UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

***EARLY ALGEBRA*: PRELÚDIO DA ÁLGEBRA POR ESTUDANTES DO 3º E 5º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

ROZIMEIRE SOARES DE OLIVEIRA PORTO

ILHÉUS – BAHIA
2018

ROZIMEIRE SOARES DE OLIVEIRA PORTO

EARLY ALGEBRA: PRELÚDIO DA ÁLGEBRA POR ESTUDANTES DO 3º E 5º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática.

Linha de pesquisa Early Algebra

Orientadora: Profª Dra. Sandra Maria Pinto Magina

Coorientador: Profº Dr. German Ignacio Gomero Ferrer

ILHÉUS – BAHIA

P853 Porto, Rozimeire Soares de Oliveira.

Early álgebra: prelúdio da álgebra por estudantes do 3° e 5º anos do ensino fundamental / Rozimeire Soares de Oliveira Porto – Ilhéus, BA: UESC, 2018.

177f.: il. ; anexos.

Orientadora: Sandra Maria Pinto Magina

Dissertação. (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PPGEM.

Inclui referências.

1. Álgebra. 2. Sequências (Matemática). 3. Equações. 4. Funcões algébricas. 5. Matemática (Ensino Fundamental). I. Título.

CDD 512

ROZIMEIRE SOARES DE OLIVEIRA PORTO

EARLY ALGEBRA: PRELÚDIO DA ÁLGEBRA POR ESTUDANTES DO 3º E 5º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte das exigências para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática.

Ilhéus, 27 de fevereiro de 2018.

____
Profª Dra. Sandra Maria Pinto Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz
(Orientadora)

____
Profº Dr. Geman Ignacio Gomero Ferrer
Universidade Estadual de Santa Cruz
(Coorientador)

____
Profª Dra Zulma Elizabete Madruga
Universidade Estadual de Santa Cruz
(Examinador Interno)

____
Profº Dr. Francisco Brabo Bezerra
(Examinador Externo)

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, pela sabedoria e pela certeza de tua presença em todos os caminhos que decidi trilhar.

Aos meus pais, Juvenal e Jalzira, pela vida e pelos ensinamentos que me fizeram a pessoa que sou.

Ao meu esposo Adalberto, por entender minhas ausências e pelo apoio incondicional neste projeto.

Aos meus filhos Diogo, Matheus e Giovanna por me fazerem acreditar que um não hoje, pode se tornar um grandioso sim amanhã. E, por acreditarem em meu potencial até mais que eu mesma.

À minha orientadora Dra. Sandra Magina, pela sua competência, amizade e generosidade. Por ter acreditado nos meus sonhos e por me ensinar a voar nos campos da pesquisa com segurança, ética e entusiasmo.

Ao meu coorientador Dr. German Gomero, pela generosidade, amizade e sapiência nos caminhos matemáticos percorridos.

À professora Irene Carzola, pela generosa colaboração na tabulação dos dados estatísticos, pois a partir de sua contribuição pude conversar com eles.

Aos meus colegas de turma: Salvador (Dodô), Jad, Vital, Marcus (o bombeiro), Roque (o mestre dos magos), Jean, Thamy e Silvana (minha irmã do coração) por terem tornado esses dois anos em um momento ímpar na minha história. Pelos nossos risos e choros, encontros e desencontros, pelas palavras ditas e não ditas, e pelo ir e vir, vocês foram, são demais.

Aos professores do PPGEM, pela oportunidade de tê-los como mestres durante a construção dos conhecimentos necessários à minha formação de pesquisadora.

Às pessoas que fizeram diferença na minha passagem pelo PPGEM, nas pessoas do Rafael (secretário) e de Gabriel, que com sua alegria e simpatia ajudou nos trâmites legais do curso.

Aos mestrandos de outras turmas, anteriores e posteriores, com os quais tive a oportunidade de ampliar minha teia de amizades.

Às minhas amigas Célia, Elen e Dani, pelo apoio, amizade e carinho no antes, durante e agora na finalização deste projeto.

À Universidade do Estado da Bahia – UNEB, em particular ao DCHT, campus XVII e seu conselho, pela liberação da função de docente durante o mestrado.

E, ainda, à UNEB, pela disponibilidade da bolsa PAC para que eu pudesse custear as despesas durante o curso.

À diretora e às professoras da escola, que abriram as portas de suas salas para que pudéssemos entrar e coletar os dados necessários ao estudo.

E, por fim, aos estudantes, sujeitos investigados, que nos presentearam com sua forma de compreender, saber e fazer a Early Algebra.

Os fenômenos humanos são biológicos em suas raízes, sociais em seus fins e mentais em seus meios.

Jean Piaget

EARLY ALGEBRA: PRELÚDIO DA ÁLGEBRA POR ESTUDANTES DO 3º E 5º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

RESUMO

Este estudo teve por objetivo comparar as competências e os esquemas de ação que os estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental utilizam ao lidarem com situações-problema envolvendo os conceitos da Álgebra elementar e, ainda, identificar os níveis de raciocínio algébrico usados por eles para resolver tais situações. Para tanto, analisamos os esquemas de ação destes estudantes nas vertentes algébricas da sequência, da equação e da função. O estudo teve como proposta responder as seguintes questões: (a)Quais as competências que os estudantes de 3º e 5º anos do Ensino Fundamental apresentam ao lidar com problemas da Álgebra elementar? (b) Quais os esquemas que os estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental apresentam ao lidar com problemas da álgebra elementar? e (c) Quais os níveis de raciocínio algébrico que estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental apresentam ao lidar com problemas da álgebra elementar? Para isto optamos por fazer uma pesquisa de base descritiva com uma abordagem diagnóstica. Para dar apoio a tal estudo, buscamos, como aporte teórico, a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996) e as ideias de Carraher, Schiliemann e Brizuela (2006); Blanton (2007); Brizuela e Schliemann (2007); Magina et al (2008) e Kieran et al (2016) no que tange à *Early Algebra*. Esta pesquisa aconteceu numa escola da rede pública, municipal, de uma cidade do sudoeste do Estado da Bahia com149 estudantes (69 do 3º ano e 80 do 5º ano). Estes estudantes responderam a um instrumento diagnóstico (teste) composto por dez situações-problemas, perfazendo um total de quatorze itens. Embora a aplicação tenha sido de forma coletiva, sua resolução se deu de forma individual e escrita. Os estudantes foram bastante estimulados pela pesquisadora a registrarem seus procedimentos e respostas a todos os itens do instrumento, o que nos permitiu identificar seus esquemas de ação a partir das estratégias registradas. Estes esquemas foram apresentados seja por meio de uma representação icônica e/ou numérica. Os resultados indicaram que tanto os estudantes do 3ºano quanto os do 5º ano apresentaram competências semelhantes em relação às vertentes da sequência e da equação. Estas eram de natureza intuitiva/dedutiva, mobilizadas na direção de responder as situações-problema a partir de conhecimentos de domínios aritméticos. Quanto à vertente da função, os estudantes do 5º ano apresentaram um raciocínio mais próximo do raciocínio funcional que os estudantes do 3ºano. Associando estas competências aos comportamentos observados nas estratégias, pudemos identificar os níveis de raciocínio algébrico dos estudantes pesquisados. Posto isto, encontramos que os estudantes do 3º ano e os do 5º ano apresentaram-se no mesmo nível de raciocínio algébrico em relação às vertentes da sequência e da equação. No tocante a vertente da sequência eles foram categorizados no nível de raciocínio algébrico de segunda ordem (N2). Já na vertente da equação, eles estavam no nível de raciocínio algébrico de primeira ordem (N1). Entretanto, no que concerne a vertente da função conseguimos classificar apenas os estudantes do 5º ano. Estes se encontravam no nível de segunda ordem (N2). Os resultados encontrados no estudo sinalizaram que os estudantes do 3º ano, assim como os do 5º ano do Ensino Fundamental, apresentaram-se habilitados para serem introduzidos nos conceitos algébricos elementares. Tal conclusão baseia-se no fato deles terem apresentado competências, esquemas de ação e, muitas vezes, um raciocínio algébrico apropriado às situações- problema investigadas envolvendo a Álgebra elementar.

Palavras-chaves: Anos iniciais. Early Algebra. Diagnóstico. Sequência.Equação. Função.

EARLY ALGEBRA: ALGEBRA PRELUDE BY STUDENTS OF THE THIRD AND FIFTH YEARS OF FUNDAMENTAL EDUCATION

ABSTRACT

The purpose of this study was to compare the competences and action schemes that elementary and middle school students use in dealing with problem situations involving the concepts of elementary algebra and to identify their levels of algebraic reasoning used to solve such situations. For this, we analyze the schemes of action of these students in the algebraic slopes of the sequence, the equation and the function. The purpose of the study was to answer the following questions: (a)What are the competences that elementary and junior high school students have in dealing with elementary algebra problems? (b)What are the schemes that elementary and junior high school students have in dealing with problems in elementary algebra? and (c) What levels of algebraic reasoning do elementary and junior high school students have in dealing with problems in elementary algebra? For this we chose to do a descriptive research with a diagnostic approach. To support this study, we seek, as a theoretical contribution, Vergnaud's Theory of Conceptual Fields (1996) and the ideas of Carraher, Schiliemann and Brizuela (2006); Blanton (2007); Brizuela and Schliemann (2007); Magina et al (2008) and Kieran et al (2016) regarding Early Algebra. This research was carried out in a public school in a city in the southwestern part of the State of Bahia with 149 students (69 in the 3rd year and 80 in the 5th year). These students responded to a diagnostic tool (test) composed of ten problem situations, making a total of fourteen items. Although the application was collective, it was solved individually and in writing. The students were strongly encouraged by the researcher to record their procedures and responses to all items of the instrument, which allowed us to identify their action plans from the strategies recorded. These schemes were presented either by means of an iconic and / or numerical representation. he results indicated that both students in the 3rd year and those in the 5th year presented similar skills in relation to the sequences of the sequence and the equation. These were intuitive / deductive in nature, mobilized in the direction of responding to problem situations from knowledge of arithmetic domains. As regards the aspect of the function, the students of the fifth year presented a reasoning closer to the functional reasoning than the students of the third year. By associating these competences with the behaviors observed in the strategies, we were able to identify the levels of algebraic reasoning of the students studied. In this way, we find that the students of the 3rd year and the students of the 5th year presented the same level of algebraic reasoning in relation to the slopes of the sequence and the equation. Regarding the slope of the sequence they were categorized in the level of second order algebraic reasoning (N2). Already on the slope of the equation, they were at the level of first order algebraic reasoning (N1). However, as far as the function strand is concerned, we were able to classify only 5th year students. These were at the second-order level (N2). The results found in the study indicated that the students of the 3rd year, as well as those of the 5th year of elementary school, were able to be introduced to elementary algebraic concepts. This conclusion is based on the fact that they have presented competences, action schemes and, often, an algebraic reasoning appropriate to the problem situations investigated involving elementary algebra.

.

Keywords: Early years. Early algebra. Diagnosis. Sequence. Equation. Function

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

PPGEM- Programa de Pós Graduação em Educação Matemática

UESC- Universidade Estadual de Santa Cruz

PCNS- Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC- Base Nacional Comum Curricular

SNE- Sistema Nacional de Educação

PNE- Plano Nacional de Educação

DEB- Diretrizes da Educação Básica

MEC- Ministério da Educação e Cultura

ENEM- Encontro Nacional de Educação Matemática

EJA- Educação de Jovens e Adultos

MMM- Movimento da Matemática Moderna

TCC- Teoria dos Campos Conceituais

EA- Early Algebra

GT- Grupo de Trabalho

GT1- Grupo de Trabalho da Early Algebra

NCTM- National Council of Teachers of Matematics

ICME- International Congress on Mathematical Education

STANDARS- Principles and Standars for School Matematics

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste estudo apresentaremos as inquietações que nos levaram a esta pesquisa e os estudos que fizemos na tentativa de responder às indagações iniciais e outras que surgiram no decorrer do caminho. Para direcionamento e fundamentação teórica da pesquisa apresentaremos as discussões de autores (brasileiros e internacionais) que, em seus estudos, apresentam uma relação epistemológica coerente com a nossa proposta investigativa.

A Álgebra presente nos conceitos abordados, em nossas salas de aula, passou ao longo dos anos por diversas fases evolutivas até chegar ao formato atual. Dos assírios aos egípcios; de Euclides a Viète; da linguagem corrente à linguagem simbólica; da resolução e generalização de fórmulas de equações até o uso de ferramentas do cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton.

Durante muito tempo, a forma de expressar as ideias e o pensamento algébrico foram condicionados a um conjunto sistemático de símbolos, regras arbitrárias e pragmáticas (FIORENTINI, 1993) que se tornaram enfadonhas e mecânicas. As concepções algébricas que permeavam nos manuais didáticos davam conta de uma Álgebra como um processo de métodos e técnicas sistematizadas e, por outro lado, como linguagem específica que expressava ideias e estruturas matemáticas. Temos em seu desenvolvimento histórico três estágios evolutivos: Álgebra *retórica, sincopada e simbólica* (BOYER, 2010). A passagem desses estágios proporcionou discussões importantes entre os matemáticos de cada período, contribuindo para idealização de estruturas algébricas que assentaram a Álgebra como uma ciência aplicável a vários campos do conhecimento científico.

> [...] o desenvolvimento do conhecimento não se efectua (sic) graças à acumulação continua de novos conhecimentos (com a rejeição concomitante de conceitos e hipóteses que se revelaram infrutuosos ou falsos), pelo contrário, ele efectua-se (sic) por etapas que representam níveis característicos, de tal modo que em cada etapa existe uma reorganização dos conhecimentos previamente adquiridos (PIAGET; GARNICA, 1987, p. 137).

Esses estágios foram essenciais para reorganização da síntese sistêmica e a construção dos conceitos algébricos durante séculos. Entretanto, com a evolução e a sistematização dos conhecimentos científicos, a conjuntura da Álgebra precisou (e ainda precisa) ser revista para satisfazer às necessidades de mudanças que o contexto atual exige. Pesquisadores exibem um consenso mundial quanto à necessidade de se repensar a educação algébrica para o século XXI (LINS e GIMENEZ, 2001). Para um ensino voltado para a construção de significados para Álgebra, numa perspectiva de uma continuidade aritmética. Uma busca por uma Álgebra adequada às novas formas de pensar e raciocinar das crianças, jovens e adultos que encontram nas estruturas algébricas modelos matemáticos capazes de representar ideias, padrões e relações pertinentes as mais variadas situações sociais.

O que se observa, atualmente, no panorama educacional é uma tendência na reelaboração do ensino da Álgebra escolar que permita a correlação entre os conceitos algébricos e aritméticos desde os primeiros anos da Educação Básica até o nível superior. Que contemple os mais variados tipos de formação do pensamento algébrico, nos diversos anos e contextos escolares. Essa nova maneira de compreender a educação algébrica implicará mudanças metodológicas, comportamentais e curriculares. Numa quebra do paradigma institucionalizado pela história, por ideias, muitas vezes, equivocadas e na unicidade da forma algebrizada que essa foi condicionada ao longo de sua trajetória.

Preocupados com essa perspectiva de mudanças no modelo da Álgebra, pesquisadores, especialistas, educadores e também os órgãos educacionais (nacionais e internacionais) discutem e elaboram propostas para que se possa antecipar o ensino da Álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Como uma das formas de minimizar os efeitos do estudo teórico-abstrato que interfere no desempenho escolar nos anos finais, desenham uma proposta pedagógica capaz de elevar a Álgebra ao patamar de sua história, relação e aplicabilidade.

Rememorando minha história de mãe e professora de Matemática da Educação Básica, tinha atribuições que ocupavam uma parte considerável do meu dia. Esse era dividido entre as aulas, planejamentos pedagógicos, a criação e a instrução dos filhos, além das obrigações do lar. Meus filhos: Diogo, Matheus e Giovanna nesta ordem, ocupavam parte importante da minha rotina. Com a dupla tarefa de ser mãe e professora, destinava minhas tardes em sentar com eles e ajudá-los nas tarefas de casa enquanto fazia meus planejamentos didáticos.

Certa tarde, estávamos nós, os quatro, sentados à mesa da sala. As crianças nas tarefas, e eu corrigindo provas. Diogo e Matheus no lado oposto da mesa e a caçula Giovanna próxima a mim envolta entre papéis, lápis e canetinhas coloridas. Diogo resolvia um sistema de equação do 1º grau, Matheus expressões numéricas e a pequena Giovanna coloria uma gravura que trouxera da escola. Enquanto Diogo ia resolvendo o sistema de equação eu o interrogava sobre os dados que estava encontrando. Minha intenção era que ele pudesse compreender, abstrair e construir significados sobre os esquemas utilizados na sua resolução. Todos concentrados, cada qual em sua tarefa, quando Diogo falou: "– mãe, se eu tenho que y é igual a x mais um e eu achei que x é igual a 3, então y é [...]"

Ele nem teve tempo de responder quando a pequena Giovanna do alto de sua sabedoria de 6 anos, respondeu: "– Eu sei, eu sei. Deixa que respondo."

E, euforicamente, ela falou: "– Y é quatro." (Todos riram)

> – Como você sabe disto Giovanna? (Questionou Matheus)
> – Você viu a resposta Diogo?
> – Sabendo né, Matheus. Não vi resposta de ninguém. Foi uma coisa aqui da minha cabeça. (Respondeu Giovanna)
> – Então explica. E se não for 4? Desafiou Diogo.
> – Não sei explicar, só sei que sei. E é 4. (Argumentou Giovanna)
> – Está certo, não é mãe?

Esse fato me intrigou muito. Como ela havia chegado àquela resposta de forma tão rápida? Como uma criança tão nova pode ter este tipo de raciocínio algébrico? Interessante é que apesar de ter apresentado um raciocínio matemático, Giovanna não conseguia explicá-lo. Que tipo de esquema ela mobilizou para alcançar a resposta? Qual o significado que a incógnita (x e y) teve para ela? Sabemos que existe o conhecimento espontâneo[1], que ele faz parte das experiências e da capacidade criativa das crianças e que pode emergir intuitivamente, ou seja, o conhecimento contribui no raciocínio, de maneira dedutiva, para que se possa construir relações matemáticas, entre elas as algébricas.

Mas como se forma esse tipo de raciocínio? De quais experiências a criança precisa para formá-lo? Será que uma criança ainda tão nova (6 anos) já seria capaz de apresentar vestígios de raciocínio algébrico? Até onde ela seria capaz de solucionar problemas? De quais esquemas cognitivos ela lançou mão para resolver o problema? E, por fim, se o currículo escolar possibilitasse que as crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental (entre 6 e 10 anos de idade) tivessem acesso às noções algébricas, como elas reagiriam cognitivamente?

Foram inquietações como essas que passaram a povoar, desde então, minha mente, não apenas como mãe, mas principalmente como profissional da área de Educação. Assim, esse fato permaneceu em minha cabeça até quando entrei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM), da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC/BA) e minha

---

[1]VYGOTSKY, L. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: M Fontes, 1991.

orientadora, Sandra Magina, falou-me sobre seu interesse em pesquisas na área da *Early Algebra* e nas possibilidades de se investigar o pensamento e o raciocínio algébrico de estudantes dos anos inicias do Ensino Fundamental. Contou-me que se encontrava envolvida num projeto sobre o raciocínio algébrico no Ensino Fundamental. Disse-me que teve um orientando que defendera recentemente uma dissertação sobre o raciocínio funcional de crianças do 5º ano do Ensino Fundamental, a partir de uma intervenção pedagógica.

Percebi que ali se encontrava a chance de me engajar em um projeto que possibilitará entender como as “Giovannas” (não só de 6 anos, mas de 7, 8, 9 ou 10 anos), que nunca estudaram Álgebra, lidam com a resolução de problemas algébricos. Uma oportunidade de responder aos questionamentos que há tempos fizera sobre o episódio ocorrido.

JUSTIFICATIVA

Sabemos que esta preocupação referente à formação e a apropriação do pensamento algébrico das crianças nos anos iniciais do Ensino Fundamental se apresentam como foco de discussão na comunidade acadêmica muito recente (em torno de 20 anos). Essas pesquisas procuram entender *qual* o tipo, *como* o aporte metodológico contribui e *quando* deve ser o momento ideal para introdução do pensamento algébrico no currículo de Matemática para o Ensino Fundamental. Isto tem provocado momentos de reflexão sobre as formas metodológicas e conceituais para o ensino e aprendizagem das primeiras ideias ou estruturas algébricas no contexto escolar. Nesse grupo de discussões podemos citar as pesquisas de Kaput (1984); Booth (1984, 1995); Da Rocha Falcão (1993, 2003); Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, 1993); Blanton (1998); Carraher e Schliemann (1995, 2007, 2016); Carraher, Schliemann e Brizuela (2000, 2001, 2003); Vale et al (2006); Magina (2008 a, 2008b); Kieran (2016), entre outros.

Esses especialistas propõem a introdução das noções algébricas no currículo escolar desde os primeiros anos iniciais do Ensino Fundamental. Não como um estudo dos conceitos da Álgebra elementar formal, mas como um leque de possibilidades de correlacionar os domínios da aritmética com os da Álgebra.

Pesquisadores como Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) chamam a atenção para repensarmos o estudo da educação algébrica e suas contribuições pedagógicas no currículo para os anos iniciais. Ressaltando que existe uma relação de natureza dialética entre o pensamento algébrico e a linguagem simbólico-formal e não uma subordinação como muitos insinuam.

Schliemann et al (2007) discutem a possibilidade e defendem a ideia de que se forem dadas às crianças condições e atividades coerentes ao seu desenvolvimento cognitivo (Ensino

Fundamental), essas serão capazes de raciocinar e utilizar as ferramentas de representação algébrica (não-formal) na resolução de situações problemas.

Nessa direção, Yamanaka e Magina (2008) corroboram com as ideias do NCTM (2000) que os estudantes dos anos iniciais podem construir conceitos e representações matemáticas, além das notações algébricas usuais se lhes forem propiciadas situações adequadas.

Segundo Vergnaud (1996), a relevância da Álgebra não como um único conceito primário de estudo, mas como um campo conceitual em que uma ideia algébrica necessita de várias situações para se formar. O mesmo lembra que as crianças apresentam conhecimentos intuitivos sobre espaço, quantidades, relações de ordem e características que fazem parte do campo conceitual da Álgebra. Essas noções podem ser a raiz do conhecimento matemático, enquanto uma tarefa racional mediada por interações dentro e fora da escola. Ressalta, também, que esse saber se desenvolve a partir de situações diversas em que as crianças fazem uso de conhecimentos anteriores e tentam adaptá-lo a uma nova situação na formação de um conceito.

