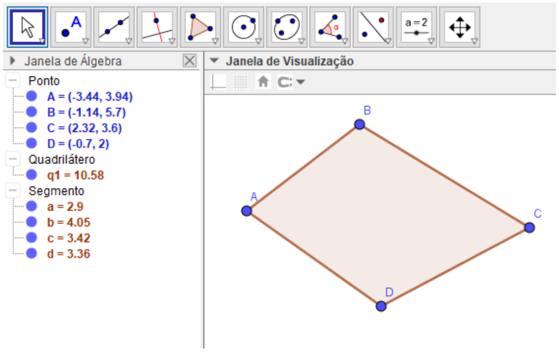
d) Quais características você usou para agrupar as construções?

e) Apague novamente as figuras do grupo menor. Se você fosse separar o grupo maior em dois grupos, como você separaria?

f) Quais características você usou para agrupar as construções?

ATIVIDADE 8

Rigoberta criou quatro pontos A, B, C e D no plano, selecionou a Ferramenta Polígono  e clicou nesses pontos na seguinte sequência: A, B, C, D e A. Assim, ela obteve a figura abaixo:

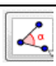


a) Essa figura é um polígono? Justifique com base nas características estudadas na Atividade 7.

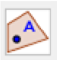
b) E se a sequência de pontos fosse A, B, D, C, A, formaria um polígono? Justifique com base nas características estudadas na Atividade 7.

c) Você deve ter notado que o GeoGebra colore uma parte do plano quando construímos um polígono. Crie pontos no plano e construa um polígono. Use a ferramenta Ponto Sobre Objeto  para criar um ponto sobre o polígono. Movimente esse ponto. O que você pode observar?

d) Você consegue arrastar esse ponto para a região exterior ao polígono (branca do plano)? Por que isso acontece?

e) Selecione a ferramenta Ângulo  e clique na região colorida. O que você pode observar?

ATIVIDADE 9

Observe a construção do arquivo ATIVIDADE 9. Utilizando a ferramenta Ponto em Objeto , e crie dois pontos F e G sobre o Polígono 1, e mais dois pontos, H e I, sobre o Polígono 2.

a) Os pontos F, G, H e I pertencem ao polígono? Justifique.

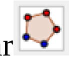
b) Trace os segmentos  FG e HI, movimente os pontos por todo o polígono ao qual pertencem.

c) Descreva o que acontece com o segmento FG em relação ao Polígono 1.

d) Descreva que acontece com o segmento HI em relação ao Polígono 2.

e) O que você pode observar de diferente em cada situação?

ATIVIDADE 10

Utilizando a ferramenta Polígono Regular  do GeoGebra, construa um polígono de 7 lados. Investigue.

a) O que você pode dizer a respeito das medidas dos lados desse polígono?

b) O que você pode dizer quanto à medida dos ângulos internos?

c) O que você pode dizer quanto à convexidade desse polígono?

d) Construa dois outros polígonos usando a mesma ferramenta, mas com quantidade de lados diferentes. O que você observou nos itens a), b) e c) acontece nos polígonos que você construiu?

e) Escreva, com base no que você observou, o que é um Polígono Regular.

ATIVIDADE 11

Investigue os polígonos do arquivo ATIVIDADE 11 e responda:

a) Que características são comuns aos três polígonos?

____
____
____
____

b) O que você pode observar quanto ao número de lados e suas medidas em cada polígono? Investigue e responda.

____
____
____
____

c) Alguma das três construções é um polígono regular? Em caso afirmativo, qual?

____
____

d) Que nome você daria a cada um desses polígonos?

____
____

e) Se seu colega, que faltou à aula e não viu os polígonos, perguntasse o que significa cada um dos nomes que você escreveu como você diria a ele? Escreva.

____
____
____
____
____
____

ATIVIDADE 12

Meça os ângulos internos das construções da ATIVIDADE 12, investigue-as e responda:

a) O que você pode observar?

b) Que nome você daria a cada polígono?

c) Escreva uma definição para cada polígono.

ATIVIDADE 13

Investigue as construções do arquivo ATIVIDADE 13 e responda:

a) Quais as semelhanças? Quais as diferenças?

b) Baseado no que você observou, como você chamaria esses polígonos?

c) Com base nas observações, como você definiria cada um desses polígonos?

ATIVIDADE 14

Investigue as **<u>duas</u>** primeiras construções do arquivo [ATIVIDADE 14] e responda:

a) Compare as características delas com as definições da atividade anterior. Em quais das três definições essas **<u>duas</u>** construções se encaixam?

____
____

b) Quais as diferenças entre essas duas construções?

____
____
____
____

c) Dê nome e escreva uma definição para cada uma das duas, baseado nas suas observações durante a resolução dos itens a) e b).

____
____
____
____

d) Investigue a terceira construção e compare com as duas definições que você escreveu no item c). O que você pode observar?

