UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TAMILES DA SILVA OLIVEIRA

PROPORCIONALIDADE: UM OLHAR SOBRE OS ESQUEMAS DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL

ILHÉUS-BAHIA

2018

TAMILES DA SILVA OLIVEIRA

PROPORCIONALIDADE:UM OLHAR SOBRE OS ESQUEMAS DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz como requisito à título de mestre em Educação Matemática

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

Coorientadora: Profa. Dra. Irene Mauricio Cazorla

ILHÉUS-BAHIA

2018

TAMILES DA SILVA OLIVEIRA

PROPORCIONALIDADE:UM OLHAR SOBRE OS ESQUEMAS DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada a Universidade Estadual de Santa Cruz para obtenção do título de mestre.

Ilhéus, 27 de fevereiro

BANCA EXAMINADORA

____

1º membro
Profa. Drª. Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana (orientadora)
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC

____

2º membro
Profa. Drª . Irene Mauricio Cazorla(Coorientadora)
Universidade Estadual de Santa Cruz -UESC

____

3º membro
Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC

____

4º membro
Prof. Dr. José Aires de Castro Filho
Universidade Federal de Ceará – UFC

Ao Meu Deus por ter me dado força e vigor. Á minha mãe Sônia Matos, por todo apoio, investimento, incentivo, e carinho de sempre. E a minha família por todo companheirismo!

AGRADECIMENTOS

"Não há no mundo exagero mais belo que a gratidão"

Jean de La Bruyère

Olho para trás e vejo a longa caminhada que percorri, na qual chorei, sorri, lutei, enfrentei noites sem dormir e, em alguns momentos, desistir parecia ser mais fácil que continuar, mas foi o apoio de um elenco que estava nos bastidores que fez com que eu chegasse a esta grande conquista.

A minha eterna gratidão....

Em primeiro lugar, é ao meu Salvador, a Ele seja dada toda honra e glória por este momento, pois foi Ele que me fortaleceu e me permitiu alcançar esta conquista.

À minha mãe Sônia Matos, por ter sonhado esse sonho junto comigo e acreditado em mim mais do que eu mesma. Por ter investido o pouco que tinha na minha formação. Por nunca medir esforços para me ajudar e por estar sempre comigo. Eu amo muito essa mulher de fibra e devo muito a ela!

À minha família, o motivo pelo qual me faz lutar todos os dias, em especial, à minha voinha Dalva, minha irmã Wanessa e tia Simone, minha eterna gratidão a vocês por terem sempre me apoiado em tudo que faço. Eu não sei o que faria sem vocês.

Aos meus amigos e irmãos Jadson Souza e Marcus Vinícius, por terem tornado a caminhada no mestrado mais bonita. Obrigada pelo apoio e incentivo de sempre. Eu amo muito vocês!

Aos meus melhores amigos de infância, Laiza Martins e Thiago Cavalcante, por terem me apoiado nessa caminhada, acalentando-me em momentos difíceis e incentivando sempre. Obrigada por tudo!

À minha orientadora, Dra. Eurivalda Santana, a qual eu considero um divisor de águas na minha vida. Feliz o dia em que eu encontrei essa mulher. Obrigada por toda a paciência, ensinamentos e pelas grandes oportunidades. Jamais esquecerei essa professora e meu coração será eternamente grata!

Ao grupo de pesquisa GPEMEC, pela caminhada, parceria e aprendizado. Esse grupo é especial. Obrigada, não há palavras para expressar a minha felicidade em ter tido a oportunidade de fazer parte desse grupo.

Aos parceiros do grupo de segunda, Fabiane, Professora Elizabete, Pedro, Jean, Roque, Weriton, Sandra, Jessíca, e Luana, que fizeram parte diretamente da construção desse trabalho. Obrigada por todas as contribuições e pelos momentos de descontração!

À professora Irene Carzola, pela coorientação e disponibilidade de sempre. Por ter me compreendido e apoiado em um momento difícil e muito delicado. Serei eternamente grata!

À professora Dra. Sandra Magina, pelas grandes contribuições a este trabalho e à minha vida acadêmica. És uma grande inspiração!

Ao professor Dr. José Aires, por ter aceitado o convite de participar da minha banca, por todas as contribuições e por toda gentileza de sempre.

À Rafael Bertoldo, por toda atenção, educação e disponibilidade de todos os dias.

Aos professores do PPGEM, por terem contribuído, de forma significativa, para o meu desenvolvimento profissional.

À escola parceira desta pesquisa, por abrir o seu espaço para que pudéssemos realizar este estudo.

Ao E-Mult, por permitir florescer o fruto desta dissertação e por todas as oportunidades de experiência.

À CAPES, pelo financiamento dessa pesquisa.

À Juventude wesleyana, pelas orações, apoio e torcida de sempre!

E, por fim, à vida, por ter proporcionado essa oportunidade ímpar de fazer parte do PPGEM!

Posso todas as coisas
em Cristo que me
fortalece!
Filipenses 4:13

PROPORCIONALIDADE: UM OLHAR SOBRE OS ESQUEMAS DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL

RESUMO

Neste estudo, propusemo-nos a compreender os esquemas de estudantes do Ensino Fundamental, ao resolverem situações de proporção simples, em momentos escolares distintos. Tivemos como embasamento a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gerárd Vergnaud, pois ela possibilita fazer um diagnóstico da aprendizagem dos estudantes. O nosso estudo está inserido em um projeto amplo vinculado ao Observatório da Educação (OBEDUC), composto por dois projetos PEM e E-Mult, no qual foi elaborado e aplicado um instrumento diagnóstico composto por 13 situações, envolvendo conceitos da estrutura multiplicativa. O instrumento foi aplicado com os estudantes de escolas públicas do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental, parceiras do projeto. Em seguida, foi realizado um processo formativo com os professores desses estudantes e, por fim, houve uma nova aplicação do mesmo instrumento diagnóstico com os estudantes de parte dos professores que tiveram 75% de frequência na formação. Para alcançarmos o nosso objetivo, fizemos um recorte dos dados coletados no E-Mult. Analisamos os esquemas apresentados por 40 estudantes, inicialmente, em seis situações de proporção simples, em dois momentos escolares distintos: na primeira aplicação do instrumento (pré-teste-2014), os estudantes cursavam o 5º ano, na 2º aplicação do instrumento (pós-teste-2015), estavam no 5º ou no 6º ano. Retornamos à escola para uma nova aplicação do pós-teste 2 (2017), que foi aplicado com 12 estudantes, pois eram os estudantes do grupo dos 40 que ainda estavam matriculados na escola. Após aplicarmos o instrumento e analisarmos os esquemas, realizamos uma entrevista semiestruturada com todos que participaram dessa aplicação. Os resultados indicam que, em todos os anos escolares, a maioria dos estudantes apresenta esquemas explícitos, no entanto, no ano de 2017, cresceu o quantitativo de esquemas implícitos. A representação que mais prevalece é a numérica, no entanto, no ano de 2015, diminuiu o uso da representação desenho, pois essa categoria sofreu uma queda no valor de sua frequência, mas, no ano de 2017, eles voltaram a utilizar essa representação, pois esse quantitativo aumentou. A operação fundamental que eles mais utilizaram no ano de 2014 foi a estrutura multiplicativa. E, em 2015, o uso das operações dessa estrutura se intensificou, pois foi o ano em que eles mais mobilizaram as operações de multiplicação e divisão. No ano de 2017, eles tenderam a utilizar mais operações da estrutura aditiva. Podemos concluir que, no ano em que ocorreu a formação do E-Mult (2015), os efeitos dessa formação alcançaram a sala de aula, pois identificamos, nas resoluções dos estudantes, esquemas semelhantes aos propostos na formação e foi o ano em que os estudantes mais utilizaram as estruturas multiplicativas. Mas, com o passar dos anos, percebemos que esse efeito não se consolida, uma vez que, nos anos em que não tem mais a formação, eles passaram a utilizar a estrutura aditiva que utilizavam antes.

Palavras-chave: Esquemas. Aprendizagem. Ensino Fundamental. Estrutura Multiplicativa.

PROPORCIONALITY: A LOOK AT THE SCHEMES OF JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS

ABSTRAT

In this study, we proposed to understand the schemes of students of Junior High School when they solve situations of simple proportion at different scholar moments. We were based on the Theory of Conceptual Fields proposed by Gérard Vergnaud, because it makes possible to do a diagnostic of student learning. Our study is inserted in a wide project linked to the Education Observatory (OBEDUC), composed by two projects PEM and E-Mult, in which it was produced and applied a diagnostic instrument formed by 13 situations involving concepts of the multiplicative structure. The instrument was applied with the students of public schools from the first to the ninth of Junior High School, project's partners. Then a training process was carried out with the teachers of these students and finally there was a new application of the same diagnostic instrument with the students from the teachers who had obtained 75% of frequency in training. In order to get our goal we made a cutout of data collected in the E-Mult. We analyzed the schemes presented by 40 students, first in six situations of simple proportion in two different scholar moments: at the first application of the instrument (pre-test-2014), the students attended the 5th year, at the second application of the instrument (post-test-2015), they were in the 5th or 6th year. We returned to the school for a new application of post-test 2 (2017) that was applied to 12 students because they were the students of the group of 40's who were still enrolled in school. After we had applied the instrument and analyzed the schemes, we accomplished an interview semi-structured with everyone who participated in this application. The results indicate that in all school years most of students present explicit schemes, but in 2017 the number of implicit schemes grew. The most prevalent representation is the numerical one, but in the year of 2015 the use of the representation design decreased, because this category suffered a decrease of the value of its frequency, but in 2017 they used again this representation because this number increased. The multiplicative structure was the fundamental operation most used by them in 2014. And in 2015, the use of the operations of this structure intensified because it was the year in which they most mobilized the operations of multiplication and division. In the year of 2017, they tended to use most additive structure operations. We are able to conclude that in the year in which occurred the E-Mult (2015) training, the effects of this training reached the classroom, because we identified in the students' resolutions similar schemes to those proposed in training and it was the year that the students most used the multiplicative structures. But over the years, we perceived that this effect does not consolidate, because in the years in which there was not the training, they began to use the additive structure they used before.

Keywords: Schemes. Learning. Junior High School. Multiplicative structure.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

CAPS	Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de nível superior
GPEMEC	Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e em Ciências
IES	Instituições de Educação Superior
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
OBEDUC	Observatório de educação
PCN	Parâmetros curriculares nacionais
PIBID	Programa institucional de bolsas de iniciação à docência.
PPGEM	Programa de Pós-graduação de Educação Matemática
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz

Sumário

INTRODUÇÃO

"Ninguém nasce feito, é experimentando-nos no mundo que nós nos fazemos."

Paulo Freire

Acredito que todo educador tem uma trajetória que justifica as suas motivações, escolhas, objetivos e sonhos. Nesse sentido, cada um trilha o próprio percurso de formação, de acordo com as suas experiências. Assim, não poderia tecer as palavras iniciais desta dissertação sem elencar os elementos da caminhada que me possibilitaram alcançar o contexto no qual estou inserida.

Oriunda de escola pública, eu sempre tive como objetivo ingressar na Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), por ser a instituição de ensino mais próxima da região na qual resido. No ano de 2009, optei pelo curso de Licenciatura em Matemática dessa instituição, podendo justificar essa escolha pela boa relação que tinha com a disciplina durante a Educação Básica.

Na graduação, tive a oportunidade de atuar como bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). O Programa me propiciou os primeiros passos na prática docente. Durante o desenvolvimento do projeto, pude perceber as dificuldades que alguns estudantes apresentavam em relação aos conceitos matemáticos e, com o propósito de sanar tais dificuldades, buscava responder a alguns questionamentos. Entre esses, havia um que prevalecia, a saber: Como poderia avaliar a aprendizagem do estudante, além do certo e do errado, sendo que ele apresentava conhecimentos pertinentes, mas não conseguia alcançar a solução correta da situação proposta?

A resposta para esse questionamento veio ainda na graduação, quando tive o privilégio de ser bolsista de iniciação científica no grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e em Ciências (GPEMEC), que considero um divisor de águas na minha trajetória. Esse grupo é formado por pesquisadores, graduandos, mestrandos e professores da Educação Básica. A convivência com eles me proporcionou um novo olhar sobre as discussões e reflexões que se referem à Educação Matemática, contribuindo, de forma significativa, para o meu desenvolvimento profissional.

Dentre as discussões no grupo, encontrei, na “Teoria dos Campos Conceituais – TCC”, respostas que buscava para o meu questionamento, pois, por meio dessa teoria, é possível traçar um diagnóstico da aprendizagem dos estudantes, analisando as suas competências complexas. Consequentemente, o meu trabalho de conclusão de curso foi sobre uma análise dos esquemas dos estudantes do Ensino Médio, ao resolverem situações de combinatória na perspectiva do TCC.

Além disso, o grupo tem ligação direta com o Programa de Pós-Graduação de Educação Matemática (PPGEM). A experiência adquirida fez nascer o desejo de ingressar nesse programa e ampliar o conhecimento sobre Educação Matemática. Após ser aprovada na seleção, tive como inspiração para a pesquisa o meu trabalho de conclusão de curso, visando aprofundar os estudos realizados na graduação que versavam sobre aprendizagem.

De um modo geral, as avaliações externas no Brasil têm revelado baixos índices de desempenho no que se refere à proficiência em Matemática. A nível estadual, nos resultados da Prova Brasil[1], em 2013, a Bahia teve uma média de proficiência em matemática de 188,0, atingindo o nível 3, e, em 2015, avançou para o nível 4, com uma média de 201,0. É notório que houve evolução entre os anos, no entanto, esse resultado ainda não é satisfatório, sendo que o nível máximo a ser atingido é o nível 12.

Essa avaliação nacional foi o ponto de partida para a realização de um projeto amplo desenvolvido em rede. Ligado ao Observatório da Educação (OBEDUC), que é fruto de uma parceria entre a CAPES[2], o INEP[3] e a SECADI[4], objetiva fomentar estudos e pesquisas em educação que utilizem a infraestrutura disponível das Instituições de Educação Superior (IES) e as bases de dados existentes no INEP.

Esse projeto foi intitulado “Um estudo sobre o domínio das estruturas multiplicativas no Ensino Fundamental” - E-Mult, sendo desenvolvido por pesquisadores, professores e estudantes (graduação/mestrado). Financiado pela CAPES, o projeto de número 15727 trata de um estudo que abrangeu três Estados nordestinos: Bahia (sede), Pernambuco e Ceará. Na Bahia, o foco principal era a formação dos professores do Ensino Fundamental, desenvolvido por meio do projeto intitulado “As Estruturas Multiplicativas e a Formação de Professores que Ensinam Matemática na Bahia (PEM)”, financiado pela

[1] É uma avaliação em larga escala, aplicada a cada biênio no 5º e 9º anos do Ensino Fundamental.
[2] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível superior.
[3] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
[4] Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão.

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) sob o número 0019/2013.Salientamos[5] que ao nos referirmos aos dois projetos chamaremos apenas de E-Mult. Cada Estado tinha quatro escolas parceiras, sendo duas dos anos iniciais do Ensino Fundamental e duas dos anos finais do Ensino Fundamental. Existem três justificativas para o desenvolvimento desse projeto:

> Primeiro, a compreensão da multiplicação e da divisão leva bastante tempo e deve se iniciar cedo no contexto escolar; segundo, os resultados de pesquisa indicam que os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, especialmente do 1º ciclo (1º ao 3º ano), podem trabalhar explorando-se as noções intuitivas da multiplicação e divisão e, aos poucos, irem aprofundando seus conhecimentos; e, terceiro, os índices de desempenho dos estudantes nas macroavaliações, por exemplo, na Prova Brasil, demonstram baixos desempenhos dos estudantes em Matemática, do qual as Estruturas Multiplicativas são um campo de conhecimento fundamental. Acrescenta-se, ainda, um conjunto de pesquisas como as realizadas por Magina, Santos e Merlini (2011) e Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014), que apontam para os baixos desempenhos dos estudantes do Ensino Fundamental ao resolverem situações-problema envolvendo o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. (SANTANA; LAUTERT; SANTOS, 2016, p. 79).

O objetivo do E-Mult consistiu em investigar e intervir na prática de professores do Ensino Fundamental no que tange às Estruturas Multiplicativas, baseados no modelo de formação "Ação-reflexão-planejamento-Ação", tendo em vista um grupo colaborativo. Esse modelo de formação foi elaborado por Magina (MAGINA 2008; MAGINA et al, 2010).

A partir dos resultados da pesquisa de Souza (2015), que foi desenvolvida no âmbito do E-Mult, surgiram algumas inquietações que nos levaram a definir a nossa questão de pesquisa. Souza (2015) tinha por objetivo investigar a concepção do professor que ensina matemática no Ensino Fundamental sobre o Campo Conceitual Multiplicativo. No início do processo formativo desenvolvido no projeto, os professores tiveram que elaborar oito situações relativas aos conceitos inerentes ao campo conceitual multiplicativo. A autora classificou 351 situações produzidas por esses professores. Os resultados mostraram que 80% das situações se concentravam no eixo de proporção simples, na classe um para muitos.

A partir desse resultado, propusemo-nos a investigar a aprendizagem dos estudantes desses professores, relacionada ao conceito de proporção simples ao longo dos anos escolares. Intencionamos responder à seguinte questão de pesquisa:

---

[5] A partir desse momento a escrita passará a ser na 3º pessoa do plural, pois a construção dessa pesquisa de deu juntamente com a minha orientadora.

- Quais são os esquemas que estudantes do Ensino Fundamental apresentam ao resolverem situações de proporção simples, em momentos escolares distintos?

Assim, temos como objetivo geral:

- Compreender os esquemas que estudantes do Ensino Fundamental apresentam ao resolverem situações de proporção simples, em momentos escolares distintos.

E como objetivos específicos:

- ✓ *Analisar os desempenhos e esquemas de estudantes do Ensino Fundamental, ao resolverem situações de proporção simples: em um pré-teste, um pós-teste, e em um pós-teste 2.*
- ✓ *Comparar os esquemas dos estudantes em três momentos distintos*

Os sujeitos da pesquisa são 40 estudantes do Ensino Fundamental, por meio dos quais analisamos a resolução de seis situações referentes ao conceito de proporção simples. Fizemos a análise dos esquemas dos estudantes em três momentos escolares distintos. No capítulo da Metodologia, descrevemos esses momentos de maneira detalhada.

E, para embasamento deste estudo, tivemos como aporte teórico à Teoria dos Campos Conceituais (TCC), que é uma teoria cognitivista desenvolvida por Gérard Vergnaud, por meio da qual podemos obter um diagnóstico da aprendizagem, permitindo uma análise do desenvolvimento das competências dos estudantes. Acreditamos que ela fornece o suporte necessário para avaliar os dados apresentados e nos dar um direcionamento para tratarmos do conceito de proporção simples.

Ao tornar possível diagnosticar a aprendizagem, essa teoria oportuniza a análise do desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes relacionada a um dado conceito. Elaboramos a estrutura dos nossos capítulos na seguinte disposição:

No primeiro capítulo, intitulado "Fundamentação Teórica", discutimos as ideias principais da TCC. Esta discussão está dividida em duas seções: primeiramente, apresentamos a teoria de um modo geral, abordando o conceito e o tripé que a compõem: situação, invariantes operatórios e representação; a seguir, fazemos uma abordagem mais detalhada do conceito de esquema, que é o foco principal do estudo. Ainda nesse capítulo, explanaremos sobre a estrutura multiplicativa e o objeto matemático, que é o conceito de proporção simples.

No segundo capítulo, tratamos da Revisão de literatura, que consideramos conveniente dividir em duas seções: na primeira, os estudos feitos no âmbito da Educação

Matemática relacionados à aprendizagem do estudante no que concerne a conceito de proporção simples; na segunda, abordamos algumas considerações sobre os estudos realizados.

No terceiro capítulo – "Percurso metodológico" –, apresentamos o contexto no qual este estudo está inserido, detalhando as ações desenvolvidas durante o projeto E-Mult. Em seguida, situamos a nossa pesquisa, apresentando seus aspectos teóricos característicos, bem como o tipo de abordagem. Assim, definimos o campo da pesquisa, os sujeitos que fizeram parte da nossa amostra, o delineamento da produção e a coleta de dados, finalizando com a descrição dos procedimentos para a análise dos dados.

Por fim, no quarto capítulo – "Dialogando com os dados" –, abordamos a análise e discussão dos resultados apresentados pelos estudantes do Ensino Fundamental ao resolverem situações de proporção simples.

Esperamos que este estudo nos possibilite estabelecer diálogo com a TCC, fornecendo um panorama do processo de aprendizagem dos estudantes do Ensino Fundamental em momentos escolares distintos, no que se refere ao conceito de proporção simples, e identificando as filiações, rupturas e os erros conceituais nos esquemas apresentados pelos estudantes, com a intenção de auxiliar os professores no processo de ensino e aprendizagem na sala de aula.

Pensar em aprendizagem é considerar toda a trajetória e experiências de vida do indivíduo. Seu desenvolvimento está ligado às potencialidades genéticas e aos conhecimentos adquiridos durante as diferentes fases da vida, ou seja, a aprendizagem está conectada com o desenvolvimento cognitivo. Dessa forma, o fato de analisar a aprendizagem do estudante está mais relacionado a um olhar sobre o processo de construção, do que aos resultados finais apresentados por eles no desenvolvimento da aprendizagem.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica, a qual foi utilizada como suporte para analisar os dados da pesquisa e assim compreender os esquemas de estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, ao resolverem situações de proporção simples, em momentos escolares distintos.

Dessa forma, recorremos à Teoria dos Campos Conceituais para analisar as resoluções apresentadas pelos estudantes. Dividimos este capítulo em duas seções: na primeira, apresentamos os elementos da teoria que consideramos pertinentes para a discussão neste estudo, a saber, Campo conceitual, Conceito e Esquema. Na segunda, a Estrutura Multiplicativa, abordando, de maneira detalhada, o objeto matemático.

1.1Teoria dos Campos Conceituais (TCC)

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é oriunda dos estudos realizados pelo pesquisador francês Gérard Vergnaud. A TCC traz contribuições no âmbito da Educação Matemática, no que diz respeito ao processo de aprendizagem do estudante. Segundo Vergnaud (1996, p.1), a TCC "[...] é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas [...]". Ela proporciona suporte para compreender como os estudantes constroem os conceitos e como se desenvolve o conhecimento.

O conhecimento é estruturado em campos conceituais, que é "[...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente interligados durante o processo de aquisição." (VERGNAUD,1982, p. 40)

Um campo conceitual envolve diversas situações com níveis de complexidade e contextos distintos. Uma única situação, ainda que seja simples, engloba mais de um conceito, por isso, Vergnaud defende a ideia de um campo conceitual, e não apenas de um conceito. São as diversas situações propostas que irão garantir significado ao conceito para o estudante. Alcançar o domínio de um campo conceitual não é uma tarefa simples, é necessário considerar "um longo período de tempo por meio da experiência, maturação e aprendizagem." (VERGNAUD, 1982, p. 40).

O termo *experiência* significa que, para o domínio de um campo conceitual, devemos considerar todas as relações que envolvam o estudante, sejam elas escolares ou do cotidiano. As experiências que os estudantes trazem consigo, ou seja, as situações não escolares, também contribuem para ampliar o conhecimento, consequentemente, para o domínio de um campo conceitual.

A *maturação* está relacionada ao "desenvolvimento fisiológico e ao crescimento do sistema nervoso" (SANTANA, 2012, p. 19), ou seja, o processo de crescimento e evolução de cada indivíduo. Salientamos que cada estudante tem um tempo de aprendizagem, isto é, o pensamento se desenvolve de forma peculiar em cada indivíduo.

Quanto à *aprendizagem*, essa é uma função destinada à escola, na qual os estudantes irão adquirir conhecimento dos conceitos formais, conduzidos pelo professor no processo de aprendizagem.

1.1.1 Conceito

Para compreender o processo de desenvolvimento de um conceito, é necessário considerar três conjuntos fundamentais, a saber, (S, I, R), no qual:

> S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (Referência). I, conjunto dos invariantes nas quais se assenta a operacionalidade dos esquemas (Significado). R, conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). (VERGNAUD,1996, p. 166)

O primeiro conjunto é o das *situações.* Essas oportunizam sentido ao conceito, no entanto, o sentido não está nela por si só, mas na interação entre o sujeito, a situação e a representação. Todo conceito tem um conjunto de situações com diferentes níveis de complexidade e, para tratá-las, é necessário mobilizar outros conceitos. Os *Invariantes operatórios* constituem o significado*,* que são as relações e propriedades referentes a um determinado conceito. Por fim, temos o conjunto das *representações (R),* os significantes que representam as relações e propriedades utilizadas para solucionar uma situação. Passaremos a discutir, de forma mais detalhada, cada um desses conjuntos na seção a seguir.

1.1.1.1 Situação

Uma única situação proposta não permite explorar todas as relações e propriedades de um conceito, por isso, na sala de aula, durante o processo de aprendizagem, é importante propor uma variedade de situações, com níveis de complexidade e significados diferentes. As situações são ponto de partida para o domínio de um conceito, ou seja, para a construção de um conhecimento. O saber:

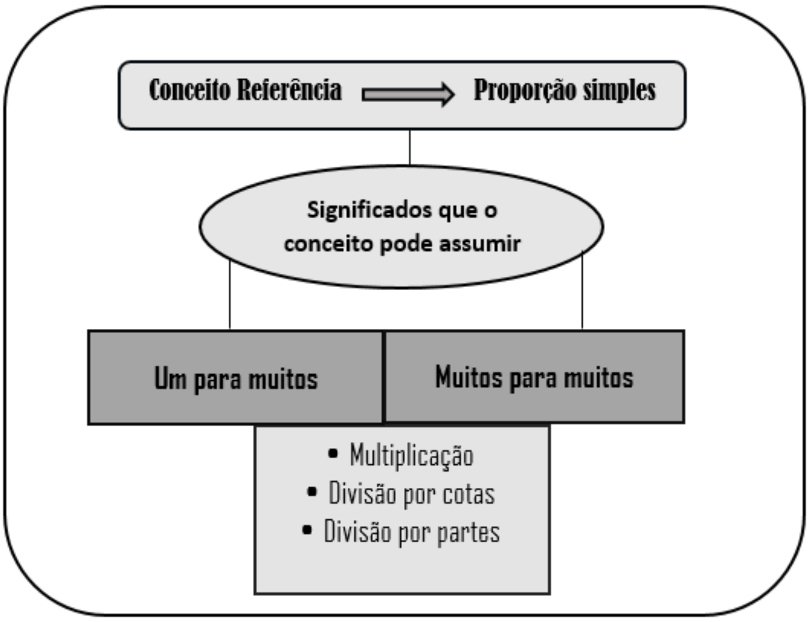
> [...] se forma a partir de problemas a resolver, quer dizer, de situações a dominar. [...] Por problema é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução. (VERGNAUD, 1986, p. 76)

O desenvolvimento da aprendizagem do estudante está diretamente ligado às situações que lhe são propostas, quer dizer, a ação do mesmo diante de um problema a ser resolvido, sendo de cunho teórico ou prático. Concordamos com o autor, no sentido de que o estudante, ao ser confrontado com diferentes situações, irá construir, adaptar e acomodar os seus conhecimentos, tendo autonomia no processo de aprendizagem.

Sobretudo, é importante destacar que o termo *situação* utilizado na teoria "não tem aqui o sentido de situação didática, mas antes o sentido de tarefa." (VERGNAUD, 1996, p. 167). O termo *tarefa* nos remete a algo que requer um esquema de resolução, e o sucesso na tarefa depende do desempenho em cada subtarefa, por isso, ao se examinar um esquema de resolução, é interessante analisar cada subtarefa que foi realizada, pois o desenvolvimento de cada etapa é crucial para o sucesso da tarefa com um todo.

Considerando o conceito de proporção simples, vejamos um exemplo na Figura 1.1 dos tipos de situações que esse conceito pode assumir em uma variedade de situações distintas. Salientamos que esse conceito será abordado de maneira mais detalhada na seção 2.2.2.

Figura 1. 1 - Situações que um conceito de proporção simples pode assumir



Fonte: Material elaborado pela autora.

Podemos observar, na Figura 1.1, que o conceito de proporção simples pode assumir diferentes significados quando traduzidos por situações. Vergnaud (1986) considera relevante, no processo de aquisição do conhecimento, “[...] reconhecer a variedade das classes de problemas possíveis, e analisar com cuidado a sua estrutura e as operações de pensamento necessárias para as tratar.” (VERGNAUD, 1986, p.80).

Nesse sentido, explorar as variedades de situações no processo de aprendizagem pode propiciar ao estudante um domínio do conceito de forma consistente, evitando fragilidades na aprendizagem. Para o tratamento de uma situação, é indispensável que o estudante reconheça os invariantes operatórios que precisam ser mobilizados para a efetivação da tarefa.