Por fim, merece destaque os estudos realizados pelo grupo de trabalho intitulado *Early Algebra* (EA, 2006). Suas contribuições alavancaram reflexões e validaram propostas sobre *qual*, *como* e *quando* os conceitos algébricos devem ser introduzidos no estudo da Álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Devido à grande importância desse grupo para nosso estudo, retomaremos suas ideias em capítulo posterior.

No Brasil, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs para os anos iniciais (1996, 1997, 1998) abordam, em seu aporte curricular, sobre a Álgebra como um complemento do eixo dos números e operações, mas sem menção (direta) ao processo de formação do pensamento algébrico. Entretanto, um dos primeiros registros do pensamento algébrico surgiu no documento “Elementos Conceituais e Metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental” (BRASIL, 2012). Em que, destaca a compreensão do comportamento de padrões (numérico ou figural), o estabelecimento de critérios para classificar, ordenar e agrupar objetos de diferentes atributos, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Atualmente, a elaboração de uma Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017)[2] que tenta preencher a lacuna algébrica deixada pelas diretrizes educacionais atuais. Muito se discute sobre essa base representar um avanço ou retrocesso para o sistema educacional brasileiro (não entraremos no mérito dessa discussão). O que podemos ressaltar é

[2]Esta base foi elaborada pelo Sistema Nacional de Educação (SNE) e recentemente publicada e homologada, como documento oficial. Sua proposta está disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 agosto 2016.

que a BNCC terá força de Lei[3] e trará em suas diretrizes a introdução do pensamento algébrico no eixo norteador do estudo da Álgebra de componente curricular a partir do 1º ano do Ensino Fundamental. Sugere que a partir da identificação de atributos, regras de formação de sequências (diversas), reconhecimento de padrões e relações matemáticas, num processo de generalização, abstração e representações teremos evidências prováveis da formação do pensamento algébrico nos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse é um dos argumentos das diretrizes do Plano Nacional de Educação (PNE) para justificar e validar a abordagem da Álgebra e, consequentemente, do pensamento algébrico desde os anos iniciais, do Ensino Fundamental, e, portanto, ajustar/melhorar a Educação Básica.

Podemos observar que não somos os únicos a questionar os conhecimentos algébricos destinados à Educação Básica e que não estamos isolados na busca por uma compreensão do pensamento e/ou dos elementos caracterizadores do raciocínio algébrico das crianças no contexto escolar desde seus primeiros anos de escolarização. Nossa inquietação vai ao encontro das ideias de especialistas do mundo em relação aos conceitos algébricos, como contribuir para a sua formação e quando os estudantes se encontram cognitivamente preparados para sua assimilação.

OBJETIVO E QUESTÕES DE PESQUISA

A partir das ideias discutidas acima, traçamos os objetivos gerais para que posamos explicitar a nossa investigação baseada no questionamento proposto, procurando respondê-lo através de embasamentos teóricos: *comparar as competências e os esquemas de ação que os estudantes do 3º e 5º anos do ensino fundamental utilizam ao lidarem com situações-problema, envolvendo os conceitos da álgebra elementar e, ainda, identificar seus níveis de raciocínio algébrico usados para resolver tais situações.*

Através desses objetivos, construímos três questões de pesquisa, cujas respostas e resultados gerados nos possibilitarão compreender a relevância de inserir os conceitos da Álgebra elementar nas séries iniciais. São elas:

- Quais as competências que os estudantes de 3º e 5º anos do Ensino Fundamental apresentam ao lidar com problemas da Álgebra elementar?

[3]Professor Marcelo Camâra, Capes DEB (palestra no PPGEM, 20/03/2017) sobre a formação de professores face à BNCC (BRASIL,2017).

- Quais os esquemas que os estudantes do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental apresentam ao lidar com problemas da Álgebra elementar?
- Quais os níveis de raciocínio algébrico que estudantes do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental apresentam ao lidar com problemas da Álgebra elementar?

Para atingir os objetivos propostos e gerar dados necessários para responder às nossas questões de pesquisa, traçamos uma trajetória investigativa que apresentaremos a seguir.

BREVE RELATO DA TRAJETÓRIA DA DISSERTAÇÃO

O capítulo I discute sobre a Álgebra, sob dois pontos de vista: o da matemática e o da escola. No que tange ao primeiro ponto de vista, buscaremos em Lintz (1999); Eves (2004); Katz (2006); Boyer (2010); Piaget; Garcia (2011); Sousa (2014); Ribeiro (2015) e outros, como subsídios teóricos para discutir o surgimento (parcial) da Álgebra como um ramo da matemática e sua posição atualmente no contexto escolar, uma vez que é ofertada como conteúdo curricular a partir do 7º ano do Ensino Fundamental. Numa proposta tradicional pedagógica e organizada num conjunto de regras baseadas em princípios de resolução de equação (e variações) e as noções básicas de função, seguindo as propostas e diretrizes curriculares da educação brasileira para a Educação Básica.

Além disso, uma análise das diretrizes curriculares dos PCNs (1996, 1997, 1998). Ainda, os Elementos Conceituais e Metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos), do Ensino Fundamental, (BRASIL, 2012), e da BNCC (BRASIL,2017) para a educação algébrica e as implicações pedagógicas propostas para a introdução das noções da Álgebra já nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

É importante esclarecer que a Álgebra referida neste estudo é a denominada Álgebra elementar, que envolve os conceitos matemáticos ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No Ensino Fundamental, essa compreende: a equação e a inequação, a incógnita, a introdução do conceito de variável, a função afim, e outros; já no Ensino Médio, temos o aprofundamento da função afim e seu comportamento analítico, as outras demais funções reais, da matriz, do sistema linear e a consolidação do conceito de variável etc.

No capítulo II, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), a relação dessa para o Campo Conceitual Algébrico. Discutiremos a importância da observação dos aspectos conceituais dos esquemas na análise cognitiva dos estudantes mediante as situações com os quais os estudantes do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental se apropriam para resolução de situações-problema que trazem ideias subjacentes da Álgebra elementar. Na sequência, traremos o grupo intitulado *Early Algebra* e os estudos correlatos que têm sido desenvolvidos. Apresentaremos algumas discussões de autores como Blanton; Carraher; Brizuela (2006); Canavarro (2007); Ponte (2006); Falcão (2003); Lins; Gimenez (2001), entre outros de relevância para a compreensão e análise de nosso estudo. A discussão fomentada neste estudo correlato norteará, subsidiará e referendará uma fundamentação teórica-epistemológica dos argumentos apresentados como necessários à investigação e a validação dos resultados encontrados. Esses estudos também foram essenciais na elaboração do instrumento investigativo, suas situações-problema e na compreensão e análise dos dados gerados nos protocolos de pesquisa.

No capítulo III, apresentação dos procedimentos metodológicos que fundamentaram nossa pesquisa e a justificativa pela nossa opção teórico-metodológica. Apontaremos o universo, dentro dele delimitaremos nossa população e amostra, bem como o desenho do experimento. Dentro desse último, o capítulo III, apresentaremos a miúde o instrumento diagnóstico, a partir do qual obteremos através dos dados da pesquisa.

No capítulo IV, a análise dos resultados coletados durante a pesquisa de acordo com os enfoques teórico-metodológicos elencados. Todo o processo de análise (quantitativa e qualitativa) dos testes será feita nesse capítulo, bem como a descrição dos procedimentos tomados em cada etapa para a coleta, obtenção e análise dos resultados.

Por fim, as considerações finais, quando apresentaremos os principais resultados de nossa pesquisa que respondam às nossas questões inicialmente formuladas e apontaremos possíveis questionamentos que ainda necessitam de investigação como prováveis pesquisas futuras.

CAPÍTULO I

A ÁLGEBRA SOB DOIS PONTOS DE VISTA: DA MATEMÁTICA E DA ESCOLA

Nesse capítulo discutiremos a importância do desenvolvimento epistemológico do conhecimento algébrico como parte essencial do saber matemático. Nesse ponto de vista, apresentaremos a Álgebra como um conhecimento culturalmente desenvolvido, ao longo dos tempos, seus estágios evolutivos e concepções pedagógicas. Na sequência, traremos o contexto escolar para dentro da discussão, sob o enfoque das propostas nacionais (PCN e BNCC), e finalizaremos o capítulo com um paralelo entre o raciocínio aritmético e o raciocínio algébrico.

1.1 A Álgebra como uma das vertentes da Matemática

1.1.1 Aspectos históricos da Álgebra

Os conhecimentos científicos, a cultura, a linguagem, os métodos de ensino, de aprendizagem e tantos outros elementos que fazem parte do nosso contexto evoluem e se adaptam com o passar dos tempos. Essas mudanças são necessárias para que esses saberes possam se adequar aos novos modos de vida. Situações que no passado pareciam fictícias; hoje, é parte de nossa realidade. A facilidade do acesso a um conhecimento (novo ou antigo) via internet, a rapidez da comunicação, os avanços tecnológicos e as mudanças comportamentais e ideológicas, dentre outros, vão sendo absorvidos e difundidos por gerações. Essas transformações se tornaram tão comuns que, às vezes, temos a impressão que sempre existiram, uma vez que as acolhemos sem questionamentos, absorvemos e as utilizamos naturalmente.

No que tange a matemática, em especial a Álgebra percebemos que essas mudanças são resultado de um longo processo cumulativo de gerações, uma acomodação de saberes intelectuais que foram desenvolvidas e difundidas em conjunto com a história da humanidade.

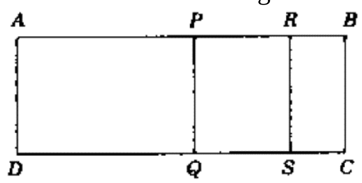
Atualmente, as formas como fazemos Álgebra se difere das formas algébricas de nossos antepassados e, provavelmente, não serão as mesmas do futuro.

Entender essas variações possibilitam compreender como os saltos epistemológicos da Álgebra foram acomodados ao longo de seu desenvolvimento e qual a importância desses nos rumos dos currículos escolares atuais. Conceitos que levaram séculos para se desenvolver são apresentados, atualmente, aos estudantes com uma linearidade absoluta, acarretando obstáculos epistemológicos ao ensino e aprendizagem. Podemos citar, por exemplo, a introdução do conjunto dos números inteiros a partir de uma ampliação do campo aditivo dos números naturais (situações de perda e ganho, débito e crédito). De acordo com os registros históricos, o desenvolvimento do conjunto dos números inteiros levou séculos para se concretizar (BOYER, 2010). Entretanto, as diretrizes curriculares de Matemática sugerem que esse conjunto seja abordado a partir do 7º ano, do Ensino Fundamental (PCNs, 1998; BRASIL, 2017). Essa forma de abordagem fica restrita a um número incipiente de horas/aula não reverenciando seu processo de construção histórica. Não valoriza passos necessários para sua compreensão e acomodação conceitual. Todavia essa abordagem não é exclusiva dos conjuntos inteiros (ou outros conjuntos) da aritmética ou da geometria. Temos no ensino e na aprendizagem da Álgebra outros episódios semelhantes.

Os primeiros conceitos algébricos que os estudantes têm acesso no Ensino Fundamental são abordados em situações em que as letras devem substituir valores desconhecidos em expressões algébricas (valor numérico) e evoluem a partir dessa premissa para uma noção de incógnita. Nessa perspectiva os conceitos básicos devem ser incorporados a partir de uma base que aborda a Álgebra como um cálculo com letras (LINS; GIMENEZ, 2001). Essa forma de ensino, muitas vezes, fundamenta-se em conjunto de regras mecânicas e se transformam em entraves pedagógicos na construção dos conceitos algébricos elementares. Se esse modelo tende a se transformar em ideias equivocadas, por outro lado, se tivermos um ambiente propício à compreensão, ao desenvolvimento dos conceitos algébricos de forma significativa, poderemos criar um ambiente para se (re)pensar a educação algébrica, seus conceitos, suas estruturas formativas e seu papel nos currículos (ver PIAGET; GARCIA, 1987; FIORENTINI, MIORIN; MIGUEL,1992 e 1993; USISKIN, 1995; BOOTH, 1995; KAPUT, 1999; LINS; GIMENEZ, 2001; VALE et al, 2006; BLANTON et al, 2007; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; CARRAHER et al, no prelo; KIERAN, 1992, 2016).

Para que se construa as noções algébricas, precisamos entender sua evolução e como ocorreram as mudanças, os movimentos e as fases que possibilitaram o elaborado sistema algébrico que habita nossas salas de aula. Começamos por um dos mais importantes legados da matemática que exerceu e ainda exerce influências na área, o trabalho de Euclides intitulado *Os Elementos*, 13 volumes, subdividido em proposições contendo geometria, teoria dos números e a Álgebra Elementar (geométrica). Nesse trabalho encontramos algumas raízes algébricas, em situações que entendemos (hoje) como sendo os primórdios da Álgebra moderna (EVES, 2004; KATZ, 2006). Em casos de mensuração prática, a aritmética e a geometria se relacionavam implicitamente com a Álgebra, dando seus primeiros passos no elaborado sistema que compõe as estruturas de domínio algébrico (PIAGET; GARCIA, 1987). Por conveniência, podemos dizer que ali se desenvolvia o cerne da "Álgebra não no sentido simbólico moderno, mas uma equivalente roupagem geométrica" (BOYER, 2010, p. 72).

A Álgebra simbólica, como a conhecemos hoje, se camufla em equivalentes geométricas, como, por exemplo, no livro II, de *Os Elementos*, na proposição II-1, que nos diz que:

> Se são dadas duas retas uma, e uma é cortada em um número qualquer de segmentos, o retângulo contido pelas duas retas é igual aos retângulos contidos pela reta não cortada e cada um dos segmentos.
>
> 
>
>
> Figura 7.5
> Este teorema diz que: AD (AP + PR +RB) = AD.PR + AD.PR + AD.RB, não é nada mais que um enunciado geométrico de uma das leis fundamentais da aritmética, conhecida hoje como a lei distributiva: a (b + c + d) = ab + ac + ad (BOYER, 2010, p. 80).

Em outros exemplares de *Os Elementos* (V e VII), há situações geométricas que justificam as leis comutativa e associativa da multiplicação. Para Euclides, as grandezas eram representadas por segmentos de reta, sendo consideradas, por muitos estudiosos, a primeira Álgebra, uma vez que apresentavam objetivos similares às da Álgebra simbólica (KATZ, 2006).

Reportando aos estágios históricos de desenvolvimento da Álgebra, podemos mencionar dois conjuntos fundamentais para a construção e desenvolvimento dos conhecimentos algébricos. No primeiro, os estágios quanto à sua estrutura de representação (BOYER, 2010); e no segundo (KATZ, 2006) quanto à aplicação dos conceitos algébricos.

Quadro 1 – Estágios do desenvolvimento da Álgebra

Estrutura de representação	**Retórico**	Todas as informações eram escritas em palavras. Os argumentos algébricos utilizados na resolução de problemas eram escritos em prosa pura sem abreviações ou em uma simbologia específica.
	Sincopado	Adota-se algumas simplificações. Fase marcada pela utilização de abreviações e também pelo uso de letras para representar uma incógnita.
	Simbólico	Formação de uma notação algébrica em que as ideias foram sintetizadas e passaram a ser representadas apenas por símbolos.
Conceitos algébricos	**Geométrico**	A maioria dos conceitos da Álgebra é resolvido e descrito de forma geométrica.
	Resolução de equações	O objetivo centrava-se em encontrar valores numéricos que deveriam satisfazer questionamentos diversos, em sua maioria, pragmáticos.
	Função dinâmica	Apresenta as ideias subjacentes da função dinâmica.
	Abstrato	A estrutura matemática desempenhava um papel central com foco nos conhecimentos teóricos.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2016-2017).

Esses dois conjuntos de estágios de desenvolvimento da Álgebra não são totalmente disjuntos. Eles estão imbricados e se sobrepõem, estabelecendo uma conexão de implicações pedagógicas importantes para seu ensino e aprendizagem. Para Katz (2006), o estágio geométrico pode certamente se localizar no período retórico e ter um dos seus atores Euclides (PIAGET; GARCIA, 1987). Não se pode separar a geometria da resolução de equações e vice-versa, o mesmo vale para as estruturas da função dinâmica e do processo de abstração.

Esses estágios foram importantes para o desenvolvimento das estruturas e princípios que regem as manipulações algébricas, a apropriação conceitual, a generalização e os métodos de resoluções algébricas que transitam por nossas salas de aula ainda hoje. Eles possibilitaram uma representação lógica e concatenada dos fatos matemáticos que convivem nas relações e generalizações do raciocínio algébrico.

> Adotar o simbolismo matemático e suas aplicações auxiliava na estruturação do pensamento. [...] O uso do simbolismo pretendia mais do que simplesmente sintetizar a escrita, pretendia facilitar o uso do pensamento. A algebrização pelas letras (SOUSA PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 114).

O processo construído a partir do simbolismo matemático além de facilitar a escrita, a organização, a abstração e a sistematização do raciocínio algébrico possibilitou a sistematização de outros sistemas que se amparam nos recursos algébricos. Podemos citar, por exemplo, a área das tecnologias e dos sistemas de identificação (códigos algébricos, utilização dos números primos).

Um período importante para o desenvolvimento da Álgebra foi o Renascimento europeu[4] (século XV). Considerado um momento marcante para a construção dos saberes científicos e a difusão de ideias matemáticas devido ao desenvolvimento e a comercialização de livros (impressão escrita). Foi marcado pela adoção de um simbolismo específico que mais tarde se tornaria a Álgebra moderna (EVES, 2004). Nesse período, as atividades matemáticas giraram em torno da aritmética, da Álgebra e da trigonometria (ROONEY, 2012). Identificamos a elaboração de um sistema simbólico, a adoção de uma notação algébrica, a formalização de regras e suas aplicações nas estruturas de um raciocínio algébrico emergente. Essas ideias contribuíram de forma indubitável para a difusão e o desenvolvimento da Álgebra moderna.

Temos nesse período a presença do francês François Viète[5] (1540-1603) como um dos sistematizadores desse processo algébrico e suas contribuições relevantes para o desenvolvimento da Álgebra clássica. Tendo por base as noções algébricas instigadas por seus antecessores, Viète reorganizou e ampliou o estudo da Álgebra. Em um dos seus trabalhos intitulado *In artem*, ele introduziu o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes, transformando essa notação fator relevante para a história da Álgebra (EVES, 2004). Sua genialidade sistemática impulsionou o progresso das ideias algébricas, chegando próximo das ideias modernas que, hoje, compõem o arcabouço algébrico teórico (BOYER, 2010).

> Seu sistema de abreviação era um estágio intermediário entre a explanação puramente discursiva dos problemas e a explanação puramente simbólica em uso hoje. [...] O desenvolvimento do sistema de numeração indo-arábico e adoção do zero, tornou-se possível algo que nos aproxima da Álgebra moderna (ROONEY, 2012, p. 127-130).

Devido à importância de seus trabalhos para a compreensão, a ampliação e a adoção de uma notação algébrica, muitos estudiosos o consideram o “pai da Álgebra moderna” (PIAGET; GARNICA, 1987; EVES, 2004; BOYER, 2010; ROONEY, 2012; SOUSA; PANOSSSIAN; CEDRO, 2014; RIBEIRO, 2015).

---

[4]Ebulição das artes e dos saberes construídos socialmente (BOYER, 2010).

[5]Considerado “Pai da Álgebra simbólica” ao utilizar símbolos literais para representar quantidades desconhecidas e, também, quantidades dadas, gerando os parâmetros (SOUSA, 2014, p. 113).

Ademais, Viète foi um dos primeiros a fazer uso de uma mesma letra para representar as várias potências de uma quantidade. O que, hoje, se indica x, x^2, x^3, ele expressava por A, A *quadratum*, A *cubum* e, mais tarde, abreviado para A, Aq e Ac. Usava os sinais + e –, mas nenhum símbolo para a igualdade, quando fazia uso do sinal = entre duas quantidades era para representar diferenças entre elas. Por exemplo, a expressão: B5in A *quad* – C plano 2in A + A *cuba* e *quatur* D sólido arquitetada por Viète representa atualmente a expressão $5BA^2 - 2AC + A^3 = D$ (EVES, 2004). As ideias geométricas de Euclides e o algebrísmo de Viète representam um marco para a história da Álgebra e refletem no desenvolvimento dos conceitos algébricos como conhecemos.

Para Álgebra retratada em nossos contextos educacionais, Lima (2006) a subdivide em cinco grupos: (i) universal, (ii) abstrata, (iii) elementar, (iv) computacional e (v) linear. No que tange a Álgebra Universal, essa representa a ciência pelo qual todas as outras formas de pensar e fazer algébrico se baseiam. “A Álgebra abstrata ou moderna prescinde dos números e seus objetos podem ser matrizes, vetores, sobre os quais se definem operações e propriedades” (SOUSA, 2014, p. 117). Encontramos na Álgebra Elementar alguns conceitos elementares, cujo ensino acontece na Educação Básica, que se baseiam na compreensão das estruturas aritméticas “trata de termos numéricos, isto é, constantes 0,1,1.5, π, variáveis X, Y..., e suas combinações construídas com as operações como +, –, X, ÷, √ etc., para formar termos como X+1, XY(padrão abreviado xy) , X + 3Y, e √x”[6]. Já a Álgebra Computacional ou computação algébrica é o nome dado a tecnologia utilizada para a manipulação de fórmulas matemáticas para computadores (*comput algebra system*). Podendo ser também conhecida pelo termo computação simbólica, pois utiliza símbolos representando objetos matemáticos. A Álgebra Linear surgiu como um estudo detalhado de sistemas de equações lineares (algébricas ou diferenciais) e utiliza os conceitos e estruturas fundamentais da Matemática como vetores, espaços vetoriais, transformações lineares e outro. A Álgebra linear sobre outros campos, em particular campos finitos, é usada na teoria de codificação, computação quântica etc.