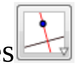
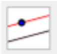
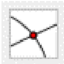
____
____
____
____

e) Dê nome e escreva uma definição para a terceira construção.

____
____
____
____

APÊNDICE B

ATIVIDADE 5

Trace uma reta AB e trace duas retas perpendiculares, uma passando pelo ponto A e outra pelo ponto B. Crie um ponto C sobre a reta perpendicular traçada pelo ponto B. Agora trace uma reta paralela à reta AB e que passe pelo ponto C. Marque o ponto de interseção  entre a reta paralela e a outra perpendicular, denomine esse ponde de D.

a) Qual a medida dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$? (Use a ferramenta)
b) Investigue. O que pode observar?
c) Caso fossem marcados pontos diferentes de C e D na reta CD o que dizer da distância desses pontos a reta AB? Confirme sua resposta experimentando com o GeoGebra.
d) Faça o ponto C coincidir com o ponto B. O que acontece?

Análise *a priori*

Com essa atividade objetivávamos ratificar a definição de retas paralelas bem como construir estratégias de verificação do paralelismo de retas no ambiente de Geometria Dinâmica. Essa verificação está baseada em que, dado um par de retas paralelas, todos os pontos de uma reta equidistam da outra reta. Sendo assim, se um ponto de uma coincidir com a outra, então as retas coincidem. A partir disso institucionalizaríamos que “Duas retas de um plano são paralelas quando não têm pontos em comum” (GAY, 2014, p. 230).

A construção que é solicitada nesta Atividade é relativamente simples, os únicos elementos que poderiam gerar dificuldade para os alunos são as três novas ferramentas a serem usadas, a saber: Retas Paralelas; Interseção de Dois Objetos; e Distância, Comprimento ou Perímetro. O que se espera no item (a) é que os alunos registrem as medidas dos segmentos, e no item (b), que eles movimentem os pontos e retas da construção, observem e escrevam que as medidas são sempre iguais. No entanto, também é possível que eles digam simplesmente que as medias se alteram, aumentando e diminuindo, sem fazerem menção a igualdade delas.

No item (c) para ser respondido, os alunos teriam que criar novos pontos, sendo que a quantidade ficariam a critério deles. A verificação da distância desses novos pontos à reta se faria com o uso da ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, a qual eles já utilizaram para medir os segmento BC e AD. No entanto, é possível que eles não saibam que basta clicar no ponto criado e na reta AB para obter a distância entre os dois, caso essa dificuldade técnica ocorra, o professor poderia explicar como proceder para efetuar esta medição. Uma vez vencida essa etapa, os alunos poderiam notar que a distância desses outros pontos são iguais às medidas dos segmento AD e BC, fato este que poderá ser utilizado na situação didática de institucionalização para definir retas paralelas baseando-se na distância constante entre os pontos pertencentes de uma reta à outra reta.

Enquanto isso, o item (d) é derivado do fato de que o GeoGebra não distingue retas coincidentes de paralelas. Como é sabido, as construções feitas no programa de Geometria Dinâmica como é o caso do GeoGebra, podem ter diversos parâmetros alterados automaticamente, no caso de retas paralelas, ele só mantém os coeficientes angulares iguais, possibilitado assim que as posições no plano sejam alteradas quase que livremente, mantendo o paralelismo, a ponto de que as duas retas coincidam tanto geometricamente quanto algebricamente por meio da igualdade de suas equações.

Diante disso, não é esperado que os alunos tenham maiores dificuldades para resolver essa atividade, é bem possível que o professor pouco intervenha durante as situações de ação, formulação e validação. A situação de ação inicia-se com a construção, e dela depende o sucesso da atividade, pois caso os alunos, por exemplo, utilizem a ferramenta Reta traçar a última reta, todas as propriedades que espera-se que os alunos observem, não se farão presentes. Após medirem os segmentos AD e BC, os alunos observariam que são congruentes, mas provavelmente não utilizariam essa terminologia, e a exploração proposta no item (b) os levaria a formular a ideia de que estes se mantêm congruentes até que as retas paralelas coincidam. Como as atividade são resolvidas em dupla, antes do registro na folha os alunos teriam que apresentar argumentos que comprovem suas conjecturas, é de se esperar que esses argumentos se baseassem exclusivamente no comportamento do GeoGebra diante da manipulação dos elementos (pontos e retas) da construção.

Contudo, durante a situação de institucionalização, o professor poderia apresentar aos alunos outra possível técnica que pode ser empregada no reconhecimento de retas paralelas. Essa outra possibilidade seria utilizar a ferramenta Ponto de Intersecção. Quando selecionamos esta ferramenta e clicamos em duas retas não paralelas na janela algébrica aparece um ponto com coordenadas indefinidas. O uso dessa terceira Técnica seria mais coerente com o que aparece nos livros didáticos, onde as retas paralelas são aquelas “que não se interceptam”, entretanto, a aplicação dessa técnica no ambiente computacional GeoGebra exige maior familiaridade com a interface do *software* principalmente com a forma pela qual ele apresenta os resultados na Janela Algébrica. Além disso, a técnica do ponto de intersecção não é tão fácil de ser aplicada no reconhecimento de segmentos de retas paralelos, pois exigiria, antes de tudo, traçar a reta suporte de cada segmento.