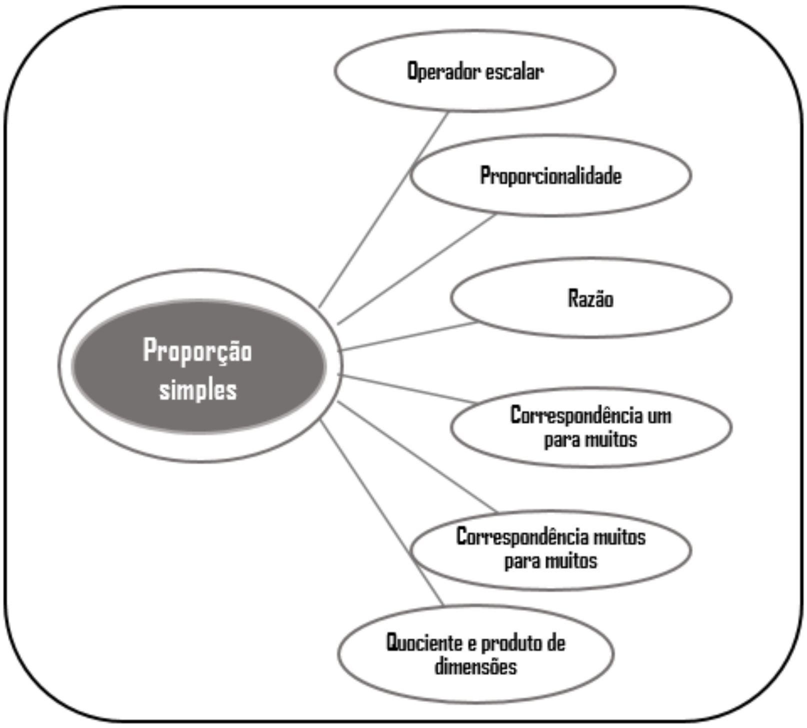
1.1.1.2 Invariantes operatórios

Existem invariantes que são próprios do conceito, ou seja, todo conceito tem um conjunto de relações e propriedades que o representa, fazendo com que a ação do sujeito seja operatória. É inevitável tratarmos de invariantes e não pensarmos em representações, pois há uma relação de dependência entre esses dois conjuntos, ambos estão inteiramente ligados.

Não é suficiente saber as relações e as formas de representar um determinado conceito, mas compreender as condições que permitem tais representações, isto é, os invariantes operatórios que estão envolvidos. São eles que garantem a eficácia da representação.

Na Figura 1.2, apresentamos alguns invariantes operatórios que podem ser mobilizados ao resolver uma situação que envolva o conceito de proporção simples.

Figura 1. 2 - Possíveis Invariantes operatórios do conceito de proporção simples



Fonte: Material elaborado pela autora.

Conforme a Figura 1.2, é possível perceber que o conceito de proporção simples tem um conjunto de invariantes operatórios, que podem ser expressos por representações distintas.

1.1.1.3 - Representação

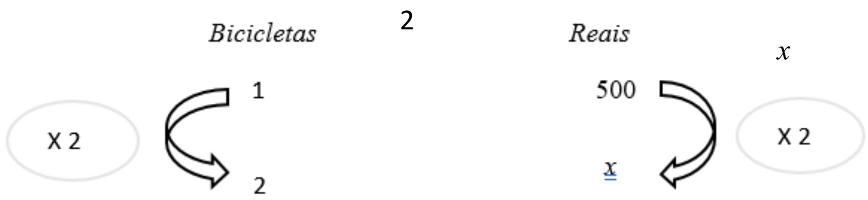
Ao tratarmos de representação, pensamos na representação de "algo", e são os invariantes operatórios (significados) que permitem e determinam as condições para a construção dessa representação. O conhecimento é constituído da relação entre significados (Invariantes operatórios) e significantes (representações), no entanto, "ele não é formado somente de símbolos, mas também de conceitos e de noções que refletem ao mesmo tempo o mundo material e a atividade do sujeito nesse mundo material."

(VERGNAUD, 2009, p. 19). O autor destaca duas funções importantes da representação: a primeira é refletir a realidade e a segunda é propor um cálculo relacional.

No que diz respeito à primeira função da representação – refletir a realidade –, entendemos que ela é responsável por tornar explícitos os invariantes, visto que eles são abstratos e, a princípio, só existem no pensamento, ou seja, são implícitos. Assim, o que permite a sua visualização são as representações. Salientamos, ainda, que “pensar consiste não apenas em passar de uma situação real à representação, mas em passar de uma representação à outra e a ela retornar.” (VERGNAUD, 2009 p. 301). É considerável para o processo de aprendizagem explorar na sala de aula as diferentes representações de um conceito. No que se refere à segunda função, propor um cálculo relacional diz respeito “às operações de pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas nas situações.” (VERGNAUD, 1982, p. 40). Deste modo, vejamos no Exemplo 1 uma ideia de cálculo relacional.

Exemplo 1: SE UMA BICICLETA CUSTA 500,00 REAIS, QUANTO CUSTAM DUAS BICICLETAS?

Figura 1. 3 - Representação da relação existente no exemplo 1



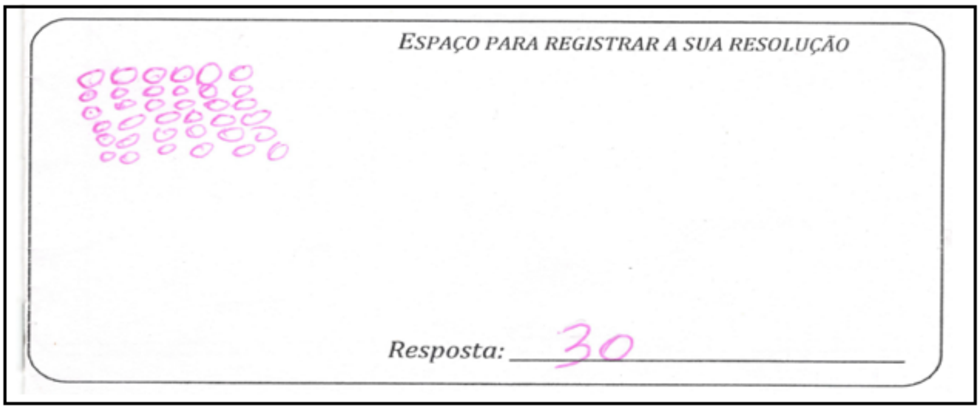
Fonte: Material produzido na pesquisa.

Diante da representação expressa no Exemplo 1, podemos perceber que a relação existente é uma relação quaternária[6], ou seja, o preço de duas bicicletas está para o preço de uma bicicleta, assim como o de duas bicicletas está para uma. Consequentemente, para encontrar o valor do **x** que se refere ao preço de duas bicicletas, multiplica-se o preço da bicicleta (500,00 reais) pelo operador escalar 2. Analogamente, multiplica-se o operador por uma bicicleta, transformando em 2 bicicletas.

[6] Ver seção 2.2.1, na qual discutimos esse termo.

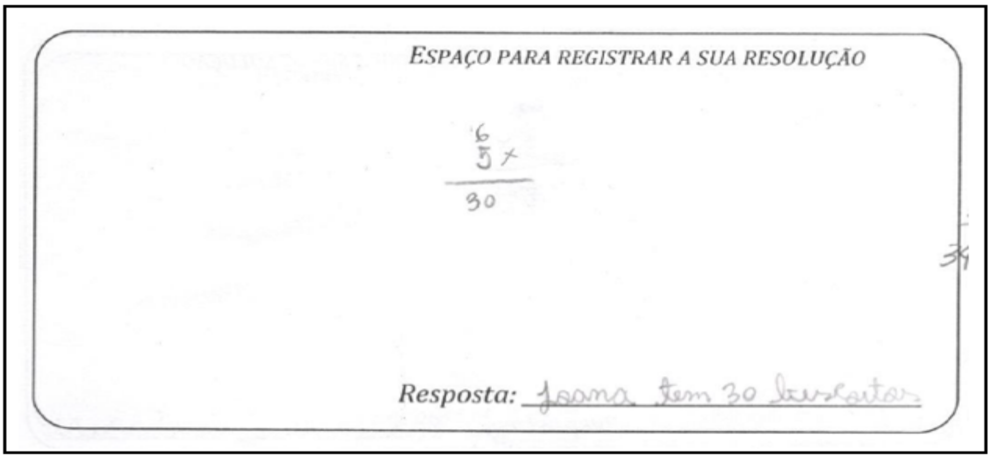
As relações que são estabelecidas com as representações pelo estudante promovem o desenvolvimento do pensamento, assim, "a análise relacional consiste sempre em definir rigorosamente as diferentes classes de transformações e os invariantes qualitativos, quantitativos e relacionais que estão associados a essas classes de transformações." (VERGNAUD, 2009, p.308). Compreendemos que os objetos matemáticos são constituídos de propriedades qualitativas e quantitativas, e da relação com outros objetos, além disso, sofrem transformações devido às operações manifestadas pelo estudante. Desse modo, o conhecimento é concebido por meio da descoberta de novas transformações e de novos invariantes operatórios. Ainda utilizando como referência o conceito de proporção simples, vejamos nas Figuras 1.4 e 1.5 exemplos de representações para uma mesma situação por meio da resolução apresentada por estudantes. Situação - *Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?*

Figura 1. 4 - Exemplo da representação desenho apresentada pelo estudante Pedro



Fonte: Material produzido no E-Mult (2013/2017).

Figura 1. 5 - Exemplo da representação numérica apresentada pelo estudante Lucas



Fonte: Material produzido no EMult (2013/2017).

Como podemos observar nas Figuras 1.3 e 1.4, temos duas representações distintas para um mesmo tipo de situação. Na primeira, o estudante apresenta a sua resolução com bolinhas em agrupamentos de 5 em 5 até chegar ao resultado 30. Na segunda representação, o estudante utiliza o algoritmo da multiplicação. Esses exemplos só comprovam que uma única situação pode apresentar diferentes formas de representação.

A análise das relações efetivadas entre invariantes e representações é passível de ser identificada nos esquemas apresentados pelos estudantes. Mediante isso, na próxima seção, faremos uma discussão sobre o conceito de esquema.

1.2 Esquema

Quando nos referirmos à resolução de situações, o conceito de esquema é essencial, pois é nele que buscamos identificar os conhecimentos envolvidos na ação do sujeito, por meio das competências que estão sendo apresentadas. É importante salientar que estamos entendendo que as "competências dos estudantes, na resolução de situações-problema, aparecem quando são feitas escolhas corretas." (SANTANA, 2012, p. 45).

Escolhas corretas, no sentido de utilizar invariantes operatórios que são apropriados para a resolução de uma determinada situação, no entanto, as escolhas corretas não garantem a efetivação do esquema. A resolução correta de uma situação está inteiramente ligada à habilidade que o estudante possui. Consideramos que a habilidade envolve mobilizar os invariantes operatórios escolhidos, de forma que apresentem a resolução correta da tarefa solicitada (SANTANA, 2012). Logo, o sucesso em uma tarefa depende de uma combinação entre competência e habilidade.

De acordo com Vergnaud (1990, p.136), "esquema é a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações". Compreendemos que o esquema é a maneira como o estudante irá ordenar suas ações com o objetivo de resolver uma determinada situação que lhe foi proposta. O caráter invariante é posto de maneira que um esquema pode ser construído de formas diferentes, no entanto, existem elementos que são de fundamental importância para a sua organização e que não variam.

O autor indica dois tipos de classes de situações nas quais os esquemas são mobilizados de maneiras distintas, a saber:

> 1- Classe de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2- Classe de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações a tentativas abortadas, conduzindo quer ao êxito, quer ao fracasso. (VERGNAUD, 1996, p.156, tradução nossa).

No primeiro tipo de classe, o estudante, ao ser confrontado com uma determinada tarefa, reconhece os invariantes operatórios que são apropriados para a resolução, mobilizando as competências e habilidades necessárias para organizar a sua ação, ou seja, já tem familiaridade com o tipo de situação proposta, tornando as suas ações automatizadas, que é o reconhecimento imediato da ação que precisa ser realizada.

No segundo tipo, os esquemas são construídos de forma heurística: o estudante ainda não consegue perceber de imediato os invariantes que atendem à solução e, por essa razão, desenvolve esquemas diferentes na tentativa de encontrar um esquema adequado; a concorrência entre os diferentes esquemas construídos pode conduzir à resposta correta ou não. Nesse caso, são as situações novas que são propostas aos estudantes, das quais eles ainda não têm domínio na resolução. Como consequência, para resolver a situação, ele apresenta esquemas já conhecidos e, nesse processo, percebe que os esquemas anteriores não satisfazem a nova situação.

Os esquemas são compostos por conhecimentos implícitos e conhecimentos explícitos, mas, em sua maioria, se sustentam por uma conceptualização implícita. Ao falarmos de conhecimentos explícitos, estamos entendendo como os conhecimentos apresentados pelos estudantes por meio de uma representação, a saber, um algoritmo, um desenho, um diagrama, entre outras. Por outro lado, conhecimento implícito é o conhecimento contido nas ações dos estudantes e que só pode ser identificado se for verbalizado, ou seja, as razões pelas quais o estudante constrói um esquema de resolução para resolver uma determinada situação. Essas justificativas pertencem ao estudante e só serão explicitadas se eles forem questionados. (VERGNAUD, 1982;1990;1994;1996;1998)

Observe-se que, na seção 1.1.2, discutimos sobre os invariantes operatórios que são próprios do conceito, em contrapartida, ao mobilizar os conhecimentos para resolver uma situação, o estudante está utilizando invariantes operatórios dos esquemas, ou seja, são os conhecimentos mobilizados por eles, mas que podem ter ou não uma relevância para a situação a ser resolvida.

Segundo Vergnaud (1996), os esquemas são compostos por invariantes denotados por: Teoremas em ação e Conceitos em ação. No que se refere aos Teoremas em ação, são sentenças (proposições) que podem ser verdadeiras ou falsas, isto é, "referem-se a ações pessoais mentais ou reais articuladoras de informações, procedimentos e atitudes, que constituem generalizações lógicas para o sujeito, no seu processo de construção progressiva do conhecimento" (AGUIAR; PEDROSA, 2009, p. 393).

Os Conceitos em ação (funções proposições) são elementos pertinentes à resolução de uma dada situação. Assim, são os objetos e relações característicos da situação, que são indispensáveis para a construção dos teoremas em ação. É importante salientar que

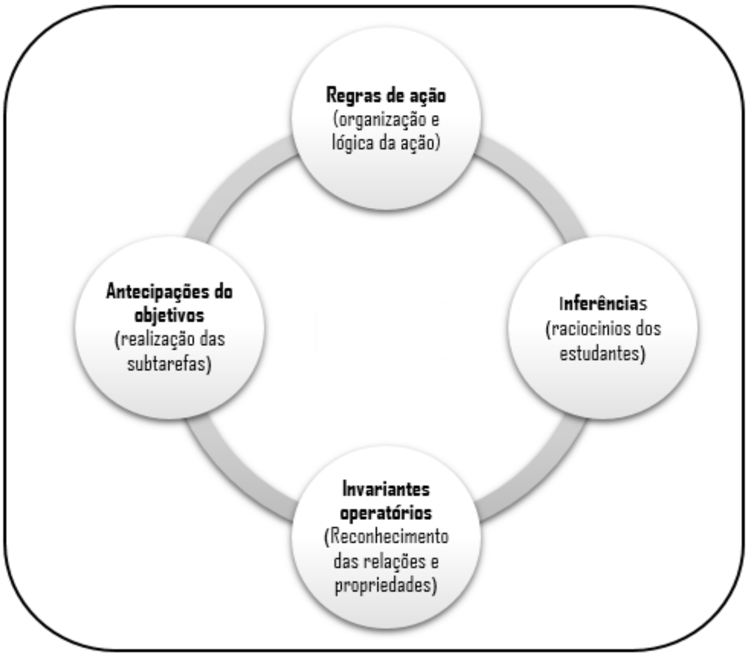
> o tipo lógico dos Conceitos em ação é diferente dos tipos lógicos dos Teoremas em ação: estes são funções proposicionais. A relação entre funções proposicionais e proposições é uma relação dialética. Não há proposições sem funções proposicionais e nem funções proposicionais sem proposições. (VERGNAUD, 1996, p. 164).

São os Teoremas em ação que conduzem os conceitos em ação, resultando em um uma relação inseparável. As interações entre esses dois elementos geram o argumento. Os invariantes operatórios são a base de todo o esquema, pois regulam a sua construção.

Segundo Santana (2010), esses invariantes operatórios, em sua maioria, são implícitos no esquema de ação do estudante, e uma das principais finalidades do processo de ensino é auxiliar o estudante a torná-los explícitos. Dessa forma, poderão ser considerados teoremas e conceitos científicos.

Um esquema pode gerar uma classe de procedimentos distintos, devido à peculiaridade de cada situação. Assim, segundo Vergnaud (1986), um esquema é composto por elementos. Na Figura 1.6, apresentamos os elementos componentes dos esquemas, sendo os invariantes operatórios, as antecipações do objetivo, as regras de ações e as inferências.

Figura 1. 6 - Elementos componentes do esquema



Fonte: Material produzido na pesquisa.

A Figura 1.6 apresenta uma síntese dos elementos que são componentes de um esquema. Desse modo, temos os "Invariantes operatórios (Conceitos em ação e Teoremas em ação) que pilotam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação e a recolha de informação sobre a situação a tratar". (VERGNAUD, 1996, p. 180). O ponto de partida para a elaboração de um esquema é uma situação a ser resolvida e, em busca da solução, o estudante precisa reconhecer os invariantes operatórios necessários para conduzir a sua ação diante de um esquema. Nesse momento, é que irão ser explicitadas as suas competências. O desenvolvimento de um esquema, portanto, depende dos invariantes operatórios que os estudantes aprenderam ao longo da sua trajetória. É o conhecimento implícito que rege todo o esquema de ação.

As antecipações do objetivo a atingir estão diretamente ligadas à noção das subtarefas, que precisam ser desenvolvidas para alcançar o efeito global, ou seja, para concluir a resolução da tarefa como um todo é necessário resolver pequenas tarefas. Logo, um esquema de resolução é composto por etapas a serem resolvidas. Todo esquema tem uma intencionalidade, um resultado final que precisa ser alcançado e, para isso, existe uma ordem de passos a ser seguida, que é determinada pelos sujeitos frente a uma situação a ser resolvida.

As regras de ação constituem a organização da lógica estabelecida pelo estudante, para permitir o desenvolvimento da sua ação. Seria o fator que permite a passagem de uma subtarefa para a próxima subtarefa. “A efetividade de uma regra consiste exatamente em sua propriedade de resultar em um número finito de aplicações da regra”. (VERGNAUD, 2009, p. 309). O autor salienta que um exemplo de regra de ação seria o Algoritmo, que é “uma regra (ou uma conjunção de regras) que permite, diante de todo problema ou de uma classe dada de antemão, conduzir à sua solução, se dele existe uma, ou, em caso de insucesso, de mostrar que não há uma solução”. (VERGNAUD, 2009, p. 309). É importante destacar que as regras de ação não se limitam à utilização de um algoritmo. Existem as regras heurísticas, que “não são algorítmicas, mas, no entanto, fecundas por causa da direção na qual elas engajam a reflexão do sujeito.” (VERGNAUD, 2009, p. 312). Essas regras heurísticas surgem do comportamento do estudante diante de uma situação que pode levá-lo à solução correta ou não.

As Inferências são os raciocínios utilizados pelos estudantes que tornam as antecipações e regras operatórias.

Dessa forma, ao analisarmos um esquema apresentado por um estudante, é importante considerar esses elementos, pois o comportamento do sujeito diante de uma classe de situações revela os conhecimentos que já foram internalizados por ele, o seu domínio ou fragilidade sobre a situação a ser tratada. Segundo Vergnaud:

> É necessário, pois, conceder uma grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, às suas continuidades, às suas rupturas, às suas passagens obrigatórias, à complexidade relativa das classes dos problemas, dos procedimentos, das representações simbólicas, à análise dos principais erros e principais fracassos. (VERGNAUD, 1996, p. 90)

Analisar a aprendizagem do estudante por meio dos esquemas explicitados leva-nos a considerar não só os acertos apresentados, mas, principalmente, os erros, por meio do quais podemos embasar as intervenções pedagógicas na sala de aula. Após termos apresentado os elementos essenciais da TCC, discorremos sobre campo conceitual.

Vergnaud (1990) trata de diferentes campos conceituais, como o aditivo, o algébrico, no entanto, o foco do nosso estudo é no multiplicativo. Enfatizamos que, ao nos referirmos a esse campo, trataremos como Estruturas Multiplicativas, assim, passaremos a discutir na próxima seção.

1.3 Estruturas Multiplicativas

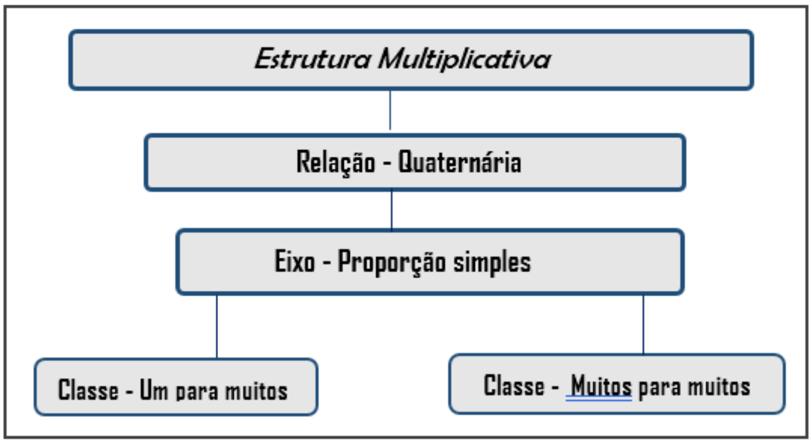
É comum no processo de aprendizagem considerar as Estruturas Multiplicativas como sendo uma sequência das Estruturas Aditivas (NUNES, 2003; CORRÊA; SPINILLO, 2004), limitando esse campo à simples operação de adição repetida de parcelas iguais. Segundo Nunes (2003), isso ocorre devido ao fato de a escola brasileira estar focada no ensino de técnicas de resolução, e não na compreensão dos conceitos. No entanto, é importante compreender que o resultado da multiplicação 2 x 3 é igual à adição 2 + 2 +2, porém, ainda que se obtenha o mesmo resultado, isso não significa que foi utilizado o mesmo raciocínio.

Dessa forma, os esquemas de ação utilizados para resolver uma situação multiplicativa podem apresentar-se para além da adição. Uma vez que “as situações aditivas envolvem a coordenação das relações entre grandezas de um mesmo universo, nas situações multiplicativas está envolvida a coordenação das relações entre, pelo menos, duas variáveis; ou entre, pelo menos, duas grandezas ou quantidades” (CORREA; SPINILLO, 2004, p. 106).

A Estrutura Multiplicativa tem diferentes conceitos, como multiplicação, divisão, fração, razão, números racionais, função linear e função não linear, análise dimensional e espaço vetorial. E esses conceitos não são independentes, eles estão no mesmo campo conceitual e interligam-se. As situações que fazem parte das Estruturas Multiplicativas são situações “cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações [...]” (VERGNAUD, 1990, p. 8).

Ainda se destacam nesse campo conceitual os conceitos de proporção simples, proporção múltipla, comparação multiplicativa, combinatória e configuração retangular (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014). No nosso estudo, não pretendemos discutir todos esses conceitos mencionados, o foco está direcionado para a proporção simples. No Figura 1.7, apresentamos uma síntese do foco do nosso trabalho dentro da estrutura multiplicativa.

Figura 1. 7 - Síntese dos conceitos da TCC no nosso estudo



Fonte: Recorte do quadro elaborado por Magina, Santos e Merlini (2014).

Nas próximas seções, passaremos a discutir cada um desses elementos que estão expostos na Figura 1.7.

1.3.1 Relações na Estrutura Multiplicativa

As situações são resolvidas por meio das relações que estabelecemos. "A noção de relação é uma noção absolutamente geral. O conhecimento consiste, em grande parte, em estabelecer relações e organizá-las em sistemas". (VEGNAUD, 2009, p. 23). As Estruturas Multiplicativas são compostas por dois tipos de relações: Ternárias e Quaternárias. O autor destaca a segunda relação como a mais importante, uma vez que ela é utilizada para introduzir o conceito de multiplicação, devido à sua presença na maior parte das situações multiplicativas.

Na relação ternária, há uma relação entre três quantidades, em que temos duas quantidades e buscamos encontrar uma terceira, que é resultado do produto ou divisão das duas primeiras, como apresentado no Exemplo 4.

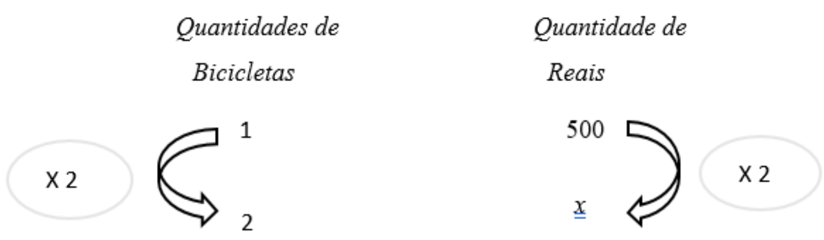
Exemplo 4: Camila tem quatro *shorts* e três camisetas diferentes. De quantas formas diferentes ela pode combinar os *shorts* e as camisetas?

4 *Shorts* x 3 Camisetas = 12 Combinações

Na relação quaternária, existe uma relação entre quatro quantidades. Assim, temos três quantidades iniciais e buscamos encontrar uma quarta. Retomemos o Exemplo 3, ilustrado na seção 2.1.1.

Exemplo 3: SE UMA BICICLETA CUSTA 500,00 REAIS, QUANTO CUSTAM DUAS BICICLETAS?

Figura 1. 8 -Esquema de resolução do Exemplo 3



Fonte: Material produzido na pesquisa.

Conforme a Figura 1.8, o resultado obtido nessa situação é em reais, pois é justamente a quarta quantidade que buscamos na resolução. Desse modo, trabalharemos com essa última, já que as situações que envolvem o conceito de proporção simples se caracterizam como uma relação quaternária.

1.3.2 Proporcionalidade

Muitos conceitos matemáticos eram utilizados desde as civilizações antigas, e a proporcionalidade é um desses conceitos. Em Matemática, "[...] o conceito de proporção é utilizado no estudo da porcentagem (por exemplo, quando somente a porcentagem de um valor é conhecida e devemos encontrar o valor total), em Geometria (no estudo da semelhança de figuras geométricas), em probabilidade, em álgebra, em Estatística." (OLIVEIRA, 2009, p.60). Além disso, esse conceito tem aplicabilidade não só na disciplina de Matemática, como também em outras áreas de conhecimento: a Física, a Química, a Biologia, entre outras áreas de ensino. (EVES, 2004).

A proporcionalidade é um conteúdo matemático que está presente no cotidiano dos estudantes, no entanto, Nunes (2003) ressalta que, na escola, ao iniciar o conceito de multiplicação, não é estabelecida uma relação com o conteúdo de proporção, mas só no 7º ano do Ensino Fundamental é que esse conteúdo é explorado formalmente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfatizam a importância desse conceito quando sugerem que "o fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real". (BRASIL, 1998, p. 37).

Esse documento oficial recomenda que os estudantes devem utilizar as noções de proporcionalidade para:

> - Observar a variação entre grandezas estabelecendo relações entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade. (BRASIL, 1998, p. 65).
> - Resolver situações-problema que envolvam a ideia de proporcionalidade, incluindo o uso de porcentagem pelo uso de estratégias não convencionais. (BRASIL, 1998, p.72).
> - Resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais utilizando estratégias não convencionais, como a regra de três. (BRASIL,1998, p.82)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta que a proporcionalidade "... deve estar presente no estudo das operações com os números naturais, na representação fracionária dos números racionais de áreas, de funções, probabilidade etc. Além disso, essa noção se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos e representações gráficas."

Os documentos oficiais enfatizam a importância e os objetivos de explorar o conceito de proporcionalidade na aprendizagem do estudante. Vergnaud (2009) considera esse conceito fundamental para compreender a multiplicação. Apresentaremos na próxima seção o conceito de proporção simples, de forma detalhada.

1.3.2.1 Proporção simples

A proporção simples "trata-se de uma relação quaternária como o próprio nome diz, envolve uma relação entre quatro quantidades de naturezas distintas duas a duas, como nos exemplos: pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância, entre outros." (MERLINI, 2012, p. 66).