Todas essas Álgebras são resultados de gênios (nem todos reconhecidos) que tornaram possíveis os progressos tecnológicos na área atualmente, e foram reorganizados a partir da base do processo de sistematização da Álgebra Universal. Num processo de acomodação,

[6]Elementary algebra deals with numerical terms, namely constants 0, 1, 1.5, π, variables x, y…, and combinations thereof built with operations such as +, −, ×, ÷, √, etc. to form such terms as x+1, x × y (standardly abbreviated xy), x + 3y, and √x... Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/algebra/>. Acesso em 11 maio 2017.

assimilação, equilibração e abstração, por isso, corroboramos com Piaget e Garcia (1987, p. 137) que:

> O desenvolvimento do conhecimento não se efectua (sic) graças à acumulação contínua de novos conhecimentos (com a rejeição concomitante de conceitos e hipóteses que revelaram infrutuosos ou falsos), pelo contrário, ele efectua-se (sic) por etapas que representam níveis característicos, de tal modo que em cada etapa existe uma reorganização dos conhecimentos previamente adquiridos.

Muitos desses conhecimentos apresentam evidências epistemológicas, outros nem tanto e ainda têm aqueles que são sutis, imperceptíveis. Entretanto, todos fazem parte da história da matemática não somente do conhecimento algébrico, mas também aritmético e geométrico. Porém isso é outra história.

1.1.2 As concepções da Álgebra

Antes de adentrarmos na configuração da Álgebra presente nas literaturas, gostaríamos de situar a nossa concepção em relação à Álgebra. Para moldá-la, utilizaremos os aportes de especialistas que compreendem a Álgebra "como uma ferramenta e não como objeto primário de estudo. [...] um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade" (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 109 e 137). Como uma linguagem das generalizações, um idioma através do qual se descreve os padrões e as relações entre quantidades (USISKIN, 1995a); uma modelagem de fenômenos físicos, focando nos conceitos de variável e função (WHEELER, 1993); um instrumento facilitador para a compreensão, dedução e interpretação de fórmulas (USISKIN, 1995b); uma extensão da aritmética, uma compilação (em certo sentido), que requer um sistema simbólico para se fundamentar (ROJANO, 1993); como uma cultura que emprega de símbolos para expressar e manipular generalidades numéricas (LEE, 1993) e, por fim, temos a Álgebra como um campo conceitual[7] (VERGNAUD, 1996).

Baseados nessas considerações conceituaremos a Álgebra como: *uma linguagem e uma ferramenta universal*. No que concerne uma linguagem, a Álgebra possibilita uma transposição de informações em linguagem natural para uma linguagem simbólico-formal matemática, por exemplo, ao equacionar uma situação-problema ou escrevê-lo como uma função. E no que tange ao conceito de ferramenta, esta é adequada para modelar fenômenos físicos, explicitar

---

[7]Esse campo será abordado no capítulo II.

leis numéricas (formação de um sistema numérico e suas propriedades operatórias) e fazer uma compilação simbólica e concatenada da aritmética.

Mais que um sistema simbólico-lógico-teórico para resolução de situações-problema que extrapolam os domínios da aritmética ou se mostram inviáveis (extensos e enfadonhos). Temos, na Álgebra, uma ideia matemática aplicável a qualquer campo do conhecimento científico, “uma ferramenta de trabalho a serviço de outros domínios do saber, como a física, a econometria, a psicofísica” (FALCÃO, 1993, p. 86).

Retornando para o desenvolvimento histórico da Matemática, observamos duas percepções dicotômicas para a Álgebra: (1) a álgebra como processo e (2) a Álgebra como linguagem. E elas se subdividem em quatro concepções: (a) processológica; (b) linguístico-estilística; (c) linguístico-sintática-semântica e (d) linguístico-postulacional (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Na concepção *processológica*, a Álgebra é vista como um conjunto de técnicas, procedimentos e métodos, um processo. Apresenta “técnicas algorítmicas ou processos iterativos” (Ibidem, p. 82) que se baseiam numa sequência de passos padronizados. Essa fundamenta-se na resolução de uma situação-problema, na elaboração de uma maneira que, muitas vezes, independe ou utiliza-se uma linguagem estrutural algébrica. A linguagem e o pensamento algébrico estão dissociados, não exigem a existência de uma forma algébrica específica para se expressar.

Por outro ângulo, na Álgebra como linguagem, temos a concepção *linguístico-estilística* que a delibera como uma linguagem própria capaz de expressar os procedimentos, os métodos e as técnicas algorítmicas de forma autônoma e prática. Em outras palavras, numa linguagem concisa, específica para expressão do pensamento intrínseco nas ideias algébricas de forma gráfica e inteligível. Visto que o processo de formação do pensamento algébrico somente incidirá mediante uma linguagem adequada e imbricada de noções algébricas.

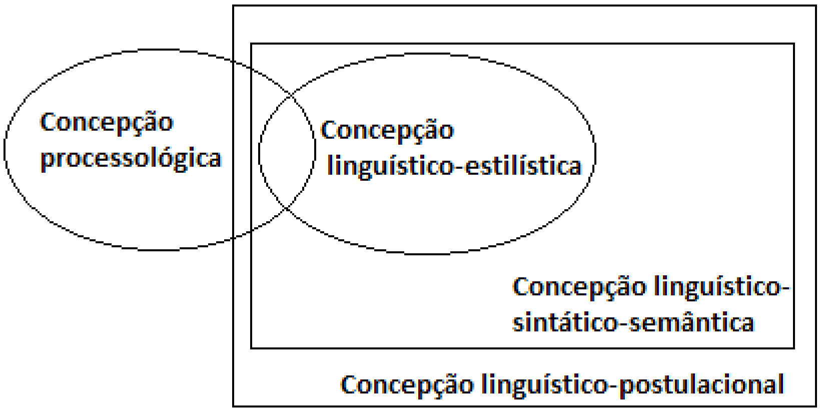
Seguindo nessa mesma linha, a concepção *linguístico-sintática-semântica* que prioriza a compreensão do significado e sua relação com os termos que compõem uma ideia algébrica (significante), estabelecendo ao nível semântico a capacidade de expressar e efetuar transformações simbólicas.

> [...] a concepção linguístico-sintática-semântica alça a linguagem algébrica ao patamar de uma linguagem verdadeiramente simbólica, impondo ao pensamento algébrico não somente a necessidade da existência de uma linguagem, mas sim do domínio de suas estruturas sintático-semânticas (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 27).

De forma mais compreensiva que as concepções anteriores, a concepção *linguístico-postulacional* amplia os significados dos signos linguísticos e os símbolos algébricos e os elegem como entidades para todos os campos da matemática. Nessa perspectiva, os conhecimentos algébricos retratam uma linguagem que possibilita a compreensão, a expressão e a formalização simbólica de várias estruturas que permeiem os conhecimentos matemáticos. Presumimos que nessa concepção, a Álgebra é concebida também como uma linguagem, ampliando o campo dos significados simbólicos para além de uma quantidade geral, mas uma entidade matemática: "a Álgebra é a ciência das estruturas gerais comuns a todas as partes das matemáticas" (PIAGET; GARNICA, 1987, p. 163), não apenas àquelas sujeitas ao tratamento quantitativo. Portando-se como uma ferramenta dinâmica da matemática, uma ciência viva que tem implicações nos mais variados campos do conhecimento científico (FALCÃO, 1993, 2003; D'AMBRÓSIO, 2013).

Essas concepções algébricas podem ser sintetizadas como um conjunto de percepções que se correlacionam e se complementam num único sistema algébrico (diagrama), como proposto pelos autores Sousa, Panossian e Cedro (2014).

Figura 1 – A relação entre as concepções da Álgebra



Fonte: Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 29).

As formas de conceber a Álgebra refletem no ensino que muitos pesquisadores, educadores e estudantes apresentam em relação à formação, à compreensão e à exploração dos conceitos algébricos lógicos-teóricos. A forma como esses conceitos transitam, em nossas salas de aula, e exercem uma forte influência na anuência ou na rejeição dos processos simbólicos que compõem sua estrutura. O sistema adotado tende a balizar o ensino e impõe limites para a formação dos processos de pensamento como a generalização e a abstração. Percebemos que a forma como a Álgebra é concebida influencia o seu formato curricular, sua dimensão, sua abordagem e sua aplicação no contexto escolar.

Presumimos que essa relação está diretamente ligada ao uso e compreensão das variáveis[8], quer seja: (a) como aritmética generalizada; (b) como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; (c) como estudo de relação entre grandezas e (d) como estudo das estruturas (USISKIN, 1995). Se nos apropriarmos das ideias da Álgebra como *aritmética generalizada* teremos as variáveis compreendidas como elementos generalizadores de modelos "como meio de expressão, e não apenas como objeto a que se aplicam técnicas diversas" (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 111). Nesse caso, "a generalização surge com o reconhecimento de padrões e relações e da análise dessas relações" (VALE et al, 2006, p.199), resultando em modelos algébricos representativos em que o símbolo literal não representa, especificamente, uma incógnita. Entretanto, na concepção em que a variável é vista como *um estudo de procedimentos para resolver problemas* ou equações, as variáveis têm *status* de incógnitas ou constantes e apresentam o objetivo de simplificar e resolver (USISKIN, 1995). Em outras palavras, representam valores desconhecidos específicos a serem determinados. Essa representação evidencia a diferença entre operações aritméticas e algébricas, uma vez que na aritmética o processo de resolução se baseia na tentativa e erro, enquanto que na abordagem algébrica o foco são as operações inversas (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014). Na Álgebra compreendia como *estudo de relação entre grandezas*, as letras são tratadas como variáveis no sentido completo da variabilidade.

> Dentro desta concepção, uma variável é um argumento (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é, representa um número do qual dependem outros números). Só no contexto dessa concepção existem as noções de variáveis independente e variável dependente (USISKIN, 1995, p. 17).

Temos nesse contexto a ideia da função como uma relação de ordem, de proporcionalidade, de funcionalidade e de formalização algébrica relevante no campo da Matemática. Como um modelo a ser generalizado, fundamentalmente algébrico, uma ferramenta essencial na interpretação, percepção e resolução de problemas que envolvem a relação entre quantidades e sua variabilidade.

Por fim, na ideia da Álgebra como *estudo das estruturas*, as variáveis assumem um papel mais formal, resultando em cálculos sintáticos mais elaborados, tais como grupos, anéis e domínios de integridade ou corpos (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014). Não existe um

---

[8]Mesmo que alguns educadores achem desnecessária essa concepção da variável, a ressaltamos aqui como elemento histórico importante para a compreensão categorizada dos conhecimentos algébricos e procedimentos adotados pela maioria dos professores em sala de aula.

modelo aritmético a ser generalizado; a variável não é uma incógnita; a variável não é uma função ou relação; não é um argumento; "a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário [...] uma estrutura estabelecida por certas propriedades" (USISKIN, 1995, p. 18).

Pressupomos que as diferentes concepções da Álgebra podem ser compreendidas como um elemento formador dos conceitos algébricos, e sua aplicabilidade essencial para o ensino e a aprendizagem da Álgebra. No quadro 2, a seguir, estabelecemos a relação entre as concepções da Álgebra e os diferentes uso da variável num único panorama:

Quadro 2 – Relação entre as concepções da Álgebra e sua aplicação no campo matemático

CONCEPÇÕES DA ÁLGEBRA	STATUS	APLICAÇÕES MATEMÁTICAS
Aritmética generalizada	Elementos generalizadores: traduzir e generalizar.	Modelagem matemática
Resolução de situações-problema	Incógnitas ou constantes: resolver e simplificar.	Equações
Estudo das relações	Argumento ou um parâmetro: relações e gráficos.	Funções
Estruturas	Símbolos arbitrários: manipular e justificar.	Grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais

Fonte: Elaborado pelas autoras (2016-2017), baseado nas ideias de Usiskin (1995).

Consideramos que essas formas de concepções e uso das variáveis partem de uma mesma visão da Álgebra. Desse modo, uma Álgebra como uma linguagem acessível a todos e uma ferramenta capaz de organizar, explicitar, generalizar, explicar, sintetizar as ideias matemáticas para torná-la inteligível, em todas as partes do mundo.

1.2 A Álgebra escolar

1.2.1 A estrutura algébrica na Educação Básica

Na estrutura atual da Educação Básica, no Brasil, o estudo da Álgebra Elementar é abordado apenas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Sua estrutura está fundamentada nas diretrizes curriculares nacionais e ocupa um lugar de destaque no currículo do ensino de Matemática. Todavia, muitos ainda a veem como uma complementação dos estudos aritméticos e início de estudos de outros ramos da matemática (COXFORD, 1995), limitando seu alcance e aplicação na resolução de equações, expressões algébricas, interpretações de funções e outros. Consideramos que a sintaxe dos conhecimentos algébricos vai muito além dos objetos fundamentais de estudo propostos nos livros didáticos da Educação Básica, em particular, no Ensino Fundamental. As propostas curriculares e as diretrizes que orientam o ensino e a aprendizagem da Álgebra para a Educação Básica atêm a um conjunto unificado que articulam todas as dimensões do sistema educacional para promover a equidade algébrica para todos os estudantes do país, numa forma padronizada.

Dentro dessas diretrizes temos os eixos que estruturam a proficiência Matemática que é interligada para acomodar uma alfabetização e letramento matemático capaz de proporcionar experiências carregadas de significados para que o estudante possa construir seus conhecimentos enquanto transita entre as diversas formas de representar um objeto matemático (BRASIL, 2012).

No contexto dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o terceiro e quarto[9] ciclos do Ensino Fundamental de Matemática, os estudantes têm acesso às primeiras noções algébricas de equações: (1º e 2º graus e biquadradas); sistemas de equações (1º e 2º graus); resolução de problemas de estruturas algébricas e introdução ao conceito de função a partir do 7º ano do Ensino Fundamental (antiga 6ª série) e, posteriormente, complementam os estudos das funções reais no Ensino Médio (BRASIL, 1998). Em outro ângulo, nas propostas das diretrizes dos PCNs de matemática para o 1º e 2º ciclos[10] (BRASIL, 1997), do Ensino Fundamental de matemática, a ausência do estudo da Álgebra. Esses trazem o bloco de conteúdos organizados em quatro eixos estruturantes dos conhecimentos matemáticos: (a) números: naturais, racionais e suas operações; (b) espaço e forma; (c) grandezas e medidas e (d) tratamento de informação. Não se observa nenhuma menção aos conceitos algébricos apenas passagens discretas (ou imperceptíveis) nos conjuntos numéricos, suas operações e na noção de proporcionalidade (numérica, espaço e forma). Todavia, nada intencional no paradigma da Álgebra como estrutura do conhecimento científico. Para nós, educadores matemáticos, parece-nos que os conteúdos da Matemática dessa etapa são desprovidos de elementos característicos das ideias algébricas, preconizadas anteriormente. O que julgamos se tratar de um equívoco, pois se pensarmos na Matemática como a ciência dos padrões[11], estaremos assim a delegar apenas ao plano numérico a formação sequencial dos números, o raciocínio proporcional e

---

[9]Correspondem aos anos finais do Ensino Fundamental, antiga 5ª a 8ª séries, hoje denominadas 6º ao 9º anos.
[10]Correspondem aos anos inicias do Ensino Fundamental, antiga 1ª a 4ª séries, hoje denominadas 2º ao 5º anos.
[11]Devlin (2002).

funcional, as noções de equivalência e tantas outras situações específicas dos conhecimentos matemáticos, dos anos iniciais, do Ensino Fundamental.

Nessa linha gradual, um documento elaborado pelo Ministério da Educação – MEC para definição dos direitos da aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (BRASIL, 2012) que traz pela primeira vez a introdução do pensamento algébrico como um dos eixos estruturantes do conhecimento matemático. Nesse documento, a matemática, dos anos iniciais, do Ensino Fundamental deverá ser desenvolvida não mais em quatro[12], mas em cinco eixos estruturantes, tendo como o quinto eixo o (e) pensamento algébrico. Essa introdução do quinto eixo "pensamento algébrico" tende a ser fundamental para o processo de construção de padrões sequenciais numéricos ou pictóricos; para estabelecimento de relações e critérios para a formação de leis numéricas, para a compreensão das propriedades operatórias (algoritmos), para a interpretação de variabilidade funcional e tantos outros elementos que fazem parte de uma "atividade algébrica, em que os significados são produzidos por pensamento algébrico" (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 151). Na tentativa de interpretar, organizar e generalizar o padrão de uma sequência o ser humano tem a propensão de tentar criar ordem ao caos (VALE et al, 2006) e nessa investigação construtiva ter-se-á as primeiras evidências do raciocínio[13] algébrico. Temos nesse tipo de raciocínio uma estreita relação funcional, pois "com a análise das regras e padrões os alunos desenvolvem um forte sentido do número ao mesmo tempo em que desenvolvem o conceito de função" (Ibidem, p. 199). Consideramos que o raciocínio funcional proveniente do raciocínio proporcional tende a se configurar como um alicerce da Álgebra (SILVESTRE; PONTE, 2006) e uma base sólida para progressão das noções algébricas. A adoção de atividades que trazem em sua estrutura operatória esse tipo de raciocínio subsidiará situações pedagógicas num contexto algébrico. Essas situações devem ser desenvolvidas e compreendidas como uma base importante para a construção dos elementos essenciais da Álgebra Elementar para os anos finais do Ensino Fundamental. Ressaltamos, também, a importância de outras estratégias que contribuam para a formação de uma base para o domínio de uma linguagem figurada, em que "os símbolos matemáticos devem aparecer não apenas como componentes característicos do conhecimento matemático, mas como elementos criadores da comunicação" (BRASIL, 2012, p. 60).

Conjecturamos que atividades algébricas que possibilitem o reconhecimento, a compreensão dos padrões e de seus atributos, a noção de sequência (numérica ou pictórica)

[12] Números, grandezas e medidas; espaço- forma e tratamento de informação (PCN,1998)
[13]Segundo a orientadora Magina (2016), o raciocínio está diretamente ligado à razão humana, uma concatenação lógica dos fatos.

devem ser introduzidos no 1º ano, do Ensino Fundamental, e ser ampliado ainda nesse seguimento (BRASIL, 2012) para que o processo de formação do pensamento algébrico possa se instaurar de forma gradativa e significativa. Não compactuamos com a formalização simbólica-matemática nessa fase, todavia é conveniente lembrar que podemos desenvolver noções algébricas sem utilizar o algebrísmo característico dos anos finais e do Ensino Médio, sem comprometer a formação dos conceitos.

Presumimos que priorizar a introdução do estudo da Álgebra apenas para os anos finais do Ensino Fundamental tende a tornar seu ensino um emaranhado de métodos, regras e sistemas sem significado, comprometendo, restringindo sua aplicação e aprendizagem a uma forma mecânica e repetitiva. A manutenção dessa postura contribui para que a Álgebra "constitua-se como uma das fontes de alienação dos estudantes durante o processo de aprendizagem matemática, uma vez que parece estar completamente dissociada da prática social" (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 17), impossibilitando que os estudantes compreendam as ideias algébricas por detrás de cada sentença e percebam suas aplicações no ambiente social e econômico.

Alguns pesquisadores, como: David (1985); Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, 1993); Carraher e Schliemann (1995); Booth (1984, 1988, 1995) entre outros que questionam o ensino da matemática escolar, em especial, a não abordagem Algébrica para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Não concordam com a organização dos currículos desprovidos de noções elementares da Álgebra desde os primeiros anos de escolarização. Destacam a existência de uma relação intrínseca entre a aritmética e Álgebra (aritmética generalizada) (USISKIN, 1995) que não é aproveitada no contexto dos anos iniciais. Entretanto, essa percepção apresenta-se relegada a entendimentos pedagógicos sem uma prática efetiva.

Atualmente, no contexto educacional, verificamos algumas propostas de ensino que propõem uma releitura das noções algébricas e das competências dos estudantes frente a situações-problema que trazem em sua estrutura saberes básicos da Álgebra. Essas discussões têm proporcionado uma abertura nas propostas curriculares para o ensino da Álgebra, tornando possível sua introdução desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Nessas diretrizes curriculares, a proposta para o Ensino Fundamental se mantém pautada em quatro eixos de formação que se articulam horizontalmente[14] entre as áreas de Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso (BRASIL, 2016, p. 176), mas com uma abertura para o processo de formação do pensamento algébrico. Temos na elaboração e

[14]Articulação que se realiza a fim de desenvolver a integração entre as matérias e as áreas do conhecimento (Unesco, 2016).

publicação[15] de uma base Nacional Curricular Comum (BNCC)[16] no Sistema Nacional de Educação (SNE), que os objetivos de aprendizagem Matemática para os anos iniciais deverão centrar-se em cinco eixos norteadores. Essa proposta da base propõe o ensino da Álgebra associado ao desenvolvimento de habilidades que permitam identificar atributos, regras de formação de sequências, reconhecimento de mudanças e relações como os primeiros indícios para a formação do pensamento algébrico e da ideia de função para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa orientação “não pode (não deve) substituir currículos, mas indicar sobre quais pilares ele será alicerçado” (Ibidem p. 132, grifo nosso), cabendo às escolas e o próprio professor a articulação, o planejamento das atividades e os ajustes necessários. Numa configuração para que os primeiros passos a caminho de uma aprendizagem algébrica se façam presente nessa etapa escolar.

No tocante ao ensino do componente de matemática, a BNCC mantém uma estreita relação com os PCNs no que se refere ao seu ensino como objeto de formação da cidadania e na promoção da equidade na educação. Sintetiza a estrutura proposta pelo MEC, em 2012 (já mencionado), enquanto discute que o conhecimento matemático perpassa por cinco eixos estruturantes que devem orientar e conduzir o desenvolvimento da aprendizagem Matemática e suas habilidades[17]. São eles: (a) números e operações; (b) geometria; (c) grandezas e medidas; (d) Álgebra e funções e (e) estatística (BRASIL, 2017).

A unidade do eixo da Álgebra propõe o reconhecimento de mudanças, padrões e relações; sequências repetitivas e recursivas; relação e propriedades de igualdade e equivalência e, ainda, grandezas proporcionais (noção de proporção) como um dos primeiros indícios do pensamento algébrico nos anos iniciais, do Ensino Fundamental. A seguir, apresentamos um quadro síntese contendo a unidade temática da Álgebra, seu objeto de conhecimento e habilidades propostos pela BNCC (BRASIL,2017) para os estudantes do 3º e 5º anos (sujeitos da pesquisa).

---

[15]Disponível em: <http:basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 08 maio 2017.
[16] Homologada em 20 de dezembro de 2017 em movimentopelabase.org.br/acontece/bncc-homologada/
[17]Para mais informações ver os quadros na íntegra (BRASIL, 2017, p. 234-253).