É possível perceber que essa questão não solicita que os estudantes registrem uma definição para retas paralelas, isso se deve ao fato de que o mais relevante é que eles consigam desenvolver a técnica de reconhecimento de paralelismo, a qual será utilizada na construção de definições em atividades posteriores. Isso sem deixar de lado a compreensão do conceito de paralelismo sem o qual a técnica torna-se inútil.

ATIVIDADE 11

Investigue os polígonos do arquivo ATIVIDADE 11 e responda:

a) Que características são comuns aos três polígonos?
b) O que você pode observar quanto ao número de lados e suas medidas em cada polígono? Investigue e responda.
c) Alguma das três construções é um polígono regular? Em caso afirmativo, qual?
d) Que nome você daria a cada um desses polígonos?
e) Se seu colega, que faltou à aula e não viu os polígonos, perguntasse o que significa cada um dos nomes que você escreveu como você diria a ele? Escreva.

Acessar pelo navegador: https://ggbm.at/ydfdh4m2
Baixar: https://www.dropbox.com/s/lmhug9tnlp8hmz1/ATIVIDADE%2011.ggb?dl=0

Análise *a priori*:

Propomos essa atividade com o intuito de classificar os polígonos que possuem três lados como triângulo, além de dar condições aos aluno de construir a definição de triângulos equilátero, isósceles e escaleno. Para construirmos uma atividade que nos permitisse cumprir com esses objetivos, manipulamos duas variáveis didáticas. A primeira delas foi a **congruência dos lados** das figuras presentes no arquivo do GeoGebra "Atividade 11", à qual tem como valores $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{com\ n} \neq \mathbf{1}$. Como essa atividade trabalha com triângulos o valor máximo para n é **3**, assim os triângulos têm três lados congruentes, dois lados congruente ou não possuem lados congruentes. A segunda variável didática é a **Configuração inicial**, que pode assumir um valor **prototípica**, é aquela configuração comumente encontrada nos livros e que dão destaque, desde a primeira vista, às principais características do objeto matemático. Nessa atividade, atribuímos o valor **igual**, ou seja, à primeira vista, os três triângulos são iguais, mas suas propriedades só são observáveis mediante a investigação da construção. Esse valor atribuído dá sentido ao uso de um *software* de geometria dinâmica, e as características não são dadas, mas sim descobertas.

Ao final da aplicação dessa atividade, professor institucionalizaria que:

- Todo polígono que possui apenas três lados, e consequentemente três ângulos, é denominado triângulo;
- Triângulos equiláteros são polígonos regulares de três lados, ou seja, possuem lados congruentes entre si e ângulos internos congruentes entre si.
- Triângulos isósceles são aqueles que possuem dois lados congruentes (de mesma medida);
- Triângulos escalenos são aqueles que não possuem nem um lado nem um ângulo congruentes.
- Destacar com base na definição que o triângulo equilátero é um caso particular de isósceles, colocaria uma situação e pediria para verificar se atende ou não a definição, por exemplo, com um aluno que faltou.

Pelo que se pode comprovar na análise institucional dos documentos oficiais, os triângulos são polígonos cujo estudo remonta desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Por essa razão, é plausível supor que assim que abrirem o arquivo, os alunos informariam como característica em comum que “são três triângulos” ou mesmo que “têm três lados”. Assim, não esperamos respostas elaboradas sobre as propriedades não-ostensivas do objeto geométrico, mas sim descrições pautadas nas características óbvias. E nosso intuito é que eles saibam que, a partir desse momento, estudariam exclusivamente triângulos.

Entretanto, o item (b) busca que os alunos comecem a descobrir atributos individuais de cada um dos três polígonos, ou seja, durante a situação de ação eles terão seu primeiro contato com as características que dividem o conjunto dos triângulos em três: equilátero isósceles e escalenos. Desse modo, a resposta desejável para este item é que “o primeiro triângulo possui dois lados congruente”, “o segundo possui todos os lados congruentes” e “o terceiro não tem lados congruentes”.

Nesse contexto, o item (c) tem o intuito de levar os alunos a refletirem sobre as características da segunda figura e perceberem que ela é um polígono regular de três lados. Caso os alunos consigam identificar o qual dos três triângulos é regular, isso é um indício de que a aprendizagem ocorreu, pois eles mobilizariam o conhecimento em uma situação diferente da que o conceito de polígono emergiu. Enquanto que o item (d) requer que seja dado um nome para cada uma das construções, o que pode gerar discussões sobre a necessidade de padronização dos nomes dos objetos matemáticos, quanto pode evidenciar se os alunos já haviam estudado o conteúdo em algum momento anterior. Assim, no momento da institucionalização os nomes – isósceles[41], equilátero [42]e escaleno [43]– devem ser atribuído a cada construção e explicado seu significado.