Nas diferentes situações que envolvem esse conceito, existem elementos que consideramos pertinentes de serem discutidos de forma detalhada. Podemos destacar os esquemas de resolução (operador escalar e funcional), as operações envolvidas: multiplicação, divisão (partição e quotas) e ainda temos as situações que envolvem a correspondência de um para muitos e muitos para muitos.

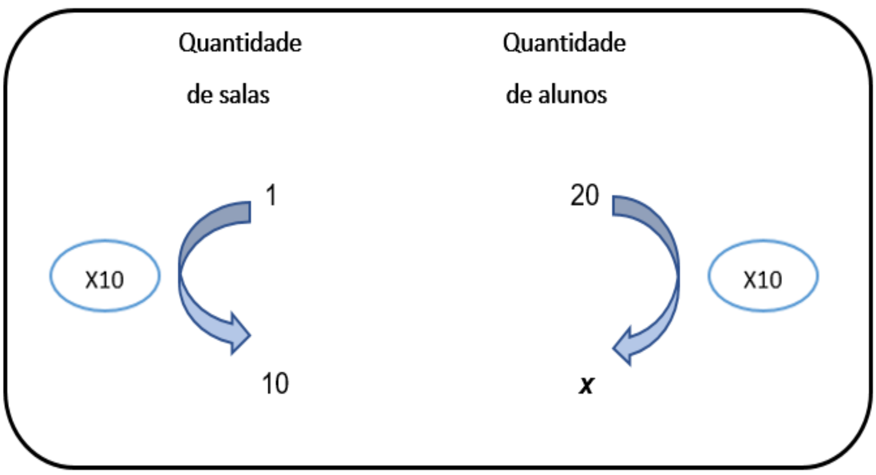
Na classe um para muitos, é sempre possível explicitar o valor unitário de uma das quantidades de naturezas distintas. E essa classe está disposta em três categorias de situações, a saber: i) Multiplicação; ii) Divisão por partição e iii) Divisão por cotas. (VERGNAUD, 1996). O que diferencia essas três categorias de situações é a posição que a variável desconhecida assume em cada contexto, influenciando no tipo de operação a ser utilizado. (VERGNAUD, 1996). No Exemplo 4, apresentamos uma situação da categoria multiplicação.

1

Exemplo 4: EM UMA ESCOLA, HÁ 10 SALAS DE AULA. E CADA SALA DE AULA É COMPOSTA POR 20 ALUNOS. QUANTOS ALUNOS ESSA ESCOLA TEM AO TODO?

Ao resolver a situação do Exemplo 4, pensamos intuitivamente em resolvê-la como um produto de medida, tratando-a como uma relação ternária: *10 salas de aula* × *20 alunos.* O que resultaria uma solução correta da situação, no entanto, essa situação não expressa uma relação com apenas três quantidades, e sim uma relação entre quatro quantidades. Para resolver essa situação, faremos análise de um esquema de resolução proposta na TCC utilizando a relação multiplicativa escalar.

Figura 1. 9 - Esquema de resolução utilizando operador escalar/ operação - Multiplicação

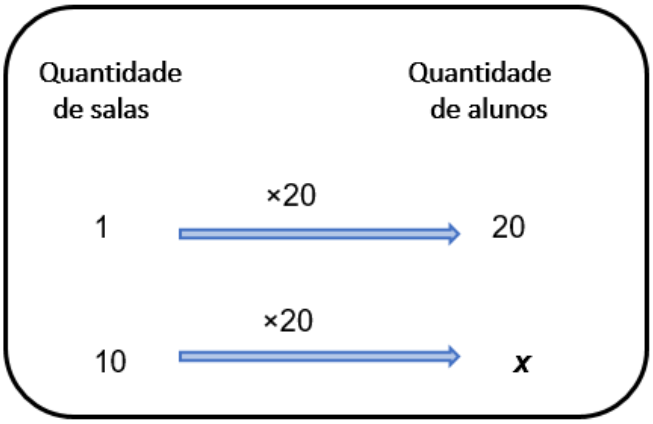


Fonte: Material produzido na pesquisa.

Conforme o esquema apresentado na Figura 1.9, podemos perceber as relações estabelecidas entre as quatro quantidades e que a correspondência um para muitos está explícita na resolução, na qual temos que a quantidade 1 transforma-se na quantidade 10, por meio do operador escalar ×10. Esse operador escalar não tem dimensão, ele não representa aqui a quantidade de salas ou de alunos, mas se trata de uma replicação, que "envolve somar a cada conjunto a unidade correspondente para o conjunto de modo que a correspondência invariável um-para-muitos seja mantida." (NUNES, BRYANT, 1997, p. 144). Assim, precisamos de uma relação fixa ×10, para que a proporção seja constante. Inicialmente, descobrimos o operador escalar das quantidades de salas e aplicamos o mesmo operador escalar na quantidade de alunos, o que transforma a quantidade 20 em 200 alunos, que é o nosso termo desconhecido **x.**

Apresentamos, a seguir, na Figura 1.10, um esquema de resolução envolvendo um operador funcional.

Figura 1. 10 - Esquema de resolução utilizando operador funcional



Fonte: Material produzido na pesquisa.

É possível observar que, no esquema de resolução apresentado na Figura 1.8, existe uma relação fixa e constante, o que diferencia da Figura 1.10. Agora, está como um operador funcional ×20. Esse operador representa a relação entre as quantidades. Nesse tipo de representação, a proporção simples aparece como um caso especial da função linear, observando-se o domínio de validade dessa função. Toda função linear pode ser expressa algebricamente por f(x) = ax. Nesse caso, o **a** é o coeficiente de proporcionalidade, assim temos:

$$f(1) = a \times 1 \text{ e } f(10) = a \times 10, \text{ como o nosso coeficiente é o 20, daí,}$$

$$f(1) = 20 \times 1 \text{ sala} = 20 \text{ alunos}$$
$$f(10) = 20 \times 10 \text{ salas} = 200 \text{ alunos}$$

Dessa forma, a função pode ser representada algebricamente por: f(x) = 20x para x pertencente ao conjunto dos números naturais.

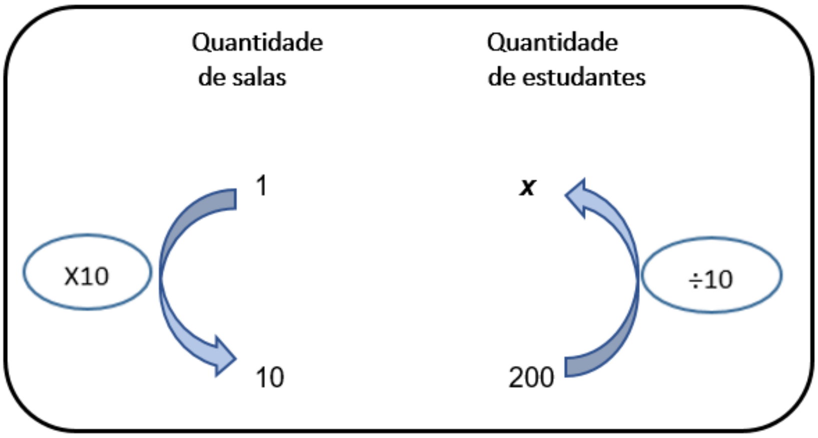
Podemos inferir que a noção intuitiva de função pode ser explorada com os estudantes desde os anos iniciais, a partir das ideias de proporcionalidade. Acreditamos que isso implicará a aprendizagem, pois o conceito de função irá ser explorado formalmente e de maneira aprofundada em anos escolares posteriores.

As situações que envolvem o conceito de proporção simples apresentam níveis de complexidade distintos. Se variarmos a posição do termo desconhecido, temos uma diferente complexidade. Apresentamos, a seguir, no Exemplo 5, uma situação que envolve a categoria divisão por partição. Nas situações que envolvem essa categoria, "é dada uma quantidade inicial e o número de vezes (número de partes) em que esta quantidade deve ser distribuída, devendo-se encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos)". (LAUTERT; SPINILLO, 2002, p. 239)

Exemplo 5: UMA ESCOLA COMPOSTA POR 10 SALAS DE AULA TEM 200 ESTUDANTES. QUANTOS ESTUDANTES HÁ EM CADA SALA, CONSIDERANDO QUE CADA UMA TEM A MESMA QUANTIDADE DE ESTUDANTES?

Apresentamos, a seguir, na Figura 1.11, um possível esquema de resolução para o Exemplo 5.

Figura 1. 11 -Esquema de resolução/Divisão por partição



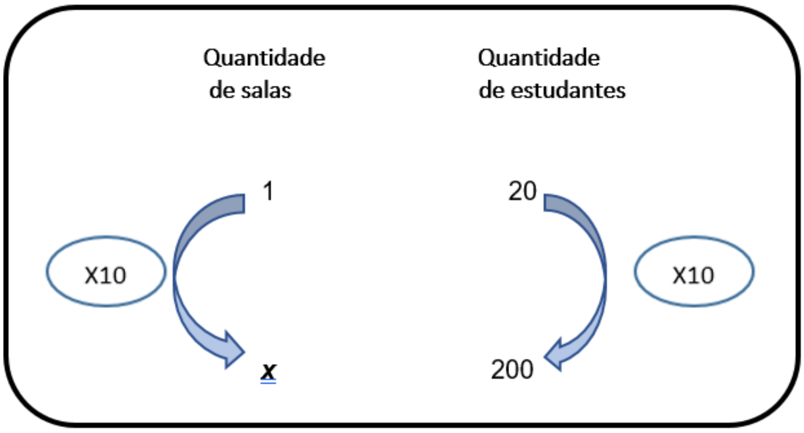
Fonte: Material produzido na pesquisa.

Na Figura 1.11, temos um esquema de resolução referente a uma situação que envolve a ideia de partição, em que precisamos dividir igualmente os 200 estudantes por 10 salas, no qual vamos encontrar o valor desconhecido 20. Inicialmente, dividindo 10 por 1, encontramos o operador escalar ×10, que fez transformar 1 sala em 10 salas. Em seguida, dividimos 200 estudantes pelo operador escalar 10, pois essa é única operação que satisfaz essa transformação. Na divisão partitiva, temos que encontrar a quantidade correspondente ao valor unitário e temos sempre uma divisão entre quantidades de natureza distinta.

Além da divisão por partição, temos outro tipo de divisão, que é a divisão por quotas. O Exemplo 6 explicita uma situação referente a essa ideia. Na “divisão por quotas, é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas (tamanho das partes)”. (LAUTERT; SPINILLO, 2002, p. 238)

Exemplo 6: UMA ESCOLA COMPOSTA POR 200 ESTUDANTES, SENDO QUE ELES OCUPAM TODAS AS SALAS DE AULA. E CADA SALA DE AULA É FORMADA APENAS POR 20 ESTUDANTESTE. QUANTAS SALAS DE AULA TEM ESSA ESCOLA?

Figura 1. 12 - Esquema de resolução/divisão por quotas



Fonte: Material produzido na pesquisa.

Vejamos que, neste esquema de resolução, o objetivo é encontrar as unidades correspondentes ao valor unitário. Temos que encontrar a quantidade de salas suficiente para distribuir cada quota de 20 estudante/sala. Precisamos identificar quantas quotas de 20 estudante/sala tem em 200 estudantes. Para resolver essa situação, dividimos 200 por 20 e encontramos o operador escalar x 10, assim, para manter a proporção entre as quantidades de naturezas distintas, utilizamos o operador escalar × 10 que faz passar de 1 sala para 10 salas, encontrando a solução da situação.

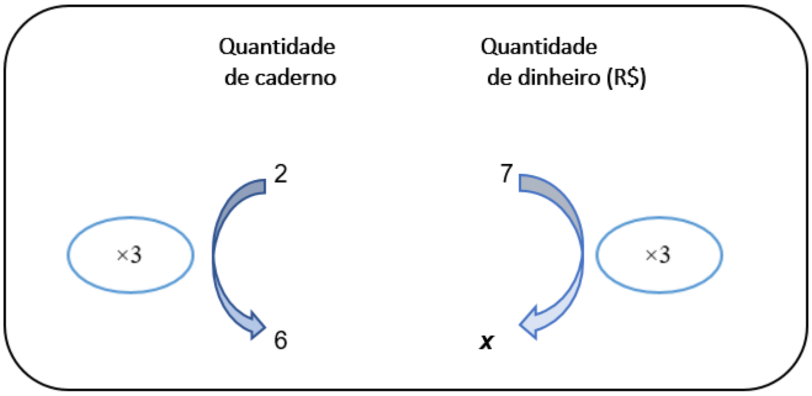
Como é possível perceber, ao se tratar da classe de situações de um para muitos, podemos lidar com três categorias de situações, a saber: multiplicação, divisão por partição e divisão por quotas.

Além das situações um para muitos, temos as situações que envolvem a correspondência muitos para muitos. Nesse tipo de correspondência, nem sempre é possível explicitar o valor unitário de uma das quantidades de naturezas distintas, pois os valores sempre estão acima da unidade. Apresentamos, no Exemplo 7, uma situação dessa classe.

Exemplo 7: FERNANDO COMPROU 2 CADERNOS POR R$ 7,00. SE ELE COMPRASSE 6 CADERNOS, QUANTO ELE IRIA PAGAR?

Para resolver uma situação dessa classe, podemos utilizar o mesmo esquema da classe um para muitos. Na Figura 1.13, temos um esquema de resolução para essa situação.

Figura 1. 13 - Esquema de resolução da classe muitos para muitos



Fonte: Material produzido na pesquisa.

De acordo com a Figura 1.13, para resolver a situação, dividimos 6 cadernos por 2 cadernos e encontramos o operador escalar x 3, que fez passar de 2 cadernos para 3 cadernos. E, para manter a relação constante, multiplicamos 7 (R$) pelo operador escalar × 3, encontrando o valor desconhecido 21 (R$).

Um elemento que poderia tornar essa situação complexa é a variação do campo numérico, por exemplo: se o número de cadernos a serem comprados fosse 5, ao dividimos 5 cadernos por 2 cadernos, iríamos encontrar 2,5 como operador escalar, o que geraria um tratamento mais complexo para a situação, sendo que esse resultado mudaria o campo numérico dos naturais para o dos números racionais.

Após discutimos de forma detalhada a estrutura multiplicativa, em específico as situações de proporção simples, no próximo capítulo apresentaremos resultados de pesquisas envolvendo o conceito de proporcionalidade.

CAPÍTULO II

REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, abordaremos alguns estudos desenvolvidos na área de Educação Matemática que versam sobre a nossa temática, no intuito de analisar as discussões que já foram realizadas e identificar elementos que possam subsidiar a nossa pesquisa. Para melhor sistematização, dividimos este capítulo em duas seções. Na primeira, explanamos sobre estudos que foram realizados no âmbito da Educação Matemática – artigos e dissertações – assim, organizamos esses estudos em ordem cronológica. Na segunda seção, apresentaremos algumas considerações relacionadas aos estudos realizados.

2.1 Estudos realizados no âmbito da Educação Matemática

Eolália Silva (2008)

Silva (2008) tinha por objetivo identificar se as estratégias de resolução de problemas utilizadas por alunos da 6ª e 8ª séries do Ensino Fundamental revelam compreensão do conceito de proporcionalidade. A autora se apoiou nos estudos sobre a teoria dos campos conceituais.

Esta pesquisa foi composta por dois momentos. O primeiro momento consistiu na aplicação da investigação escrita, da qual participaram 72 alunos: 42 da 6ª série e 30 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental presentes na sala de aula no dia da aplicação; o segundo momento compreendeu a realização da entrevista com cinco estudantes de cada ano escolar supracitado. Os problemas que foram aplicados aos alunos levaram em consideração os quatro tipos de problemas de isomorfismo de medidas identificados por Vergnaud (1981), a saber: multiplicação, divisão-busca de um valor unitário, divisão-busca das quantidades de unidades e regra de três.

A análise dos resultados mostrou que houve tentativa dos alunos em buscar estratégias variadas para resolver os problemas**.** A preferência recaiu sobre a utilização de estratégias próprias, provenientes de conhecimentos acumulados de séries anteriores, embora, muitas vezes, limitados pelo conhecimento da aritmética necessária para a resolução dos problemas, por dificuldades conceituais e algorítmicas. Os alunos da 6ª série, que estavam passando pelo processo da instrução formal do conteúdo de proporcionalidade, por meio do algoritmo da regra de três, não fizeram uso desta técnica na resolução dos problemas. As poucas tentativas que apareceram mostraram-se sem êxito. A autora concluiu que os estudantes conseguem estabelecer um cálculo numérico com os dados propostos na situação, porém não apresentam compreensão.

O estudo realizado por Silva (2008) se assemelha ao nosso, uma vez que a análise dos seus dados foi realizada à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Outro aspecto em comum é que ela explora os diferentes conceitos da classe um para muitos no instrumento diagnóstico que foi aplicado, contudo, privilegia as situações dessa classe, pois só explora uma situação da classe muitos para muitos. O nosso estudo se difere do realizado pela autora, no que diz respeito a ampliar a quantidade de situações da classe muitos para muitos. Assim, foi possível perceber o comportamento dos estudantes diante das diferentes classes.

Isabella Oliveira (2009)

Oliveira (2009) objetivou, em seu estudo, explicitar as estratégias usadas por alunos do Ensino Fundamental (6ª série, 13-14 anos) no Quebec[7] antes do ensino do conceito de proporção na escola. Segundo a autora,

> Para que o ensino da proporcionalidade possa evoluir de maneira a ajudar os alunos na compreensão das relações proporcionais mais difíceis, é importante que o professor possua o maior número possível de informações sobre as estratégias utilizadas pelos alunos, assim como sobre as dificuldades mais presentes. (OLIVEIRA, 2009, p.61)

No estudo, a autora se fundamentou na Teoria dos Campos Conceituais. Um estudo de caso foi feito com uma turma de 2° ano do 3° ciclo (33 alunos entre 13 e 14 anos), antes do ensino formal da proporcionalidade no Quebec. Cada aluno respondeu individualmente a um teste escrito contendo 7 problemas: 3 problemas de proporção

[7] Uma escola particular.

direta, 2 problemas de proporção inversa e 2 problemas não proporcionais. Os problemas foram apresentados aos alunos de maneira aleatória.

A análise dos dados permitiu as autoras constatarem

> que os alunos que ainda não passaram pelo ensino formal da proporcionalidade são capazes de resolver alguns tipos de problemas que apresentam uma estrutura matemática simples tanto em proporção direta quanto inversa, e cujo contexto é mais próximo do dia a dia. Além disso, esse estudo também nos permitiu observar o potencial e a diversidade das estratégias utilizadas por alunos. Esse dado é completado pelo fato de que os alunos apresentam uma certa flexibilidade no que se refere à escolha da estratégia a ser utilizada. Eles passam de uma estratégia a outra em função do contexto, mas, sobretudo, em função das relações numéricas que estão em jogo no problema. (OLIVEIRA, 2009, p.61)

A análise dos problemas também possibilitou destacar certas dificuldades presentes nos alunos no tocante à aquisição do conceito de proporção. Por exemplo, a passagem das relações aditivas para as relações multiplicativas. Essa dificuldade pode ser observada através da utilização da estratégia aditiva errada.

Nesse estudo, notamos que a autora realizou a pesquisa com estudantes que ainda não tinham sido expostos formalmente ao conceito de proporção simples. Em um dos momentos da nossa pesquisa, aplicamos o instrumento com estudantes do mesmo perfil dos sujeitos da pesquisa de Oliveira (2009). No entanto, o nosso estudo está além, pois avançamos no sentido de aplicar o instrumento com os mesmos estudantes quando eles já tinham sido expostos ao conceito formal, no qual foi possível estabelecer um comparativo entre esses dois momentos. Ainda no instrumento aplicado pela autora, identificamos que ele não comtempla todos os tipos de situações que envolvem a proporção direta. No instrumento que aplicamos, exploramos todas as situações que envolvem esse tipo de proporção. Assim, foi possível analisar, de forma minuciosa, o comportamento dos estudantes diante dessas situações. Ademais, Oliveira (2009) foca em um único ano escolar, em contrapartida, nós direcionamos o estudo para o Ensino Fundamental, abrangendo mais de um ano escolar.

Rosemeire Lima (2012)

Nessa pesquisa, a autora tinha como objetivo apresentar uma análise das estratégias de problemas que envolveram a divisão por quotas e por partitição de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental (EF) de escolas públicas maceioenses. A pesquisadora ancorou a sua pesquisa na teoria dos campos conceituais, em específico, o campo multiplicativo.

Esse estudo foi realizado em três escolas públicas, com 105 alunos do 4º ano do Ensino Fundamental. Foi aplicado um instrumento de coleta de dados que consistiu em uma atividade envolvendo quatro problemas, sendo três de divisão por quota e um de partição. Segundo a autora, a predominância maior nos problemas de quotas é devido à literatura mostrar ser um dos problemas pouco trabalhados nos anos iniciais.

Os dados da pesquisa demonstraram que no ensino da Matemática há a priorização do resultado, em detrimento do procedimento, uma vez que as respostas apresentaram um modelo de técnica ensinado, embora os alunos tenham utilizado o desenho para encontrar a solução do problema. Quanto à divisão quotitiva, os alunos demonstraram não estabelecer relações entre os dados numéricos e os termos da divisão e, além disso, a relação fixa do problema foi tratada como parcela da adição repetida, demonstrando ênfase na continuidade do campo aditivo (uso da adição).

Por outro lado, embora os alunos tenham revelado dificuldades acerca da compreensão dos conceitos da divisão, as autoras observaram que eles mobilizaram os seus conhecimentos. No entanto, as soluções indicaram que não compreendem o fazer matemático e, ainda, que se apoiam no desenho para entender o enunciado. Os procedimentos utilizados por eles também indicam que, possivelmente, não vivenciaram situações diversificadas nem foram estimulados a analisar, comparar e explicar o pensamento matemático.

Lima (2012) foca nos problemas de proporção simples que se espera do uso da divisão, assim como também abordamos no nosso instrumento as situações envolvendo divisão por quotas e divisão por partição. No entanto, na nossa pesquisa, não nos limitamos a um conceito, mas também propusemos problemas que se espera do uso da multiplicação e da combinação das duas operações.

Aparecido dos Santos, Vera Merlini, Sandra Magina e Eurivalda Santana (2014)

Essa pesquisa buscou investigar a maturidade cognitiva dos alunos que ainda não foram expostos formalmente ao conceito de divisão, para lidarem com situações envolvendo essa operação. O estudo apresenta discussão sobre as estratégias utilizadas e os desempenhos apresentados por alunos do 1º e 2º anos do Ensino Fundamental.

O estudo teve dois focos como suporte teórico: o primeiro, a TCC, e o segundo, o modelo de divisão proposto por Fischbein et al. (1995). No que diz respeito à primeira teoria, os autores enfatizam que ela possibilita duas análise importantes:

> A primeira refere-se à relação existente entre os conceitos, como conhecimentos explícitos, e os invariantes operatórios, como implícitos nos comportamentos dos sujeitos frente a uma determinada situação; a segunda sustenta um aprofundamento das relações existentes entre a situação (significado) e a representação (significante). (SANTOS et al., p. 42)

O segundo foco do estudo é um modelo que propõe que as situações de divisão se subdividam em duas classes: situações que envolvem a ideia de divisão por partição e situações que envolvem a ideia de divisão por quota.

A pesquisa realizada foi de cunho descritivo. Assim, foi aplicado um teste a 166 estudantes de uma mesma escola pública, com 80 estudantes do 1º ano e 86 estudantes do 2º ano. Foram analisadas três questões envolvendo a ideia de divisão: Questão 1 – ideia de quota coleção; Questão 2 - ideia de cota não coleção, e Questão 3 – ideia de partição não coleção.

Os resultados apresentados nesta pesquisa mostraram que os alunos do 1º ano tiveram baixo desempenho nas três situações que foram propostas (20% de acerto). Os alunos do 2º ano alcançaram desempenho (51% de acertos) maior que do 1º ano. Tanto no 1º ano como no 2º ano, os alunos tiveram melhor desempenho na questão de divisão por quota do que na questão de partição.

Em relação às estratégias utilizadas pelos estudantes, foram classificadas por nível e por representação, pictórico ou numérico. Os níveis categorizados foram: nível 1 – incompreensível; nível 2 – estratégia de pensamento aditivo; nível 3 - estratégia de transição e nível 4 – estratégia de pensamento.

Os autores constataram que a representação pictórica foi a mais utilizada entre os estudantes do 2º ano, e esse tipo de resolução foi o que mais os levou ao acerto da situação. Logo, consideraram o uso de representação pictórica como um suporte eficiente para a apropriação dos conceitos da estrutura multiplicativa. Dessa forma, concluíram que os estudantes que ainda não aprenderam formalmente o conceito de divisão sabem lidar com situações da estrutura multiplicativa utilizando a representação pictórica.

Nessa pesquisa, identificamos que os autores categorizam as estratégias utilizadas pelos estudantes. No intuito de compreender a construção das resoluções, nesse sentido, nós também tivemos o nosso olhar voltado para os esquemas dos estudantes e categorizamos as resoluções apresentadas. Os autores também focam em mais de um ano escolar, assim como na nossa pesquisa. Acreditamos, porém, que nos diferenciamos, pois aplicamos o mesmo instrumento em anos escolares distintos e com os mesmos sujeitos. Isso nos possibilita compreender o processo de aprendizagem desses estudantes em anos escolares distintos.

Camila Xavier dias Souza Sena (2015)

Sena (2015) realizou um estudo intitulado "Resolução de estudantes frente a problemas de divisão antes e depois do ensino formal". Tinha por objetivo buscar indícios de como compreender a operação de divisão, antes e depois do ensino formal, revelado nos esquemas dos estudantes do 3º e do 5º ano do Ensino Fundamental. Para alcançar o objetivo da pesquisa, utilizou a Teoria dos Campos Conceituais (TCC).

A pesquisa foi realizada no âmbito do E-Mult, sendo um estudo diagnóstico que abrangeu três escolas públicas no sul da Bahia, envolvendo 396 estudantes do Ensino Fundamental, com 197 estudantes do 3º ano e 199 do 5º ano. Para a coleta de dados, foi realizada a análise de quatro situações que envolviam a operação de divisão na sua resolução. Eram situações de proporção simples, sendo que duas envolviam a classe um para muitos e duas que envolviam a classe muitos para muitos. Para a análise, foram considerados três aspectos: o desempenho dos estudantes, o grafismo e os níveis de esquemas apresentados por eles.

Os resultados mostraram, de um modo geral, baixo desempenho dos estudantes em ambos os anos escolares (3º e 5º anos). As situações em que eles apresentam melhor desempenho são as que envolvem a classe um para muitos. O esquema mais utilizado pelos estudantes foi o simbólico puro, sobre o qual a pesquisadora inferiu que esse resultado pode estar atrelado ao fato de que, na escola, o algoritmo seja trabalhado de forma mais intensa. Com relação aos níveis dos esquemas dos estudantes, segundo a pesquisa, o desempenho recai na transição do pensamento aditivo para o multiplicativo em ambos os anos escolares.

A pesquisa desenvolvida por Sena (2015) é a que apresenta mais aspectos comuns à nossa pesquisa em relação às demais, pois foi uma pesquisa realizada no âmbito E-Mult e que teve como foco a aprendizagem dos estudantes relacionada ao conceito de proporção simples. Salientamos, ainda, que 40 estudantes do 5º ano dos 199 que foram sujeitos na pesquisa dessa autora, foram os nossos sujeitos de pesquisa também. A pesquisadora, contudo, não analisou as situações em que se espera o uso de multiplicação e não acompanhou esses estudantes em anos escolares distintos, assim como nós acompanhamos na nossa pesquisa.

Odalea Viana e Juliane Miranda (2016)

Nesse estudo, as autoras buscaram analisar as estratégias empregadas por alunos na solução de problemas envolvendo o raciocínio proporcional. Elas afirmam que “[...] o raciocínio proporcional dos estudantes pode ser investigado por meio das estratégias adotadas por eles – e representadas simbolicamente por palavras, desenhos ou símbolos matemáticos – quando resolvem problemas que avaliam o tema.” (VIANA; MIRANDA, 2016, p. 196).

Para o embasamento teórico desse estudo, as autoras se apoiaram na Teoria dos Campos Conceituais e na categorização proposta por Lesh et al. (1988). Nessa categorização, destacam sete tipos de tarefa para investigar o raciocínio proporcional do estudante: (a) problemas de valor omisso; (b) problemas de comparação; (c) problemas de transformação; (d) problemas de valor médio; (e) proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações e (f) problemas de conversão entre sistemas de representação para a proporcionalidade sobre os problemas de proporção simples. No estudo, as autoras focaram em dois tipos de problemas: os que envolvem o valor omisso e os de comparação, devido ao fato de a literatura mostrar que são os mais utilizados para avaliar o raciocínio proporcional.