Quadro 3 – Relação entre o objeto de conhecimento algébrico e as habilidades a serem desenvolvidas, segundo o ano escolar

Ano Escolar	Objeto de Conhecimento	Habilidades
3º ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes das adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	Relação de igualdade	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou subtrações, de dois números naturais que resultem numa mesma soma ou diferença.
5º ano	Propriedade da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) Concluir por meio de investigações que uma igualdade não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir seus dois membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar a quantidade de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escalas em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como: dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: Elaborado e adaptado pela autora, a partir da BNCC (BRASIL,2017, p. 243 e 251).

Esse pensamento algébrico proposto precede a abordagem e a apropriação dos conceitos propostos pela Álgebra Elementar, pois não contempla a formação e manipulação de símbolos algébricos formais. A formação desses conceitos acontecerá segundo as diretrizes curriculares nacionais, nos anos finais do Ensino Fundamental e Médio.

Como nosso estudo centra-se em discutir o estudo da Álgebra a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental convém ressaltar que a BNCC abre o precedente para que seu ensino, ou melhor, que os elementos *caracterizadores e constitutivos da Álgebra*[18] estejam presentes

[18]XII ENEM (RIBEIRO, 2016).

em nossas salas de aulas como propõe a *Early Algebra*. Segundo Fiorentini (1993), os elementos caracterizadores da Álgebra são aqueles que manifestam a partir da percepção de regularidades, dos aspectos invariantes em contraste com os que variam, na tentativa de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação e na presença do processo de generalização. E os elementos constitutivos são aqueles em que as ações e manipulações não se constituem ao acaso, mas se organizam sob a forma de um sistema pré-algébrico de modo sistemático. Esses tipos de situações são experimentados pelos estudantes dentro do contexto escolar, uma vez que a Álgebra é um conceito estritamente escolar (LINS; GIMENEZ, 2001).

Todavia não se faz necessário adentrar as noções algébricas formais nessa etapa escolar, e sim introduzir situações que trazem de forma implícita as noções básicas dos elementos do raciocínio algébrico e suas implicações na formação de uma notação algébrica-simbólica adequada à capacidade psico cognitiva dos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Essas propostas sugerem práticas e metodologias para a formação de uma aprendizagem algébrica precoce. Mas caberá ao corpo docente, coordenadores pedagógicos de cada escola a elaboração de planejamentos curriculares que construam caminhos para que essas práticas se concretizem. Consideramos que a introdução do pensamento e/ou do raciocínio algébrico tende a ocupar um lugar de destaque no currículo de matemática, e contribuirá de forma gradativa para a gênese do pensamento e da linguagem algébrica na formação das funções psicológicas superiores do ser humano (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

A formação dos conceitos algébricos impulsiona a formação de estruturas essenciais no desenvolvimento e aprimoramento psicológico de crianças na fase do Ensino Fundamental, bem como nas relações que eles estabelecerão em outros campos do conhecimento. Pressupomos que a partir do desenvolvimento das habilidades primárias e secundárias[19] ter-se-á o estabelecimento das conexões estruturais necessárias à progressão no conhecimento escolar da Álgebra para que ela se torne familiar e cada vez mais sofisticada ao longo de escolarização.

Estudos indicam que a Álgebra apresenta uma estreita relação com a aritmética na legitimação dos processos e das propriedades que compõem o universo das estruturas numéricas (especialistas e documentos institucionais). Baseados nesses pressupostos, presumimos ser necessário adentar nas noções mais básicas da Álgebra para concebê-la como uma continuidade da aritmética e estabelecer uma relação entre seus domínios.

[19]Primária – capacidade de aquisição espontânea; secundária – capacidade de aquisição mediada pedagogicamente.

1.2.2 Qual a relação entre os domínios da aritmética e da Álgebra?

Atualmente, os currículos escolares apresentam uma hierarquia em relação à aritmética e a Álgebra. Nessa organização, primeiro os estudantes precisam dominar os conceitos aritméticos para depois serem apresentados aos da Álgebra. Essa interpretação surgiu a partir de interpretações equivocadas das ideias de Piaget referente ao desenvolvimento dos níveis intelectuais das crianças[20] (LINS; GIMENEZ, 2001). Para Piaget existem quatro estágios de desenvolvimento cognitivo lógico[21], a saber: 1) Sensório Motor; 2) Pré-Operatório; 3) Operações concretas e 4) Operações Formais (Piaget, 1996). Embora exista uma ordem cronológica nesses estágios, não há uma fixação de idade. Contudo, muitos interpretaram que as idades ilustradas por Piaget (nestes estágios) eram fixas e imutáveis. De acordo com estas ideais, a organização curricular dos conhecimentos aritméticos deve anteceder os da Álgebra, pois o segundo tende a ser influenciado por um processo de maturação biológico e requer um pensamento operatório formal apenas alcançado com uma maturidade cognitiva (estágio das operações formais).

A apropriação dessa subordinação conceitual tem retardado, ao longo dos anos, a introdução dos princípios algébricos para os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental e impedindo um avanço na área. Pesquisadores questionam essa hierarquização e discutem as possibilidades de se repensar esse paradigma da educação algébrica para os anos iniciais do Ensino Fundamental (BOOTH, 1984, 1995; BLANTON 1998; KAPUT, 1984; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995, 2008; CARRAHER, SCHLIEMANN; BRIZUELA, 2000, 2001, 2003; LINS; GIMENEZ, 2001; KIERAN, 2016; MIGUEL, FIORENTINI; MIORIM, 1992, 1993; BEDNARZ, KIERAN; LEE, 1996; PONTE, 2006; GÓMEZ, 2006; FALCÃO, 1993, 2003, entre outros). Os autores ressaltam a necessidade de um exame das relações intrínsecas entre a aritmética e a Álgebra, como um movimento de continuidade e não de rupturas. Uma concomitância conceitual e não subordinação algébrica. Que a aritmética envolve um nível de generalidade e mantendo essa posição tardia na apresentação da atividade algébrica representa uma postura equivocada e indesejável na atualidade.

Essa aproximação entre a aritmética e a Álgebra transita no nosso contexto escolar há algumas décadas, sem muita ênfase acadêmica. No período do Movimento da Matemática

[20]Os estágios de desenvolvimento lógico propostos por Piaget (1996) são: 1) sensório motor; 2) pré-operatório; 3) operações concretas e 4) operações formais. Embora exista uma ordem cronológica nesses estágios, não há uma fixação de idade. Contudo, muitos interpretaram que as idades ilustradas, por Piaget, eram fixas e imutáveis.
[21] Estes estágios serão discutidos de forma sucinta no capítulo seguinte, com uma abordagem das ideias de Piaget.

Moderna (MMM), Sangiorgi (1963, p. 81) já discutia essa relação quando advertia que "não se pode precisar uma linha divisória entre Aritmética e Álgebra, pois os resultados particulares que se obtém (sic) pela primeira não se podem separar das teorias gerais que se estuda pela segunda". Em outras palavras, uma se beneficia e depende da outra. Todavia, essa discussão parece que foi abafada juntamente com as reformas do movimento.

Para Carraher e Schliemann (2016), essa divisão curricular estabelecida entre a aritmética e Álgebra tende a ser artificial, sem fundamento, uma vez que as situações aritméticas possibilitam generalizações próximas aquelas a que estamos habituados na Álgebra. Ao analisarmos algumas dessas situações, observamos que reproduzem as propriedades algébricas na sustentação lógica de suas estruturas. Esse fato evidencia a existência de um caráter algébrico na aritmética, mesmo que de forma implícita. Podemos citar, por exemplo: a relação do sistema de numeração decimal com os padrões algébricos; as operações aritméticas com as funções (CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995, 2016); o algoritmo da multiplicação como um modelo algébrico, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou subtração como uma linguagem algébrica (EVES, 2004; GÓMEZ, 2006), dentre outros processos peculiares à atividade aritmética.

Observando o processo de formação do sistema de numeração decimal, verificamos que se constitui a partir de uma generalização de padrões/sequência quanto aos agrupamentos de seu sistema de base dez (ou outra base qualquer). Esse é o caso, por exemplo, quando representamos o número natural 25, por duas vezes 10 mais 5 da seguinte forma: $25 = 2.10 + 5$, ou outro número decimal qualquer. Para representá-lo "o estudante precisa compreender a regra do sistema decimal. [...] Pela análise das regras de funcionamento do sistema de numeração decimal, os alunos podem interpretar e escrever qualquer escrita numérica" (BRASIL, 1997, p. 53-57). Estando a "fazer Álgebra com números" (GOMERO, 2017) ou ainda estão a "algebrizar os números" (BROCARDO et al, 2006). Essa estratégia possibilita a escrita de qualquer número (um modelo), uma representação simbólica em que a prioridade não é o cálculo, mas a metodologia de escrita, assim como o entendimento das operações que o compõem para modelos futuros. Reportar a composição do sistema de numeração decimal a um sistema algébrico representa uma abordagem algebrizada da aritmética que tende a contribuir para conectar as ideias da álgebra formal ao sistema de numeração básica da matemática.

Ao utilizarmos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para justificar o algoritmo da multiplicação, estamos fazendo álgebra. Empregamos procedimentos algébricos, uma vez que "os livros actuais (sic) estão renunciando à antiga linguagem de unidades, dezenas e centenas para explicar os algoritmos, estão incorporando cada vez mais a linguagem da álgebra" (GÓMEZ, 2006, p. 364). Quando explicamos (não resolvemos), por exemplo: no algoritmo quinze vezes oito, dizemos que quinze é igual a dez mais cinco, e que o produto se obtém aplicando a propriedade distributiva em relação à adição, 15. 8 = (10 + 5). 8. Fato semelhante acontece se fizermos a multiplicação de "vinte e três por vinte e quatro dizemos que vinte e três é vinte mais três e que vinte e quatro é vinte mais quatro e que o produto se obtém aplicando duas vezes a propriedade distributiva, 23. 24 = (20 + 3) (20 + 4). Isto é uma linguagem algébrica" (Ibidem, p. 365) e se transforma num modelo sintático-lógico-dedutivo, um promotor de estratégias algébricas que se aplica a múltiplos casos específicos.

Na introdução do estudo das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, é possível retratá-las como uma função, uma vez que a "linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável" (BRASIL, 2017, p. 226). Isto implica que uma função pode ser vista como um modelo matemático fundamental para explicitar leis gerais constituídas de variáveis e de suas respectivas taxas de variação, não pode ser abordada como um conceito isolado. Carraher et al (2006, p. 88, tradução nossa) reforça essa ideia quando ressalta que "as operações aritméticas podem ser vistas como funções, e a notação algébrica pode dar suporte ao raciocínio matemático mesmo entre estudantes jovens". A simbiose, operação-função, sugere uma possibilidade de fazer uso de ideias e representações algébricas desde muito cedo na vida escolar das crianças.

Para associar uma operação de adição a uma função, podemos chamar atenção para o formato de uma dada representação. Por exemplo, se estamos fazendo uma adição de um número qualquer com cinco, "+ 5", isto pode ser representado por uma função do tipo $f(x) = x + 5$ ou $y = x +5$. Essa representação traz implícita a noção de variabilidade, em que o resultado depende do valor atribuído a x. Fato semelhante acontece numa operação de multiplicação. O produto por 3, representa uma relação de valores para x (domínio da função) para com valores de y (contradomínio da função) em que $y = 3x$ ou $f(x) = 3x$. Nesse caso, algebricamente, podemos atribuir a f(x) ou y o *status* de variável, enquanto que se fixarmos apenas no resultado da operação estaremos apenas no campo aritmético. Esse formato contribui para que o estudante possa desenvolver a noção de variável sem abandonar as estruturas aritméticas.

Podemos conjecturar que quando os estudantes transitam entre as operações de multiplicação e divisão adentram no campo conceitual das estruturas multiplicativas e, por conseguinte, do raciocínio proporcional[22] e das relações funcionais. Considerando que "as situações proporcionais fornecem uma porta ideal para o campo da representação algébrica,

[22]Habilidade essencial para a aprendizagem matemática no 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997) e (BRASIL, 2017).

uma vez que seus antecedentes aritméticos são justificáveis através de abordagem do senso comum" (POST; BEHR; LESH, 1995, p. 102), agregaremos às situações aritméticas um caráter algébrico.

O caráter algébrico também se encontra numa expressão numérica (conteúdo básico desde a Educação Infantil) que pode ser considerada como instância específica de uma função (CARRAHER; SCHLIEMNN; SCHWARTZ, 2005). Enfim, os estudantes podem trabalhar e compreender as funções em estágios iniciais como um papel unificador entre a aritmética e a Álgebra, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra.

Uma situação aritmética do tipo ? + 5 = 8, pode ser facilmente resolvida por estudantes dos anos iniciais. Essa situação é comumente conceituada como aritmética, contudo traz o conceito de uma incógnita ou de uma constante. Esse tipo de situação aborda uma relação de equivalência, uma igualdade, ou ainda, uma identidade. Algebricamente, essa situação refere-se a uma equação, ou uma comparação entre duas funções (CARRAHER, 2014), em que $f(x) = x + 5$ e $g(x) = 8$ e admite como única solução $x = 3$. Quando optarmos por esse tipo de situação não necessariamente estaremos introduzindo notações algébricas, mas uma notação carregada de significado algébrico, "o significado está em quem interpreta, e não na notação, [...] uma notação deve, então ser legítima e adequada" (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 167 e 169).

Outra forma de abordar os conceitos algébricos associados a uma relação de equivalência apoia-se na ideia icônica de uma balança de dois pratos, em que os pratos aludam ser os membros de uma equação. Essa representação utilizando situações com balança, pode ser útil (facilitadora), mas apresenta limites epistemológicos, uma vez que a imagem retratada de conceito implícito (equivalência) difere da definição explícita desses mesmos conceitos (LINS; GIMENEZ, 2001). A forma impõe limites de aplicação, como, para valores em que a incógnita for negativa e/ou cujos domínios estejam nos números racionais. Isto implica que sua abordagem necessita de outros contornos para que o estudante possa compreender a relação de equivalência e, consequentemente, a propriedade da operação inversa fundamental na resolução de uma equação.

Todavia, representações com elementos matemáticos ou não-matemáticos podem ser organizados como promotores das notações simbólicas, tornando o conhecimento algébrico como familiar[23] e significativo. Essa forma de apresentar uma situação-problema tende a alargar uma relação de coexistência entre os domínios da aritmética e os da Álgebra, enquanto possibilita um ensino e a produção de significados para os mais variados conceitos algébricos.

---

[23]"Familiar deve ser entendido no sentido que os alunos já tinham recursos para operar naquele domínio, e o que se introduziu foi a legitimidade daquele modo de pensar naquela atividade" (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 131).

E, ainda facilitaria futuramente os estudantes quando tivessem que utilizar as incógnitas x, y ou outras variáveis.

Entretanto, o modo como o professor atribui as situações-problema apresentadas numa dada tarefa tende a determinar se uma atividade é aritmética ou algébrica, uma vez que os conceitos algébricos nem sempre são empíricos. Compete a ele, professor, trazer para essa relação (estudante-tarefa) uma característica palpável (algebricamente) e uma oportunidade didática favorável para o desenvolvimento dos conceitos algébricos.

Por isso convém (re)pensar e (re)estruturar essa relação, ajustar processos metodológicos arraigados há séculos e desenvolver novos modos didáticos de perceber e agir sobre o domínio de cada uma delas. Desenvolver um equilíbrio entre a educação aritmética e algébrica em três frentes:

> i) o desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo nossas habilidades de resolver problemas e de investigar e explorar situações;
> ii) o desenvolvimento de diferentes modos de produzir significado (pensar), o que poderíamos chamar de atividades de inserção e tematização; e iii) o aprimoramento das habilidades técnicas, isto é, da capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 165).

Esse equilíbrio precisa ser sustentado por um conjunto de atividades que propicie uma compreensão analítica dos procedimentos técnicos aritméticos para a produção de significados e a instrumentalização da álgebra como aritmética generalizada[24]. Nessa perspectiva, "a passagem da aritmética à álgebra deve ser situada num contexto que abra espaços de *ruptura*, sem dúvida, fundamentais, mas que não descuide dos aspectos de *continuidade*" (FALCÃO, 1993, p. 90, grifo nosso).

No ambiente de sala de aula, ao lidar com situações de características numéricas, o estudante evoca inconscientemente estratégias algébricas, um pensamento algébrico (BRASIL, 2017), necessários à sua validação das leis de domínio aritmético. Com a assimilação das noções algébricas básicas (forma implícita), o estudante dos anos iniciais terá condições de estabelecer relações entre os conceitos da Álgebra e da Aritmética. Essa assimilação possibilitará a interpretação e a resolução de situações-problema, estejam essas fora ou dentro do contexto escolar. Portanto, devemos ter a Álgebra não apenas como um conjunto de técnicas mecânicas necessárias apenas na escola, um *objeto* de conhecimento, mas como uma forma de pensar e raciocinar acerca das mais variadas situações do dia a dia, uma *ferramenta* útil.

---

[24]Usiskin (1995, p. 13).

Respondendo a questão formulada no início desta subseção “qual a relação entre os domínios da aritmética e da Álgebra?” Conforme discutido, podemos responder que existe uma relação muito próxima entre a aritmética e a Álgebra, uma afinidade entre seus domínios com uma raiz em comum que se manifesta nas relações quantitativas[25]. Ou seja, se “a Álgebra é o idioma das relações entre quantidades” (USISKIN, 1995, p. 33), e a aritmética tem seu *habitat* nas relações quantificáveis, uma vez inseridas nesse ambiente não teremos como separá-las. Essa suposta diferença entre a aritmética e a Álgebra consiste no tratamento, no foco que os educadores e estudantes caracterizam as situações aritméticas, e não na epistemologia que ambas apresentam.

[25]Para Davydov (1988), devemos colocar a aritmética em ação para se chegar a um sistema de propriedades sofisticadas (base no estudo das relações quantitativas) que, posteriormente, resultará nas estruturas básicas da Álgebra.

CAPÍTULO II

SUSTENTAÇÕES TEÓRICAS DO ESTUDO

Neste capítulo apresentaremos as ideias teóricas e estudos correlatos que deram suporte a nossa pesquisa. Primeiramente, a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), os esquemas, os teoremas-em-ação que permeiam as atuações de um sujeito na realização de uma tarefa de potencial algébrico e os campos conceituais estudados por Vergnaud. Na sequência, apresentaremos para a discussão a *Early Algebra* como um dos precursores a validar a importância do estudo do raciocínio algébrico dos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Suas implicações pedagógicas, diretrizes e metodologias necessárias para o desenvolvimento de uma educação algébrica e seu conceito assumido por nós.

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

2.1.1 Relação da Teoria dos Campos Conceituais e a formação de conceitos

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista elaborada pelo francês Gérard Vergnaud[26] que adota o processo de formação de um conceito a partir das interações do indivíduo com várias situações vivenciadas durante a ação de aprender. Mesmo não sendo uma teoria didática se preocupa em formar um quadro pedagógico para a

---

[26]Psicólogo francês que trabalha especificamente com a formação dos conceitos matemáticos.

aprendizagem, busca compreender as rupturas e as filiações entre os saberes: o fazer e o expresso (VERGNAUD, 1996).

Para Vergnaud (1996), o desenvolvimento cognitivo de uma criança ou de um adulto depende do campo conceitual a que ele é confrontado diariamente e da presença de uma função adaptativa do conhecimento anterior (repertório) para se desenvolver. Sabemos que o indivíduo recebe influências de um conjunto de fatores (internos ou externos) e de forma significativa essas permeiam e possibilitam (ou não) a estruturação e a apropriação de um conceito. Por isso, é muito importante para o sistema educacional investigar o processo de formação de um conceito científico e suas implicações e transformações pedagógicas.

Nesta teoria, a TCC, o processo de formação de um novo conceito advém a partir de uma reflexão do sujeito na ação durante ou após a resolução de uma situação-problema. Esta reflexão emerge a partir de uma tríade: *a Maturação, a Experiência e a Aprendizagem* escolar. As duas primeiras de raízes Piagetianas[27] enquanto que a terceira, surge como resultado da relação da criança no universo escolar (estudado por Vergnaud). No que concerne a primeira raiz, a maturação, apresenta uma abordagem biológica. Relaciona-se com o desenvolvimento cognitivo do indivíduo (dele participando inclusive o surgimento, desenvolvimento e sinapse dos neurônios). Ela envolve a habilidade de internalizar, transformar e responder de forma eficaz aos estímulos incitados. A experiência, por sua vez, é fruto da interação do indivíduo com o meio a sua volta. Os objetos (inclusive os matemáticos) com os quais a criança interage (age sobre eles e deles observa reação) é que contribuirão para a apropriação e desenvolvimento do conhecimento. Este, portanto, tem características e domínio de validade inicialmente local (VERGNAUD, 1996). No que tange a terceira, a aprendizagem, Vergnaud chama atenção para a posição do professor no processo de mediação entre os estudantes e o conhecimento. Parte-se do princípio que o ensino e a aprendizagem são processos que formam os dois lados de uma mesma moeda; tem o mesmo foco (a apropriação do conhecimento), mas cada um olha por uma ótica. Se complementam e interagem, mas pertencem a lados distintos.

Na visão piagetiana (PIAGET, 1977, 1995), o desenvolvimento cognitivo da criança perpassa por quatro estágios[28] [1]: sensório-motor; pré-operatório; operações concretas e operações formais. No primeiro estágio, o sensório-motor, as ações da criança são reflexos de atividades coordenadas pela visão e preensão (olhos e mãos). Nesta fase a criança apresenta as noções matemáticas de maior/menor e de espaço/forma. No estágio seguinte, aparece os

[27] Ideias preconizadas pelo psicólogo e filósofo russo Jean William. F. Piaget (1896-1980) um dos primeiros a relacionar o campo da inteligência infantil com o crescimento fisiológico e suas relações.
[28] Mencionados no capítulo I, pagina 41

primeiros sinais da linguagem e de inteligência e com elas a representação simbólica, o pensamento intuitivo e a capacidade de regulação articulada. Este estágio é de suma importância na primeira fase escolar, a Educação Infantil. Nele a criança constrói a relação de ordem, de contagem, de conservação numérica, de classificação simples e de compreensão de figuras geométricas. No que tange o terceiro estágio, o de operações concretas, a criança, mesmo ligada à objetos reais (concretos), consegue passar da ação para a operação (abstração). Neste quesito operacional, apresenta a capacidade de realizar operações simples, cálculos elementares (inclusive frações), compreender e estabelecer regras estruturadas e numa multiplicação lógica.