Do mesmo modo que o último item da Atividade 10, o item (e) dessa atividade está posto a fim de que os alunos escrevam uma definição para os três tipos de triângulos em estudo. É por meio do registro dos alunos nesse item que poderemos avaliar se a atividade cumpriu seu papel de permitir que alunos tenham acesso, por meio de exploração, ao atributos definidores.

ATIVIDADE 12

Meça os ângulos internos das construções da ATIVIDADE 12, investigue-as e responda:

a) O que você pode observar?
b) Que nome você daria a cada polígono?
c) Escreva uma definição para cada polígono.

Acessar pelo navegador: https://ggbm.at/gxbmxxnw

Objetivo: https://www.dropbox.com/s/64l8nmnf37qgfyk/ATIVIDADE%2012.ggb?dl=0

Análise *a priori*

Essa atividade se diferencia da Atividade 11 pelo foco nos ângulo internos dos triângulos. Aqui o objetivo está em classificar os triângulos quanto aos ângulos internos, nomear os triângulos como acutângulo, obtusângulo e retângulo ao passo que se busca construir essas definições.

Assim como nas outras atividades da sequência, estes objetivos são viabilizados pela manipulação das variáveis didáticas, que nesse caso são **Medidas dos ângulos internos** e **Exibição do polígono**. A primeira variável são atribuíveis três classes de valores: $\boldsymbol{\alpha = 90°}$; $\boldsymbol{\alpha > 90°}$; $\boldsymbol{\alpha < 90°}$. Se um triângulo possui um ângulo interno da primeira classe, ele é dito

[41] A palavra **isósceles** vem indiretamente do grego antigo *isoskeles*, através do latim. *Isoskeles* vem da junção de duas outras palavras: *isos* e *skelos*. A palavra *isos* significa igual ou parecido. Em relação a pessoas, *isos* significa justo ou imparcial, e em relação ao relevo ou superfícies sólidas significa plano ou liso. *Skelos* significa perna, como a perna de uma pessoa. Assim, *isoskeles* significa literalmente "**com pernas iguais**". Fonte: https://www.dicionarioetimologico.com.br/isosceles/

[42] A palavra **equilátero** vem do latim *aequilaterum*, foi formado a partir de junção de duas palavras: *aequus* e *latus*. A palavra *aequus* é um adjetivo que significa igual. *Aequus* também pode ter outros significados, como uma superfície que é lisa ou plana. Aplicado a pessoas, *aequus* indica alguém que é justo, imparcial ou com emoções equilibradas (calmo). *Latus*, ou *lateris*, significa lado, ou flanco. Em português, a palavra lado vem de *latus*. Assim, *aequilaterum* significa literalmente "lados iguais".

[43] Do Grego, *skalenos*, "desigual, desparelho, grosseiro", "coxo", derivado de *skallein*, "cortar, limpar vegetação".

retângulo. Se possui um ângulo interno pertencente a segunda classe ele é obtusângulo. Porém, se todos os ângulos internos pertencem à terceira classe, então ele é dito acutângulo. No que diz respeito à segunda variável didática, **visível** e **oculta** são os valores que poderiam ser atribuídos a essa variável. Os dois valores são utilizados gerando assim um fenômeno visual que poderia contribuir na classificação dos triângulos. A partir dos resultados obtidos pelos alunos no processo de resolução dessa atividade, institucionalizaríamos os seguintes itens:

- Se um triângulo possui um de seus ângulos internos maior do que 90º, ele é dito obtusângulo;
- Se um triângulo possui todos os seus ângulos internos menores do que 90º, ele é dito acutângulo;
- Se um triângulo possui um de seus ângulos internos igual a 90º, ele é dito retângulo.

Pode-se dizer que essa atividade é complementar da Atividade 11, no que diz respeito ao estudo da classificação dos triângulos. Enquanto que a anterior tratava de classificar os triângulos de acordo com as características dos lados, essa foca a medida dos ângulos internos.

Durante a situação de ação, espera-se que os alunos manipulem as construções, movendo os vértices e observando principalmente as medidas dos ângulos e os demais comportamentos da construção. O triângulo FGH foi construído para ser obtusângulos, desse modo, ele desaparece se nenhum dos ângulos internos tiver medida maior do que 90º. Enquanto que o triângulo ABC é retângulo, sendo impossível deformá-lo de tal forma que o ângulo ABC tenha medida diferente de 90º. E a exibição do triângulo IJK está condicionada a que todos seus ângulos internos se mantenham com medidas menores que 90º.