Participaram da pesquisa 20 alunos do sexto ano de uma turma do Ensino Fundamental de uma escola particular, sendo aplicada uma prova de conhecimentos, individualmente. A prova era composta por quatro questões, duas que envolviam o valor omisso e duas que envolviam comparação. Um tipo de problema que envolve o valor omisso é aquele que tem o objetivo de determinar o valor desconhecido da incógnita, como, por exemplo: “se três caixas iguais de bombons custam R$ 12,00, quanto pagarei por 6 dessas caixas?” Os problemas que compreendem o valor de comparação geralmente são resolvidos por meio de técnicas para verificar equivalência de razões (aplicando a propriedade fundamental das proporções), por redução a mesmo denominador ou por transformação em números decimais ou porcentagem, por exemplo: em geral, são resolvidos por meio de técnicas para verificar a equivalência de razões (aplicando a propriedade fundamental das proporções), por redução a mesmo denominador ou por transformação em números decimais ou porcentagem, por exemplo: “Júlia misturou 2 copos de suco concentrado em 4 copos de água e Paula misturou 3 copos de suco em 5 de água. Qual suco é mais forte?”

Para análise dos dados, foram consideradas duas categorias: estratégias aditivas e estratégias multiplicativas, em especial, aquelas que evidenciassem relações de covariação além do referencial e das relações parte-parte e parte-todo.

Os resultados apontaram que os problemas de comparação se mostraram mais complexos do que os de valor omisso. Um dos motivos pode ser a pouca experiência dos alunos com questões que solicitam apenas uma comparação, e não um valor exato, como resposta. Outra suposição para a dificuldade verificada pode ser decorrente do fato de os alunos terem certa dificuldade em estabelecer relações parte-todo.

Nesse estudo, a autora direciona o foco para a compreensão da aprendizagem dos estudantes do 6º ano. Na nossa pesquisa, também temos um diagnóstico dos estudantes nesse ano escolar, mas nós não nos limitamos a esse ano, analisamos também a aprendizagem das estudantes no 5º e 8º anos.

2.2 Algumas Considerações

Nos estudos analisados, identificamos elementos comuns aos da nossa pesquisa.
i) Os autores utilizaram como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais. Isso comprova que essa teoria nos permitiu o embasamento necessário para a análise dos dados que foram produzidos.
ii) Eles tinham interesse em analisar a aprendizagem dos estudantes e, para a coleta de dados, utilizaram um instrumento diagnóstico composto por situações-problema. Partimos do pressuposto que, ao resolverem as situações, os estudantes utilizam esquemas através dos quais é possível analisar os conhecimentos que adquiram.
E, por fim, iii) O foco dos estudos eram estudantes do Ensino Fundamental. Esse é o nível escolar no qual os estudantes começam a ter as primeiras ideias intuitivas em relação ao conceito de proporção simples até serem expostos ao conceito formal e no qual se espera que eles aprimorem esse conhecimento a partir das diferentes situações vivenciadas.

Por outro lado, embora não haja qualquer dúvida a respeito das contribuições que os estudos aqui relatados trouxeram para a compreensão do que ocorre com os esquemas de resolução dos estudantes relativos ao conceito de proporção simples, os autores miram especificamente um ano escolar ou, no máximo, dois. É preciso, contudo, analisar o desenvolvimento dos esquemas utilizados pelos estudantes ao longo dos anos escolares, e é justamente nesse viés que desenvolvemos o nosso estudo, analisando esquemas dos estudantes em momentos escolares distintos, ou seja, um estudo longitudinal.

CAPÍTULO III

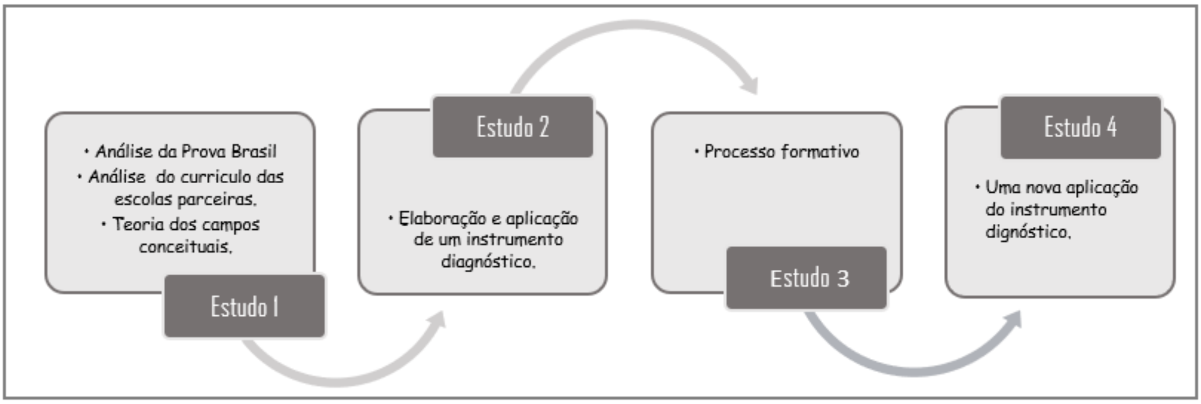
PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, discorreremos sobre o percurso metodológico que possibilitou alcançar os objetivos e responder à questão norteadora deste estudo. Para tanto, dividimos o percurso em duas seções. Na primeira, descrevemos o contexto do estudo. Na segunda, explanamos sobre a caracterização do estudo, situando a nossa pesquisa, bem como discutimos sobre o universo da pesquisa, o instrumento diagnóstico, produção e coleta dos dados, e os procedimentos para análise.

3.1 Contexto do Estudo

Para compreendermos o contexto no qual a pesquisa está inserida, consideramos oportuno apresentar os estudos que foram desenvolvidos pela Rede E-Mult. Na Figura 3.1, apresentamos os quatro estudos que foram realizados. Salientamos que o Estudo 4 foi realizado apenas no Estado da Bahia.

Figura 3. 1 -Estudos desenvolvidos no E-Mult



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

De acordo com a Figura 3.1, o Estudo 1 foi de cunho descritivo, com uma análise detalhada dos descritores da Prova Brasil, que trata-se de uma avaliação para diagnóstico em larga escala. Essa avaliação tem por objetivo avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro, a partir de testes padronizados, que são aplicados a cada biênio no 5º e 9º ano do Ensino Fundamental. E, no Estudo 1, também, foi realizada análise do currículo das escolas parceiras envolvidas na pesquisa, incluindo o livro didático utilizado por elas. E, complementando esse período, um estudo sobre a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), em específico, as Estruturas Multiplicativas.

No Estudo 2, ocorreu a elaboração do instrumento diagnóstico, que foi baseada na análise prévia dos descritores da Prova Brasil, no currículo das escolas parceiras e na TCC, notadamente a Estrutura Multiplicativa. O instrumento foi elaborado por todos os envolvidos no projeto, por meio de reuniões virtuais e presenciais com os núcleos por Estado. O instrumento foi aplicado no ano de 2014, em 12 escolas públicas dos três Estados já mencionados, com 3890 estudantes do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental e tinha por objetivo diagnosticar a compreensão dos estudantes ao resolverem situações que dão sentido a conceitos inerentes ao Campo Conceitual Multiplicativo. Esse instrumento era composto por 13 situações-problema (ver Anexo A), sendo seis de proporção simples, duas de combinatória, duas de comparação multiplicativa e duas de configuração retangular. Nesse estudo ocorreu a 1ª aplicação do instrumento diagnóstico.

No que se refere ao Estudo 3, no ano de 2015, deu-se início ao processo formativo. Os professores participantes eram os que atuavam com os estudantes que responderam o instrumento diagnóstico (pré-teste).

O processo formativo foi baseado no modelo de formação ação-reflexão-planejamento-ação (REPARE), elaborado por Magina (MAGINA 2008; MAGINA et al, 2010). O ponto de partida para iniciar essa formação foram os desempenhos dos estudantes ao resolverem esse instrumento diagnóstico.

Na proposta da formação, as primeiras interlocuções estavam baseadas no desempenho dos estudantes apresentado nos instrumentos diagnósticos que foram aplicados. Dessa forma, os professores eram divididos em grupos, por ano escolar, para discutirem sobre as suas práticas e planejarem as suas aulas. Assim, apresentavam os planos elaborados para os demais colegas, com o intuito de promover uma discussão sobre eles, com o propósito de serem aplicados em sala de aula. Essa formação foi realizada durante o ano de 2015, algumas escolas encerraram no mesmo ano e outras, em janeiro de 2016, devido ao calendário escolar.

Ao final do processo formativo, foi aplicado o mesmo instrumento diagnóstico do Estudo 2, porém, apenas com os estudantes dos professores que tiveram 75% de frequência no processo formativo do Estudo 3. A aplicação desse instrumento ocorreu apenas no Estado da Bahia. E o objetivo dessa aplicação consistia em diagnosticar a compreensão dos estudantes ao resolverem situações que dão sentido a conceitos inerentes ao Campo Conceitual Multiplicativo, ao término do processo formativo realizado no âmbito do E-Mult.

Diante do contexto supracitado, a nossa investigação está voltada para a aprendizagem do conceito de proporção simples por estudantes do Ensino Fundamental a partir do 5º ano, de uma escola pública no Estado da Bahia. Esta escolha justifica-se por dois motivos:

i) A avaliação de larga escala da Prova Brasil ser aplicada no 5º ano, e por ser esse ano escolar que encerra o período dos anos iniciais do Ensino Fundamental, assim, consideramos pertinente compreender a aprendizagem do estudante a partir desse ano escolar e em momentos escolares posteriores.

ii) A escola pública, campo da pesquisa, foi escolhida pelo fato de ser a única das escolas parceiras do projeto que ofertava o 5º ano e atendia a todo o Ensino Fundamental, o que nos permitia uma maior possibilidade de identificar em 2017, os estudantes na própria escola, para realizarmos a última etapa do estudo.

Dessa forma, intencionamos responder à seguinte questão de pesquisa:

- ✓ *Quais são os esquemas que estudantes do ensino fundamental apresentam ao resolverem situações de proporção simples, em momentos escolares distintos?*

Assim, o nosso objetivo geral consiste em:

- ✓ *Compreender os esquemas de estudantes do ensino fundamental, ao resolverem situações de proporção simples, em momentos escolares distintos.*

E temos como objetivos específicos:

- ✓ *Analisar os desempenhos e esquemas de estudantes do ensino fundamental, ao resolverem situações de proporção simples, em um pré-teste, um pós-teste, e em um pós-teste 2.*
- ✓ *Comparar os esquemas dos estudantes em três momentos distintos*

3.2 CARACTERIZAÇÃO DESTE ESTUDO

O nosso estudo é diagnóstico, com um caráter descritivo. Nesse sentido, Gil (2002) compreende que tal tipo de pesquisa visa “registrar, analisar e correlacionar fatos ou fenômenos (do mundo físico e, principalmente, do mundo humano) sem manipulá-los.” Complementando essa ideia, “esse método permite ao pesquisador a obtenção de uma melhor compreensão do comportamento de diversos fatores e elementos que influenciam determinado fenômeno.” (OLIVEIRA, 2001, p.114).

Considerando o objetivo e a questão de pesquisa, o nosso estudo justifica-se como descritivo, uma vez que não há interferência do pesquisador no que se refere a promover a aprendizagem do conceito de proporção simples, influenciando os esquemas apresentados pelos estudantes. Iremos descrever, interpretar e analisar os resultados encontrados no instrumento diagnóstico, com o intuito de compreendermos os esquemas registrados pelos estudantes, relacionados a esse conceito matemático.

Por conseguinte, a coleta, produção e análise dos dados, de acordo com as suas características, nos conduziram a uma abordagem qualitativa. Na abordagem qualitativa, apoiando-nos nas ideias de Bogdan e Biklen (1994), é uma pesquisa na qual a coleta de dados é realizada no ambiente natural do sujeito, proporcionando o contato com o pesquisador, cujo foco está voltado para o processo em que os dados foram construídos. Nesse sentido, os dados deste estudo foram coletados no ambiente natural dos sujeitos, que foi na sala de aula. Visamos analisar não só o produto final, mas o processo como os estudantes constroem os esquemas relacionados ao conceito de proporção.

3.2.1 Universo do estudo

Como já mencionado, realizamos um recorte dos resultados do E-Mult, assim, o universo do nosso estudo é uma escola pública, localizada no sul da Bahia. Essa escola já tem uma parceria juntamente com o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática Estatística e em Ciências (GPEMEC) em ações anteriores, desde de 2008.

Essa unidade escolar funciona nos três turnos e atende a alunos do 4º ao 9º ano do Ensino Fundamental. O espaço físico da escola está organizado e dividido da seguinte maneira: um refeitório, uma secretária, 14 salas de aulas, 4 banheiros, uma sala de informática com acesso à internet, uma sala da direção, uma sala dos professores e uma sala de coordenação.

Os sujeitos dessa pesquisa são 40 estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Fizemos uma análise dos esquemas desses sujeitos em três momentos escolares distintos. O primeiro, se refere ao pré-teste que foi aplicado quando esses estudantes estavam no 5º ano, em 2014, eles tinham idade entre 10 e 13 anos. No segundo momento na aplicação do pós-teste, em 2015, após os seus professores terem participado do processo formativo do E-Mult, dezenove estudantes estavam no 6º ano; nove na AC II (6º e 7ºanos); nove no 5º ano e três estudantes no AC I (4º e 5º anos), e eles tinham idade entre 11 e 14 anos. Por fim, no terceiro momento**,** no pós-teste 2 em 2017, ressaltamos que esta última aplicação ocorreu com 12 estudantes, pois foram os sujeitos que identificamos matriculados na escola. Sendo que seis estudantes estavam cursando o 8º ano; cinco o 7º ano e um estudante AC II (6º e 7ºanos), e tinham entre 13 e 15 anos.

3.2.2 Instrumento diagnóstico

O instrumento que foi aplicado aos estudantes do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental**,** no E-Mult, era composto por 13 situações-problema (ver Anexo A), envolvendo conceitos da Estrutura Multiplicativa. Ratificamos que em 2014 e 2015 foi aplicado o mesmo instrumento com as 13 situações. Em 2017 fizemos um recorte deste instrumento e aplicamos apenas seis situações. Contudo, o nosso foco nos três momentos foi para as situações que envolviam o conceito de proporção simples. Analisamos seis situações distribuídas na seguinte disposição: três situações com a correspondência um para muitos e três situações com a correspondência muitos para muitos.

Apresentamos nos Quadros 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 as seis situações e os possíveis esquemas de resolução que poderiam ser apresentados pelos estudantes.

Para cada uma das situações, apresentamos seis possibilidades de esquemas a saber: *relação escalar, relação funcional*, *regra de três*, *uso de desenhos*, *uso de algoritmo* e *adição de parcelas repetidas*.

A possibilidade de ter os esquemas *relação escalar* e *relação funcional* na resolução dos estudantes se justifica, pois esses foram esquemas estudados com os professores durante processo formativo do E-Mult.

Na *relação escalar* a análise da situação é realizada de forma vertical. O operador escalar que possibilita a transformação de uma quantidade em outra precisa ser identificado. No entanto, consideramos esse esquema complexo para o estudante.

Na relação funcional análise é feita de forma horizontal identificando o operador funcional que permite a transformação das quantidades.

Regra de três, é um método de resolução que é trabalhado no 7º ano do ensino fundamental. Neste método é importante estabelecer as razões entre quantidades de maneira correta para obter sucesso na solução final.

No *Uso de desenhos,* o estudante pode representar as quantidades propostas na situação com o desenho que faça referência a ela ou não.

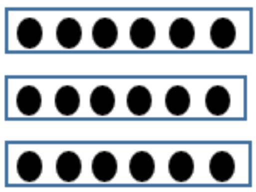
Algoritmo da multiplicação e divisão estudantes podem tratar a situação como se fosse uma relação ternária e realizar a multiplicação ou divisão das quantidades apresentadas na situação

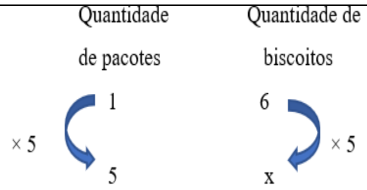
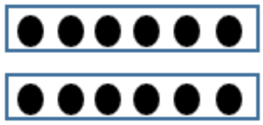
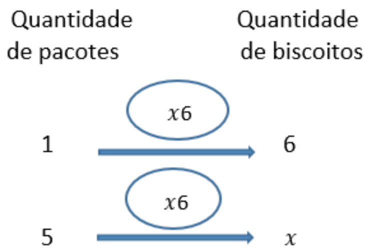
Adição de parcelas repetidas os estudantes podem somar as quantidades de acordo número de agrupamento solicitado na situação.

Existem diferentes formas de resolver uma situação. Não temos a intenção de classificar nenhuma dessas formas como o esquema correto. Não é esperado que os estudantes mobilizem todos esses tipos de esquemas, pois, existem esquemas que podem ser mais complexos do que outros para eles. O Quadro 3.1 apresenta possibilidades de esquemas para a Situação 1. Apresentamos a numeração das situações de acordo com a ordem em foram apresentadas no instrumento.

Quadro 3. 1 - Situação 1: Possíveis esquemas de resolução

Um para muitos- Multiplicação *Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos*
JOANA SABE QUE EM UM PACOTE HÁ 6 BISCOITOS. ELA TEM 5 PACOTES. QUANTOS BISCOITOS JOANA TEM?

Possíveis esquemas de resolução		
Relação escalar	**Regra de três**	**Uso desenhos**
	$\frac{1}{5} = \frac{6}{x}$	

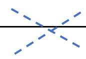
	x = 30	
Relação Funcional	**Algoritmo da Multiplicação**	**Adição de parcelas repetidas**
	$\begin{array}{r} 6 \\ x\ \ 5 \\ \hline 30 \end{array}$	6 + 6 + 6+ 6 + 6 = 30

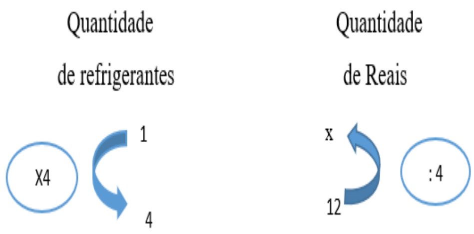
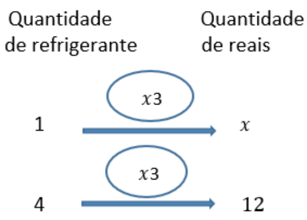
Fonte: Material produzido na pesquisa.

O nível de complexidade da classe de situações um para muitos pode ser explicado pelos raciocínios e operações que estão envoltos na situação. A Situação 1 apresentada no Quadro 3.1, envolve uma relação de correspondência de um para muitos e espera-se que o estudante mobilize a operação de multiplicação para resolvê-la. Mas, é possível que eles utilizem outros esquemas em sua resolução.

O Quadro 3.2 apresenta possibilidades de esquemas para a resolução da Situação 2.

Quadro 3. 2 -Situação 3: Possíveis de resolução

Um para muitos - divisão por partição UM SUPERMERCADO FEZ UMA PROMOÇÃO: "LEVE 4 REFRIGERANTES POR APENAS 12 REAIS". QUANTO VAI CUSTAR CADA REFRIGERANTE?		
Possíveis esquemas de resolução		
Relação escalar	**Regra de três**	**Uso de desenhos**
		

	$\frac{1}{4} = \frac{x}{12}$ $4x = 12$ $x = \frac{12}{4}$ $x = 3$	
Relação Funcional	**Algoritmo da Divisão**	**Adição de parcelas repetidas**
	$\begin{array}{r\|l} 12 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$	3 + 3+ 3+ 3 = 12

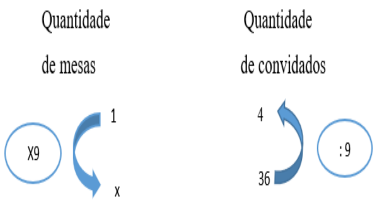
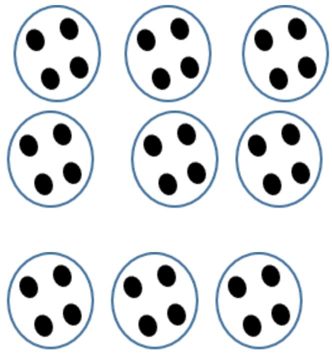
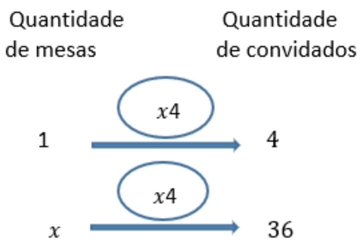
Fonte: Material produzido na pesquisa.

No Quadro 3.2 apresentamos a Situação 2, na qual trata da relação de correspondência um para muitos, envolve a ideia de divisão por partição, na qual tem que se dividir o valor total da quantidade de refrigerante, para sabermos o valor de cada refrigerante. Assim é esperado que o estudante mobilize a operação de divisão para resolução.

O Quadro 3.3 apresenta possibilidades de esquemas para a resolução da Situação 3.

Quadro 3. 3 -Situação 5:possíveis esquemas de resolução

Um para muitos - divisão por quotas A ESCOLA RECANTO FARÁ UMA FESTA PARA 36 CONVIDADOS. EM CADA MESA, FICARÃO 4 CONVIDADOS. QUANTAS MESAS A ESCOLA PRECISARÁ ALUGAR?

Possíveis esquemas de resolução		
Relação escalar	**Regra de três**	**Uso de desenhos**
	$\frac{1}{x} = \frac{4}{36}$ $4x = 36$ $x = \frac{36}{4}$ $x = 9$	
Relação Funcional	**Algoritmo da Divisão**	**Adição de parcelas repetidas**
	36 | 4 0 9	4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4+ 4+ 4+ 4 = 36

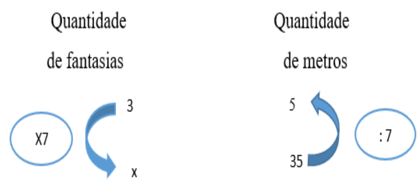
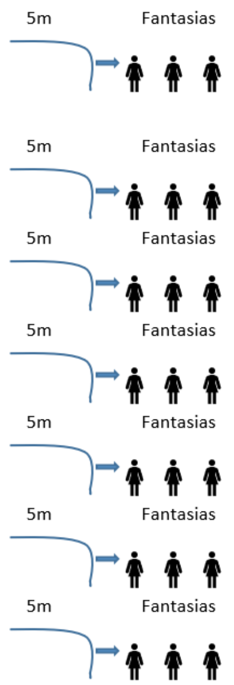
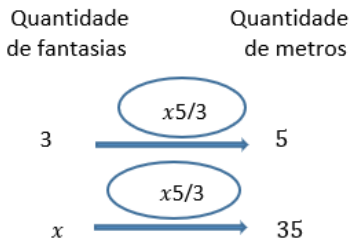
Fonte: Material produzido na pesquisa.

A Situação 3 apresentada no Quadro 3.3 apesar de envolver a operação de divisão, da mesma forma que a situação 2, estabelece uma relação diferente da situação 2. Nesta, temos uma divisão por quotas, na qual temos que dividir a quantidade 36 em quotas de 4. É esperado que seja mobilizada a operação de divisão.

O Quadro 3.4 apresenta possibilidades de esquemas para a resolução da Situação 4.

Quadro 3. 4 -Situação 2:possíveis esquemas de resolução

Muitos para muitos PARA FAZER 3 FANTASIAS, SÃO NECESSÁRIOS 5M DE TECIDO. ANA TEM 35M DE TECIDO. QUANTAS FANTASIAS ELA PODE FAZER?

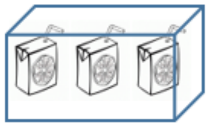
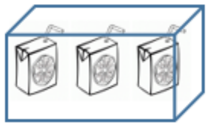
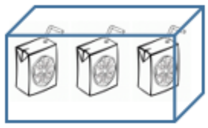
Possíveis esquemas de resolução		
Relação escalar	**Regra de três**	**Uso de desenhos**
	$\frac{3}{x} = \frac{5}{35}$ $105 = 5\,x$ $\frac{105}{5} = x$ $x = 21$	
Relação Funcional	**Uso de divisão e multiplicação**	**Adição de parcelas repetidas**
	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 3 \\ \hline 105 \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 105 & 5 \\ \hline 0 & 21 \end{array}$	5+5+5+5+5+5+5 = 35 3+3+3+3+3+3+3 = 21

Fonte: Material produzido na pesquisa.

Na Situação 4, temos uma relação de correspondência de muitos para muitos, no entanto, é possível explicitar a relação de um para muitos. É esperado que o estudante mobilize a operação de multiplicação e divisão para a resolução da situação.O Quadro 3.5 apresenta possibilidades de esquemas para a resolução da Situação 5.

Quadro 3. 5 -Situação 4: Possíveis esquemas de resolução

Muitos para muitos - CAIO COMPROU 9 CAIXAS DE SUCO E PAGOU 15 REAIS. SE ELE COMPRASSE 3 CAIXAS DE SUCO, QUANTO PRECISARIA PAGAR?

<table>
<tr><th colspan="3">Possíveis esquemas de resolução</th></tr>
<tr><th>Relação escalar</th><th>Regra de três</th><th>Uso de desenhos</th></tr>
<tr>
<td>Quantidade de caixas   Quantidade em reais
$\begin{array}{cc} 3 & x \\ \times 3 \downarrow & \uparrow :3 \\ 9 & 15 \end{array}$</td>
<td>$\frac{3}{9} = \frac{x}{15}$
$45 = = 9\,x$
$\frac{45}{9} = x$
$x = 5\,reais$</td>
<td>
5,00 reais

5,00 reais

5,00 reais</td>
</tr>
<tr><th>Relação Funcional</th><th>Uso de divisão e multiplicação</th><th>Adição de parcelas repetidas</th></tr>
<tr>
<td>Quantidade de caixas   Quantidade de reais
$3 \xrightarrow{x5/3} x$
$9 \xrightarrow{x5/3} 15$</td>
<td>$\begin{array}{r} 15 \\ \times 3 \\ \hline 45 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 45 & 9 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$</td>
<td>5 + 5 + 5 = 15</td>
</tr>
</table>

Fonte: Material produzido na pesquisa.

Na Situação 5, também temos uma situação que envolve a relação de muitos para muitos. Na qual também se esperamos que estudante realize uma combinação das operações de multiplicação e divisão para resolução da situação.

Quadro 3. 6 - Situação 6 : possíveis esquemas de resolução

Muitos para muitos - EM UMA GINCANA NA ESCOLA SABER, A CADA 3 VOLTAS CORRENDO NA QUADRA O ALUNO MARCA 4 PONTOS. ALEX DEU 15 VOLTAS CORRENDO NA QUADRA. QUANTOS PONTOS ELE MARCOU?

Possíveis esquemas de resolução		
Relação escalar	**Regra de três**	**Uso de desenho**
Quantidade de voltas $3 \xrightarrow{\times 5} 15$ Quantidade em pontos $4 \xrightarrow{\times 5} x$	$\frac{3}{15} = \frac{4}{x}$ $60 = = 3x$ $\frac{60}{3} = x$ $x = 20\ pontos$	3 voltas → 4 pontos 3 voltas → 4 pontos 3 voltas → 4 pontos 3 voltas → 4 pontos 3 voltas → 4 pontos
Relação Funcional	**Uso de divisão e multiplicação**	**Adição de parcelas repetidas**
Quantidade de voltas / Quantidade de pontos $3 \xrightarrow{x4/3} 4$ $15 \xrightarrow{x4/3} x$	15 X 4 60 60 | 3 0 20	4+4+4+4+4 = 20

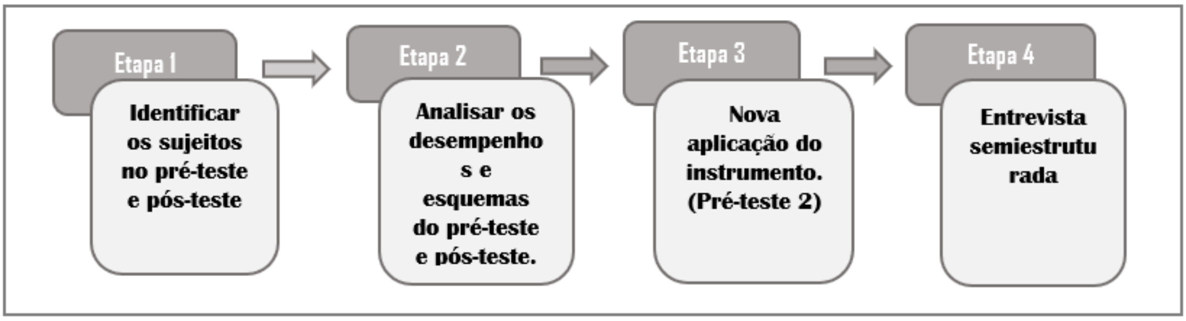
Na Situação 6, temos a relação muitos para muitos, e nesse tipo de problema não conseguimos expressar a relação de um para muitos. Pois, de acordo com as informações da situação é a partir de três voltas e tem-se a quantidade de 4 pontos, assim não tem a possibilidade de saber quanto vale uma volta. É esperado que o estudante mobilize a operação de divisão e multiplicação.