Esse período coincide com os anos iniciais do Ensino Fundamental. É ainda neste momento que as noções matemáticas da reversibilidade, de classificação, seriação, transitividade e conservação de quantidades discretas se potencializam entre outras. Piaget (1995) esclarece que embora os períodos cronológicos dos estágios não sejam fixos, sofrendo influências de fatores como o meio físico e social, o estágio por exemplo, as crianças passam por esse estágio entre 7 e 11 anos, podendo começar e/ou terminar um ano antes ou depois. .

Por fim, é no quarto e último estágio, que a criança completa a construção de seu raciocínio lógico, o qual, por sua vez, potencializa sua capacidade de pensar por meio da abstrações (reflexionante). Surge então a capacidade de usar a lógica hipotético-dedutiva e o raciocínio abstrato, a partir do desenvolvimento das estruturas formais. Piaget (ibd) considera que esse estágio favorece de sobre maneira o estudo da Matemática, no que tange as proporções, as combinações, as demonstrações e o desenvolvimento do campo conceitual da Álgebra.

Vale ressaltar que estes estágios não obedecem uma ordem linear ou quantitativa de desenvolvimento intelectual. Muito menos, uma ordem cronológica (idade), pois os comportamentos das crianças sofrem influências do meio social e físico a que se inserem. O que podemos pressupor é que no ambiente escolar estes estágios precisam ser considerados no momento do planejamento didático para que as situações de fato estejam adequadas às capacidades cognitivas dos estudantes para a formação de um conceito.

Consideramos que a formação e/ou aprimoramento de um conceito surge nas mais variadas situações, e que esse representa um papel essencial no momento de sua apropriação. Magina[29] (2016) explicou que na visão de Vergnaud, um conceito emerge de situações-problema com os quais temos familiaridade. E são essas que darão significado e formarão um conceito, visto que, quanto mais amplo o significado desse conceito, maior será sua apropriação intelectual. Em outras palavras, podemos inferir que quanto maior a importância e o número de

---

[29]Essa explicação foi dada pela professora Sandra Magina, no bojo da disciplina, “Psicologia da Educação Matemática”, ministrada no mestrado em Educação Matemática da Uesc, no 2º semestre de 2016.

situações-problema oferecidas, mais amplas serão a definição e a formação desse conceito. Podemos conjecturar que para que uma situação[30] forme um conceito este precisa ser suscitado a partir de circunstâncias significativas. A esse conjunto de situações Vergnaud (1996) chama de Campo Conceitual e pondera que não existe um único conceito a ser formado, e sim um Campo Conceitual a ser desenvolvido. Por isso, quando tratarmos da formação de um conceito no nosso estudo, entenda-o como campo conceitual a ser desenvolvido.

A apropriação desse campo resultará na formação de um conhecimento conceitual, em que "a Teoria dos Campos Conceituais considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema" (MAGINA et al, 2008, p. 6). Uma vez formado o conceito (ou campo conceitual) tende a ser expandido e adaptado às novas situações as quais o sujeito seja confrontado no seu contexto, seja escolar ou não.

Esse campo conceitual a ser formado requer, segundo Vergnaud (1990), uma postura investigativa por parte do formador referente às situações-problema e que esse perceba que o processo de desenvolvimento de um conceito perpassa por uma terna de conjuntos algebricamente identificados como (S, I, R) em que:

> **S** é o conjunto de situações que tornam o conceito significativo;
> **I** é o conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações;
> **R** é o conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar esses invariantes e, portanto, representar as situações e os procedimentos para lidar com eles (Ibid., p. 6).

Baseado nesta terna, estimamos ser necessário a um formador possibilitar situações diversificadas, conectadas e significativas aos seus alunos. Essa postura atende a suas necessidades cognitivas no momento da formação e apropriação de um campo conceitual. Temos que as situações e os conceitos transitam numa via de mão dupla, visto que "um conceito não assume a sua significação numa única classe de situações, e uma situação não se analisa com o auxílio de um único objetivo" (VERGNAUD, 1996, p. 190). Percebemos que as ideias de Vergnaud corroboram com as discussões propostas pelo NCTM (2000, p. 68) quando sugere que "a fim de compreender profundamente um conceito matemático específico – e muitos outros conceitos na matemática escolar – os alunos precisarão de uma variedade de representações que apoiem a sua compreensão".

[30]"Situação no sentido de tarefa, a ideia de que qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades próprias é importante conhecer" (VERGNAUD, 1996, p. 167).

Na busca pela construção de um campo conceitual, temos que estar atentos à forma de representação e interação conceitual (relativa) dos sujeitos. Entender como eles a representam e subsidiar uma relação favorável dessa para com o objeto de conhecimento é fator essencial para a formação conceitual. Nesse quesito, a TCC faz uma menção a função simbólica defendida por Piaget, ressaltando que a forma como a criança compreende e aprende um conceito está relacionada ao conjunto dos elementos simbólicos que ela utiliza para representá-lo. Esses elementos serão subjacentes e locais, podendo ser verbais, gestuais, operatórios, gráficos etc.

Numa relação entre a psicologia e a teoria, Magina et al (2008) propõem que o elemento “S” da terna de Vergnaud refere-se à realidade ou ainda o *referente* da criança, enquanto que os elementos “I” e “R” são a sua *representação simbólica*. E que essa representação está relacionada aos aspectos do pensamento referente ao *significado* e *significante*, respectivamente. Presumimos que essa interação requer uma atenção especial tanto de quem ensina como de quem aprende, “é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança” (VERGNAUD, 1996, p. 156). Esse toma forma e se torna real, principalmente, se pensarmos nos objetos matemáticos como seres inanimados e suas representações matemáticas abstratas.

Pesquisadores como Raymond Duval[31] discutem que a existência de um objeto matemático está apenas no campo imaginário, psicológico e para tomar forma no mundo físico necessita de mais de um registro para se tornar acessível. Isto significa que devemos estar atentos a forma como um estudante representa um campo conceitual. Essa forma está ligada à sua concepção (pensamento) e na sua competência em representá-lo simbolicamente, utilizando símbolos matemáticos adequados. Nesse ínterim, a TCC recorre novamente às raízes piagetianas de esquemas para se apoiar e ampliar seu campo de atuação quando ressaltam que “os esquemas estão no centro das estruturas cognitivas: assimilação e acomodação” (VERGNAUD, 1996, p. 159). Para compreender essa ideia, recorremos a Magina et al (2008, p. 10) quando discute que:

> Esquema significa a forma como uma pessoa (o aluno) organiza seus invariantes de ação ao lidar com um conjunto de situações análogas. O esquema tem por características: (a) ser local, isto é, ele se refere ao entendimento de uma ação em uma dada situação; (b) ser organizador de invariantes necessários para (c) atuar naquela situação de maneira implícita.

[31]Duval(1995) Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Quando propomos uma situação-problema (tarefa matemática), os esquemas exibidos representam os invariantes, as propriedades do objeto em estudo e os procedimentos ao realizar determinada tarefa. E "é nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos-em-acto (sic) do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à acção (sic) do sujeito ser operatória" (VERGNAUD, 1996, p. 157). Esses fornecem subsídios para a análise do conhecimento conceitual dos estudantes, uma forma de investigar se esses fazem parte de seu repertório ou se eles (os estudantes) não dispõem de todas as competências necessárias no momento. Os esquemas podem ser explícitos ou implícitos.

Nos esquemas explícitos, temos a ideia da concepção do estudante em relação ao conceito, enquanto que nos teoremas-em-ação implícitos temos vestígios de sua competência e habilidade. Os esquemas explícitos, muitas vezes, são automatizados (repetidos) e organizados em sistemas de conhecimento adquirido formalmente no contexto escolar. Neles, o estudante consegue verbalizar, explicar e estabelecer relações entre o objeto de estudo e suas ações no campo conceitual restrito. Todavia, nos teoremas implícitos, os alunos não têm consciência de suas ações procedimentais, não conseguem estabelecer uma relação plausível para com os conhecimentos utilizados. Apresenta um conjunto de métodos necessários (lógicos), argumentos e uma sequência de ações na tentativa de atingir um objetivo que pode conduzi-lo ao êxito ou ao fracasso. Em outras palavras, eles têm ideia ou sabem resolver a situação-problema corretamente (ou não), sem, contudo, saber expressar as razões de cada ação.

Como nosso estudo refere-se aos níveis de raciocínio algébrico dos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental[32] nos interessa os esquemas implícitos, aqueles com os quais nossos sujeitos da pesquisa se apropriarão na tentativa de resolver as atividades propostas no instrumento investigativo[33]. Nesses esquemas, buscaremos identificar a existência de um teorema-em-ação que subjaz a ação do estudante. Consideramos que são os "teorema-em-acto os conhecimentos contidos nos esquemas; podemos igualmente designá-los pela expressão mais global de invariantes operatórias. [...] O reconhecimento das invariantes é, pois, a chave da generalização do esquema" (VERGNAUD, 1996, p. 160-161). Convém ressaltar que o termo teorema-em-ação foi cunhado anteriormente por Piaget, porém Vergnaud ampliou e estudou seu campo de atuação, tornando-o um elemento importante na busca por entendimentos do processo de formação de um conceito matemático.

2.1.2 Teorema-em-ação e sua relação nos esquemas e no saber dos estudantes

---

[32]Atualmente, a Álgebra faz parte do currículo dos anos finais, do Ensino Fundamental (capítulo I).
[33]Instrumento investigativo denominado teste, será exibido no capítulo de metodologia.

Os teoremas-em-ação não representam os teoremas convencionais com os quais os conhecimentos se apoiam, eles “são definidos como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos alunos, quando estes escolhem uma operação, ou uma sequência de operações para resolver um problema” (MAGINA et al, 2008, p. 10). Esses teoremas apresentam relações lógicas matemáticas usadas pelos estudantes de forma implícita. Apresentam, em sua base, ações intuitiva e/ou dedutiva ou ainda fruto de um determinado campo conceitual em formação. Normalmente, não podem ser verbalizados pelos estudantes, na sua maioria, são implícitos (VERGNAUD, 1996) e de representação idiossincrática. Sua representação (registro) ocorre por modelos de raciocínio subjacentes em linguagem materna, diagramas, figuras, operações sistematizadas (ou não), tabelas, gráficos e, ainda, por um *insight* resultante de sua progressão matemática.

Nosso estudo centra-se no campo conceitual das estruturas algébricas com suas propriedades implícitas e não nas concepções dos sujeitos, uma vez que eles ainda não as dispõem em seu repertório conceitual (estudantes dos anos iniciais). Nesse contexto, é de extrema importância identificar e compreender nos esquemas apresentados pelos estudantes os teorema-em-ação que podem ser considerados como evidências das manifestações do raciocínio algébrico. Sua existência tende a ser um fator relevante para entendermos como atividades que trazem em seu contexto ideias algébricas (implícitas) podem ser percebidas e, ainda, manipuladas pelos estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental.

Na possibilidade de analisar os teoremas-em-ação apresentado pelo estudante ao realizar uma determinada tarefa, podemos analisar suas ações, suas estratégias matemáticas e fazer um diagnóstico de seu saber. Uma vez que, “para estudar o comportamento matemático das crianças, é necessário expressar os Teoremas-em-ação em termos matemáticos” (MAGINA et al, 2008, p. 13). Para isso, devemos levar em consideração as estruturas operatórias, os esquemas matemáticos que ele reporta em suas ações e o nível de sofisticação de sua composição. Presumimos ser possível observar e identificar nas estruturas aritméticas[34]abordadas, no primeiro e segundo ciclos, do Ensino Fundamental, vestígios, contribuições ou acomodações das ideias da Álgebra. Essas ideias podem retratar uma continuidade conceitual (filiação) e/ou saltos epistemológicos e situar-se na concepção de uma aritmética generalizada, conforme retratada por Usiskin (1995).

---

[34]As propriedades operatórias e as relações fundamentais dos números e quantidades.

Na relação entre o saber e o fazer do estudante, temos a competência do educando que numa determinada atividade pode ser analisada sob três categorias: (a) do acerto e erro; (b) do tipo de estratégia utilizada e (c) a da escolha do método adequado (MAGINA et al, 2001). Na observação dessas categorias, podemos identificar o nível de raciocínio, a maturidade intelectual e a forma como os estudantes percebem um determinado conceito. É nos esquemas operatórios por detrás do teorema-em-ação que o raciocínio do estudante se manifesta e sinaliza suas habilidades e potencialidades.

Podemos dizer que esses esquemas em ação serão úteis como suporte e ferramenta para rastrear a relação entre o conhecimento implícito intuitivo e os conhecimentos que os estudantes conseguem explicitar (VERGNAUD, 1996). Seja eles acertados ou não, numérico ou icônico, em linguagem materna ou outro tipo de linguagem que permitirá compreensão do nível cognitivo dos estudantes em relação às noções algébricas.

Consideramos, em nosso estudo, ser imprescindível identificar o fundamento e qual o alcance desses teoremas-em-ação para o raciocínio algébrico dos estudantes do Ensino Fundamental. Pois, a partir dessa verificação, poderemos utilizá-los em benefício de um ensino dinâmico e de uma aprendizagem significativa[35] para as noções básicas que fundamentam a Álgebra Elementar na perspectiva da *Early Algebra*.

2.1.3 Os campos conceituais estudados por Vergnaud

Na teoria dos campos conceituais, Vergnaud (1996), estuda quatro campos conceituais: das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, da Álgebra e da geometria. Eles representam um construto teórico para a compreensão e desenvolvimento integral de um determinado conceito. E, esse conceito, não se desenvolve isoladamente. Para Falcão (2003, p. 39), os campos conceituais apresentam uma dupla acepção:

> Trata-se ao mesmo tempo do nível de complexidade e inter-relacionamento de que é capaz um determinado indivíduo, em relação a determinado conceito, e trata-se igualmente do nível de complexidade culturalmente compartilhada quando se fala de um corpo de conhecimento institucionalizado.

Em sua teoria, Vergnaud desenvolveu quatro campos conceituais. Primeiro, o campo conceitual aditivo, segundo, o campo conceitual multiplicativo, em terceiro, o campo conceitual da Álgebra e, por último, o campo conceitual geométrico. Esses dois últimos ainda se

[35]Teoria de Ausubel (1982).

encontram inacabados, precisando de mais estudos. Vale ressaltar que o nosso estudo não contempla o campo conceitual geométrico, por isso não traremos discussões sobre ele. Com o intuito de favorecer a relação entre a TCC e a nossa pesquisa, faremos uma síntese dos três primeiros campos conceituais como elementos importantes para a investigação.

Com relação aos dois primeiros campos conceituais, o aditivo e o multiplicativo, podemos dizer que eles foram estudados a contento por muitos pesquisadores. No Brasil, vários trabalhos contribuíram para o estudo e ampliação dos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas (MAGINA, 2004, 2008; MERLINI, 2012; SANTOS, 2012; SANTANA, 2011; GITIRANA; COL, 2015; MOURO; MOREIRA; BORBA). E o terceiro campo conceitual, o algébrico, tem sua base de estudo em Falcão (1993, 1995 e 2003).

2.1.3.1 Campo conceitual das estruturas aditivas

O campo conceitual das estruturas aditivas é relativo a uma classe ou “o conjunto de situações que exigem uma adição, uma subtração ou uma combinação destas duas operações” (VERGNAUD, 1996, p. 167). Apresentam-se numa relação ternária. Simultaneamente, as operações de adição e subtração encontram-se também no campo aditivo, os conceitos e os teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

Seus elementos constitutivos são os conceitos de cardinalidade e de medidas; de transformação temporal por aumento ou diminuição; de relação de comparação quantificada; de transformações e de relações; de operação unária entre outros que trazem características explícita ou implícita de uma adição. Esses conceitos não aparecem de forma isolada, por isso, para que o estudante seja capaz de adentrar e dominar as estruturas do campo aditivo, ele necessita ser exposto em vários tipos de situações. Seja no âmbito do cálculo numérico, ou do cálculo relacional[36].

Para Vergnaud (1996) existem três relações que se comportam com base numa situação de estrutura aditiva: a composição, a transformação e a comparação. E elas ainda podem ocorrer simultaneamente, interligando-as entre si, em subcategorias. Teremos, segundo o autor, seis relações aditivas de base:

> I. A composição de duas medidas numa terceira. II A transformação (quantificada) de uma medida inicial numa medida final. III. A relação (quantificada) de comparação

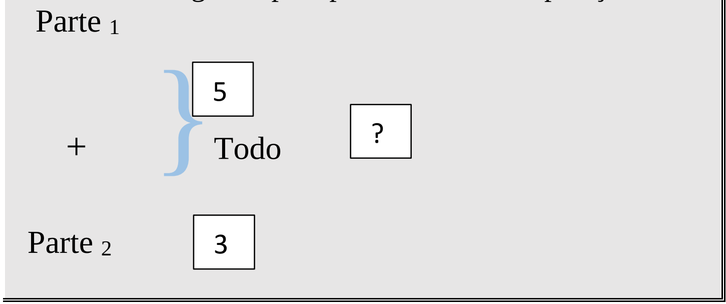
[36]Constatações simples que os estudantes podem fazer sobre sua realidade, formas operatórias de um raciocínio nem sempre constatáveis (VERGNAUD, 2014).

> entre duas medidas. IV. A composição de duas transformações. V. A transformação de uma relação. VI. A composição de duas relações (VERGNAUD, 1996, p. 172).

A observação e a aplicação dessa disposição em situações-problema possibilitam, em sala de aula, um ensino e uma aprendizagem ancorados não apenas num único conceito aditivo, mas no campo conceitual das estruturas aditivas, como um todo.

A relação de composição compreende situações que envolvem parte-todo, ou seja, nessas tarefas o estudante necessita juntar as partes para formar um todo. Nessa classe de situações-problema, as crianças (bem novas) apresentam um domínio quase imediato, uma vez que nessas o objetivo não é de acrescentar, e sim de juntar as partes ao todo (MAGINA et al, 2008). Sua forma de resolução perpassa na maioria das vezes pelo processo de contagem. No intuito de exemplificar uma relação aditiva de composição, traremos a seguinte situação-problema: *Diogo tem cinco carrinhos e ganhou de seu avô mais três carrinhos. Quantos carrinhos ele tem agora?* Representando a situação-problema no diagrama, teremos:

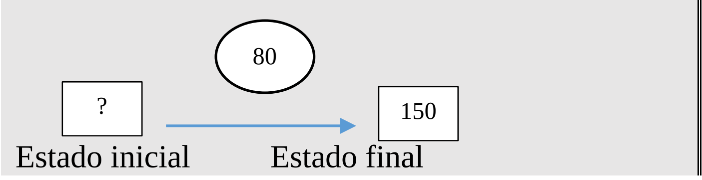
Modelo do diagrama para problemas de composição



Fonte: Elaborado pela autora, adaptação de Magina et al (2008, p. 20).

A classificação de uma situação-problema como uma transformação consiste naquela em que o critério de temporalidade envolve os dados abordados. Nessa teremos a existência de dois estados distintos: um inicial e o outro final e, entre eles, uma transformação de perda ou ganho, de acréscimo ou decréscimo, ou seja, uma transformação positiva ou negativa. Esta transformação ocorre de forma dinâmica, no sentido em que liga estados sucessivos de uma mesma realidade (VERGNAUD, 2014). No intuito de compreender melhor esse tipo de classificação, consideremos a seguinte situação-problema: *Giovanna gastou parte de sua mesada do mês de dezembro na compra um perfume de R$ 80. Ficando ainda com R$ 150. Quanto Giovanna ganhou de mesada?*

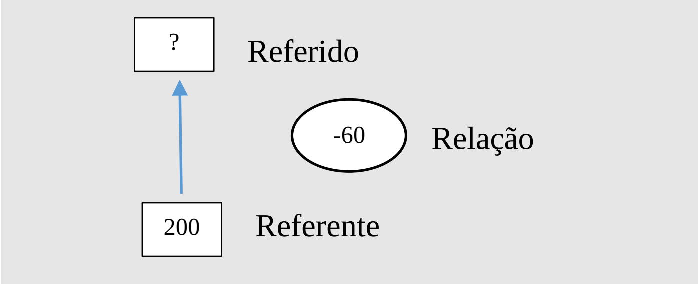
Modelo do diagrama para problemas de transformação



Fonte: Elaborado pela autora, adaptação de Magina et al (2008).

No que tange a classe de situações-problema que envolve uma comparação entre duas quantidades, consideramos àquelas que comparam duas quantidades em que uma será denominada referente, e a outra o referido (MAGINA et al, 2008). Sendo o referente à base de referência da situação-problema, e o referido o valor dependente dessa base. Esta relação segundo Santana (2008) consiste numa relação estática. Para visualizar essa classificação, consideremos a seguinte situação-problema: *Matheus recebe R$ 60 a menos de mesada que seu irmão Diogo. Neste mês, Diogo recebeu R$ 200 de mesada. Qual o valor da mesada que Matheus recebeu neste mês?*

Modelo do diagrama para problemas de comparação



Fonte: Elaborado pela autora, adaptação de Magina et al (2008).

No contexto deste estudo não discutiremos as três classificações mistas (subcategorias) de situações-problema, sugerida por Vergnaud (1996), embora as consideremos essenciais para a aprendizagem de uma estrutura aditiva.

A exploração de situações-problema que contemplem as classificações básicas aditivas torna possível a exploração dos diferentes tipos de tarefas que envolvem uma estrutura aditiva sem criar uma automatização operatória. Uma vez que, para muitos estudantes, uma situação aditiva, remete imediatamente a uma soma. Ou seja, o resultado de uma situação-problema de estrutura aditiva consistirá sempre numa soma dos valores dos dados abordados.

2.1.3.2 Campo conceitual das estruturas multiplicativas

Conforme já discutido anteriormente, um conhecimento matemático não se forma sozinho, ele necessita de uma interação entre as situações cuja natureza o desperte na estrutura cognitiva de um estudante e entre seus pares. Assim como nas estruturas aditivas, convém ressaltar que o campo conceitual das estruturas multiplicativas é

> Simultaneamente, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações: proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produção de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fracção, relação, número racional, múltiplo e divisor, etc. (VERGNAUD, 1996, p. 168).