O item (a) solicita que os alunos escrevam o que eles observam quando manipulam, eles podem simplesmente dizer que desaparece sem se darem conta de em qual circunstância se dá esse fenômeno. O item (b), análogo a outros presentes em atividades anteriores desta sequência solicita o nome desses tipos de triângulos, tendo como principal função verificar se os conceitos trabalhados nessa Atividade já faziam parte, de alguma forma, do conhecimento dos alunos. Com o item (c) espera-se que os alunos listem uma série de características de cada triângulo observadas por meio da manipulação das construções no GeoGebra. É provável que o professor tenha que efetuar nova devolução desse item questionando os alunos: Quantos lados tem cada figura? Qual a medida dos ângulos internos da figura quando ela desaparece?

Mais uma vez a aproximação de casas decimais do GeoGebra pode levar os alunos a não descreverem com precisão que o triângulo FGH desaparece quando nenhum de seus ângulos internos possui medida igual maior do que 90º. Do mesmo modo, eles podem não perceber que o triângulo IJK necessita ter todos os seus ângulos internos menores que 90º para ser exibido. Contudo, espera-se que os alunos digam valores aproximados, a partir dos quais o professor, no momento da institucionalização discutiria.

ATIVIDADE 13

Investigue os polígonos do arquivo ATIVIDADE 13 e responda:

a) Quais as semelhanças? Quais as diferenças?
b) Baseado no que você observou, como você chamaria esses polígonos?
c) Com base nas observações, como você definiria cada um desses polígonos?

Acessar pelo navegador: https://ggbm.at/jsyr2faq

Baixar: https://www.dropbox.com/s/0tjs8od0gs1v7yu/ATIVIDADE%2013.ggb?dl=0

Análise *a priori*

Essa atividade tem por objetivo construir as definições de quadrilátero qualquer, trapézio e paralelogramo e as classes de paralelogramo, para o qual a variável didática **Configuração inicial** corrobora para o cumprimento ao assumirem os valores **prototípica** e **igual**, semelhante ao que ocorreu na Atividade 11. A outra variável didática utilizada foi o **Número de pares de lados paralelos**: à qual pode ser atribuído valores n com $n \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, assim, um quadrilátero pode ter 0, 1 ou 2 pares de lados paralelos.

Ao abrir o arquivo do GeoGebra os alunos se deparariam com três quadriláteros dispostos de forma idêntica, o que é proposital para estimular que eles explorem esta construção. Porém, caso eles não tomem a iniciativa, o professor pode estimulá-los fazendo questionamentos do tipo: *Essas três figuras geométricas são polígonos? O que você pode dizer sobre os lados? O que você pode me dizer sobre os ângulos internos?* Na realidade, essas indagações teriam que ser utilizadas em algum momento, seja para efetuar a devolução da situação, ou mesmo para que os alunos aprofundem suas respostas, por exemplo, no item (a).

No item (a), é possível que eles se restrinjam a dizer que todas as construções têm quatro lados. Essa resposta, embora possa ser considerada "rasa", é suficiente para iniciar o processo de construção da definição do quadrilátero. De fato, esta atividade está direcionada para que os alunos compreendam a divisão interna dos quadriláteros, neste sentido, as diferenças listadas é que constituiriam os principais atributos definidores utilizados.

O quadrilátero ABCD é um quadrilátero qualquer, sendo assim, os alunos poderiam manipulá-lo e não perceberem característica especial, contudo, quando eles investigarem o quadrilátero EFGH, por exemplo, eles poderiam notar que esta construção guarda característica mais evidentes. Esse quadrilátero (EFGH) é um paralelogramo, e a propriedade mais evidente é que os alunos não poderiam mover seus elementos de tal forma a dispor um polígono não convexo. Acreditamos que seria necessário que o professor efetuasse nova devolução ao questionar aos alunos *"vocês lembram das retas e segmentos paralelos? Esses polígonos têm algum par de lados paralelos? Quantos?".* Por meio deste questionamento acreditamos que eles seriam capazes de perceber que o quadrilátero EFGH possui dois pares de lados paralelos e que o quadrilátero IJKL possui apena um par.

Feito isso, o professor poderia questionar: *O que é que vocês têm a dizer sobre os ângulos internos dessas figuras?* É bem provável que os alunos não percebam que o EFGH tenha ângulos opostos congruentes, contudo, observar as características dos ângulos internos de um polígono entraria para o repertório de elementos a serem investigados pelos alunos.

Os itens (b) e (c) tratam, respectivamente, da denominação e escrita da definição de cada um dos tipos de quadriláteros. Esperamos que os alunos utilizassem as características listadas no item (a) para este fim. É provável que eles não saibam o que é uma "definição", contudo, neste momento, eles já podem entender o que este termo significa, uma vez que já construíram várias durante as outras atividades.

Durante a situação de institucionalização, o professor deverá ouvir e anotar esses atributos e, a partir deles, escrever uma definição para cada figura, e informar quais nomes são dados a cada um dos quadriláteros.