Assim, como podemos observar no Quadros 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6, as situações que foram analisadas na nossa pesquisa foi um total de seis situações, envolvendo as duas classes que compõem o conceito de proporção simples, a saber: um para muitos e muitos para muitos. Deste modo, de posse dos instrumentos que foram aplicados, iniciamos a nossa coleta e produção de dados.

3.2.3 Coleta e produção de dados

Para sistematizar a produção e coleta de dados, dividimos o nosso estudo em quatro etapas, como segue na Figura 3.2.

Figura 3. 2 - Etapas do estudo



Fonte: Material produzido na pesquisa.

De posse dos protocolos dos estudantes do 5º ano do ensino fundamental, buscamos identificar os mesmos sujeitos nos instrumentos do pré-teste no pós-teste. É importante salientar que o período de aplicação de um teste para o outro teve um espaço de tempo. O pré-teste foi aplicado no mês de outubro de 2014 e o pós-teste no mês de novembro de 2015. Assim, para identificar os estudantes que estavam no 5º ano na primeira aplicação do instrumento, levamos em conta os possíveis anos escolares em que eles poderiam estar na 2ª aplicação. Dessa forma, existiam duas possibilidades, a saber, i) – Se os estudantes do 5º ano tivessem sido aprovados, poderiam estar no 6º ano ou AC[8] II (6 e 7º anos). ii) Se eles tivessem sido reprovados**,** poderiam estar no 5º ano ou AC I (4º e 5º anos). Com isso, identificamos que os estudantes estavam distribuídos da seguinte forma dentro destas possibilidades: 19 estudantes estavam no 6º ano, 9 estudantes na AC II (6º e 7ºanos), 9 estudantes no 5º ano e 3 estudantes no AC I (4º e 5º anos), totalizando 40 estudantes.

---

[8] Aceleração.

Na etapa 3, retornamos à escola onde foi realizada a aplicação do instrumento diagnóstico. Juntamente com a coordenação, identificamos os estudantes que ainda estavam matriculados na escola. Ao final dessa busca, encontramos 12 estudantes. Realizamos o pós-teste 2 do mesmo instrumento (ver seção 3.2.2) com esses 12 estudantes. Essa nova aplicação ocorreu no mês de outubro de 2017.

Por fim, na etapa 4, fizemos uma entrevista semiestruturada, que é "[...] quando o entrevistador tem liberdade para desenvolver cada situação em qualquer direção que considere adequada. É uma forma de explorar mais amplamente." (MARCONI; LAKATOS, 2011, p.281). Essa entrevista foi feita com os 12 estudantes. Incorporamos essa modalidade de entrevista, devido às vantagens que ela proporciona, pois "pode ser usada com todos os segmentos da população para avaliar atitudes e comportamentos, podendo o entrevistado ser bem mais observado. Possibilita também a coleta de dados importantes que não se encontram em fontes documentais." (MARCONI; LAKATOS, 2011, p.282). Assim, utilizamos nessa etapa um gravador e um caderno para possíveis observações que considerarmos pertinentes.

Com essa entrevista semiestruturada (ver Apêndice I), objetivamos compreender os esquemas implícitos envolvidos na ação dos estudantes, bem como entender a construção dos esquemas de resolução, considerando os invariantes operatórios, a saber: Teorema em ação e Conceitos em ação.

3.2.4 Procedimentos para análise dos dados

A nossa análise foi dividida em três momentos. No primeiro momento, fizemos o tratamento do pré-teste (5º ano) e do pós-teste (anos escolares distintos) dos 40 estudantes que foram identificados e, depois, focamos nos 12 estudantes que ainda estavam matriculados na escola. Esse processo foi feito com o auxílio do pacote estatístico *Statistical Package for Social Sciences* (SPSS) (NORUSIS, 1993)[9]. Dessa forma, foram consideradas as seguintes variáveis:

- ✓ O desempenho geral dos estudantes;
- ✓ Desempenho por situação.

---

[9] É um *software* aplicativo utilizado para realizar testes estatísticos.

No segundo momento, fizemos uma análise dos esquemas utilizados pelos estudantes ao responderem situações de proporção simples. Tivemos como critério de ponto de partida as categorias que foram elaboradas com a contribuição de todos os membros do projeto E-Mult, por meio de reuniões virtuais e presenciais. Juntamente com o grupo foram elaboradas as categorias: Esquema (Explícito, Implícito e Em Branco); Representação (Desenho, Numérica, Mista, incompreensível, língua materna e Lista) e Operação fundamental (Estrutura Aditiva, Estrutura multiplicativa e Mista). Ao analisarmos as resoluções dos estudantes, constatamos que algumas subcategorias que foram elencadas no E-Mult não são características dos esquemas de proporção simples, a saber: incompreensível, língua materna e Lista. No Quadro 3.7 apresentamos as categorias que consideramos para a nossa análise.

Quadro 3. 7 -Categorias eleboradas no E-Mult

ESQUEMA	**REPRESENTAÇÃO**	**OPERAÇÃO FUNDAMENTAL**
Explícito	Desenho Numérica Mista	Estrutura Aditiva Estrutura Multiplicativa Não identificável
Implícito		
Em branco		

Fonte: Elaboração das autoras a partir das categorias produzidas na Rede E-Mult (2013-2017).

Como podemos observar no Quadro 3.7, ao classificarmos o esquema como explícito ele poderia ter três tipos de representação: Desenho, Numérica e Mista. E essa representação poderia apresentar três tipos de operação fundamental: Estrutura Aditiva, Estrutura Multiplicativa e Mista. Os esquemas Implícito e em Branco não poderiam ser classificados.

As categorias elaboradas basearam-se parcialmente na TCC e nas resoluções dos estudantes apresentadas nos instrumentos diagnósticos. Para uma melhor compreensão da classificação desses esquemas apresentamos a seguir no Quadro 3.8 a definição da categoria Esquema.

Quadro 3. 8 - Descrição dos tipos das categoria esquema

Esquema	**Descrição**

Explícito	São as ações realizadas pelos estudantes, expressas por meio de um registro, apresentadas na busca da solução da situação.
Implícito	Quando o estudante registra apenas a resposta, sem apresentar o esquema de resolução utilizado.
Em branco	Quando não há nenhum tipo de registro no instrumento diagnóstico.

Fonte: Material produzido na Rede E-Mult (2013-2017).

Assim, quando o esquema for classificado como explícito, analisamos os tipos de registros que foram apresentados, deste modo, temos a categoria Representação descrita no Quadro 3.9.

Quadro 3. 9 - Descrição dos tipos da categoria Representação

Representação	**Descrição (Quando...)**
Desenho	O estudante se utiliza de registros do tipo riscos, traços, bolinhas, dentre outros, para representar o procedimento de solução.
Numérica	O estudante usa apenas números ou símbolos das operações fundamentais.
Mista	O estudante utiliza, pelo menos, duas das cinco representações (desenho, lista, diagrama, numérica ou língua materna), sendo representações independentes.
Diagrama	O estudante faz uma representação ligando objetos, números ou desenhos, explicitando uma relação entre eles.

Fonte: Material produzido na Rede E-Mult (2013-2017).

Dessa forma, entre os tipos de representação registrados pelo estudante, analisamos a operação que foi utilizada no seu esquema, que denominamos como categoria Operação Fundamental, podendo ser classificada conforme apresentação no Quadro 3.10.

Quadro 3. 10 - Descrição dos tipos da categoria Operação fundamental

Operação fundamental	**Descrição**
Estrutura aditiva	São os registros relacionados às operações de adição ou de subtração, quando o estudante se utiliza das operações ou quando se utiliza das ideias operacionais das mesmas, podendo ter desenhos atrelados aos símbolos matemáticos que representam essas operações.
Estrutura multiplicativa	São os registros relacionados às operações de multiplicação ou de divisão, quando o estudante se utiliza das operações ou quando se utiliza das ideias operacionais das mesmas, podendo ter desenhos atrelados aos símbolos matemáticos que representam essas operações.
Mista	Quando o estudante utiliza registros relacionados a uma das operações de adição ou subtração e uma das operações de multiplicação ou divisão, ou quando se utiliza das ideias operacionais das mesmas, podendo ter desenhos atrelados aos símbolos matemáticos que representam essas
Não identificável	Quando não se consegue identificar no registro feito pelo estudante a operação utilizada.

Fonte: Material produzido na Rede E-Mult (2013-2017).

Por fim, no terceiro momento, realizamos a análise das respostas, dos desempenhos e esquemas dos dados apresentados na nova aplicação com 12 estudantes e a descrição das entrevistas semiestruturadas (ver Anexo B) realizadas com eles. Para a análise desse conteúdo, direcionamos o foco para percebermos a construção dos esquemas de resolução, por parte dos estudantes, considerando os elementos que Vergnaud (1996) destaca como sendo essenciais para a elaboração e funcionalidade de um esquema[10].

[10] Ver o capítulo I p.

CAPÍTULO IV

DIALOGANDO COM OS DADOS

Neste capítulo, apresentamos a análise dos dados que foram produzidos e coletados. O objetivo é compreender os esquemas que estudantes do Ensino Fundamental apresentam ao resolverem situações de proporção simples, em momentos escolares distintos.

Consideramos pertinente recapitular algumas características do foco do nosso estudo. Inicialmente, fizemos uma análise do desempenho dos esquemas apresentados por 40 estudantes em dois momentos distintos, a saber: um pré-teste (2014) e um pós-teste (2015) e um pós-teste 2. Identificamos os estudantes entre esses 40 que ainda estavam matriculados na escola em 2017 e realizamos uma nova aplicação do instrumento diagnóstico. Encontramos 12 estudantes, assim, a segunda parte da nossa análise foi direcionada para os esquemas desses estudantes ao longo de três momentos escolares distintos em: 2014, 2015 e 2017.

Para um melhor entendimento, estruturamos este capítulo em duas seções: na primeira, apresentamos o desempenho e esquemas dos 40 estudantes em geral; na segunda, uma análise detalhada do comportamento dos 12 estudantes.

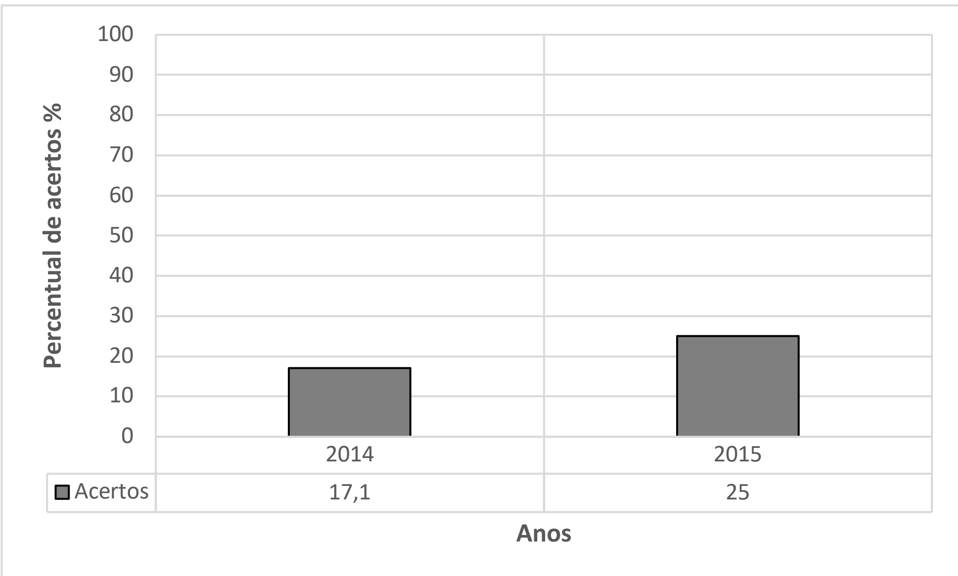
4.1 Desempenho dos 40 estudantes em dois momentos escolares

Nesta seção, focaremos nos detalhes do desempenho dos 40 sujeitos que identificamos na primeira na fase da pesquisa em dois momentos escolares (2014/2015). Assim, descreveremos o desempenho geral, o desempenho por classe de situação e, por fim os esquemas, representações e operações fundamentais utilizadas por eles.

4.1.1 Desempenho geral

A princípio, analisamos o desempenho geral dos 40 estudantes diante das seis situações de proporção simples, totalizando 240 resoluções possíveis. As respostas foram categorizadas como: certa, errada e em branco. Na Figura 4.1, apresentamos o percentual de acertos desses sujeitos em um pré-teste (2014) e em um pós-teste (2015).

Figura 4. 1 -Desempenho geral dos 40 estudantes



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Ao analisarmos a Figura 4.1, em 2014, eles apresentaram um percentual de 17,1% de acertos, ou seja, de 240 situações, eles acertam 41. Além disso, há uma diferença na distribuição das respostas do pré-teste para o pós-teste: de um percentual de 17%, progridem para 25%, o que é equivalente a 60 respostas certas. O desempenho dos estudantes no pós-teste tem uma tendência de melhoria, no entanto, ainda não é satisfatório, sendo que eles não chegam a 50% das respostas certas. Salientamos que, dos 40 estudantes que resolveram essas situações, 12 não avançaram de ano escolar, ou seja, permaneceram no mesmo ano escolar em 2015.

Realizamos um teste estatístico para analisar se existe diferença significativa no desempenho dos estudantes entre os anos. Para isso, utilizamos o teste *t-student*. Salientamos que cada instrumento aplicado continha seis situações, logo, a pontuação total de acertos que um estudante poderia obter variava de 0 a 6. A média, em 2014, foi de 1,03 de acertos por estudante, com desvio padrão de 1,050 e, em 2015, a média foi de 1,50, com desvio padrão de 1,281. De um ano para o outro, há um ganho de, aproximadamente, meio ponto. Esse ganho, contudo, não foi estatisticamente relevante ao nível de significância de 5%, conforme o resultado apresentado por meio do teste *t-student* para amostras emparelhadas ($t_{(39)} = -1{,}805$; $p = 0{,}079$).

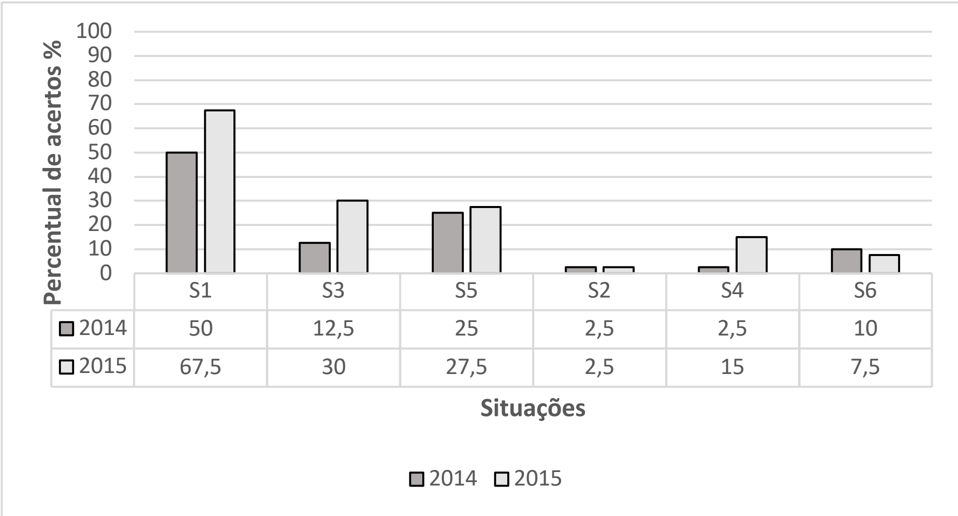
Embora o *t-student* não tenha detectado diferença ao nível de 5%, esse teste indica que haveria uma melhoria relevante ao nível de significância de 10%, ou seja, há uma tendência de melhoria em 2015.

O desempenho apresentado por esses estudantes mostra que há uma fragilidade de percentual de acertos relacionado ao conceito de proporção simples, pois, um ano após a primeira aplicação do instrumento (2014), eles não aumentam a frequência de acertos de maneira significativa na segunda aplicação (2015).

4.1.2 Desempenho por situação

Consideramos pertinente analisar o desempenho desses estudantes por situação. Ressaltamos que, das seis situações, três eram da classe um para muitos, a saber: S1 – Multiplicação; S3 – Divisão por partição; S5 – Divisão por quotas. E três situações da classe muitos para muitos: S2, S4 e S6. Na Figura 4.2, apresentamos o desempenho dos estudantes por situação.

Figura 4. 2 -Percentual de acertos dos 40 estudantes por situação



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Conforme a Figura 4.2, os resultados mostram que os estudantes apresentam melhor desempenho ao resolverem as situações da classe um para muitos. Os seus mais baixos desempenhos ficam evidenciados nas situações da classe muitos para muitos em ambos os testes.

No ano de 2014, na situação S1, os estudantes apresentaram 50% de acerto e, em 2015, acertaram mais de 60%, enquanto nas outras situações esse desempenho decai. É notável que eles apresentam melhor desempenho quando lidam com a situação na qual é esperado o uso da multiplicação (S1). Entre as seis situações, um baixo desempenho fica evidênciado na S2 em ambos os testes. E, na S3, as respostas certas, também, não chegam a 50%. Acreditamos que o uso da operação de divisão possa ter influenciado para os baixos desempenhos. Ressaltamos que S1, S3 e S5 são situações da classe um para muitos. E S2, S4 e S6, situações da classe muitos para muitos.

Para analisarmos o grau de complexidade entre as classes de situações, apresentamos, na Tabela 4.1, as estatísticas obtidas por meio do teste *t-student*.

Tabela 4. 1 - Estatísticas entre as classes de situações

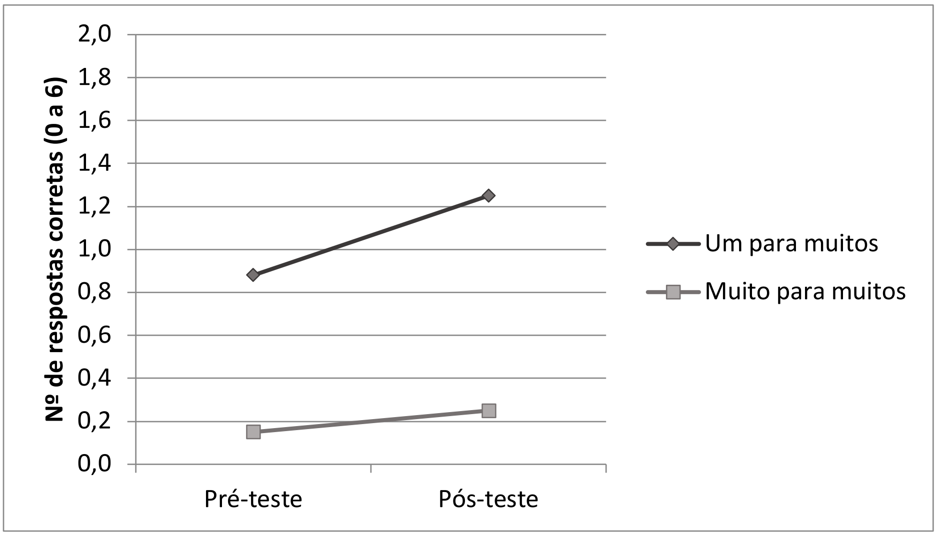
Ano	**Classe**	**Média**	**N**	**Desvio Padrão**	$t_{(39)}$	**p-valor**
2014	Um para muitos (1Xm)	0,88	40	,883	5,414	0,000
	Muitos para muitos (MxM)	0,15	40	,362		
2015	Um para muitos (1XM)	1,25	40	1,080	6,094	0,000

Muitos para muitos (MxM	0,25	40	,439

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Conforme o teste *t-student*, para amostras emparelhadas ($t(39) = 5{,}414$; $p = 0{,}000$), em 2014, a diferença entre as médias de desempenho dos estudantes em cada classe era significativa. E, em 2015, essa estatística foi semelhante ($t(39) = 6{,}094$; $p = 0{,}000$). Isso mostra que existe uma diferença significativa quando os estudantes lidam com as classes de situação um para muitos e muitos para muitos. Na Figura 4.3, essa diferença fica evidenciada.

Figura 4. 3 - Médias de acertos por classe de situação



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017.

A Figura 4.3 mostra, de forma clara, o afastamento das médias de acertos entre as classes. Os estudantes apresentam melhor desempenho ao lidarem com as situações da classe um para muitos. Podemos concluir que a classe muitos para muitos tem um grau de complexidade maior. No estudo realizado por Magina, Merlini e Santos (2014), encontramos resultado semelhante, contudo, com estudantes do 3º e 5º anos, os autores concluíram que, independentemente do ano escolar, ao lidarem com a classe muitos para muitos, eles apresentam um pífio desempenho.

Essas duas classes de situações têm um nível de complexidade distinto, que pode ser explicado pelos raciocínios e operações que estão envoltos na situação. O reflexo desse desempenho pode estar atrelado ao fato de que, ao resolver as situações da classe 1xm, espera-se que o estudante utilize o conceito de multiplição ou divisão, mas, para a classe mxm, espera-se que ele utilize essas operações simultaneamente. Sabemos que o processo de aprendizagem não envolve apenas os resultados finais, Certo ou Errado, existe um caminho pecorrido, ou seja, uma organização que os estudantes apresentam para resolver as situações. Na próxima seção, veremos os esquemas que foram utilizados por eles.

4.1.3 Esquemas

Nesta seção, discutiremos os esquemas dos 40 estudantes de modo geral, no entanto, não nos aprofundaremos nessa discussão. Faremos uma análise mais detalhada dos esquemas dos 12 estudantes na seção 4.3. No Capítulo III, apresentamos as definições da classificação das categorias que foram elaboradas juntamente com os membros do E-Mult. Na categoria esquema, elencamos três tipos: *Explícito, Implícito ou Em branco.* Na Tabela 4.2, apresentamos um panorama geral dos esquemas dos 40 estudantes.

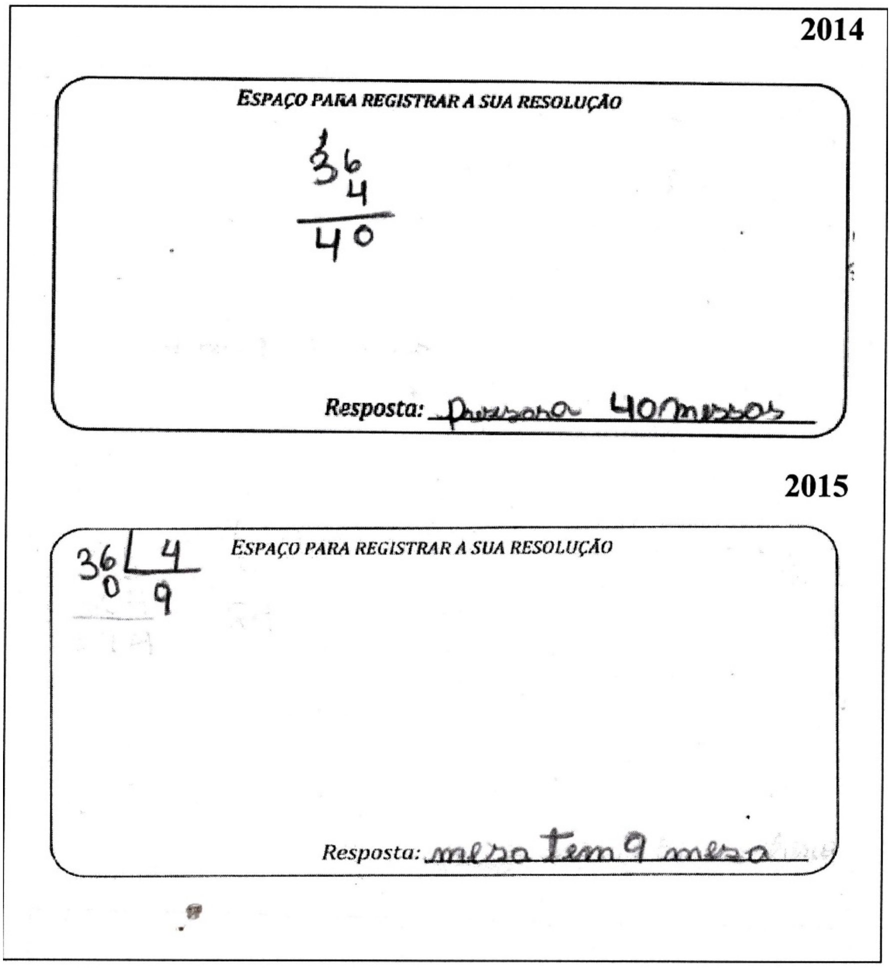
Tabela 4. 2 -Frequência da categoria esquema dos 40 estudantes

Esquemas	**2014**	**2015**
Explícito	207	211
Implícito	19	21
Em branco	14	8
Total	240	240

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Notamos que, na categoria esquema, os estudantes, de uma maneira geral, tendem a explicitar os seus esquemas, ou seja, ao resolverem a situação, apresentam algum tipo de registro, mesmo que esse registro não mostre uma resposta correta. Como constatamos na seção anterior, a maioria desses estudantes não apresenta uma quantidade significativa de acertos. Vejamos, na Figura 4.4, um esquema que um estudante apresenta ao resolver a situação. S3 - *A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa, ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?*

Figura 4. 4 - Um esquema apresentado pelo estudante Rafael



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A resolução registrada pelo estudante na Figura 4.4 foi classificada como um esquema explícito, já que apresenta um registro para resolver a situação: ele utilizou a representação numérica mobilizando a operação de adição. Podemos observar que, em 2014, ele montou o algoritmo da adição de forma correta, mas essa não é uma operação esperada para a situação proposta, e o estudante apresentou uma resposta errada. Em 2015, ele montou o algoritmo da divisão de forma correta, demonstrando a sua competência diante da situação, pois reconheceu um invariante operatório esperado para resolvê-la.O estudante conseguiu efetuar as regras de ação e inferências de forma a alcançar a resposta correta. Ao elaborar o esquema, ele trata como se fosse uma relação ternária, o que é algo comum, mas não podemos perceber, no esquema explicitado, se ele compreende as relações envolvidas nessa proporção.

Quando o esquema era explícito, propusemo-nos a identificar o tipo de registro elaborado pelo estudante. Assim, elencamos a subcategoria representação, que poderia ser do tipo: *Desenho, Numérica ou Mista***.** Na Tabela 4.3, apresentamos a frequência dessa subcategoria.