Esses conhecimentos variam de acordo com o nível de conhecimento dos educandos, da sua cultura e, também, de acordo com as concepções dos professores regentes. Devido à grande variedade dos conceitos envolvidos nesse campo conceitual, a apropriação dos seus conhecimentos ocorrerá ao longo de todo o Ensino Fundamental (MAGINA; MERLINI; SANTANA, 2013). Isso implica numa formação (ou conscientização) docente na área, num planejamento que privilegia situações-problema diversificados e um tempo maior de estudo.

As relações básicas das estruturas multiplicativas se manifestam em relações ternárias e quaternárias. Nas ternárias, temos um simples algoritmo nas operações de multiplicação ou divisão, por exemplo: *7 . 5 = ?; 20 : 2 = ?*. Observamos que temos dois valores (7 e 5; 20 e 2) e queremos encontrar um terceiro valor que se destina ao resultado do algoritmo e que esses valores não necessitam de uma grandeza específica. Enquanto que nas quaternárias as situações-problemas mais simples de multiplicação ou divisão implicam numa proporção simples de duas variáveis. Como por exemplo: *Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas terão cinco carros?* Identificamos nessa situação-problema duas grandezas distintas (número de carros e de rodas). Temos três valores conhecidos e necessitamos encontrar um quarto valor (número de rodas para cinco carros).

Uma relação quaternária se divide em duas classes de situações-problema: uma correspondência de um para muitos, e outra correspondência de muitos para muitos (VERGNAUD, 1996). No que tange a correspondência de um para muitos, ela acontece quando a relação entre as variáveis está explícita (MAGINA; MERLINI; SANTANA, 2013), como no exemplo anterior (um carro, quatro rodas). Enquanto que na correspondência de muitos para muitos, essa relação encontra-se implícita, ou seja, não é possível identificar a relação para uma única variável. Como, por exemplo, na situação-problema: *Com R$ 2 se compra três canetas. Quantas canetas poderemos comprar com R$ 12?* Podemos notar que não temos como saber o valor exato de uma única caneta, logo a correspondência existente entre o valor em real e o número a ser adquirido de canetas será a de muitos para muitos.

Desse modo, identificamos nas estruturas multiplicativas assim como nas aditivas uma conexão entre sua fundamentação teórica e os conceitos algébricos implícitos. Essa conexão diz respeito à continuidade e ruptura (saltos epistemológicos) da aritmética em relação à Álgebra.

2.1.3.3 Campo conceitual da Álgebra

No contexto algébrico, assim como nas estruturas aditivas e multiplicativas, nenhum conceito se desenvolve em uma única situação nem uma situação abarca um único conceito. Isto equivale dizer que, para que um conceito algébrico se desenvolva e seja assimilado pelo estudante é necessário que ele seja construído mediante um propósito específico pertencente ao seu campo conceitual.

Para identificar os elementos que habitam o campo conceitual da Álgebra, iremos situá-la na perspectiva de *ferramenta*. A primeira como uma ferramenta *representacional*, e a segunda como instrumento utilizado para a *resolução de situação-problema* (FALCÃO, 1993). No que tange a Álgebra como ferramenta representacional, seu campo conceitual terá como elementos básicos os “números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuição de símbolos, gama de acepções do sinal de igual” (FALCÃO, 2003, p. 40). Nesse contexto, podemos predizer que a Álgebra se destina à descrição de relações entre grandezas, na dedução de propriedades e na compreensão do funcionamento das estruturas básicas da aritmética.

No que concerne à perspectiva da Álgebra como uma ferramenta base para resolução de situações-problema, encontraremos como elementos principais do seu campo conceitual os:

> Operadores, sintaxe, prioridade de operações, princípio da equivalência, conhecimentos-em-ação vinculados experiências extra-escolares (sic) de compensação e equilíbrio, fatos aritméticos instrumentais (ex: elemento neutro da adição) (FALCÃO, 2003, p. 40).

Nesse ponto de vista, a Álgebra abriga uma natureza objetiva para a resolução de situações que são passíveis de tratamento matemático e formalização algébrica, tornando-se uma ferramenta aplicável aos mais variados campos do conhecimento científico. Esse ponto de vista foi situado nas concepções processológica e linguístico-postulacional, já discutidas no capítulo I deste estudo.

Todavia, o campo conceitual da Álgebra e a apropriação dos conceitos algébricos apresentam-se como uma atividade complexa que abrange quatro aspectos cognitivos: (i) reconhecimento de determinadas funções algébricas; (ii) formalização do problema; (iii) conhecimentos dos objetos algébricos e (iv) conhecimento do que fazer a partir de uma equação (FALCÃO, 1993). Para o primeiro aspecto, temos a Álgebra como geração de modelos para resolver situações-problema aritmeticamente insolúveis. O segundo aspecto, versa sobre o potencial algébrico de equacionar ou dispor dos significantes necessários para a recodificação de variadas situações-problema. Já no terceiro aspecto, temos a Álgebra como objeto matemático: funções, equações, variáveis e incógnitas. E, por fim, no que concerne ao quarto aspecto, temos que a atividade algébrica deve mobilizar algoritmos apropriados para encontrar uma solução em um número finito de passos. Ou ainda, mostrar que para uma determinada situação-problema não existe solução.

Além disso, no campo conceitual da Álgebra, uma situação-problema deve abranger quatro etapas conexas: (i) mapeamento do problema; (ii) escrita algébrica; (iii) procedimento de resolução e (iv) retomada do sentido (FALCÃO, 2003). A primeira etapa refere-se a representação mental de uma situação-problema, sua categoria conceitual, a identificação dos dados (variáveis e parâmetros) e das relações que a fundamenta. No que tange a segunda etapa, temos sua equacionalização, uma transposição aritmética para uma organização algébrica. A terceira etapa consiste na perda de um referencial semântico para o estabelecimento de um referencial sintático. A construção de regras que conformam um objeto algébrico. Por fim, na quarta etapa, temos a formulação da resposta final da situação-problema confrontada com o saber fazer a que se refere.

O escopo do campo conceitual da Álgebra privilegia um conjunto de circunstâncias em que o interesse teórico atente para a construção, o desenvolvimento e a ampliação do pensamento algébrico, uma vez que muitas situações-problema trazem suas características algébricas implícitas e/ou camufladas aritmeticamente.

2.2 A *Early Algebra*

Nessa subseção nosso foco é discutir a *Early Algebra* do ponto de vista educacional, suas implicações pedagógicas, curriculares e metodológicas. A partir dessas discussões moldar e constituir um conceito da *Early Algebra* que defenderemos como âncora do estudo investigativo. E, por fim, trazer um pouco das pesquisas sobre o tema e seus reflexos nos anos iniciais, do Ensino Fundamental.

2.2.1 Apresentando o grupo de trabalho da *Early Algebra*

Este grupo de trabalho teve origem na *Conferência Algebra Gateway to Technological Future*[37], em novembro de 2006, nos Estados Unidos da América, que na ocasião cunhou o termo *Early Algebra* a nível mundial. Essa conferência contou com uma equipe de 50 pesquisadores que se dividiram em cinco Grupos de Trabalhos (GT) para discutirem sobre a Álgebra, seu ensino e sua aprendizagem. Dentre os grupos formados, vamos evidenciar o GT1, intitulado *Early Algebra* (EA). Esse grupo teve por base de trabalho estudar, analisar e apresentar as propostas elencadas por pesquisas realizadas a partir da introdução e desenvolvimento das noções algébricas para estudantes que se encontram entre 6 e 12 anos de idade[38].

Esse grupo de pesquisadores (GT1) elaborou um relatório contendo as principais pesquisas, diretrizes conceituais, procedimentais e propostas de ações para o ensino da Álgebra já nos anos inicias. O GT1 as avalizou e validou uma discussão prévia dos especialistas que viam na antecipação das noções algébricas uma possibilidade de mudar o paradigma da Álgebra. Uma oportunidade capaz de reverter o descaso, a abstração e a mecanização que seu ensino estava posto. Um movimento que possibilitasse uma revisão das abordagens tradicionais, das metodologias e da ampliação de campo de atuação no Ensino Fundamental. O objetivo foi identificar possibilidades para que essa antecipação no ensino contemplasse a necessidade de adequação aos novos pressupostos algébricos levantados pelos pesquisadores (concretizados e em curso). Tiveram como pretensão a implantação e a expansão de ações que promovessem uma nova forma de pensar, de articular e de justificar os conhecimentos aritméticos e suas propriedades no Ensino Fundamental. Que, em consequência, desenvolvesse o hábito de cultivar habilidades mentais e contribuísse para um raciocínio indutivo e dedutivo, tendo por base os elementos centrais da:

---

[37]Disponível em: <http://www2.research.uky.edu/pimser/p12mso/pub/2009-10%20Archives/Everyone%20Passes%20Algebra%202009/Algebra-Gateway-Tech-Future.pdf>. Acesso em: 20 agosto 2016.

[38]Situando-o no contexto educacional brasileiro o estudo proposto nesse GT contempla os anos iniciais e início dos anos finais, do Ensino Fundamental.

> (1) generalizar, ou identificar, expressar e justificar a estrutura Matemática, propriedades e relacionamentos e (2) de raciocínio e ações com base nas formas de generalização (KATZ, 2007, p.2, tradução nossa)[39].

Para o GT1, as propostas da *Early Algebra* não deveriam ser vistas como uma (re)embalagem de habilidades e procedimentos algébricos inseridos nos manuais educacionais nem mesmo um acréscimo de conceitos para o currículo existente. Essa deveria ser introduzida a partir das situações matemáticas pertencentes ao currículo dos primeiros anos de escolaridade, da Educação Básica.

Muitos especialistas reforçam essas ideias e apresentam diversos contextos que apontam para a antecipação da Álgebra nos anos iniciais, do Ensino Fundamental, como uma forma de ensino algébrico ativo e uma aprendizagem adequada a partir das propostas da *Early Algebra*. (Ver em DAVIS, 1985; KIERAN, 1996, 2004; KAPUT, 1998; KAPUT; BLANTOM, 2001, 2004; LINS; GIMENEZ, 2001; LINS; KAPUT, 2004; CARRAHER; SCHILIEMANN; SCHARWARTZ, 2005; CARRAHER; SCHILIEMANN; BRIZUELA, 2006; BLANTON, 2007; BRIZUELA; SCHLIEMANN, 2007; KIERAN et al, 2016) e organismos institucionais, como (NCTM, 1989, 2000; ICME, 2001, 2004) e as diretrizes da BNCC (BRASIL,2017) entre outros.

Esses pesquisadores defendem que se forem disponibilizados desde os anos iniciais as noções que compõem a base da Álgebra, os estudantes poderão avançar nas futuras concepções algébricas com uma base mais sólida, de forma autônoma e com qualidade conceitual elevada. Enxergarão, na Álgebra, um princípio organizador do currículo da matemática elementar, que possibilitará o desenvolvimento das competências necessárias para a proficiência em Matemática infantil, tais como: a compreensão conceitual, a fluência processual, a competência estratégica, o raciocínio adaptativo e a disposição produtiva (KILPATRICK; SWAFFORD; FINDEL, 2001).

Em nossa pesquisa interessa-nos os estudos sobre os mecanismos organizacionais para essa antecipação do ensino e também como eles podem contribuir para a formação dos conceitos algébricos desde os primeiros anos de escolaridade. Logo, convém-nos estabelecer nossa forma de conceituar a *Early Algebra*. Para fazê-la, fundamentaremos nosso conceito nas discussões de pesquisadores e a qual passaremos a defender neste estudo.

Iniciaremos em Blanton et al (2007, p. 7, tradução nossa) quando essa afirma que a *Early Algebra* “não se destina a ser vista como um conjunto separado de atividades que os

---

[39](1) generalizing, or identifying, expressing and justifying mathematical structure, properties, and relationships and (2) reasoning and actions based on the forms of generalizations.

professores (talvez) ensinem depois que as habilidades e procedimentos aritméticos foram dominados"[40]. Para Carraher e Schliemann (2005), a *Early Algebra* reside quietamente nos currículos de matemática e deve fundamentar-se em contexto de resolução de problemas. Devemos introduzir uma notação simbólica de forma gradual e entrelaçada com os temas existentes na matemática dos anos iniciais. Em Katz (2007), encontramos que a *Early Algebra* possibilita o desenvolvimento em conjunto com a aritmética de competências, estratégias e a capacidade de raciocínio adaptativo. Esses exigem uma reflexão e a construção de argumentos de justificação e explicitação de uma ideia Matemática e são, gradualmente, convertidos em notações algébricas. Convém ressaltar que em Kieran (2004, 2011) e Kieran et al (2016), essa se apresenta como uma proposta da não dependência de letras simbólicas, uma vez que o uso de letras não equivale a fazer Álgebra (RADFORD, 2006). Ela fundamenta-se na análise de relação entre quantidades, percepção de mudanças em estruturas generalizantes, resolução de problemas e modelagem como ferramentas para formar a base do pensamento algébrico nos anos iniciais. A sistematização de um algoritmo, de um sistema de numeração e o uso dos números podem ter um caráter algébrico se a intenção não for os cálculos por si apenas, mas um exemplo genérico, um modelo (KAPUT, 2008a).

Baseados nessas discussões inferimos conceituar e a defender a *Early Algebra – como um programa de ensino matemático direcionado para os anos iniciais do Ensino Fundamental que permite o desenvolvimento de competências e habilidades algébricas a partir de situações no contexto aritmético.* Entendemos essas competências algébricas em três bases: (1) a generalização; (2) a relação de equivalência e (3) a noção de variabilidade.

No tocante a generalização, essa se baseia num raciocínio de alto nível, uma vez que o estabelecimento de relações não é imediato, perpassa por dedução de regras de padrões numéricos e faz com que o sujeito estabeleça processos não-algorítmicos (LINS; GIMENEZ, 2001). Temos que, esse tipo de raciocínio potencializa a capacidade de identificar, compreender e explicitar algebricamente um comportamento de padrões e suas variações.

Na relação de equivalência, traremos uma analogia entre uma identidade aritmética e uma identidade algébrica e os princípios de resolução instituídos, quer por operações inversas ou processos aditivos, quer multiplicativos, respectivamente. E, por fim, consideramos a variabilidade como a capacidade de identificar a correlação entre grandezas funcionais e sua explicitação algébrica.

---

[40]That is, it is not intended to be viewed as a separate set of activities that teachers (might) teach after arithmetic skills and procedures have been mastered.

Nossa pesquisa *Early Algebra: prelúdio da Álgebra por estudantes do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental* apresenta-se ancorada nas discussões do campo da *Early Algebra,* suas implicações curriculares, pedagógicas e metodológicas. Para fundamentar nossa pesquisa, apresentaremos estudos (em ordem cronológica temporal) que trazem a tríade *Early Algebra* – estudos correlatos – nossa pesquisa.

2.2.2 Estudos Correlatos

Nesta subseção, começaremos trazendo a pesquisa de Falcão (1993) com um grupo de 93 estudantes do sistema de ensino básico francês, com o objetivo de averiguar a relação da Álgebra para com a resolução de problemas. Esse estudo teve como proposta investigar a Álgebra como ferramenta para modelar, representar e resolver situações-problema em que as operações aritméticas eram insuficientes ou resultavam em cálculos demasiadamente longos e enfadonhos. O pesquisador a partir de seus resultados discorre sobre a importância de se trabalhar a Álgebra em dois eixos dialéticos: a Álgebra como objeto matemático e como ferramenta suporte. No primeiro, a Álgebra se apresenta como uma ferramenta para a representação e construção de modelos matemáticos generalizados. No segundo eixo, apresenta a Álgebra como uma continuidade aritmética. Apesar da hipótese de ruptura entre seus domínios admite "que muitos dos problemas enfrentados em didática da álgebra se originam na aritmética" (FALCÃO, 1993, p. 104).

As discussões de Falcão convergem com nosso estudo quanto à possibilidade de questionarmos a existência de raciocínios algébricos em estudantes que não dominam as estruturas algébricas formais (por questões curriculares ou por falhas no processo de aquisição) e na forma de introdução da Álgebra como um modelo pronto a ser seguido.

Outro estudo que apresenta relevância algébrica foi o de Carraher e Schliemann (1995) numa série de três estudos longitudinais em escolas públicas, de um bairro de Boston, EUA. Teve como foco a investigação do raciocínio algébrico e as representações de funções entre crianças de 8 a 11 anos de idade. Esse estudo apresentou, por base, integrar o ensino da aritmética com a introdução de princípios e representações algébricas. Nele, os autores corroboram com Falcão quando discutem a possibilidade de associar as noções algébricas às situações aritméticas, ressaltando ser possível a inclusão das noções de variáveis, das funções e das equações como uma forma de compreender e justificar as propriedades do raciocínio aritmético. Para os pesquisadores, os impactos dessa dinâmica tende a contribuir positivamente para aprendizagens significativas e duradouras tanto da aritmética como da Álgebra.

> Constitui evidências de que os mesmos princípios que possibilitam a introdução de conceitos e representações algébricas, nos primeiros anos do currículo escolar, contribuindo significativamente não só para a compreensão aprofundada da aritmética, mas também para a aprendizagem e compreensão da matemática em séries avançadas (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2016, p. 63).

A pesquisa citada converge para nossa investigação quando ressalta a viabilidade de trabalhar as relações aritméticas integradas, as noções algébricas como proposta de averiguar a existência de um raciocínio algébrico em crianças de anos escolares iniciais. Ao discutir as operações aritméticas como função, suas múltiplas representações e, também, a concepção de uma equação como igualdade de funções, seu estudo está fortemente ligado ao nosso instrumento diagnóstico e as nossas perspectivas pedagógicas.

Seguindo essa linha de convergência para o estudo da Álgebra e a nossa pesquisa, podemos destacar o documento elaborado no National Council of Teachers of Matematics (NCTM, 2000), que segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar[41] estabelecidos, a aprendizagem algébrica deve ser disponibilizada a partir do pré-escolar (Brasil Educação Infantil) e servir como um fio condutor para a formação de base sólida para sua progressão. O que o documento propõe como competência algébrica nos anos iniciais é que o estudante compreenda a estrutura de padrões, relações e funções. Que seja capaz de estabelecer uma conexão entre a aritmética e a Álgebra. Que possa desenvolver o raciocínio algébrico a partir do estudo dos números e suas operações; das relações funcionais; da análise das relações e do reconhecimento e interpretação de padrões. Num período de tempo (etapas escolares) suficiente para que os conceitos algébricos possam ser assimilados e acomodados de maneira satisfatória e significativa. Propomos que “os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e conhecimento prévio”[42] (NCTM, 2000, p. 20, tradução nossa).

Ao discutir o raciocínio algébrico como uma das competências indispensáveis para os estudantes dos anos iniciais e quais os conteúdos são necessários para mobilizá-lo, o NCTM reforça nossa pesquisa quanto à sua validade, relevância e natureza investigativa. Corroboramos com as indicações desse documento que ao buscar identificar evidências de um raciocínio algébrico num contexto aritmético possibilitamos uma nova forma de pensar e desenvolver o ensino da Álgebra para os anos iniciais, do Ensino Fundamental.

---

[41]Principles and Standars for School Matematics (STANDARS, 2000).
[42]Students must learn mathematics with understanding, actively building new knowledge from experience and prior knowledge.

Outro estudo que apresenta relação com nossa pesquisa é o de Brizuela (2006) que retrata uma pesquisa feita com 18 estudantes de uma escola pública, em Boston, EUA. A pesquisa teve "como objetivo compreender e documentar questões de aprendizagem e ensino em um contexto aritmético algebrificado ou algebratizado" (BRIZUELA, 2006, p. 72). Vamos retratar dois recortes de sua pesquisa: primeiro, uma aluna de nome Sara, e o segundo de três estudantes Jennifer, Nathan e Jeffrey.

No primeiro recorte, temos as observações, representações e explicações que a estudante Sara exibia durante a resolução de atividades para os pesquisadores (Brizuela acompanhado por outros dois pesquisadores) que foram relevantes para a compreensão de como os estudantes assimilam e constroem seu repertório simbólico. Para os pesquisadores, deve-se "pensar sobre as notações infantis não apenas como ferramentas com as quais os aprendizes podem representar sua compreensão e seu pensamento, mas também como ferramentas para desenvolvê-los" (Ibid., p. 70).

No segundo recorte, o foco foi uma entrevista clínica realizada com três estudantes da 3ª série (parte da amostra da pesquisa) Jennifer, Nathan e Jeffrey, no final do ano escolar, em junho. Foi proposta uma discussão oral da situação-problema "o caso de Raymond e a proposta de fazer um negócio" (Ibid., p. 99). Teve como objetivo identificar os vários tipos de notações matemáticas que os educandos mobilizam e quais as relações entre eles. Durante a discussão, os pesquisadores foram questionando o porquê de cada ação (diálogo). Após 10 minutos, os discentes já haviam inferido e chegado à resposta correta e de uma forma admirável. Esses observaram que uma das crianças havia utilizado uma representação automática que fizera parte das oficinas (vetores e retas numéricas). Foram capazes de utilizar vários tipos de representações (além das apresentadas anteriormente) e estabeleceram conexões (mediada) das primeiras respostas com as dos registros gráficos. Em seu livro, síntese, a autora discute que esse misto de representações pode ter sido incorporado ao seu repertório cognitivo a partir das experiências vivenciadas durante as atividades e adaptadas na tentativa de solucionar o problema. Os estudantes internalizaram os conceitos algébricos de forma intuitiva e sistemática.

A forma como os estudantes fizeram uso de repertórios anteriores, justifica nosso estudo que tende a ser de grande valor para o desenvolvimento (parcial) e antecipado dos conceitos algébricos. Consideramos que se forem possibilitados diversos modos de se desenvolver um raciocínio algébrico (precoce), os estudantes dos anos iniciais serão capazes de inferir e avançar algebricamente e autogerenciar a aprendizagem no campo conceitual algébrico.

Nosso interesse na pesquisa (BRIZUELA, 2006) é que esta válida nossa opinião quanto à possibilidade de introdução dos conceitos algébricos nos anos iniciais, do Ensino

Fundamental. Nossa pesquisa conjectura que se os estudantes, desde cedo, forem confrontados com situações da aritmética generalizada juntamente a Álgebra poderão desenvolver de forma gradativa (e mais facilmente) estruturas básicas necessárias à compreensão e apropriação das ideias algébricas convencionais.