ATIVIDADE 14

Investigue as **duas** primeiras construções do arquivo ATIVIDADE 14 e responda:

a) Compare as características delas com as definições da atividade anterior. Em quais das três definições essas **duas** construções se encaixam?
b) Quais as diferenças entre essas duas construções?
c) Dê nome e escreva uma definição para cada uma das duas, baseado nas suas observações durante a resolução dos itens a) e b).
d) Investigue a terceira construção e compare com as duas definições que você escreveu no item c). O que você pode observar?
e) Dê nome e escreva uma definição para a terceira construção.

Acessar pelo navegador: https://ggbm.at/bjqd3wxm

Baixar: https://www.dropbox.com/s/7hutbbphbgnh6ij/ATIVIDADE%2014.ggb?dl=0

Análise *a priori*

Objetivávamos com essa atividade que ao final os alunos fossem capazes de construir a definição de retângulo, losango e quadrado; perceber que os retângulos e losangos são paralelogramos; perceber que o quadrado está na intersecção dos retângulos com os losangos. Para esse fim, a variável didática **Configuração inicial** foi novamente manipulada e assumiu, também, os valores **prototípica** e **igual**. A segunda variável didática que influenciaria na constituição da Atividade é **Ângulos internos congruentes** cujos valores atribuíveis possíveis são **2 pares** ou **4 pares**. A partir disso institucionalizaríamos que Retângulo é um quadrilátero que tem quatro ângulos internos retos, que Losango é um quadrilátero cujos lados têm a mesma medida e que o quadrado é um polígono que é ao mesmo tempo retângulo e losango.

Novamente, a disposição de forma quase idêntica das construções que compõem o arquivo é uma escolha didática para motivar os alunos a investigarem se de fato as figuras geométricas são todas iguais. Por meio da exploração de cada um dos polígonos, espera-se que eles percebam que o quadrilátero ABCD é um losango, enquanto que EFGH é um retângulo qualquer diferente do IJKL que é um quadrado.

O item (a) destina-se a verificação da aprendizagem dos conceitos trabalhados na Atividade 13, ou seja, deseja-se que os alunos digam que os três polígonos são paralelogramos. Além disso, visa estabelecer os princípios para a construção de uma definição do tipo hierárquica entre os quadriláteros do tipo paralelogramo. Cabe ressaltar que a atenção nos itens (a) e (b) é direcionada para o losango e para o retângulo. É possível que seja necessária nova devolução, pedindo que os alunos investiguem o paralelismo dos lados das duas primeiras construções, ABCD e EFGH. O reconhecimento do paralelismo dos lados do losango só poderá ocorrer caso os alunos tracem a reta suporte dos lados. Caso que os alunos não tenham esta ideia, caberá ao professor sugerir que assim o façam.

No item (b) deseja-se que os alunos percebam as diferenças, ou seja, que o losango tem lados congruentes e possui dois pares de ângulos internos congruentes, enquanto que o retângulo possui dois pares de lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes e iguais a 90º. Em seguida, o item (c) solicita de imediato a definição desses dois primeiros polígonos, assim, é possível que seja necessário que o professor efetue uma institucionalização parcial neste momento, pois o sucesso da Atividade 14 depende fortemente do que será discutido e aprendido até este momento pelos alunos.

Na sequência, os itens (d) e (e) destinam-se à construção da definição de quadrado como pertencente a intersecção do conjunto dos retângulos e losangos. Dessa forma, espera-se obter como resposta para o item (d) uma lista de características, na qual constaria "a congruência de todos os lados" e "congruência dos ângulos internos". Pode ser necessária uma nova devolução para que os alunos observem esse fato, caso ocorra, o professor solicitaria que os alunos investiguem os lados e os ângulos internos do quadrilátero IJKL. Nesse contexto, o item (e) se destina inicialmente a verificar se pelas características observadas, os alunos reconhecem esse quadrilátero como sendo um quadrado e o denominam como tal. Além disso, deseja-se obter uma definição que diga que essa figura "possui ao mesmo tempo lados congruentes e ângulos internos congruentes".

Caberá ao professor, no momento da institucionalização, declarar que o quadrado é um caso particular de retângulo e ao mesmo tempo um caso particular de losango. Provavelmente será necessário organizar um esquema que sintetize tudo o que foi observado sobre os quadriláteros desde a Atividade 13.

APÊNDICE C

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) aluno (a),

Eu, Joaby de Oliveira Silva, responsável pela pesquisa "**Uma sequência didática para o ensino de polígono no 6º ano**", estou te convidando para participar como voluntário do meu estudo no Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-Bahia.

Esta pesquisa visa identificar as possíveis contribuições do ambiente computacional GeoGebra no processo de desenvolvimento da definição de polígono no 6º ano do Ensino Fundamental. Além de contribuir para o uso de ambientes computacionais no ensino da matemática, esta pesquisa se justifica pelo fato de que este conteúdo será abordado nos anos de estudo que você tem pela frente, durante a Educação Básica, e ainda, eles têm várias aplicações no quotidiano.