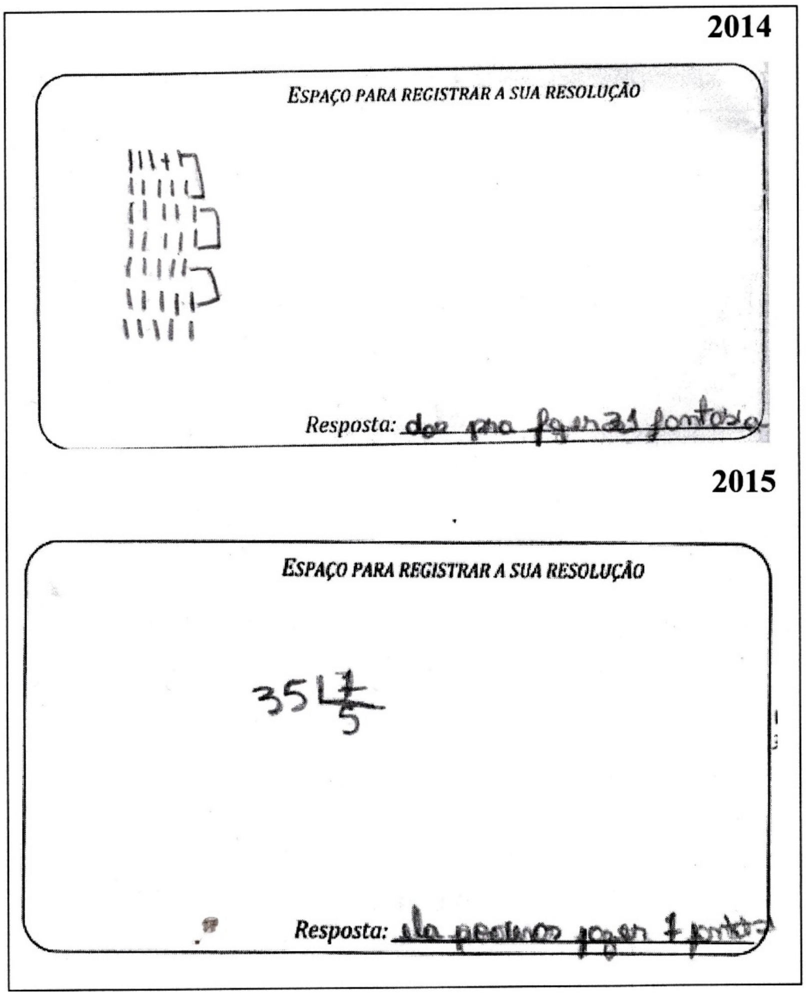
Tabela 4. 3 - Frequência da categoria representação dos 40 estudantes

Representação (%)	**2014**	**2015**
Desenho	36	7
Numérica	160	185
Mista	11	19
Total	207	211

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na subcategoria representação, de acordo com a Tabela 4.3, em ambos os testes o que mais prevalece é a representação numérica. Outro fato que podemos destacar é que há uma modificação na conduta deles de um teste para outro, na subcategoria desenho, que sofreu uma queda em 2015. É possível elencar diferentes motivos para que tenha ocorrido essa mudança, como: experiências vividas pelo sujeito, a maturação e a maturidade cognitiva que ele adquiriu durante esse período. Não temos, entretanto, dados que nos permitam inferir a respeito de nenhuma delas. Na Figura 4.5, apresentamos esquema elaborado por uma estudante. É possível observar a variação na resolução de um ano para o outro. *S4 - Para fazer 3 fantasias, são necessários 5 m de tecido. Ana tem 35 m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?*

Figura 4. 5 - Esquema apresentado pela estudante Isabel



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

No esquema registrado pela estudante Isabel, podemos observar que ela apresenta uma organização variante de um ano para o outro. Em 2014, a estudante apresentou um esquema explícito, utilizando a representação desenho, e podemos inferir que consegue estabeler a correspondência de muitos para muitos de forma correta. A cada cinco metros de tecido, podem-se fazer três fantasias, então, ela representou os cinco metros com pauzinhos e foi realizando a contagem. Inferimos que ela mobilizou uma operação de adição.

Em 2015, Isabel fez um esquema diferente. Montou o algoritmo da divisão, que é uma operação esperada para resolver essa situação, no entanto, ela apresentou uma operação inversa, na qual não conseguimos inferir como ela encontrou o valor 7. Ao utilizar o algoritmo, Isabel não realizou todos os procedimentos para apresentar a resposta correta. O valor 7 que encontrou correspondia à quantidade de agrupamentos de

5 metros que cabiam em 35, ainda podemos dizer que o 7 é operador escalar sem dimensão que permite a transformação das quantidades. Isabel precisava multiplicar o número 7 por 3 fantasias, para encontrar a quantidade correta de fantasias.

Ao classificarmos o tipo de representação que foi moblilizado pelos estudantes, verificamos a operação que intitulamos como subcategoria operação fundamental, a saber: *estrutura aditiva, estrutura multiplicativa, mista ou não identificável***.** Na Tabela 4.4, apresentamos a frequência dessa subcategoria.

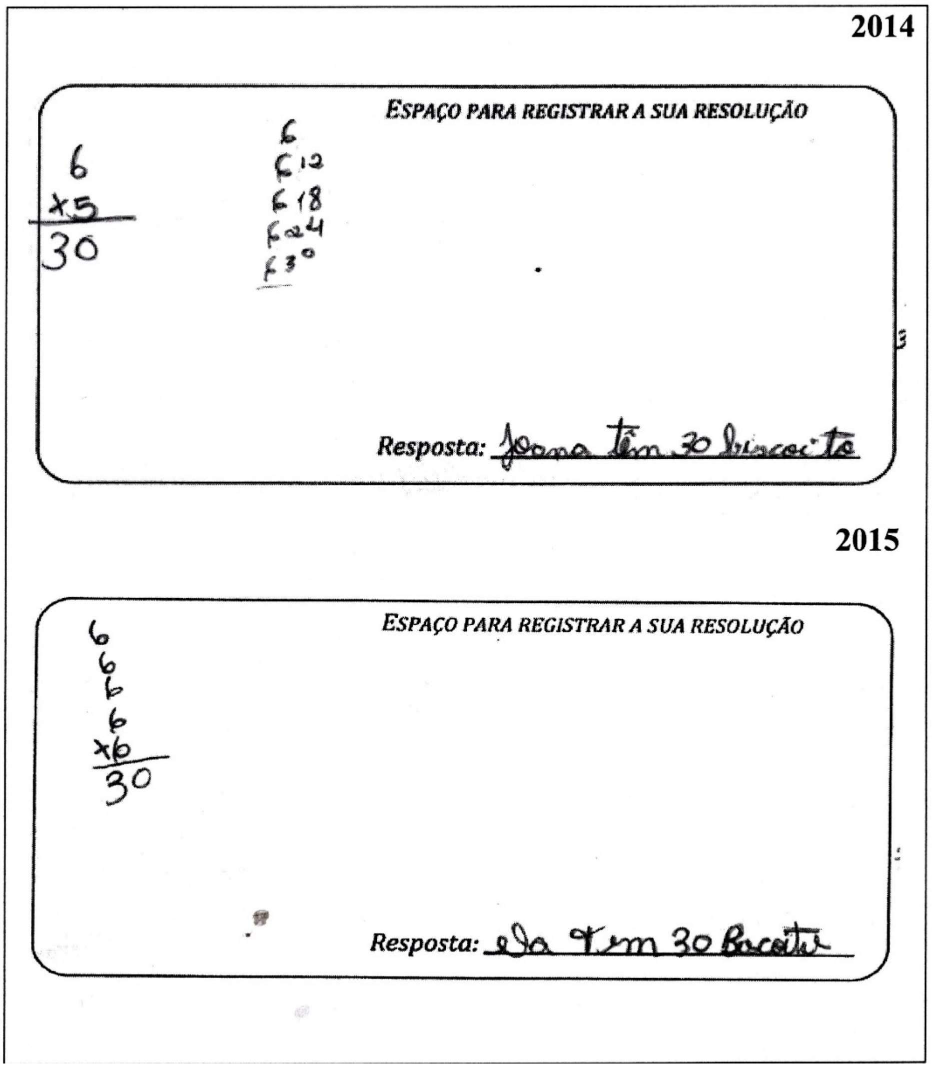
Tabela 4. 4- Frequência da categoria operação fundamental dos 40 estudantes

Operação (%)	**2014**	**2015**
Estrutura aditiva	50	21
Estrutura multiplicativa	114	147
Mista	1	9
Não identificável	42	34
Total	207	211

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Conforme a Tabela 4.4, ao mobilizarem a operação fundamental, os 40 estudantes tendem a utilizar uma operação que faz parte da estrutura multiplicativa, uma multiplicação ou divisão. E podemos ver que a utilização da estrutura aditiva, adição ou subtração diminuiu em 2015. Esse comportamento pode estar atrelado ao fato de que, em 2014, esses estudantes estavam no final do Ensino Fundamental I e ainda poderiam estar em um processo de compreensão da estrutura multiplicativa. Na Figura 4.6, temos o esquema apresentado pela estudante Ana, que acerta tanto no pré-teste como no pós-teste, que se refere à resolução para a seguinte situação: *S1- Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?*

Figura 4. 6 - Esquema apresentado pela estudante Ana



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

O registro apresentado pela estudante Ana foi classificado como esquema explícito, utilizando uma representação numérica e mobilizando no pré-teste a operação da estrutura aditiva e, no pós-teste, uma operação mista, estrutura aditiva e multiplicativa. No pré-teste, ela resolve essa situação da classe um para muitos com adição de parcelas repetidas; no pós-teste, ela utiliza dois esquemas: o anterior, que já havia utilizado, no entanto, ela explicita essa soma até chegar à resposta 30. E registra um novo esquema, que é o algoritmo da multiplicação. É possível inferir que Ana pode estar em um processo de transição da estrutura aditiva para a multiplicativa e precisa recorrer aos dois tipos de esquemas.

Nesta seção, foi possível apresentar um panorama geral dos 40 estudantes diante das situações de proporção simples. Na próxima seção, nos aprofundaremos em discutir os esquemas dos 12 estudantes em três momentos escolares.

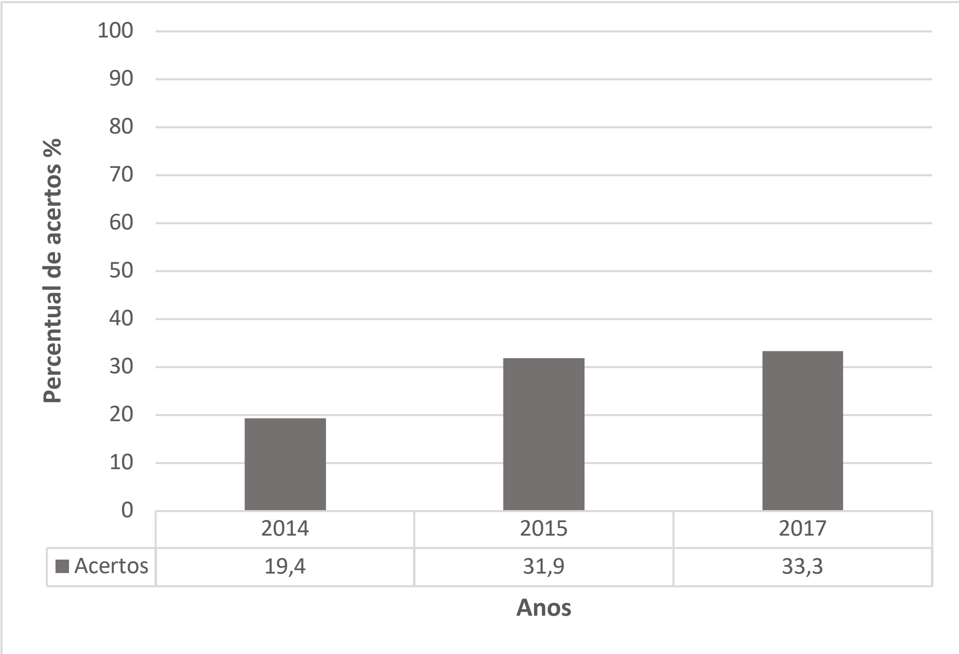
4.2 Esquemas dos 12 estudantes ao longo de três momentos escolares

Aqui, apresentamos a análise dos dados de 12 estudantes ao longo de três anos escolares (2014, 2015 e 2017). Esse grupo de estudantes é composto por oito meninas e quatro meninos. Eles têm idade entre 13 e 15 anos; seis deles não foram reprovados em nenhum ano escolar, passando esse período (2014/2017) de forma regular e seis deles foram reprovados em um ano escolar durante esse período. Inicialmente, discutiremos o desempenho que foi apresentado por eles. Em seguida, os esquemas, as representações e, por fim, as operações fundamentais mobilizadas.

4.2.1 Desempenho geral

Analisamos o desempenho dos 12 estudantes. Consideramos as seis situações de proporção simples, assim, tivemos um total de 72 resoluções possíveis. A Figura 4.7, a seguir, apresenta o percentual de acertos dados ao longo de três momentos escolares: em um pré-teste (2014), em um pós-teste (2016) e em pós-teste 2 em (2017).

Figura 4. 7 - Percentual de acertos dos estudantes em três momentos: 2014/2015/2017



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Como podemos analisar, na Figura 4, em nenhum ano escolar, esses estudantes conseguem acertar 50% das situações. No ano de 2014 para 2015, podemos observar uma mudança na quantidade de respostas certas, mas, do ano de 2016 para 2017, o número de respostas certas está quase equivalente. O que se observa é que o desempenho desses estudantes não apresentou avanços nesse período. O teste *t-student* confirma o não avanço no desempenho dos estudantes, a seguir, na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Estatísticas de acertos dos 12 estudantes

Ano	Média	N	Desvio Padrão	$t_{(11)}$	p-valor
2014	1,25	12	1,138	-1,295	0,222
2015	1,92	12	1,414		
2015	1,92	12	1,414	0,123	0,905
2017	2,00	12	1,564		

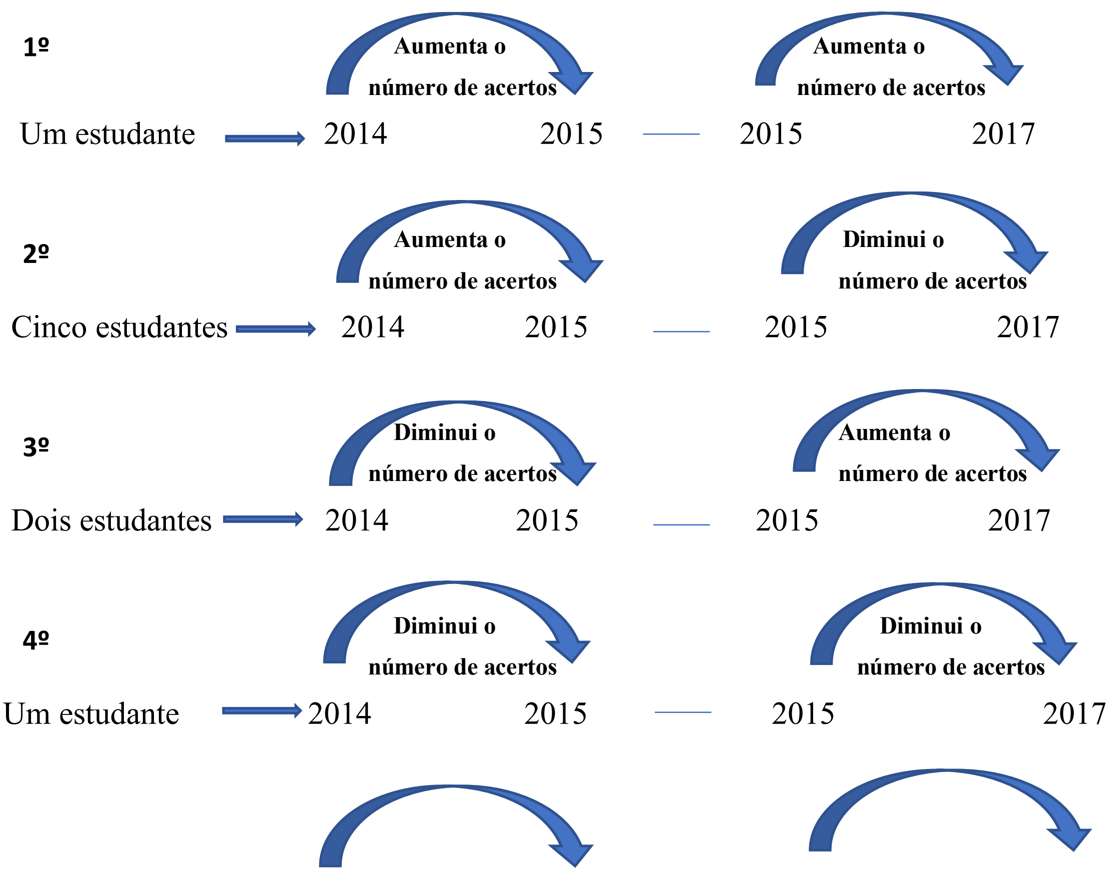
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

De acordo com o teste *t – student*, para amostras emparelhadas do ano de 2014 para 2015, ainda que apresente um aumento na média de acertos dos estudantes, esse aumento não foi significativo ($t(11) = -1{,}295$; $p = 0{,}222$). O mesmo resultado é verificado do ano de 2015 para 2017, em que não ocorre uma diferença significativa ($t(11) = 0{,}123$; $p = 0{,}905$). Isso quer dizer que os estudantes, de um modo geral, não apresentaram uma evolução no desempenho ao longo dos anos.

O esperado é que, quanto mais o estudante avança no nível de instrução escolar, ele apresente um melhor desempenho. No entanto, ao longo dos anos escolares, não há avanço relevante, levando em consideração que eles cursaram três anos escolares desde que o instrumento diagnóstico foi aplicado pela primeira vez.

Esse resultado pode ser reflexo da aprendizagem desses estudantes. Entendemos que o processo de aquisição do conhecimento não ocorre em curto prazo, é preciso levar em conta anos de experiência e aprendizagem (VERGNAUD,1996). Esses estudantes vivenciaram alguns anos escolares, a saber: 1º, 2º, 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental I; 6º e 7º anos do Ensino Fundamental II e, mesmo assim, não conseguiram avançar no desempenho. Consideramos pertinente analisar o comportamento dessas estudantes de maneira individual. Na Figura 4.8, analisamos se, de um ano para o outro, eles aumentavam, diminuíam ou mantinham o número de acertos constante. Consideramos o comportamento de 2014 para 2015 e, depois, de 2015 para 2017.

Figura 4. 8 - Comportamento dos 12 estudantes referente ao desempenho



5º

Aumenta o número de acertos — Fica constante o número de acertos

Dois estudantes ⟹ 2014 2015 — 2015 2017

6º

Fica constante o número de acertos — Aumenta o número de acerto

Um estudantes ⟹ 2014 2015 — 2015 2017

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 4.8, apresentamos um panorama detalhado do comportamento de desempenho dos estudantes. O 1º comportamento é o ideal, pois, ao avançar no ano escolar, é esperado que o estudante passe por um processo de crescimento do seu desempenho. No entanto, dentre os 12 estudantes, há um que apresenta esse comportamento de evolução entre os anos.

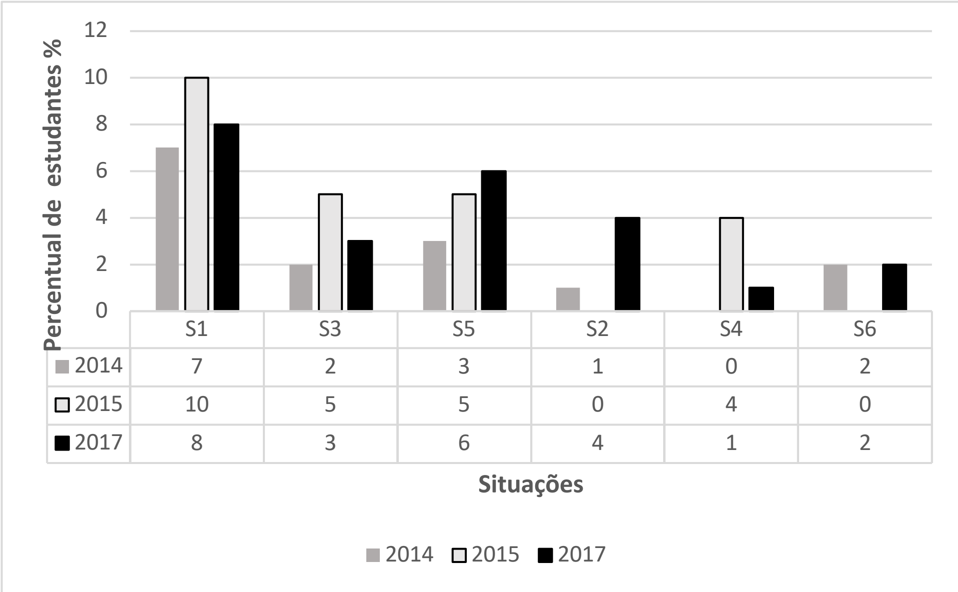
No 2º comportamento, os estudantes deixam de apresentar respostas certas para as situações que eles tinham acertado no ano anterior.

Outro aspecto que podemos analisar é que nove desses estudantes apresentam evolução no ano de 2015. Esse fato pode estar ligado ao processo formativo, do qual os professores, desses estudantes, participaram, em 2015, no projeto E-Mult, com o foco das discussões direcionado para o ensino e a aprendizagem de situações da estrutura multiplicativa.

4.2.2 Desempenho por situação

Ao analisarmos o desempenho por situação, encontramos o resultado apresentado na Figura 4.9. Vejamos o desempenho dos estudantes por situação.

Figura 4. 9 - Desempenho dos 12 estudantes por situação



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

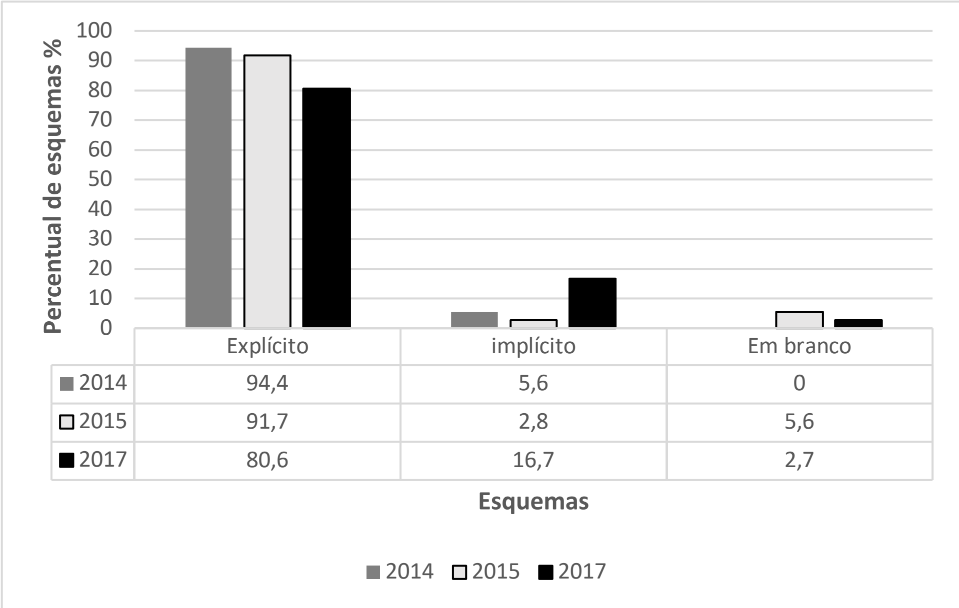
Os resultados apresentados na Tabela 4.9 trazem um comportamento semelhante aos dados do grupo de 40 estudantes (Figura 4.2). O maior número de acertos dos estudantes se concentra nas situações da classe um para muitos e, consequentemente, as situações que menos acertam são da classe de muitos para muitos. Uma das situações da classe um para muitos em que podemos notar crescimento referente ao número de acertos é a S5. Nas demais situações, não apresentam um padrão de evolução, mas têm comportamento variado durante os anos.

Para além desse resultado, direcionamos o nosso olhar para os esquemas desses estudantes, como discutiremos na próxima seção.

4.2.3 Esquemas dos 12 estudantes

Para compreendermos, de forma minuciosa e detalhada, as respostas apresentadas por esses estudantes, mostramos, na Figura 4.10, os tipos de esquemas que eles mobilizaram considerando resoluções que levaram a respostas certas ou erradas.

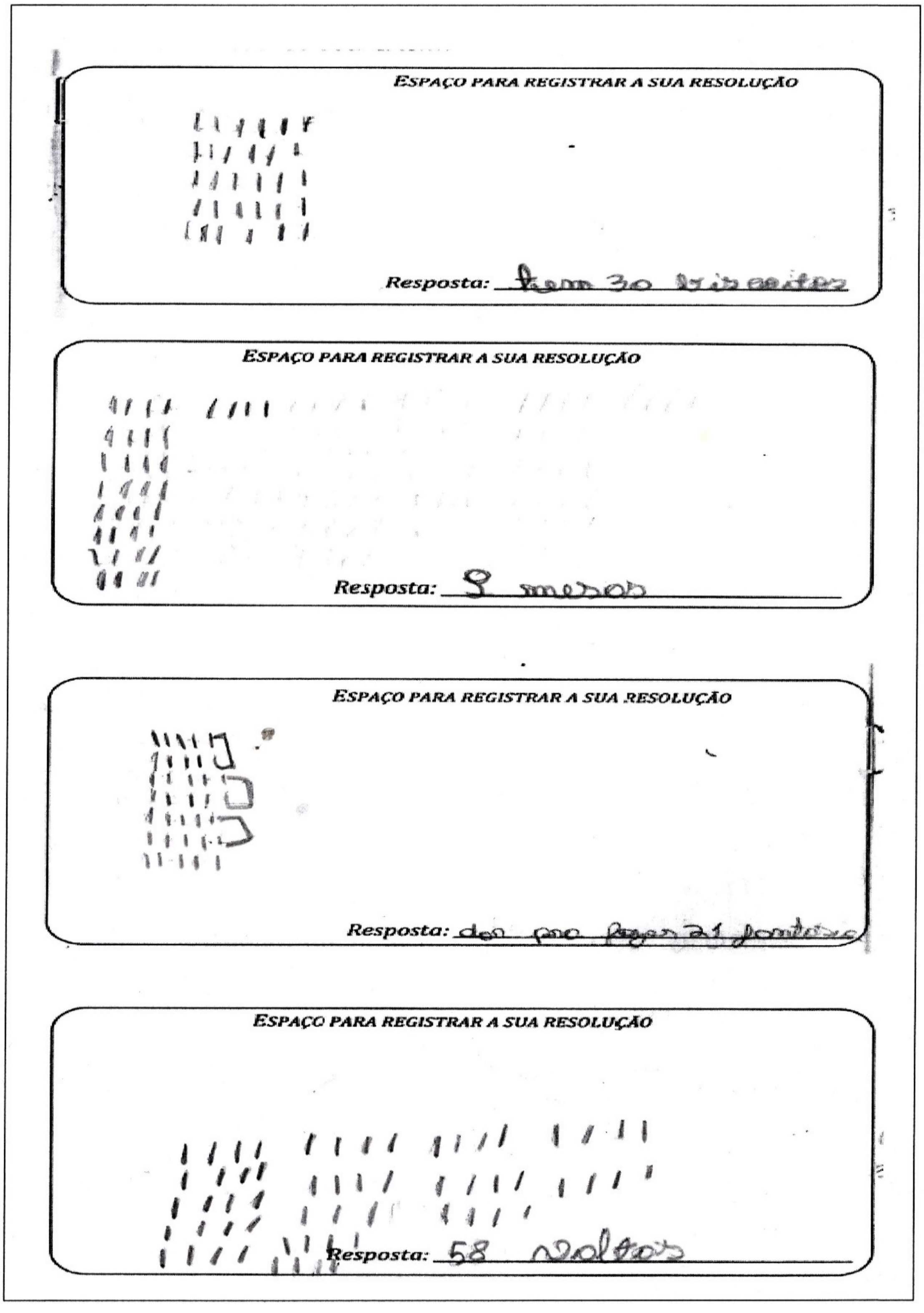
Figura 4. 10 - Esquemas apresentados pelos 12 estudantes em momentos escolares distintos: 2014/2015/2017



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Conforme a Figura 4.11, ao longo dos anos escolares, os estudantes, de um modo geral, tendem a explicitar os seus registros ao resolverem as situações de proporção simples, pois o esquema explícito tem quase 100% de frequência durante os anos. A presença do esquema em branco não é algo relevante e ele só apareceu no ano de 2017. O esquema implícito surgiu no ano de 2014 e se intensificou em 2017. Vejamos um exemplo de esquema explícito apresentado pela estudante Maria.