Outro estudo coerente com nossa pesquisa é a investigação desenvolvida pela Universidade de Evora, Portugal, em um Programa de Formação Contínua em Matemática (CANAVARRO, 2007). Nessa pesquisa, os professores, do 1º e 2º ciclos, participantes do programa conduziram uma série de atividades elaboradas pela pesquisadora. Tiveram dois objetivos propostos: o primeiro consistiu em investigar as características do pensamento algébrico nas vertentes da aritmética generalizada e do raciocínio funcional; o segundo teve como base identificar e analisar a presença do conteúdo (pensamento algébrico) nos currículos de matemática nos anos iniciais. Baseado nos resultados alcançados na pesquisa, a autora ressalva que se for disponibilizado para os estudantes, dos anos iniciais, atividades de potencial algébrico, eles poderão desenvolver um pensamento algébrico rico e com sentido. Discute que o uso de situações de sequência, reconhecimento de padrão (geradores de uma generalização) e outros nessa linha de raciocínio apresentam potencial para desenvolver estratégias algébricas sem a necessidade de um formalismo simbólico-sintático.

> Trata-se de aspectos bastante sofisticados do raciocínio matemático, que nem sempre se têm reconhecido como próprios de crianças de sete ou oito anos de idade. Na realidade, são aspectos que revelam a possibilidade de os alunos muito jovens se envolverem no pensamento algébrico (CANAVARRO, 2007, p. 6).

Esta discussão vem ao encontro de nossas expectativas investigativas no que concerne à evidência de um raciocínio algébrico em estudantes dos anos iniciais que comporta aspectos sofisticados que se manipulados adequadamente possibilitarão uma familiarização e uma progressão conceitual algébrica.

A pesquisa de Freire (2007) traz um diferencial ao utilizar objetos de aprendizagem de forma interativa numa perspectiva digital (uso de computador) e concreta (materiais manipulativos) para investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico, no Ensino Fundamental. Numa abordagem qualitativa de foco exploratório com estudantes do 3º e 5º anos. As atividades foram desenvolvidas com situações baseadas em outra pesquisa que tinha o mesmo foco investigativo, porém com outra metodologia e ferramentas. Nessa investigação, a autora constata que os estudantes superam suas dificuldades iniciais e elaboram estratégias de resolução que facilitam a compreensão de conceitos algébricos elementares.

Essa pesquisa é similar ao nosso estudo quanto aos sujeitos investigados, estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, e com o mesmo objeto matemático (*Early Algebra*) diferindo nas vertentes matemáticas analisadas. A forma como a autora descreve a aplicação das atividades também tem semelhança com nosso instrumento investigativo, mas de outra perspectiva.

Na tese de Freire (2011), temos uma reflexão sobre os conhecimentos algébricos observados num grupo de 11 professores dos anos iniciais. O estudo é baseado num paradigma interpretativo, em que a autora propõe oficinas de formação algébrica. Nessas, propõem-se discutir as propostas do estudo da Álgebra para o Ensino Fundamental, as concepções dos professores e a falta de domínio conceitual desses para a execução de planejamento na área algébrica. Observamos nos relatos das oficinas uma preocupação com a formação dos docentes e com sua metodologia para o ensino da Álgebra. Ressalta que, em seus resultados, fica evidente que a concepção dos professores tende a influenciar a formação do conhecimento algébrico dos estudantes, e que "é preciso que o professor esteja apto a conduzir os procedimentos para ensinar determinado conteúdo" (FREIRE, 2011, p. 55). O autor aponta também para uma relação complementar entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico dos professores, sujeitos de sua pesquisa.

As discussões da autora demonstram afinidade com a nossa pesquisa na relação de continuidade da aritmética para com a Álgebra e na possibilidade de se romper com o estereótipo de uma Álgebra mecânica, sem sentido (desvinculada da realidade). E também na possibilidade de minimizar a rejeição estudantil a partir de investimentos na formação continuada dos professores dos anos iniciais, do Ensino Fundamental.

Nos estudos de Silva (2012), as caracterizações do pensamento algébrico dos estudantes do 5º ano, do Ensino Fundamental I, numa pesquisa de natureza qualitativa com procedimentos de análise de conteúdo. Com o objetivo de identificar, analisar e compreender as características do pensamento algébrico em tarefas de resolução de problemas. A partir das respostas das tarefas (nem sempre corretas) dos estudantes, a pesquisadora identificou a evidência de indícios de pensamento algébrico que tinha como função expressar estruturas aritméticas descritas em seus pensamentos generalizados.

Podemos considerar que as respostas das tarefas obtidas pela pesquisadora convergem com o que em nossa pesquisa no que concerne à busca em identificar os teoremas-em-ação por trás dos esquemas dos estudantes. E que se esses trouxeram indícios de um raciocínio algébrico em estudantes que ainda não foram apresentadas às estruturas algébricas sistematizadas isto significa que é possível desenvolver um pensamento algébrico desprovido do formalismo convencional que resultará numa formação precoce de um raciocínio algébrico. Desse modo, os fatos convergem para nossa pesquisa quanto à possibilidade de investigar os aspectos de um raciocínio algébrico proveniente de uma estrutura aritmética. E, ainda, identificar nos esquemas das crianças dos anos iniciais manifestações algébricas intuitivas e dedutivas.

Nos estudos de Civinsk (2015), a análise de uma proposta pedagógica que teve como suporte atividades envolvendo as noções de regularidades, reconhecimento de padrão e as diferenças entre o sinal de igualdade no campo aritmético e no campo algébrico. Essas atividades foram denominadas de atípicas e lúdicas, pela pesquisadora, sendo aplicadas em turmas do 3º, 4º, 5º e 6º anos, do Ensino Fundamental. Os procedimentos metodológicos seguiram os preceitos da metodologia qualitativa. Sua proposta investigativa foi identificar a existência do pensamento algébrico nessas atividades de ensino, sem a necessidade de uma manipulação de símbolos ou regras instituídas.

Esses estudos apresentam relações intrínsecas com nossa pesquisa no que concerne a possibilitar a identificação de evidências de um raciocínio algébrico nos estudantes dos anos iniciais (em especial as turmas do 3º e 5º anos) através de atividades que trazem no seu esboço relações implícitas da Álgebra.

Por fim, numa mesma linha de pesquisa, os estudos de Teixeira (2016). Esse estudo propôs investigar o raciocínio funcional de estudantes do 5º ano, do Ensino Fundamental, a partir de uma intervenção pedagógica. Num estudo de natureza quase-experimental, mediada por oficinas de ensino, o pesquisador trabalhou a ideia da função polinomial de 1º grau. Essas situações foram apoiadas nas proporções simples e sequências (numéricas e icônicas). Os estudantes passaram por um instrumento investigativo para a geração dos dados que nortearam suas conclusões e perspectivas futuras. Seu estudo apresenta semelhanças consideráveis com nossa pesquisa quanto ao *habitat* dos sujeitos (anos iniciais do Ensino Fundamental) e o objeto matemático (*Early Algebra*). Os resultados encontrados pelo pesquisador revelam que a aprendizagem dos estudantes não foi momentânea, o que nos remete a Teoria dos Campos Conceituais (discutido na primeira seção deste capítulo) e a necessidade de um tempo para a maturação e para a vivência de experiências no contexto escolar que possibilite a formação de um campo conceitual algébrico. Ademais, encontramos nos argumentos do pesquisador fatos que reforçam nossa concepção sobre a possibilidade de se introduzir as noções algébricas já nos anos iniciais. Em seus estudos, Teixeira (2016) ressalta que estudantes apresentaram resultados positivos quanto à aplicação de instrumentos diagnósticos para investigar os esquemas. Reforça o quanto tende a ser frutífera a introdução dos estudos da Álgebra nos anos iniciais, do Ensino Fundamental, como uma preparação para a introdução da Álgebra Elementar Formal.

CAPÍTULO III

PERCURSO METODOLÓGICO DO ESTUDO

Neste capítulo delineamos a nossa proposta de pesquisa que teve como objetivo *comparar as competências e os esquemas de ação dos estudantes do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental utilizam ao lidarem com situações-problema envolvendo os conceitos da Álgebra elementar e, ainda, identificar seus níveis de raciocínio algébrico usados para resolver tais situações*. Para isso, elaboramos um estudo que fora delineado a seguir, com a finalidade de alcançar o objetivo acima proposto.

Inicia-se discutindo a opção teórico-metodológica, o material utilizado, um instrumento diagnóstico denominado de teste e, na sequência, apresentamos o universo de estudo, a amostra e as etapas que permearam a pesquisa. Por fim, uma análise *a priori* do instrumento investigativo baseado nos conceitos da Matemática elementar e no nosso aporte teórico.

3.1 Fundamentos teóricos e metodológicos

Para atingir nossos objetivos optamos por uma pesquisa descritiva com uma abordagem diagnóstica que possibilitasse subsídios para responder às questões: *Quais as competências que os estudantes de 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar? Quais os esquemas que os estudantes dos 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar? e Quais os níveis de raciocínio algébrico que estudantes dos 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar?*

Nosso estudo se baseou na identificação e compreensão dos fenômenos inerentes ao pensamento algébrico dos estudantes, com o propósito de delinear sua natureza, sua composição e os processos que o constituem ou que nele se apresentam (ver FIORENTINI, 2012; GIL, 2002; RUDIO 2001).

Temos em Fiorentini (2012, p. 70), que “uma pesquisa é considerada descritiva quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema”, o autor corrobora com nossos objetivos quando propomos identificar a existência de um raciocínio algébrico e sua natureza. Para Rudio (2001, p. 56) “a pesquisa descritiva está interessada em descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los e interpretá-los” nesse quesito, temos, nos argumentos do autor, o aval para investigar esquemas que os estudantes dos anos iniciais utilizam ao se depararem com situações atípicas. Como nossa proposta de investigação consiste em identificar a relação entre os domínios da aritmética e da Álgebra encontramos, em Gil (2002, p. 42), o aparato teórico essencial, pois para o autor, uma pesquisa descritiva “tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômenos ou, então o estabelecimento de relações entre variáveis”.

Como podemos verificar nas discussões dos autores acima citados, os preceitos de uma pesquisa descritiva comungam com nosso estudo investigativo na perspectiva que nossa pesquisa vai além da descrição de fatos, fenômenos ou relações que identificam a existência do raciocínio algébrico dos estudantes. Pretendemos identificar as características relativas entre variáveis (GIL, 2002), os níveis de generalização aritmética e a capacidade de explicitar um raciocínio algebrizado que os estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam quando lidam com situações-problema fora de seu contexto curricular. Investigaremos a existência de elementos que caracterizam o pensamento algébrico que os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentam (KAPUT; CARRAHER; BLATON, 2008). Se existem, que variáveis o constituem e se é possível classificá-los e compreendê-los. A partir da presunção que esses elementos existem como poderemos explicá-los ou, ainda, como poderemos interpretá-los qualitativamente e quantitativamente?

Para validar o estudo faremos um tratamento científico (fundamentação teórica) e tratamento estatístico (testes *qui-quadrado, t-student e McNemar*). Compararemos os desempenhos dos estudantes, as diferenças entre os percentuais de acerto por ano escolar, por vertente algébrica, por representação e nível de dificuldade. Traremos os resultados sob a luz da estatística e dos estudos teóricos que fundamentam a pesquisa.

A utilização dos testes estatísticos e a relação investigativa científica são sustentadas no fato que nossa pesquisa está centrada numa abordagem qualitativa sem, todavia, abandonar a dimensão quantitativa dos dados coletados. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 194) “os dados quantitativos podem ter utilizações convencionais em investigação qualitativa”, pois quando nos propomos a fazer comparações necessitamos de dados numéricos para validar e/ou categorizar resultados que correspondem a uma realidade ou para evidenciar verdades parciais. Nosso foco investigativo se concentrará nas estratégias de resolução que os estudantes apresentarem em cada um dos itens do teste como premissa para a interpretação dos dados coletados independentemente de sua resposta. Nosso caráter qualitativo corrobora com as ideias dos autores, uma vez que,

> [...] os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva e o significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48-50).

Nessa perspectiva buscamos conhecer, interpretar e analisar o tipo de estratégia (esquema em ação) e o nível de raciocínio que os estudantes dos anos iniciais, do Ensino Fundamental, mobilizaram quando se deparam com situações da Álgebra Elementar.

Posto isso, iniciamos nossa pesquisa a partir da submissão do projeto ao Comitê de Ética da UESC/BA, cujo parecer nº1.853.509, foi favorável ao estudo no que concerne ao seu aspecto ético. Sendo este considerado favorável no que se refere à relação direta entre objeto/problema e seus objetivos, metodologia, bem como na ponderação entre os riscos e benefícios do estudo para os participantes.

3.2 Universo da pesquisa

Nossa pesquisa aconteceu numa escola pública, numa cidade do sudoeste do Estado da Bahia. Oferece as modalidades de Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos (EJA) aos estudantes do bairro e regiões circunvizinhas. Conta no total com 1.509 alunos, sendo 652 no turno matutino, 630 no turno vespertino e 227 no turno noturno na modalidade do EJA. Divididos em 30 turmas do Fundamental e 6 turmas do EJA.

Nossos sujeitos da pesquisa são os estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental. A escolha dos estudantes do 3º ano aconteceu por dois motivos: em primeiro lugar, pelo fato de que se encontram no final do 1º ciclo (BRASIL, 1998); e, em segundo, por estarem numa fase em que o desenvolvimento cognitivo está condizente com nosso objeto de estudo (período operacional, PIAGET, 1977. Para os estudantes do 5º ano, a escolha foi levada em consideração três motivos: primeiro, pelo fato de estarem finalizando o 2º ciclo (BRASIL, 1998); segundo, por se encontrarem num momento de transição escolar (anos iniciais – anos finais) e, em terceiro, por se encontrarem no período operacional concreto (PIAGET, 1977. Os educandos selecionados contemplaram três turmas de cada ano, num total de 148 estudantes. Sendo que 68 pertencem ao 3º ano, e 80 ao 5º ano. A escolha do horário matutino adveio mediante o quantitativo de alunos de cada turma, pois nossa proposta é que cada aluno pesquisado representasse menos que 1% do total da amostra investigada. Nossos sujeitos são, em sua maioria, estudantes em idade regular (entre o 3º e o 5º ano) para os anos cursados, estando aptos para participar de nossa investigação.

3.3 Instrumento investigativo da pesquisa: apresentação e análise *a priori*

3.3.1 Apresentando o instrumento da pesquisa

Para nosso estudo contamos como instrumento, um teste, por concordarmos com Marconi e Lakatos (2013, p. 113) que “os testes são instrumentos utilizados com a finalidade de obter dados que permitam medir o rendimento, a competência, a capacidade ou a conduta dos indivíduos”. Ao identificar os esquemas de resolução numa determinada tarefa específica é possível identificar vestígios e tipos de raciocínios (aritmético ou algébrico), o nível de conhecimento cognitivo mobilizado para sua resolução (ou tentativa) e o grau de maturidade desses saberes.

Ponderamos que, em seu cotidiano, os estudantes do Ensino Fundamental, dos anos iniciais, se defrontam constantemente com relações quantitativas distintas. Essas podem pertencer aos domínios da aritmética generalizada[43] e apresentar uma estreita relação como pensamento algébrico. Sabendo desse fato, podemos presumir que se apresentarmos atividades que exploram a generalização, a explicitação de leis, o raciocínio intuitivo e dedutivo e a identificação de estruturas operatórias influenciaremos a relação com a Álgebra Formal desde o início dos anos escolares. Acreditamos que enquanto manipula esse tipo de situação os discentes desenvolvem habilidades para descrever e modelar[44] situações-problema numa linguagem matemática específica da Álgebra. Essa forma metodológica de ensino cujo “objetivo é que eles aprendam a raciocinar algebricamente e que os alunos comecem a adquirir

[43]O termo aritmética generalizada antes era sinônimo de álgebra, letra-simbólica, com suas equações e incógnitas. No contexto da Álgebra precoce tem um sentido mais amplo remete-se às relações e as propriedades inerentes às operações aritméticas, isto é, número/quantidade, operações, propriedades e funções (KIERAN, 2016, p. 10, tradução nossa).

[44] Modelar transformar ideias matemáticas em estruturas aritméticas ou algébricas.

uma linguagem simbólica algébrica para expressar e justificar suas ideias”[45] (BLANTOM, 2007, p. 7, tradução nossa). Tende a antecipar a familiarização do processo lógico formal, e com isso desenvolver as estruturas necessárias à transição da Álgebra informal (*Early Algebra*) para a Álgebra Elementar (formalizada).

Para que possamos atingir os objetivos e responder às perguntas propostas na pesquisa, inicialmente elaboramos um teste piloto. Esse teste passou por quatro etapas: (a) elaboração das atividades; (b) apreciação e ajuste proveniente das discussões no grupo de pesquisa, orientação e coorientação; (c) diagramação e impressão de uma matriz; e (d) aplicação a quatro estudantes diferentes de nossa amostra pesquisada (crianças da mesma faixa etária que cursavam o 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental). Ao final da 4ª etapa, os estudantes foram questionados em relação à escrita e elaboração das questões, de modo a melhorar a qualidade para a aplicação dos instrumentos diagnósticos na amostra selecionada.

Após a aplicação e correção do teste piloto, os resultados observados foram considerados e comparados com nossa análise *a priori*. Essa atitude teve a intenção de aferir se os dados eram coerentes com a maturidade cognitiva dos estudantes e se contemplariam os objetivos propostos da pesquisa. Nessa etapa, detectamos a necessidade de adaptações nas atividades elaboradas. De acordo com os dados produzidos e coletados na aplicação do teste piloto, fizemos ajustes pedagógicos que foram agregados ao teste final. Esse teste final foi aplicado à amostra selecionada da pesquisa conforme data e horário disponibilizado pela escola.

Nosso teste continha dez questões, subdivididas em item, perfazendo um total de 15 itens. Essas foram elaboradas, levando-se em consideração as variáveis: (I) representação; (II) grau de dificuldade cognitiva; e (III) objeto matemático. Nosso objeto matemático, o estudo da Álgebra precoce (*Early Algebra*), foi distribuído em três vertentes: a sequencial, a da equação e, por último, a do raciocínio funcional. Essas questões apresentam-se em estruturas icônicas[46] ou numéricas, ambas com nível de dificuldade categorizadas como simples ou sofisticada. A escolha dessas vertentes algébricas aconteceu por elas apresentarem em sua composição: (a) padrões de comportamento sequencial; (b) estruturas aritméticas (aritmética generalizada) e

[45]The goal is instead that learn to reason algebraically and that they begin to acquire a symbolic algebraic language for expressing and justifying their ideas.

[46]Sequência de dados e/ou fatos que fazem referência a signos que representa um objeto por similaridade, imbuindo-se de seu significado. *Texto icônico*; *Brasil Escola*. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/redacao/texto-iconico.htm>. Acesso em: 11 agosto 2016.

algébricas; e (c) relações e propriedades (implícitas) da matemática inerente ao estudo da Álgebra[47].

A seguir, apresentamos dois quadros síntese em que a estrutura de nosso diagnóstico pode ser vista dentro de um único panorama.

Quadro 4 – Síntese das questões e seus itens

	TESTE															**Total**
QUESTÕES	Q1	Q2	Q3		Q4		Q5		Q6		Q7	Q8	Q9	Q10		**T=10**
ITEM	A	A	A	B	A	B	A	B	A	B	A	A	A	A	B	T=15

Fonte: Elaborado pela autora.

[47]Trazem em sua estrutura os elementos centrais (cerne) do pensamento (raciocínio) algébrico (KIERAN, 2016) e constituem um caminho eficiente para o desenvolvimento do pensamento algébrico e das ideias da Álgebra Elementar formal.

Quadro 5 – Síntese do instrumento diagnóstico, segundo suas variáveis

Objeto matemático	Tipo de representação	Nível de dificuldade	Questão/ item
SEQUÊNCIA	Icônica	Simples	3A
		Sofisticada	3B
	Numérica	Simples	9
		Sofisticada	7
EQUAÇÃO	Icônica	Simples	2
		Sofisticada	8
	Numérica	Simples	5A
		Sofisticada	4B
FUNÇÃO	Icônica	Simples	1; 6B
		Sofisticada	6A
	Numérica	Simples	5 B
		Sofisticada	4A; 10A; 10B

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Considerando que nossos sujeitos se encontram em diferentes faixas etárias, processos distintos de escolarização e o nível de compreensão textual diversificado[48], elencamos uma estrutura que atendesse a ambas as turmas para compor as questões do teste. Nesse quesito, a escolha de estruturas icônicas satisfez essa condição e viabilizou nossa pesquisa, uma vez que um texto icônico tende a ser autoexplicável e substitui uma sequência de fatos (PEREZ, 2016). Ou seja, descreve de forma dinâmica uma situação sem a necessidade de um texto verbal que lhe confira um significado textual. Fato semelhante pode ser observado numa sequência numérica quando consideramos os números também como *signos* (TOLEDO, 1997) representativos de uma quantidade real.

[48]Uma vez que os estudantes do 3º ano se encontram no processo de alfabetização numérica e da escrita, e os estudantes do 5º encontram-se alfabetizados.

Esse teste foi diagramado em formato de livrinho, composto por seis páginas. Essas páginas foram formadas por três folhas A4, diagramada na orientação paisagem. Cada página desse livrinho continha apenas uma única situação-problema.

Os testes foram aplicados pela pesquisadora e acompanhados pela professora regente em todas as turmas, num mesmo dia, porém em horários diferentes, combinado previamente com coordenação/professor. A aplicação deu-se de maneira coletiva, com os estudantes respondendo ao teste individualmente, os estudantes do 3º ano foram agrupados em duas salas distintas e fizeram o teste antes do intervalo e, consecutivamente, os do 5º ano após o intervalo. Com aproximadamente 1 hora de duração para cada turma, utilizou-se o mesmo tempo de duração para cada uma das turmas selecionadas conforme previsto. Vale ressaltar que os alunos não souberam antecipadamente a data de sua realização nem o conteúdo abordado.

Os protocolos gerados pela pesquisa foram corrigidos e compilados de forma a possibilitar uma análise quantitativa (tratamento estatístico) e qualitativa (inferência) que será descrita no item de procedimentos de análise. Esses resultados passaram por um tratamento estatístico intraespecífico e interespecífico para que possibilite uma análise comparativa dos níveis de raciocínio algébrico dos estudantes.