Para realização desta pesquisa será feito o seguinte: participarei de 6 aulas em sua turma, durante as quais você resolverá algumas de atividades individualmente e em dupla com outro colega de turma. Durante a realização dessas atividades você aprenderá como utilizar o ambiente computacional GeoGebra; irá responder, de forma escrita, algumas questões em dupla e outras individualmente.

É possível que você sinta desconforto ou constrangimento ao ser observado pelo pesquisador durante a resolução das atividades; cansaço devido a quantidade de questões a serem resolvidas; há também o risco de exibição das suas respostas para pessoas que não estão participando da pesquisa; e ainda, esta pesquisa pode te atrapalhar nas atividades escolares, caso demore mais do que o planejado. Contudo, o pesquisador atuará em sala como se fosse seu professor, ou auxiliar dele, minimizando assim os riscos de constrangimento e desconforto. Além disso, a quantidade de questões a serem respondidas não excederá em muito à quantidade que você costuma resolver em sala e ainda, poderá contar com a ajuda de um colega. E, somente o pesquisador e o seu professor terão acesso às suas resoluções das atividades, garantindo assim a sua privacidade.

Diante dos riscos e das formas de minimiza-los citados acima, essa pesquisa pode contribuir positivamente para a sua formação, uma vez que o conteúdo a ser abordado faz parte da grade obrigatória do 6º ano, o qual você está cursando. Além da potencialidade de promover um aprendizado mais significativo para você, esta pesquisa pode ajudar professores de matemática a integrarem o GeoGebra nas suas aulas. Assim, ela pode trazer contribuições para pesquisas em Educação Matemática, mais especificamente sobre o Ensino de Geometria.

Salientamos que você terá a liberdade de pedir esclarecimento sobre qualquer uma das etapas da pesquisa, antes, durante e depois da realização da pesquisa. Além disso, pode desistir a qualquer momento da sua participação, seja por vontade própria ou por ordem do teu responsável, mesmo depois de ter assinado este documento, e não será, por isso, penalizado de nenhuma forma. Caso você queira desistir de participar da pesquisa, basta informar ao pesquisador que este termo lhe será devolvido.

Garantimos que a pesquisa não representa qualquer forma de gasto ou remuneração para você ou seu responsável. Além disso, garantimos que, caso haja gastos, não previstos, decorrentes da pesquisa, você será reembolsado. Garantimos também o direito a indenização se o você tiver qualquer dano decorrente da sua participação na pesquisa.

Ressaltamos que nem você nem seu responsável pagará nada nem receberá pagamento por sua participação. E que a opção por não participar não trará para você qualquer prejuízo na escola. Cabe informar que este TALE será emitido em duas vias, uma permanecendo com você e outra com o pesquisador.

Caso tenha alguma dúvida ou necessidade de maiores esclarecimentos pode procurar o pesquisador responsável Joaby de Oliveira Silva, na Rua do Ouro, 147-A, Salobrinho, Ilhéus-Bahia, CEP: 45662-200, no telefone (75) 99214-2656 ou no E-mail: joabyjos@hotmail.com.
Esta pesquisa teve os aspectos relativos à Ética da Pesquisa envolvendo Seres Humanos analisados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Santa Cruz. Em caso de dúvidas sobre a ética desta pesquisa ou denúncias de abuso, procure o CEP, que fica no Campus Soane Nazaré de Andrade, Rodovia Jorge Amado, KM16, Bairro Salobrinho, Torre Administrativa, 3º andar, CEP 45552-900, Ilhéus, Bahia. Fone (73) 3680-5319. Email: cep_uesc@uesc.br. Horário de funcionamento segunda a quinta-feira, de 8:00h às 12:00h e de 13:30 às 16:00h.

(VERSO DA FOLHA)

Nossos sinceros agradecimentos por sua colaboração,

______________________________	______________________________
Pesquisador: Joaby de Oliveira Silva E-mail: joabyjos@hotmail.com	Prof. Dr.: Gilson Bispo de Jesus E-mail: gilsonbjs@bol.com

Eu, ____, aceito participar da pesquisa "**Uma sequência didática para o ensino de polígono no 6º ano**". Fui devidamente informado (a) dos procedimentos que serão utilizados, assim como os riscos e benefícios. Foi-me garantido que posso desistir da pesquisa em qualquer momento que eu deseje e que minha identidade será preservada. (Verso da folha).

____	
Assinatura do Participante	Assinatura Datiloscópica

______________________________	______________________________
Testemunha	Testemunha

Ilhéus, ___/____/_______

APÊNDICE D

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) Sr/Sra,

Eu, Joaby de Oliveira Silva, responsável pela pesquisa "**Uma sequência didática para o ensino de polígono no 6º ano**", solicito a você a autorização para que o seu filho (a) possa participar como voluntário do meu estudo no Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-Bahia.

Esta pesquisa visa identificar as possíveis contribuições do ambiente computacional GeoGebra no processo de desenvolvimento da definição de polígono no 6º ano do Ensino Fundamental. Além de contribuir para a operacionalização do uso de ambientes computacionais no ensino da matemática, esta pesquisa se justifica pelo fato de que os polígonos são um dos conteúdos geométricos que fazem parte de todos os níveis da Educação Básica e que tem várias aplicações no quotidiano.