Figura 4. 11 - Esquema de resolução apresentado pela estudante Maria (2014)



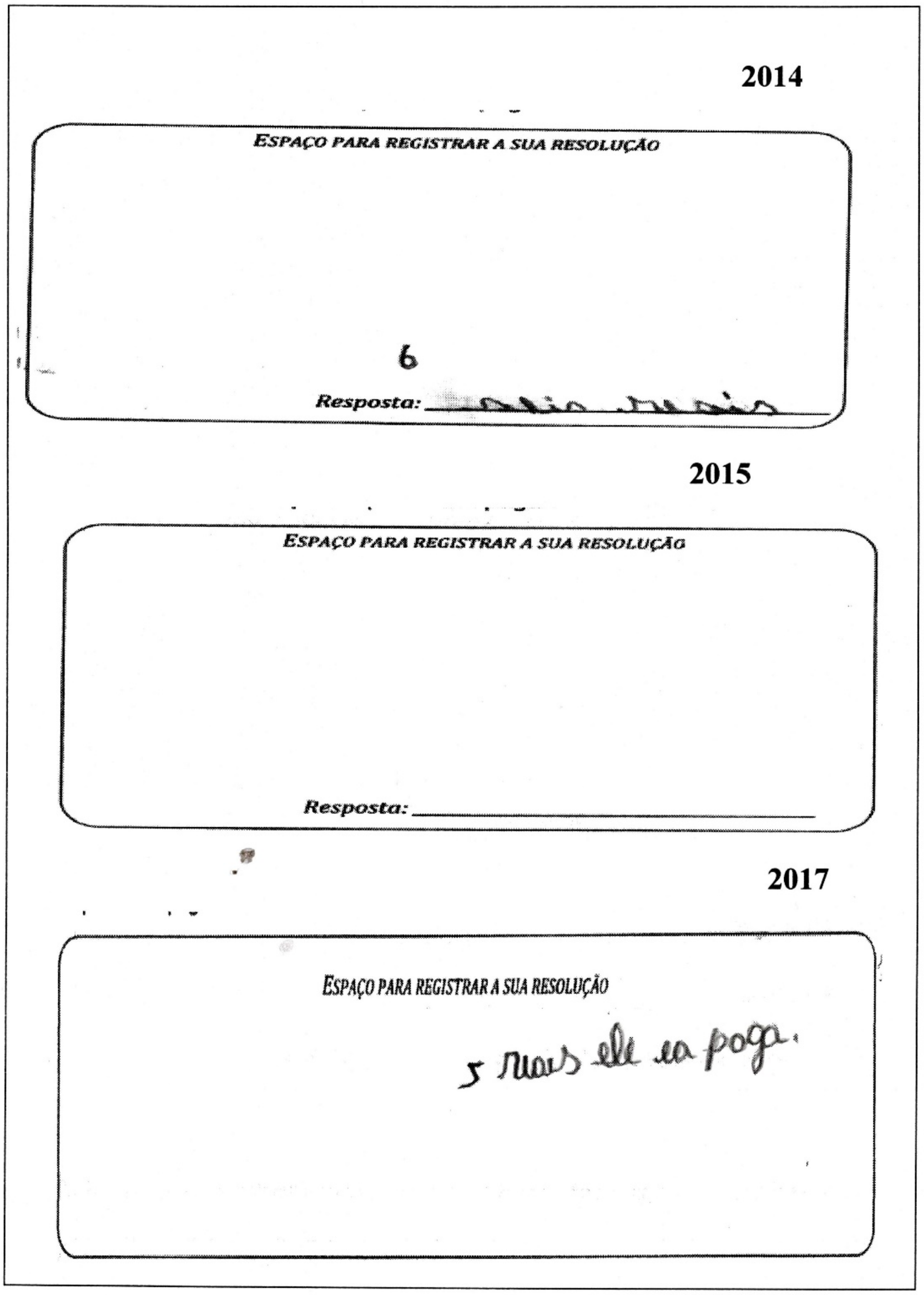
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 4.11, vemos o esquema explícito mobilizado pela estudante Maria, sendo que, no ano dessa aplicação, ela estava cursando o 5º ano. Temos quatro situações: duas da classe um para muitos e duas da classe muitos para muitos. Notamos que a conduta de Maria diante das duas classes não variou, ela expressou um mesmo comportamento para ambas as situações, bem como no instrumento por completo. Podemos inferir que ela "dispõe, em seu repertório, num momento dado de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, competências necessárias para o tratamento relativamente imediato da situação." (VERGNAUD, 1996, p. 201). Diante das situações, a estudante apresenta características de uma ação automatizada, pois, para essas classes de situações, ela apresenta organização semelhante, embora isso não signifique que não faça isso de forma consciente. No entanto, alcançou o resultado correto das três primeiras situações e não conseguiu acertar a última situação. Isso acontece devido ao fato de ela não ter mantido um elemento essencial para organização invariante dessa resolução, ou seja, ela não empregou a relação de correspondência entre as medidas de naturezas distintas de forma correta.

Nesse caso, fez a correspondência entre o todo (15 voltas) e a quantidade de quatro pontos, e transformou a situação em uma relação de um para muitos. Cada volta correspondia a quatro pontos, porém, nessa situação de muitos para muitos, não existe a possibilidade de explicitar a relação de uma volta, pois, na situação, só apresenta o valor de três voltas. Ainda podemos considerar a organização posta pela estudante como invariante.

Ao tratarmos de um esquema implícito, não é possível fazer inferências, pois o estudante só registra a resposta, a qual nos impossibilita de entender as razões e os elementos que levaram o estudante a fazer o registro. Vejamos, na Figura 4.12, o comportamento do estudante Pedro diante da situação da S4*: Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco, quanto precisaria pagar?*

Figura 4. 12 - Esquema de resolução apresentado pelo estudante Pedro (2014/2015/2017)



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na resposta apresentada pelo estudante Pedro na Figura 4.12, em 2017, percebemos que ele apresentou a resposta correta da situação. No ano de 2014, Pedro também só apresentou a resposta, no entanto, uma solução errada. Em 2016, Pedro deixou em branco essa situação. Podemos concluir que Pedro tinha uma tendência a não explicitar o seu registro. Ao tratarmos de um esquema implícito, não é possível fazer inferências, pois o estudante só registra a resposta, a qual nos impossibilita de entender as razões e os elementos que levaram o estudante a fazer o registro.

Ao realizarmos a entrevista, mostramos o instrumento respondido por ele. Pedro leu todas as situações em voz alta, antes de explicar a sua resposta. Ao chegarmos à situação 4, questionamos em relação à resposta registrada no ano de 2017:

> **P**: E na situação 4, você colocou só a resposta, mas como chegou nessa resposta?
>
> **Pedro:** Vixe tia...será que lembro? Só a resposta fica difícil de lembrar como fiz.
>
> **P:** Vamos tentar lembrar juntos?
>
> **Pedro:** Vamos, vou ler de novo!
>
> **P:** Certo.
>
> **Pedro:** Ah, é fácil tia!
>
> **P:** Você consegue me explicar como pensou para responder?
>
> **Pedro:** Consigo!
>
> **P:** Então, me explica!
>
> **Pedro:** Olha, se ele paga em 9 caixas 15 reais, em 6 caixas, ele paga 10 reais e em 3 caixas ele só pode pagar 5,00. Isso é muito fácil. Não tem como ele pagar outro valor.
>
> **P:** Hum...entendi, Pedro! E por que não escreveu a sua resposta no papel?
>
> **Pedro:** Oh, tia, eu sei como fazer de cabeça, mas não sei o cálculo certo para colocar aqui.
>
> **P:** Hum...Entendo, Pedro!

Para alcançar essa resposta correta, ele mobilizou um esquema mental, no qual estabelece alguns conhecimentos implícitos. Ao ser entrevistado, ficou evidente que havia um esquema mental que o levou a registrar a resposta correta. Na fala de Pedro no trecho da entrevista, é possível identificar que, no esquema implícito, ele mobiliza alguns conhecimentos em seu esquema mental, ao estabelecer as relações:

9 caixas → 15 reais

6 caixas → 10 reais

3 caixas → 5,00 reais

Pedro estabeleceu intuitivamente um cálculo relacional e numérico, quando apresenta em sua fala a correspondência um para muitos (conceito em ação), mostrando uma relação proporcional. A cada três caixas, ele estabelece uma relação proporcional a quantidade em dinheiro. Ainda podemos identificar um raciocínio funcional, contudo, o operador funcional que faz passar de 3 caixas para 5 caixas não fica evidente na fala do estudante, como podemos ver no esquema:

$$9 \text{ caixas} \xrightarrow{x5/3} 15{,}00 \text{ reais}$$

$$6 \text{ caixas} \xrightarrow{x5/3} 10{,}00 \text{ reais}$$

$$3 \text{ caixas} \xrightarrow{x5/3} 5{,}00 \text{ reais}$$

O operador funcional x 5/3 fica implícito na relação que estabelece, o elemento que permite a transformação das 3 caixas em 5,00 reais é desconhecido para Pedro. Esse conhecimento pode ser expresso por meio do teorema em ação:

$$f(nx) = nf(x) \text{ n é um inteiro, onde } f(x) = nx$$

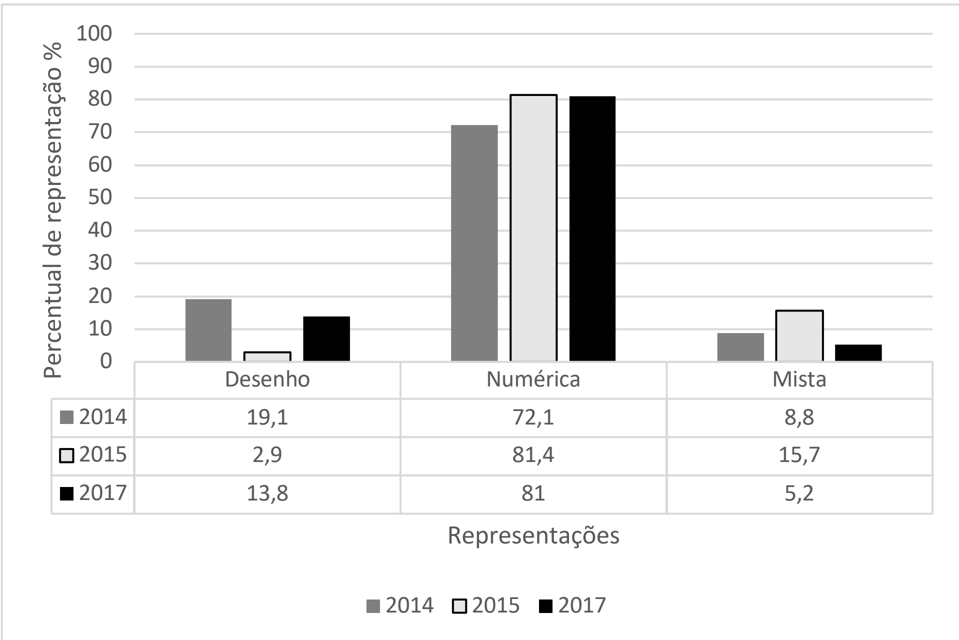
Essa representação é a função linear que fornece o preço representado por f(x) de *n* caixas a um valor fixo de *x* reais.

Na fala final desse estudante – "Oh, tia, eu sei fazer de cabeça, mas não sei o cálculo certo para colocar aqui" –, o fato de saber resolver uma situação não garante que ele tenha domínio do conceito. O estudante mostra dificuldade em registrar e identificar a operação que precisa ser realizada, ficando evidenciado que ele não compreende as relações e propriedades envolvidas na sua resolução. É importante que a escola o auxilie a tornar explícitos os teoremas e conceitos em ação, tornando esse saber científico. Vejamos, na próxima seção, uma análise dos tipos de representações que esses estudantes apresentam.

4.2.4 Representações dos estudantes

Nesta seção, focaremos as análises apenas nos esquemas explícitos, dos quais temos 68 em 2014, 70 em 2016 e 58 em 2017. Como podemos observar, ao resolverem as situações de proporção simples, os estudantes, em sua maioria, apresentam explicitamente o registro para resolvê-las, assim, nos propomos a identificar que tipo de registro eles apresentam. Para isso, consideramos as subcategorias de Representação descritas no capítulo anterior: *desenho, numérica e mista***.** Na Figura 4.13, apresentamos as subcategorias utilizadas pelos estudantes.

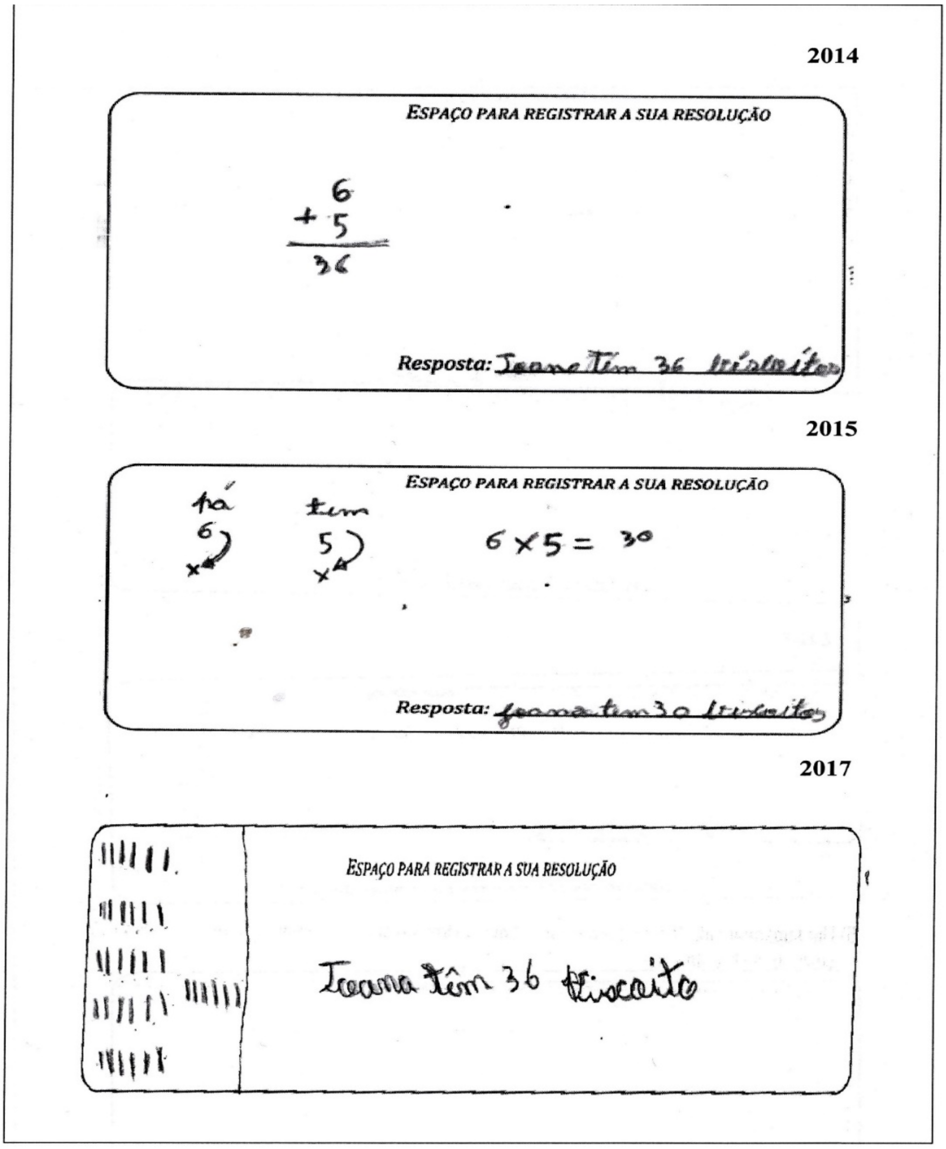
Figura 4. 13 - Representações apresentadas pelos 12 estudantes



Fonte: Dados da rede E-Mult (2013 -2017).

De acordo com a Figura 4.13, os estudantes tendem a registrar uma representação numérica ao longo dos anos, ou seja, mobilizam algum tipo de algoritmo. As representações desenho e mista não apresentam um quantitativo relevante. Apresentamos um esquema de resolução da Figura 4.14.

Figura 4. 14 - Esquema de resolução apresentado pela estudante Carla



Fonte: Dados da rede E-Mult(2013-2017).

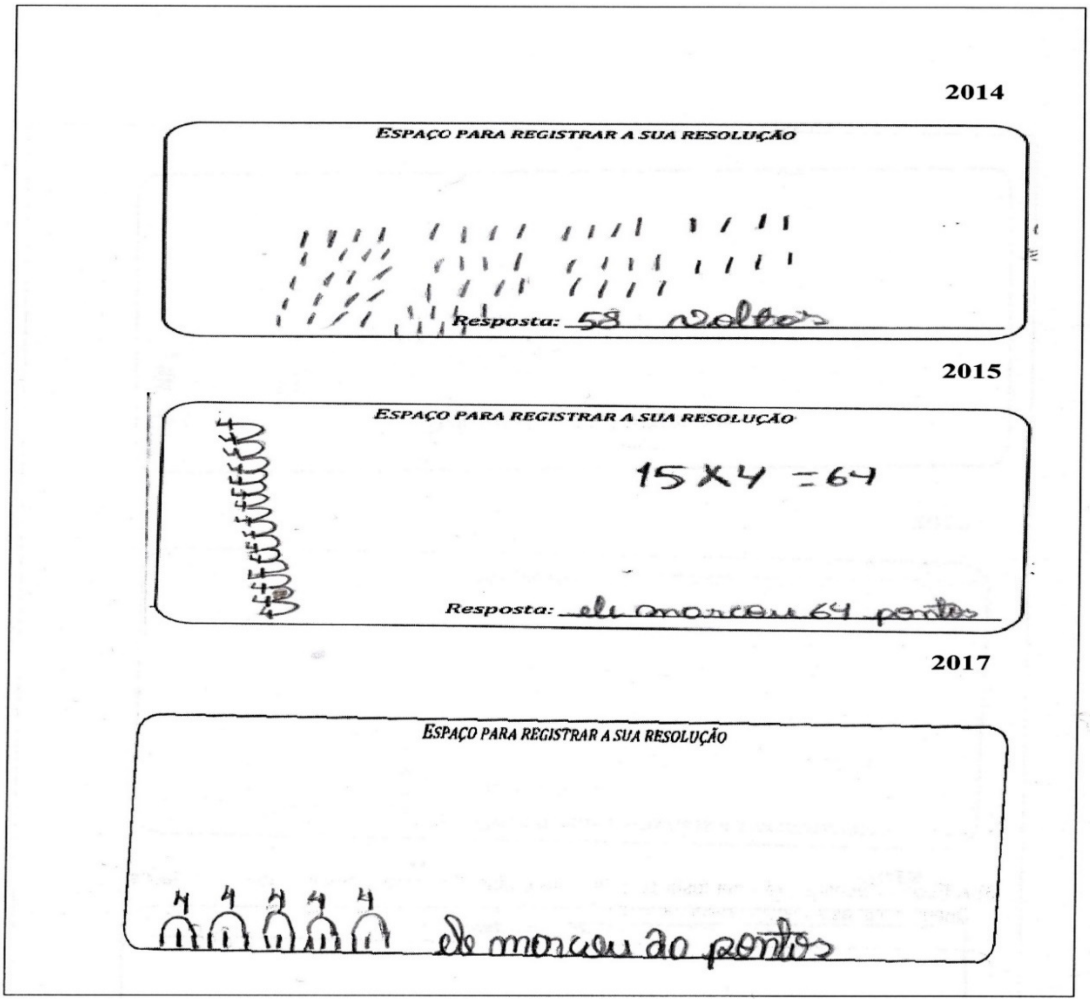
Na representação registrada por Carla, temos uma variação de esquemas ao longo dos anos. No ano de 2014, ela apresentou um esquema numérico e fez uma multiplicação dos valores apresentados no enunciado, apresentando resposta errada. No ano de 2015, a estudante também apresentou uma representação numérica, no entanto, ela utilizou a operação de multiplicação; notamos ainda a tentativa da estudante em apresentar um esquema de resolução utilizando a relação escalar, pois os elementos mostrados são característicos dessa relação, e apresenta resposta correta. É possível inferir que o que pode ter levado a estudante a fazer esse registro foi o fato de os professores dessa escola, no tempo em que o instrumento foi aplicado, estarem participando do processo formativo do E-Mult e, consequentemente, podem ter apresentado essa relação para os seus alunos. No ano de 2017, a estudante utiliza a representação desenho, a qual ainda não tinha usado nos outros anos em que o instrumento foi aplicado. Quando a entrevistamos em relação a esse esquema, ela respondeu o seguinte:

> **P**: Boa tarde, Carla! Tudo bem?
>
> **Carla**: Tudo bem sim!
>
> **P**: Como você fez para responder à primeira situação?
>
> **Carla**: Ah, sei não ...eu calculei!
>
> **P**: Calculou como?
>
> **Carla**: Não sei dizer.
>
> **P**: O que são esses pauzinhos que você desenhou?
>
> **Carla**: São os biscoitos. Eu tenho seis pacotes de biscoitos e cada pacote também tem seis, aí fui contando e deu 36 biscoitos.
>
> **P**: Ah, entendi Carla.

Inferimos, de acordo com a entrevista realizada com a estudante Carla, que ela mostra ter compreendido a situação que foi proposta, pois estabelece, de maneira correta, as relações de correspondência. Realizou a contagem corretamente, mas não acertou a situação, daí a quantidade de agrupamentos ter sido registrado de modo errado. Outro fato que podemos observar nos registros de Carla, ao longo dos anos, é que ela tem uma representação invariante de 2014 para 2015, e, em 2017, ela varia desses esquemas utilizando a representação desenho, o que não era esperado, pois ela mostrava automatização com a representação numérica.

Vejamos outro esquema apresentado pela estudante Maria na Figura 4.15.

Figura 4. 15 - Esquema apresentado pela estudante Maria



Fonte: Dados da rede E-Mult(2013-2017).

Como podemos observar, no ano de 2014, a estudante utilizou a representação desenho, no entanto, ela não tem sucesso na resposta da situação, já que não considerou que uma volta era equivalente a três pontos. Acreditamos que tenha se confundido na contagem, considerando que uma volta equivalia a 4 pontos. No ano de 2016, ela continuou com o mesmo raciocínio, mas mudou de representação, passando a utilizar somente a representação numérica. No ano de 2017, utilizou a representação mista, então, conseguimos perceber um avanço em relação aos outros esquemas, pois conseguiu alcançar a resposta correta da situação, tornando o esquema efetivo. Podemos identificar filiações dos conhecimentos ao longo dos anos. A estudante muda o tipo de representações, no entanto, a sua organização continua invariante, uma vez que ela sempre organiza o seu esquema de resolução em agrupamentos, sejam eles representados por desenho ou pelo próprio número. Em 2017, ao questioná-la sobre como tinha pensado para resolver a situação, a estudante explicou:

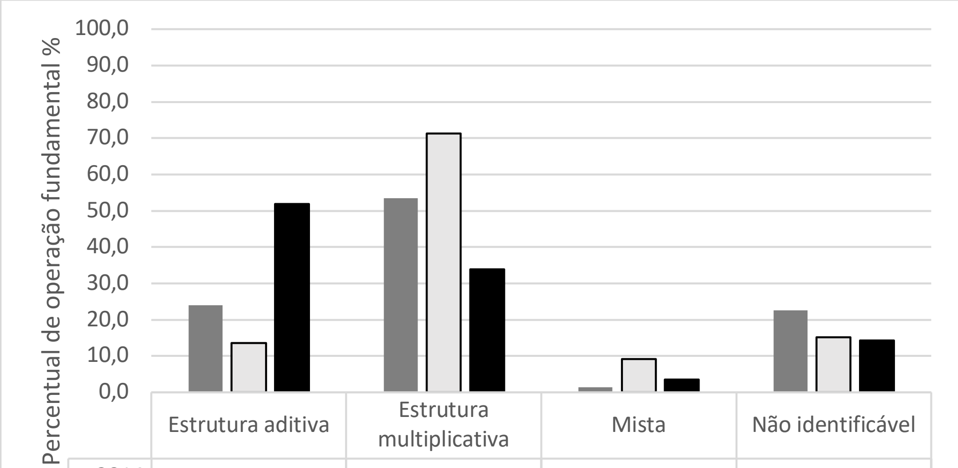
> **P**: Como pensou para responder a essa situação?
>
> **Maria:** São 15 voltas, né?
>
> **P:** Isso.
>
> **Maria:** Primeiro, peguei as 15 voltas e coloquei 15 pauzinhos.
>
> **P:** Hum!
>
> **Maria:** Aí, depois, não eram três voltas, né professora?
>
> **P:** Sim!
>
> **Maria:** Separei esses 15 pauzinhos de três em três. Aí não sobrou nenhum, deu tudo certinho. Entendeu?
>
> **P:** Entendi. E depois?
>
> **Maria:** Coloquei 4 pontos em cada um desses. Aí, juntei de 4 em 4, no final, deu 20 pontos. Está certo, professora?
>
> **P:** Está certo, Maria!

De acordo com a entrevista, na fala de Maria fica evidenciado que, em 2017, conseguiu estabelecer a relação de correspondência um para muitos (pontos/voltas) de forma correta. Podemos dizer que foi aprimorando o seu esquema de ação até conseguir torná-lo eficaz, pois ela não deixou as suas ideias e formas de agir anteriores: “Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para uma certa situação, a experiência do comportamento conduz ora a mudar de esquema, ora a modificar este esquema.” (VERGNAUD, 1996, p. 202). A partir das experiências adquiridas ao longo dos anos, a estudante conseguiu organizar um esquema eficaz.

4.2.5 Operações fundamentais

Ao identificarmos as representações utilizadas pelos estudantes, buscamos analisar as operações mobilizadas por eles nos esquemas explícitos apresentados, considerando as categorias: *Estrutura aditiva, Estrutura multiplicativa, Mista e Não identificável.* Vejamos a Figura 4.16.

Figura 4. 16 -Operação fundamental apresentada pelos 12 estudantes

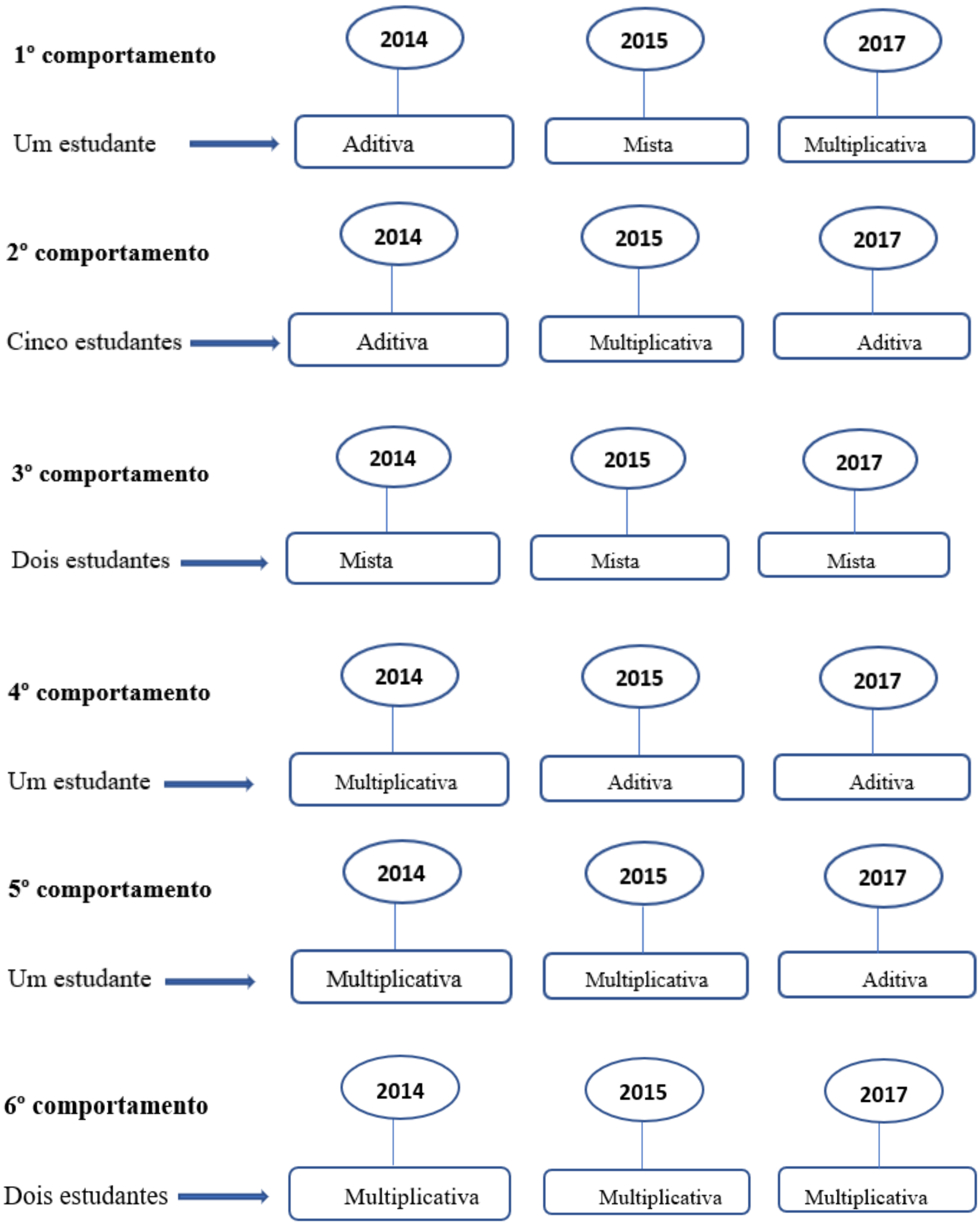


	Estrutura aditiva	Estrutura multiplicativa	Mista	Não identificável
2014	23,9	53,5	1,4	22,5
2016	13,6	71,2	9,1	15,2
2017	51,8	33,9	3,6	14,3

Fonte: Dados da Rede E-Mult (2013-2017).