Uma vez que o senhor (a) autorize a participação do estudante sob sua responsabilidade, ele participará de uma série de 6 aulas, durante as quais resolverá uma sequência de atividades individualmente e em dupla com outro colega de turma. Essas atividades destinam-se a ensinar ao participante como utilizar o ambiente computacional GeoGebra; responder de forma escrita a um conjunto de questões sobre polígonos em dupla e individualmente.

É possível que o estudante sinta desconforto ou constrangimento ao ser observado pelo pesquisador durante a resolução das atividades; cansaço devido a quantidade de questões a serem resolvidas; existe a possibilidade de exibição das respostas dele para pessoas externas a pesquisa; e também atrapalhar as atividades escolares, caso a pesquisa demore mais do que o planejado. Contudo, o pesquisador atuará em sala como se fosse o professor da turma, ou auxiliar do mesmo, minimizando assim os riscos de constrangimento e desconforto. Além disso, a quantidade de questões a serem respondidas não excederá em muito a que ele costuma resolver em sala e ainda, ele contará com a ajuda de um colega. E, somente o pesquisador e o professor responsável pela turma terão acesso às resoluções do estudante, garantindo assim a privacidade dele.

Diante dos riscos e das formas de minimiza-los citados acima, essa pesquisa pode contribuir positivamente para a formação do estudante voluntário, uma vez que o conteúdo a ser abordado faz parte da grade obrigatória do 6º ano, o qual o estudante está cursando. Além da potencialidade de promover um aprendizado mais significativo para o estudante, esta pesquisa pode ajudar professores de matemática a integrarem o GeoGebra nas suas aulas. Assim, ela pode trazer contribuições para pesquisas em Educação Matemática, mais especificamente sobre o Ensino de Geometria.

Salientamos que o senhor (a) terá a liberdade de pedir esclarecimento sobre qualquer uma das etapas da pesquisa, antes, durante e depois da realização da pesquisa. Além disso, o estudante terá o direito de desistir a qualquer momento da sua participação, seja por vontade própria ou por ordem do seu responsável, mesmo depois de ter assinado este documento, e não será, por isso, penalizado de nenhuma forma. Caso escolha desautorizar a participação do estudante, basta informar ao pesquisador que este termo lhe será devolvido.

Garantimos que a pesquisa não representa qualquer forma de gasto ou remuneração ao (à) senhor (a). Além disso, asseguramos que, caso haja gastos decorrentes da pesquisa, não previstos, ele será ressarcido. Garantimos também o direito a indenização se o participante tiver qualquer dano decorrente da sua participação na pesquisa.

Ressaltamos que o senhor não pagará nada, nem receberá pagamento pela participação do seu filho (a). E que a opção por não participar não trará para o senhor, nem para o estudante voluntário, qualquer prejuízo na escola. Cabe informar que este TCLE será emitido em duas vias, uma permanecendo com o participante e outra com o pesquisador.

Caso tenha alguma dúvida ou necessidade de maiores esclarecimentos pode procurar o pesquisador responsável Joaby de Oliveira Silva, na Rua do Ouro, 147-A, Salobrinho, Ilhéus-Bahia, CEP: 45662-200, no telefone (75) 99214-2656 ou no E-mail: joabyjos@hotmail.com.
Esta pesquisa teve os aspectos relativos à Ética da Pesquisa envolvendo Seres Humanos analisados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Santa Cruz. Em caso de dúvidas sobre a ética desta pesquisa ou denúncias de abuso, procure o CEP, que fica no Campus Soane Nazaré de Andrade, Rodovia Jorge Amado, KM16, Bairro Salobrinho, Torre Administrativa, 3º andar, CEP 45552-900, Ilhéus, Bahia. Fone (73) 3680-5319. E-mail: cep_uesc@uesc.br. Horário de funcionamento: segunda a quinta-feira, de 8:00h às 12:00h e de 13:30 às 16:00h.

(VERSO DA FOLHA)

Nossos sinceros agradecimentos por sua colaboração,

______________________________	______________________________
Pesquisador: Joaby de Oliveira Silva E-mail: joabyjos@hotmail.com	Prof. Dr.: Gilson Bispo de Jesus E-mail: gilsonbjs@bol.com

Eu, ____, autorizo a participação do estudante, ____, na pesquisa "**Uma sequência didática para o ensino de polígono no 6º ano**". Fui devidamente informado (a) dos procedimentos que serão utilizados, assim como os riscos e benefícios. Foi-me garantido que posso desistir da pesquisa em qualquer momento que eu deseje e que que minha identidade e a do menor será preservada. (Verso da folha).

____	
Assinatura do Responsável	Assinatura Datiloscópica

______________________________	______________________________
Testemunha	Testemunha

Ilhéus, ___/____/_______