Analisando os dados apresentados no gráfico, identificamos que, no ano de 2014, os estudantes utilizavam com mais frequência as operações da estrutura multiplicativa. No ano de 2016, essas frequências se mantêm. Em 2017, ela é invertida, os estudantes utilizam com mais frequência as operações da estrutura aditiva. Vejamos, na Figura 4.17, esse comportamento de forma detalhada. Fizemos uma análise, por estudante, da estrutura que foi utilizada em cada ano. Quando eles usavam a estrutura aditiva, era uma adição ou subtração e, para a estrutura multiplicativa, era uma multiplicação ou uma divisão. E a mista eles faziam uma combinação das duas estruturas.

Figura 4. 17 -Comportamento dos 12 estudantes referente á operação utilizada

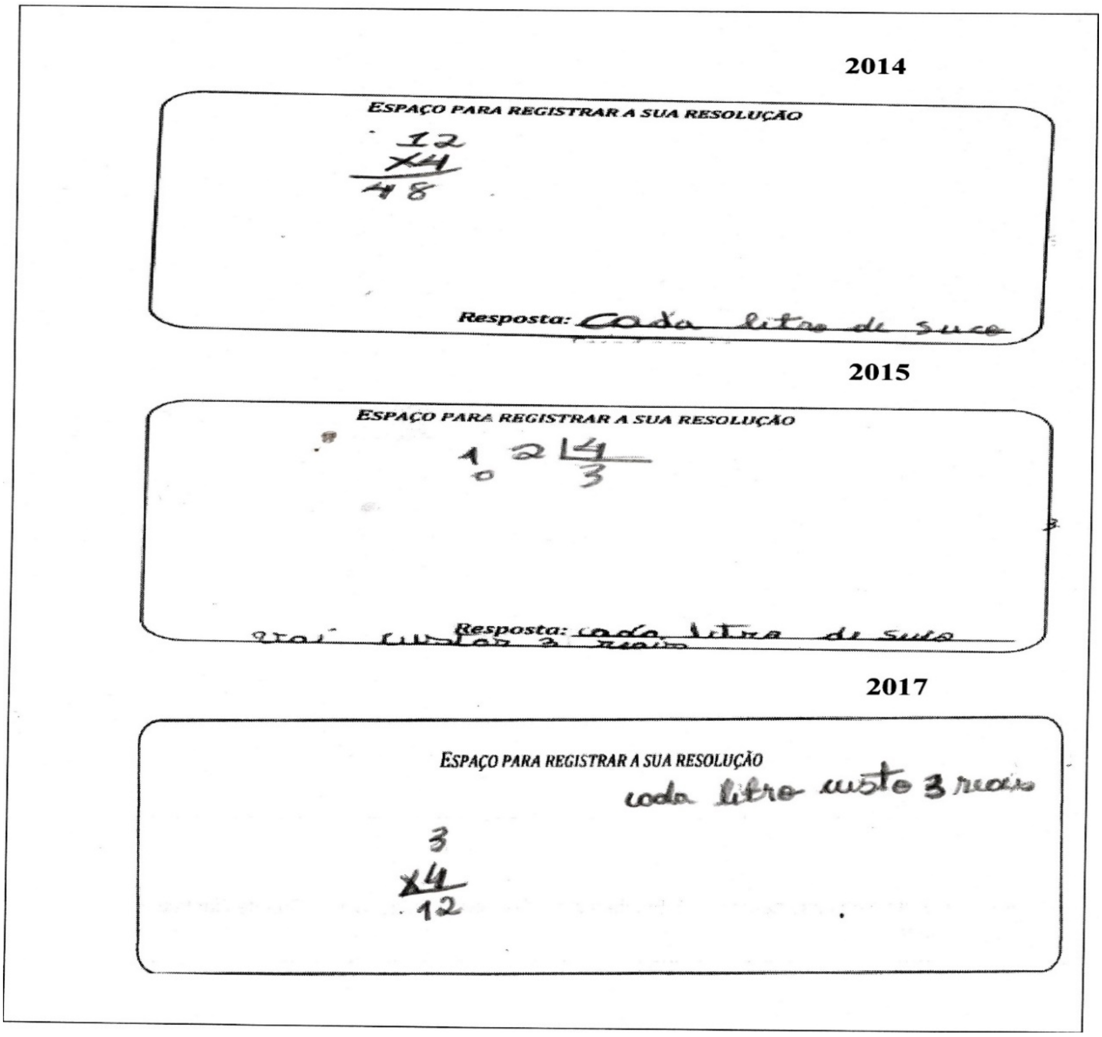


Fonte: Dados da Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 4.17, notamos que a operação foi mobilizada pelos estudantes ao longo dos anos. O 1º comportamento apresenta um processo de evolução das operações. Em 2014, a estudante usou uma operação de adição, em 2015, ela estava em um processo transição mostrando as filiações entre as duas estruturas. Em 2017, ela consegue apresentar apenas a estrutura multiplicativa. Salientamos que, entre todos, o melhor desempenho apresentado foi o dessa estudante.

No 6º comportamento, observamos que dois estudantes apresentam, nos três anos, uma operação da estrutura multiplicativa. Na Figura 4.18, uma das estudantes apresentou esse comportamento.

Figura 4. 18 -Esquema de resolução apresentado pelo estudante João



Fonte: Dados da Rede E-Mult (2013-2017).

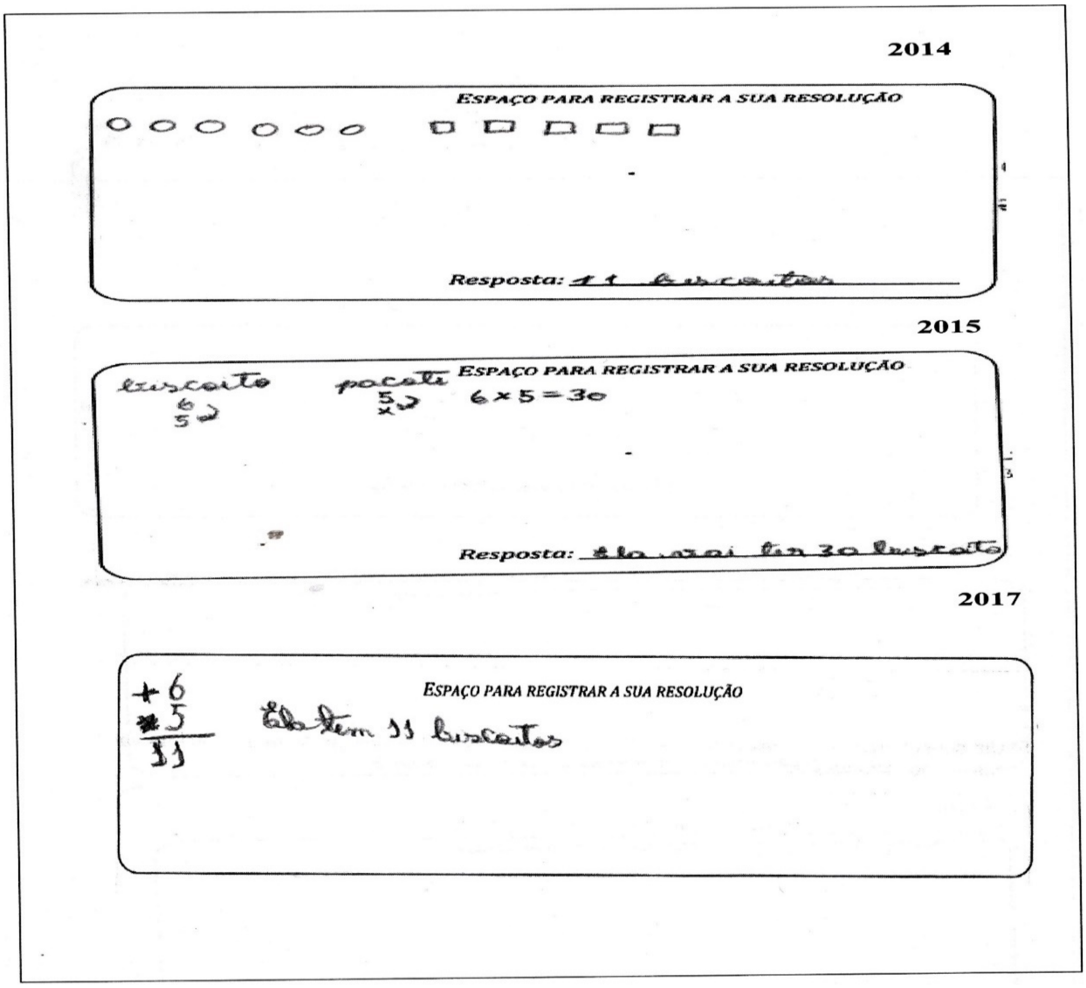
Nos esquemas apresentados pelo estudante João ao longo dos anos, notamos que a organização dos seus esquemas permanece invariante. Ele sempre utiliza um algoritmo para resolver a situação, no entanto, muda a operação a ser utilizada. No ano de 2014, ele não chegou à resposta certa da situação, pois fez uma multiplicação com os valores do enunciado. Em 2016, acertou a situação e utilizou a operação esperada, o algoritmo da divisão. No ano de 2017, acertou a situação, utilizando um algoritmo, mas mudou a ideia proposta, pois fez uma operação inversa à operação esperada. Na entrevista que realizamos com João, pedimos para explicasse como resolveu a situação em 2017:

> **P**: João, como pensou para responder à situação 3?
>
> **João:** Eu multipliquei 3 x 4, que deu 12**.**
>
> **P:** Hum, mas a resposta é 12?
>
> **João:** É.
>
> **P:** Se a resposta é 12, então, cada litro de suco custa 12 reais?
>
> **João:** Não, professora, essa é a resposta da multiplicação que eu fiz.
>
> **P:** Então, quanto custa cada refrigerante?
>
> **João:** Três reais.
>
> **P:** E como encontrou esse valor de três reais?
>
> **João:** Aqui eu fiz o seguinte: cada litro de suco é quatro reais...oh, espera! Eu quis dizer três reais, me confundi.
>
> **P:** E como sabia que cada litro era três reais?
>
> **João:** Aí, fiz de cabeça, se três mais três é igual a seis. Seis mais três é igual a nove. Nove mais três é doze. Depois, só fiz colocar a conta três vezes quatro que vai dar o mesmo valor: doze.
>
> **P:** Hum, entendi!
>
> **João:** Eu fiz duas vezes e deu a mesma coisa. Eu acho que é isso mesmo.

Na entrevista de João, notamos que existem esquemas de ações implícitos, que somente o esquema registrado não nos possibilita identificar. O estudante explicita na sua fala que utilizou outro esquema como suporte para apresentar o algoritmo. Ele vai adicionando o valor de 3,00 nas parcelas, chegando ao todo, que eram 12 reais. No entanto, não consegue justificar como sabia que o valor do refrigerante era três reais. Utiliza uma operação inversa, o que, para nós, é um pensamento mais complexo, já que, nessa ideia, é preciso buscar um valor que, multiplicado por quatro, resulte em três, o que pode dar em um esquema de tentativa e erro.

Nos demais comportamentos, notamos que os estudantes sempre voltam a utilizar a estrutura aditiva, mesmo já tendo utilizando somente a estrutura multiplicativa em anos anteriores. Na Figura 4.19, temos um exemplo desse tipo de comportamento.

Figura 4. 19 -Esquema apresentado pela estudante Joana



Fonte: Dados da Rede E-Mult (2013-2017).

No registro apresentado por Joana, no ano de 2014, ela utilizou a representação desenho e realizou uma adição com os valores propostos na situação. Em 2015, usou a representação numérica e apresentou o algoritmo da multiplicação, ou seja, utilizou a operação esperada para resolver a situação. No ano de 2017, continua utilizando a representação numérica, no entanto, volta à utilização da operação de adição. Na entrevista realizada com a estudante, percebemos que ela apresentava dificuldades em explicitar na linguagem falada como organizou sua resolução.

> **P**: Joana, eu queria que você me explicasse como você pensou para responder a essa situação.
> **Joana**: Ah, sei lá! Eu sei explicar isso não!
> **P**: Você pode ler a questão de novo.
> **Joana**: Posso!

P: E agora, consegue lembrar?

Joana: Eu juntei 5 pacotes com 6 biscoitos.

P: Hum. Qual operação você utilizou?

Joana: Acho que é soma, né?

P: Hum. Entendi!

Na entrevista realizada com a estudante, notamos que ela não demonstra segurança ao ser questionada sobre qual a operação que ela utilizou, além disso, a operação seria adição, e soma, o resultado dessa adição. Algo que não conseguimos compreender é o fato de a estudante voltar a utilizar a operação da adição. No ano de 2015, acreditamos que a justificativa para o registro que ela apresentou pode ser dada pela influência do processo formativo do E-Mult, de que a sua professora estava participando.

De um modo geral, notamos que a maior parte dos 12 estudantes, ao longo dos anos, deixou de utilizar a operação de multiplicação. E o ano de 2015 foi o ano em que mais apareceram as operações da estrutura multiplicativa (divisão ou multiplicação).

4.3 Síntese do capítulo

Na nossa análise, focamos em duas vertentes: a primeira, em um grupo total de 40 estudantes em dois momentos (2014/2015), e a segunda, com apenas 12 estudantes desse grupo em três momentos distintos (2014/2015/2017).

Na primeira vertente, foi possível perceber algumas características das competências e habilidades que os 40 estudantes do Ensino Fundamental apresentam em momentos escolares distintos, no que diz respeito ao conceito de proporção simples. De maneira geral, apresentam um pífio desempenho, tanto no pré-teste (2014) como no pós-teste (2015). Na classe muitos para muitos, o baixo desempenho é estatisticamente significativo em relação ao desempenho na classe um para muitos. Isso indica que a classe um para muitos é menos complexa que a outra classe.

A maioria dos estudantes, ao resolver as situações de proporção simples, tende a explicitar os seus esquemas, no entanto, não conseguem alcançar a efetivação dos mesmos. Como a representação que mais utilizam é a numérica, eles demonstram que ainda não têm habilidade para mobilizar esses algoritmos, o que faz com que apresentem respostas não certas. Os estudantes não atribuem significado ao algoritmo que aplicam, uma vez que o ensino dos conteúdos da multiplicação e da divisão está centrado mais na técnica que no desenvolvimento conceitual. (BENVENUTTI, 2008)

No que se refere às operações fundamentais, eles apresentam conceitos que estão inseridos na estrutura multiplicativa, a saber: multiplicação e divisão, porém, nesse último, apresentam maior dificuldade. O fato de eles reconhecerem a operação correta a ser utilizada não garante que compreendem todos os significados e ideias propostos na situação.

Os resultados apresentados em ambos os testes (2014/2015) nos levam a entender que, após o processo formativo dos professores desses estudantes, houve uma melhoria nos desempenhos e esquemas apresentados por eles. No entanto, esse avanço não é significativo e não pode ser atrelado somente a efeitos do processo formativo do E-Mult, pois outras variáveis, como a experiência e a maturação, são elementos que podem ter contribuído para a organização dos esquemas dos estudantes.

Na segunda vertente da nossa análise, focamos em 12 estudantes, e foi possível identificar que eles não apresentaram avanço ao longo dos anos. Em sua maioria, eles tendem a diminuir a quantidade de acertos com o passar dos anos. Ao analisarmos o desempenho desse grupo por classe de situações, os dados apontaram menor quantidade de respostas certas quando lidam com a classe de situações muitos para muitos. E, dentre as situações da classe um para muitos, os maiores índices de acerto se referem às situações nas quais se espera o uso da multiplicação na resolução. Nas situações em que se espera o uso de divisão, os desempenhos são mais baixos.

A maioria dos esquemas de resolução registrados pelos 12 estudantes é de forma explícita, ou seja, ao resolverem as situações de proporção simples, sempre apresentam algum tipo de registro, utilizando uma representação numérica.

Ao analisarmos a operação fundamental mais mobilizada por eles ao longo dos anos, ficou evidenciado o ano em que os estudantes mais mobilizaram as operações que estão inseridas na estrutura multiplicativa: foi em 2015. Esse foi o ano em que eles apresentaram mais avanço no desempenho. Nesse ano, os professores desses estudantes estavam participando do processo formativo do E-Mult, que envolvia as estruturas multiplicativas. Acreditamos que outros elementos possam ter influenciado para esse comportamento e a formação pode ter sido um desses elementos.

Considerações finais

Respondendo à questão de pesquisa

Ao iniciarmos a trajetória desta dissertação, tínhamos a seguinte questão de pesquisa:

- Quais são os esquemas que estudantes do Ensino Fundamental apresentam ao resolverem situações de proporção simples, em momentos escolares distintos?

Ressaltamos que os estudantes são os mesmos ao longo dos anos, assim, foi possível termos um panorama do desenvolvimento dos seus esquemas.

Em todos os anos escolares, a maioria dos estudantes apresentam esquemas explícitos, no entanto, no ano de 2017, cresceu o quantitativo de esquemas implícitos. Isto significa que, ao avançar os anos escolares, os estudantes tendem a apresentar esquemas implícitos, ainda que seja um quantitativo pequeno, isto é, apresentam apenas as respostas.

Ao longo dos anos, a representação que mais prevalece é a numérica. No ano de 2015, o uso do desenho como representação diminuiu, mas, em 2017, aumentou.

A operação fundamental que eles mais utilizaram no ano de 2014 foi a estrutura multiplicativa. E, em 2015, o uso das operações dessa estrutura se intensificou, pois foi o ano em que eles mais mobilizaram as operações de multiplicação e divisão. No ano de 2017, os estudantes tenderam a utilizar mais operações da estrutura aditiva, o que não é um comportamento esperado, uma vez que, outrora, eles utilizavam as estruturas multiplicativas.

Podemos concluir que, no ano em que ocorreu a formação do E-Mult (2015), os efeitos dessa formação alcançaram a sala de aula, pois identificamos nas resoluções dos estudantes esquemas semelhantes aos propostos na formação, tendo sido o ano em que os estudantes mais utilizaram as estruturas multiplicativas. Mas, com o passar dos anos, percebemos que esse efeito não se consolida, pois, no ano em que não tem mais a formação, eles passam a utilizar a estrutura aditiva, que era mais usada em 2014.

A análise dos esquemas dos estudantes permite também destacar certas dificuldades no diz respeito à aquisição do conceito de proporção. Por exemplo, a passagem das relações aditivas às relações multiplicativas. Notamos que os estudantes, ao longo dos anos, permanecem com o esquema de resolução das estruturas aditivas, apesar de, em alguns momentos, terem utilizado a estrutura multiplicativa. Entendemos que a ruptura entre essas duas estruturas não é algo simples, porém, ao lidarem com situações mais complexas e com quantidades maiores, esse esquema pode não ser eficaz.

Ao realizarmos a entrevista, ficou evidenciado que os estudantes sabem, em alguns momentos, como resolver a situação, no entanto, "podem fazer escolhas corretas sem, contudo, saber que conceito está relacionado àquela ação" (SANTANA, 2012, p.45). De acordo com esquemas analisados, foi possível perceber que, na maioria das vezes, eles sabem organizar (competências) uma resolução que satisfaça as situações de proporção simples, mas sentem dificuldades em saber dizer (concepções). Conseguem apresentar esquemas eficazes, no entanto, não compreendem as relações envolvidas nos seus próprios esquemas.

Um outro elemento que foi possível conjecturar é que as situações em que os estudantes acertam, apresentam uma organização dos esquemas de resolução invariante, ou seja, quando variam a sua conduta, eles tendem a não acertar a situação proposta.

No que diz respeito à compreensão da proporcionalidade pelos estudantes, constatamos que, dependendo da classe, certas situações são mais complexas que outras. Eles mostram mais dificuldades na classe muitos para muitos. Outro fato é a dificuldade com a transição da estrutura aditiva para a estrutura multiplicativa. E, dentro da estrutura multiplicativa, notamos que a dificuldade dos estudantes se intensifica quando precisam mobilizar a operação de divisão.

Limitações deste estudo

Neste estudo, tivemos algumas limitações no que se refere à aplicação do pós-teste 2, pois, ao retornamos à escola campo da pesquisa, encontramos 12 estudantes matriculados do nosso grupo de 40. Isso não nos permitiu fazer a aplicação com todos os estudantes do grupo inicial.

Sugestões de pesquisas

Os resultados deste estudo nos inspiram a percorrer outros caminhos de pesquisas na Educação Matemática. Em pesquisas futuras, podemos avançar no sentido de compreender os esquemas dos estudantes do Ensino Fundamental de outros conceitos da estrutura multiplicativa que não foi possível investigar, como: Combinatória, Configuração retangular, Comparação multiplicativa e Proporção dupla. Além disso, diante dos resultados, sentimos o desejo de explorar, em um trabalho futuro, uma intervenção na sala de aula, com uma sequência de ensino tendo como ponto de partida o diagnóstico das dificuldades encontradas pelos estudantes nesta pesquisa.

Possíveis caminhos para a sala de aula

Na sala de aula, é importante que o professor reflita e observe os esquemas construídos pelos estudantes nas situações propostas. Um registro é apenas uma imagem parcial dos conhecimentos envolvidos naquela ação, pois é um processo muito mais amplo e abstrato em sua totalidade. Explorar a fala dos estudantes em relação aos conceitos matemáticos envolvidos na sua ação pode ser uma prática que permita compreender e consolidar os conceitos.

Acreditamos que analisar esquemas de estudantes é um processo fundamental para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, uma vez que, por meio desta análise, é possível perceber as competências e habilidades que eles ainda não adquiriram e, assim, propor metodologias que venham a auxiliá-los na construção da aprendizagem.

Os resultados encontrados na presente pesquisa são informações de grande importância no momento de preparar as aulas relacionadas com o conceito de proporção simples, pois permite que o professor observe as dificuldades de compreensão dos estudantes ao resolverem situações que envolvem esse conceito.

No processo de ensino, não podemos considerar o erro do estudante como um obstáculo, mas como um ponto de partida para que possa explorar as competências e habilidades que ainda não foram adquiridas. O caminho que levou o estudante à construção do seu esquema é mais interessante e revela elementos essenciais, do que o resultado final.

Existem alguns itens de observação que podem direcionar o professor a analisar e compreender o esquema de resolução apresentado, como, por exemplo, se o estudante:

1- consegue interpretar a situação dada;
2- usa elementos que relacionam as quantidades (medida) corretamente;
3- usa a operação que era esperada ou usa a operação que é indicada por uma “palavra-dica” do enunciado da situação;
4- monta corretamente o algoritmo;
5- compreende as trocas e os agrupamentos necessários para resolver a situação;

> 6-compreende o campo numérico ao qual pertencem os números da situação;
> 7-resolve a situação e encontra valor (medida) correto para responder à situação, mas não responde corretamente. (SANTANA; CARZOLA, 2017, p. 49)

Esses itens de observação acima podem ser o ponto de partida para analisar o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes, por meio dos seus esquemas de resoluções.

Diante disso, esperamos que esse diagnóstico apresentado possibilite subsídios a intervenções pedagógicas, no processo de aprendizagem dos estudantes, em relação aos conceitos que estão inseridos na Estrutura Multiplicava, possibilitando avanços na aprendizagem.

Reflexões sobre o desenvolvimento profissional

O processo de construção desta pesquisa foi algo significativo e relevante, no que diz respeito ao crescimento como pesquisadora iniciante e aprendiz. Ao longo da pesquisa, foi possível me perceber no caminho, a partir de indagações, reflexões e busca por respostas, elementos que contribuíram para o meu desenvolvimento profissional.

Na qualidade de educadora matemática, pude compreender que pesquisar vai, além de diagnosticar problemas, em busca de possíveis caminhos de soluções para a sala de aula. Entendi que aprendizagem não deve se resumir a um resultado final, pois existem distintos elementos que a compõem.

E, ao final deste processo de escrita e desenvolvimento profissional, “sinto-me em uma promissora viagem que, ao invés de estar chegando ao fim, certamente está apenas começando”. (FEIO, 2009, p. 154). Estamos em um constante processo de desenvolvimento e aprendizagem. Um educador matemático sempre tem algo a ensinar e a aprender. Finalizo essa dissertação com a certeza de que houve um aprendizado.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. C. A.; PEDROSA, M. I. Desenvolvimento do conceito de espaço em crianças e a educação infantil**.** *Psicologia USP (Impresso)*, São Paulo v. 20, p. 389-415, 2009.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. - *Características da investigação qualitativa*. In: Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Porto Editora, 1994.

BRASIL**.** *Parâmetros Curriculares Nacionais:* matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.BRASIL.

CORRÊA, J. & SPINILLO, A. G. (2004). O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In R. M. Pavanello (Org.), Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula (pp. 103-127). São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM.

FONSECA, J. J. S. *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa***.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. Ciênc. educ. (Bauru)[online]. 2014, vol.20, n.2, pp. 517-533. ISSN 1516-7313.

MAGINA, S. *(RE)Significar as Estruturas Multiplicativas a partir da formação 'Ação-Reflexão-Planejamento-Ação' do professor*. Edital Universal, Projeto nº 471247/2008-1. CNPq. 2008.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. *Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do ensino fundamental? Contribuição para o debate*. Em teia – Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana, v. 1, nº 1. 2010.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. *Metodologia científica*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

LIMA, R. R.; *Campo multiplicativo: estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió.*2012. 124 f. Mestrado (Ensino de Ciências e Matemática). Universidade federal de alagoas.2012.

OLIVEIRA, S. L. *Tratado de metodologia científica*. Projetos de pesquisas, TGI, TCC, monografias, dissertações e teses. São Paulo: Pioneira, 2001.

OLIVEIRA, I.; *Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec1***.**Boletim de Educação Matemática. Rio Claro (SP), Ano 22, nº 34, p. 57 a 80, 2009.

PIAGET, J. *Biologia e Conhecimento*. Petrópolis: Ed. Vozes, 1996.

SANTANA, E. R. S.; LAUTERT, S. L.; FILHO, J. A. C. Coletânea cadernos do E-Mult: *Ensinando multiplicação e divisão no 4º e 5º anos.*Itabuna. Via literarum, 2017.

SANTANA, E. R. S. e et al. observatório da educação em rede: as estruturas multiplicativas e a formação continuada. *Educação Matemática em foco*. V. 5, n. 1. P. 78-96, Jan/Jun. 2016.

SENA, C. X. D. S.; *Resolução de estudantes frente a problemas de divisão: antes e depois do ensino formal. 9*7 f. Mestrado (Educação Matemática). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus. 2015.

SANTOS, A. et al. A noção de divisão para quem não aprendeu a divisão. *Jornal internacional de estudos em educação matemática.* v.7 38-64.2014

SILVA, E. A.; *Pensamento proporcional e regra de três: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas*.2008. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Universidade tuiuti do Paraná. Curitiba, 2008.

VIANA, O. A.; MIRANDA, J. A. O raciocínio proporcional e as estratégias de resolução de problemas de valor omisso e de comparação. *Revista eletrônica de Educação Matemática.* Florianopólis. v.11, n. 1, p. 194-213, 2016.

VYGOTSKY, L.S. *A formação social da mente*. 6. ed., São Paulo: Livraria Martins Fontes, 1998.

VERGNAUD. G. A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In. *Addition and Subtraction: a cognitive Perspective.* New Jerssey: Lawrense Erlbaun, 1982. P. 39-59

ZOLD, H. N.; CÔRREA, S. *Matemática*. São Paulo.Nova cultural.1994.

_____________ Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Ed.). *Research agenda in mathematics education:* number concepts and operations in the middle grades. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

______________ Multiplicative conceptual field: what and why? In. Guershon, H. e Confrey, J. (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

_____________ A Teoria dos Campos Conceituais. In BRUN, J. (Ed.) *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

_____________ *A Criança, a Matemática e a Realidade:* problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lúcia Faria Mouro. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009b.

ANEXO A

Instrumento aplicado pelo E-Mult

*Escola:*_________________________________

Nome: __________________________________

Idade: _________________________________

Ano escolar: ____________________________

Período em que estuda:

( ) Manhã *( ) Tarde*

1) Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana têm?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

2) A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ___________________________________

3) para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ______________________________

4) A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ______________________________

5) Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta:

____

6) Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta:

____

7) A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem $24m^2$. A largura é 4m. Qual é comprimento em metros desse jardim?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ______________________________

8) Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais”. Quanto vai custar cada litro de suco?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ______________________________

9) A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíches?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ______________________________

10) Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e José tem uma coleção de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ______________________________

11) na aula de dança de forró tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

12) Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ______________________________

13) Ontem Tonho tinha 18 figurinhas. E hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

Resposta: ______________________________

APÊNDICE A

Entrevista semiestruturada

1- Qual seu nome?
2- Quando leu a situação problema qual foi a primeira coisa que pensou?
3- Como pensou para ter essa resposta?
4- Quais operações você usou para essa resposta?
5- Que situação você achou mais difícil? Por quê?