Para investigar os níveis de raciocínio algébrico deles iniciamos por fazer uma análise dos comportamentos apresentados por eles nos extratos dos protocolos de respostas. Esses comportamentos forneceram subsídios para identificar os conceitos neles presentes e permitiram supor o raciocínio algébrico desses estudantes. Entendemos por comportamento uma ação externa que, ao ocorrer, afeta o sentido do outro. Por isso, um comportamento pode ser contado e/ou medido, gestual, oral, verbal, escrito, motor e biológico. No nosso estudo, nos interessa o comportamento escrito, identificado a partir de esquemas utilizados pelos estudantes nos protocolos de respostas. Assim, nossa análise partiu dos comportamentos apresentados pelos estudantes do 3º e 5º anos para, depois, identificarmos os conceitos presentes nesse comportamento (mas nem sempre explícito) e, por fim, associá-los a níveis de raciocínios.

Inicialmente, organizamos uma tabela manuscrita (espelho) com a descrição da resposta dos estudantes para propiciar para uma leitura dinâmica dos dados. Essa tabela facilitou a análise dos dados no todo, configurando-se como um objeto de observação sem a necessidade de se reportar sempre aos protocolos de pesquisa para verificação das respostas. A seguir, os dados produzidos foram tabulados e organizados em diversos gráficos de acordo com as variáveis envolvidas no estudo para uma posterior análise qualitativa. Após a compilação dos dados gerados, começamos nossa análise que ficou dividida em duas etapas: (a) análise *a priori* e (b) análise *a posteriori*. Essas etapas serão descritas a no capítulo IV intitulado análise dos resultados da pesquisa.

3.3.2 Análise *a priori* do instrumento da pesquisa

Neste item do capítulo discutiremos o material que será utilizado neste estudo, que tem como instrumento investigativo um teste contendo um conjunto de dez situações-problema dividido nas vertentes matemáticas da sequência, da equação e da função. As questões foram subdivididas em 15 subitens para que apresentassem em sua estrutura física: (a) características icônicas ou numéricas e (b) estratégias de resolução que evocasse um nível de complexidade simples ou sofisticada.

Questão 01

Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra 3 bombons vermelhos como mostra a figura abaixo

Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?

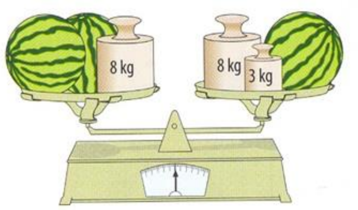
Quadro 3.3.2.1: Primeira situação-problema do teste.

Consideramos que essa questão apresenta uma situação funcional, icônica e com nível de resolução simples. Para resolvê-la o estudante utilizará o raciocínio da proporcionalidade direta. Sendo que “matematicamente, toda relação proporcional pode ser representada pela função y = mx” (POST; BEHR; LESH, 1995, p. 90). Esse fato nos permitir dizer que se trata de uma situação funcional linear (função de 1º grau), podendo ser definida algebricamente por $f(x)=\frac{3}{2}x$, cujo valor de x representa a quantidade de pacotes de R$ 2,00 e $f(x)$ a quantidade de bombons que se pode comprar.

Pressupomos que nessa atividade o estudante seja capaz de estabelecer a relação aditiva entre o valor de R$ 2,00 e o valor de R$ 10,00. Em outras palavras, que consiga identificar uma relação entre quantos “pacotes” de R$ 2,00 coexiste em R$ 10,00 e que, consequentemente, identifique a quantidade de bombons que será possível comprar com os R$ 10,00 propostos. Que perceba a existência de uma relação de múltiplos de 3 e de 2 entre o número de bombons e a quantia de dinheiro, respectivamente. Identificando a noção de proporção entre o número de bombons e o dinheiro. Almejamos que os estudantes utilizem uma relação quaternária[49] de muitos para muitos (mesmo que de forma implícita) para encontrarem a quantidade de bombons que será possível comprar.

Questão 02

Observe que a balança abaixo se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro prato. Todas as melancias têm o mesmo peso.



Qual é o peso de apenas uma melancia?

Quadro 3.3.2.2: Segunda situação-problema do teste.

A situação-problema, Q2, foi classificada como uma situação equacional, icônica e simples. Consideramos se tratar de uma relação de equivalência, em que preexiste um equilíbrio entre os pratos da balança. Seguindo os procedimentos de equivalência, encontramos na relação entre os elementos dos pratos da balança uma propriedade simétrica (implícita), uma vez que uma melancia equivale a 3 kg. Presumimos que, a partir do momento que estabelecemos o critério de equilíbrio entre os pratos (pesos) da balança apelamos para um recurso analógico comum, a justaposição[50]. E que essa nos remete às estruturas algébricas de uma equação e seu processo de resolução (operação inversa e princípios algébricos), utilizando recursos

[49]Relação quaternária segundo Vergnaud (2009) é uma relação que comporta quatro quantidades de duas naturezas distintas.
[50] As balanças remetem a um recurso analógico comum a “justaposição” de certas passagens do transformismo algébrico através da utilização das leis de equilíbrio físico nos quais o concreto tem diferentes significados a partir de apelos visuais (FIORENTINI, 1993, p. 85).

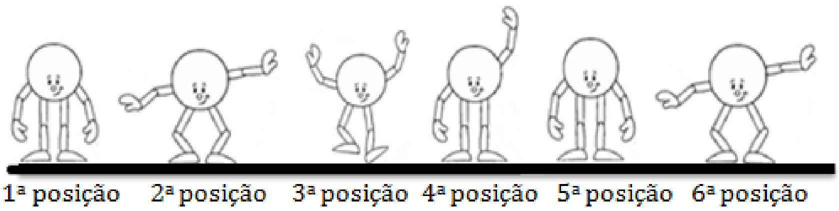
estritamente pictóricos, a situação pode ser interpretada e resolvida como uma equação sem a necessidade de uma notação ou transformismo algébrico.

Apresenta em sua composição o elemento “peso” em dois casos distintos: o peso identificado (3 kg e 8 kg) e o de uma melancia (desconhecido). A equação apresentada, na situação-problema de forma implícita é de 1° grau. Por considerarmos algebricamente o valor desconhecido da suposta equação (incógnita) e atribuindo a essa um valor de x, temos a seguinte equação linear: $2x + 8 = 8 + x + 3$, onde x representa o peso de uma única melancia, e os valores numéricos a estrutura física dos pesos.

Esperamos que o estudante seja capaz de perceber a relação de equivalência entre os pesos dos pratos. Identificando que se as melancias têm pesos iguais, então, podemos retirá-las (uma de cada lado) sem alterar o equilíbrio entre os pesos dos dois pratos. Situação análoga acontecerá com os pesos de 8 kg em ambos os pratos. Pressupomos que a partir da observação e estratégias de equivalência o estudante possa verificar e deduzir que o peso de uma única melancia equivale a 3 kg.

Questão 03

Carlitos é um boneco que adora fazer exercício. No exercício, ele flexiona as pernas e mexe os braços, seguindo uma ordem nos movimentos. Ele pretende continuar nessa atividade por algum tempo. Veja a ordem dos exercícios do Carlitos.



a) Desenhe ao lado como ele estará na 9ª posição.
b) Desenhe ao lado como ele estará na 58ª posição.

Quadro 3.3.2.3: Terceira situação-problema do teste.

A questão 3 foi classificada como uma situação sequencial, icônica, e com dois níveis de resolução: (a) simples e (b) sofisticada. Apresenta uma sequência repetitiva (padrão periódico) significativa, facultando aos estudantes um ambiente de aprendizagens matemáticas que tenha haver com seu cotidiano. Consideramos que “o estudo de padrões vai de encontro a este aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões” (VALE et al, 2006, p. 197).

Ponderamos que o nível de resolução da letra (a) será simples, porque a partir da observação sistemática e/ou desenhos é possível identificar a 9ª posição sem dificuldades. Todavia, a letra (b) demandará uma sofisticação de raciocínios entre a periodicidade e movimentos repetitivos do boneco e a posição ocupada. Esse conjunto de movimentos, a princípio, contempla como domínio números múltiplos positivos de quatro. Como já esclarecido a situação sequencial é composta de uma série de quatro movimentos executados pelo boneco Carlitos, todavia acrescentamos o 5º e 6º movimentos para que fique explicitada uma noção de periodicidade dos movimentos executados. Nessa situação sequencial, esperamos que o estudante a partir da observação sistemático-analítica perceba a periodicidade nas posições referente ao exercício do boneco Carlitos. Que seja capaz de identificar a periodicidade nas quatro posições como um padrão.

Pressupomos que na alternativa (a) de complexidade simples, ele faça desenhos até chegar a 9ª posição sem dificuldade. Entretanto na alternativa (b), de nível de resolução sofisticada, o estudante possa identificar que a repetição ocorrerá de 4 em 4 e verifique (conte) quantas sequências de 4 posições teremos. Todavia como a 58ª posição não é múltiplo de 4, esse verificará ainda qual o múltiplo de 4 mais próximo (inferior) de 58 e identificar quantos movimentos o boneco fará até chegar a 58ª posição. Teremos então, uma referência a uma divisão (divisor 4) não exata de resto 2, em que o resultado será igual a 14.

No momento da elaboração da questão 3, nossa intenção foi direcionar que o estudante identificasse um período composto de quatro elementos referentes à sequência repetitiva dos exercícios. Todavia, no momento dessa análise, verificamos uma ambiguidade no enunciado e no formato que dispomos a série de exercícios do boneco. Observamos que no enunciado da situação-problema não ficou explícito o quantitativo do período preterido (de quatro em quatro), e essa falta de informação poderia levar a outras interpretações. Que a configuração da sequência icônica apresentada poderia levar o estudante a entender como um período de seis elementos sequenciais e não de quatro elementos como proposto. A confirmação ou não dessa observação será analisada a partir dos protocolos de respostas dos estudantes.

Questão 04

Diogo e Matheus querem saber quem tem mais dinheiro. Diogo tem um valor dentro da carteira e mais R$ 3,00 na mão. Matheus tem 2 vezes mais o valor que Diogo tem dentro da carteira. a) Quem tem mais dinheiro? Por quê? b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Diogo terá dentro da sua carteira?

Quadro 3.3.2.4: Quarta situação-problema do teste.

A questão 4 apresenta uma situação mista: uma função e uma equação. Ambas numéricas e com nível de resolução sofisticada. Na alternativa (a), temos uma situação funcional, pois nos remete a ideia da relação de dependência, uma vez que o valor que o Matheus terá depende exclusivamente do valor que Diogo tem dentro da carteira. Apresenta de forma implícita a ideia de variável, visto que existe uma indeterminação quanto ao valor que se encontra na carteira de Diogo. Podemos representar de forma algébrica essa situação, como: Diogo como $D(x) = x + 3$, e Matheus como $M(x) = 2x$, sendo x, a unidade monetária de real. Quando questionamos na alternativa (a) quem tem mais dinheiro estamos propondo uma discussão sobre a possibilidade da existência de $D(x) > M(x)$ ou que $M(x) > D(x)$. Na alternativa (b), temos a ideia de uma equação como uma comparação entre duas funções[51], como uma intersecção entre duas curvas funcionais e um ponto fixo (GÓMERO, 2017). Nessa perspectiva, estamos em busca de um valor que atribuído a x se torne $D(x) = M(x)$. Em ambas alternativas, propomos situações em que o estudante necessitará *numeralizar o desconhecido*[52] e esse processo de enumeração nos permitirá afirmar que sua resolução perpassa por um raciocínio algébrico sofisticado.

Em sua resposta esperamos que o estudante observe que a quantia que Diogo tem na carteira é um valor desconhecido e, também, ilimitado. Que a quantia em reais que Matheus terá depende exclusivamente da quantia que Diogo terá dentro de sua carteira.

E que para saber quem tem terá um maior valor em reais, na alternativa (a), o estudante fará alguns questionamentos sobre a quantia que Diogo tem na carteira e como essa informação não lhe foi fornecida, que ele perceba a impossibilidade de identificar que tem mais dinheiro e opte pela resposta de não haver solução para esse questionamento. Na alternativa (b), esperamos que o aluno utilize uma estratégia baseada em suposições (tentativas) e conclua que a

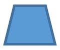
[51]Carraher e Schliemann discutem uma equação como comparação entre duas funções (2016).
[52]Atividade orientada de ensino definida por Sousa (2014) para situações que abordam situações hipotéticas que apresentam condições de desencadear a aprendizagem de conceitos algébricos como os de variável, campo de variação, relação entre grandezas e outros.

possibilidade de Diogo e Matheus terem a mesma quantia em reais existe desde que Diogo tenha R$ 3,00 dentro de sua carteira. Porque Diogo terá R$ 3,00 na carteira e R$ 3,00 na mão num total de R$ 6,00 e como Matheus tem o dobro da quantia que Diogo tem na carteira esse terá 2 x R$ 3,00, igualando seu valor ao de Diogo.

Questão 05

Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática. Ele pensa, concentra-se, mas está precisando de uma ajuda. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada uma das figuras

a)  - 12 = 0; Então, o  vale ...

b)  -  = 0; Então, o  vale ...

Quadro 3.3.2.5: Quinta situação-problema do teste.

A questão 5 apresenta uma situação-problema de natureza mista. Na alternativa(a), temos uma equação cuja representação é numérica e com o nível de resolução simples. A alternativa (b) apresenta uma função de representação numérica e com nível de dificuldade simples.

Nessas situações-problema temos uma forma não-convencional de representar uma equação algébrica e sua função, utilizando elementos geométricos no lugar das variáveis. Uma configuração que utiliza o triângulo e o trapézio no lugar das usuais letras (incógnitas e variáveis, respectivamente). Todavia, a ausência das notações algébricas (letras) não interfere no silogismo[53] necessária a configuração de uma equação e de uma função. Os entes geométricos exibidos nas situações-problema podem e devem ser considerados como os valores que se propõe encontrar (valores desconhecidos). Algebricamente, podemos representar essas situações-problema, como: $x - 12 = 0$ e $y - y = 0$, alternativa a e b, respectivamente ou com outra variável (nesse caso letra) qualquer.

Na alternativa (a), temos uma situação cujo nível de raciocínio necessário para resolução será categorizado como simples. Essa situação-problema é um exemplo de uma relação ternária[54] entre o triângulo e os números 12 e 0. Para resolvê-la necessitamos aplicar a

[53]Silogismo do grego antigo, conexão de ideias que segundo o dicionário Aurélio significa um argumento formado de três proposições: a maior, a menor (premissas) e a conclusão deduzida da maior por intermédio da menor. Disponível em: <http: www.dicionariodoaurelio.com/silogismo>. Acesso em: 05 novembro 2016.
[54]Relação que liga três elementos entre si (VERGNAUD, 1996).

propriedade do elemento inverso[55]a adição de números racionais que apresentam, em sua estrutura, os princípios básicos para a resolução de uma equação do 1º grau. A relação do triângulo com o número 12 evidencia que existe um valor único (uma constante) para o triângulo que na questão se apresenta como um valor desconhecido (incógnita) que será o próprio 12. Por outro lado, a alternativa (b) suscita uma função que, algebricamente, apresenta infinitas soluções, o que nos permite inferir que o valor de um trapézio nessa proposta toma a forma de uma notação algébrica de variabilidade (variável).

Esperamos que o estudante identifique que as figuras geométricas (triângulo e trapézio) representam números naturais e perceba a existência de uma relação entre os questionamentos das alternativas (a) e (b). Em outras palavras, identificando que na alternativa (a) existe apenas um único valor real para substituir o triângulo que satisfaça a condição de equivalência da operação, ou seja, somente o número real 12 será capaz de tornar a sentença matemática verdadeira. Enquanto, na alternativa (b), ele (estudante) perceba que não existe um único número real que satisfaça a sentença proposta, mas que existem inúmeros valores (ou um conjunto) que tornam a sentença verdadeira.

Na expectativa que o estudante chegue à conclusão do valor único para o triângulo e da impossibilidade de um único valor que substitua o trapézio, teremos a evidencia da formação de um sistema pré-algébrico que subsidiará as primeiras ideias de incógnita e variável.

Questão 06

Na lanchonete da pracinha está acontecendo uma promoção.

MONTE SEU PRÓPRIO SANDUÍCHE

BÁSICO	COMPLEMENTO
 **R$5,00** Pão + Bife	Para cada um dos ingredientes acrescenta  **+ R$ 1,00**

Felipe, Artur e Pedro foram lanchar. Cada um deles vai querer incrementar seu sanduíche.

[55] [55]DANTE, Roberto. **Tudo é Matemática**. 7º ano do Ensino Fundamental. Ed. Ática, São Paulo,2008.

Felipe pediu o básico mais queijo, ovo e cebola.
Artur solicitou o básico mais queijo e bacon.

Pedro turbinou o dele, acrescentando o básico: queijo, ovo, tomate, alface, cebola e batata palha.

a) Quanto cada um dos amigos pagou por seu sanduíche?
b) Todos pagaram o mesmo valor? Por quê?

Quadro 3.3.2.6: Sexta situação-problema do teste.

A questão 6 apresenta uma situação funcional, icônica e com nível de resolução (a) sofisticada e (b) simples. Entendemos que essa situação-problema pode, no primeiro momento, nos parece simples (mas não simplista), uma vez que essa requer dos estudantes um planejamento estratégico, elaborado e sofisticado. O estudante precisa pensar o que e porque fazer. Demanda uma estratégia para agregar ao valor do sanduíche básico (R$ 5,00) a quantidade de ingredientes utilizados como complemento do sanduíche (+ 1, + 2x1, + 3x1...) e assim por diante.

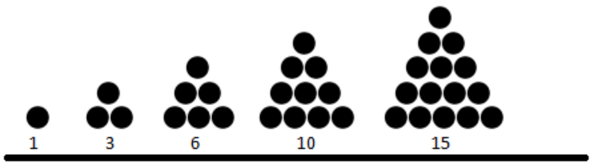
Essa se caracteriza por funcional a partir do momento que se estabelece uma relação de dependência entre as grandezas envolvidas (DANTE, 2008). Grandezas distintas que compreendem o valor a ser pago, e o tipo de sanduíche escolhido.

Algebricamente, essa situação-problema representa uma função f de 1º grau cujo conjunto domínio, $D(f)$ está contido no conjunto N e contradomínio, $CD(f)$ no conjunto Q. Sua representação, em notação algébrica, é sistematizada por $f(x) = 5 + x$, em que x representa a quantidade de complemento acrescentado no sanduíche, e $f(x)$ o valor a ser pago em reais pelo sanduíche.

Inicialmente, pressupomos que, na alternativa (a), os estudantes manipulem e encontrem os valores, em reais, dos sanduíches a partir das escolhas dos amigos apenas operando (estrutura aditiva) com seus valores no conjunto dos números naturais. Todavia, na alternativa (b), quando questionados sobre o porquê de os colegas não pagarem o mesmo valor, em real, ele seja capaz de inferir que essa diferença se estabelece a partir do número de complementos acrescentados por cada um dos amigos. Almejamos que essas respostas apresentarão de forma implícita a elaboração/evidência de um raciocínio algébrico funcional. Na alternativa (a), o estudante se encontrará operando no campo conceitual aditivo, “em que não basta saber operar um cálculo numérico" (MAGINA et al, 2008, p. 15), ele precisará perceber antes as invariantes[56] necessárias a sua resolução, sendo uma situação típica dos anos iniciais, do Ensino Fundamental. Na alternativa (b), ele deverá estabelecer uma comparação entre os valores pagos em (a) enquanto identificará o porquê dessa diferença.

Questão 07

Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.



Seguindo essa mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?

Quadro 3.3.2.7: Quinta situação-problema do teste.

A questão 7 apresenta uma situação sequencial, icônica e com nível de resolução sofisticado. Podemos classificar essa situação como sequência recursiva[57]. Classificando-a algebricamente como uma função f, cujo domínio e contradomínio está contido em N*. Em linguagem algébrica dada uma função f, de domínio e imagem de números naturais, para cada número natural n diferente de zero, teremos que seu termo geral pode ser expresso por $a_n = f(n)$

A partir da análise dos cincos primeiros termos dessa sequência, verificamos a existência de uma relação de dependência entre um termo e o seu antecessor. Isto implica que a lei de formação de um termo qualquer sempre recorrerá ao termo antecessor desse. Por isso, o enésimo termo dessa sequência proposta no problema 5 obedecerá a uma Lei de Recorrência definida algebricamente por $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{cases}$

Nessa questão, esperamos que o estudante identifique o comportamento sequencial (aumento de 2, 3, 4, 5...) como um padrão de acréscimo quanto ao número de bolinhas utilizadas para se construir cada uma das figuras da situação-problema numa relação de acréscimo horizontal, percebendo que para se encontrar a 6ª figura basta adicionar seis bolinhas a 5ª figura,

[56]Propriedades e procedimentos que podem ser reconhecidos e usados pela criança para analisar e resolver uma situação-problema (MAGINA, 2016).

[57]Construção de uma sequência segundo uma determinada regra de formação (BRASIL, 2017, p. 226).

para a 7ª precisará adicionar mais sete a 6ª figura e, consequentemente, para a 8ª figura adicionar oito bolinhas a 7ª figura.

Outra hipótese de resolução é que o estudante consiga estabelecer uma comparação vertical, uma relação entre o número de bolinhas necessárias a formação de cada figura e a sua posição na sequência. Esperamos que ele verifique e abstraia que a primeira figura tem 1 bolinha; que a segunda tem 1+2 bolinhas; que a terceira tem 1+2+3 bolinhas; que a quarta tem 1+2+3+4 bolinhas e assim sucessivamente. Que a partir dessa lógica recursiva compreenda que a 8ª figura terá 1+2+...+8 bolinhas em sua construção, o que equivale a dizer que terá em sua formação 36 bolinhas.

Nessa perspectiva, temos que a situação-problema Q9 tem relação direta com a soma dos termos de uma progressão aritmética (PA)[58] de primeira ordem, em que o primeiro termo (a_1) é igual a razão (r) e igual um. Cada um dos termos dessa sequência de números triangulares representa uma PA, e a quantidade de bolinhas que o compõem equivale à soma dos termos dessa PA. Ou seja, o quantitativo das bolinhas do primeiro termo da sequência dos números triangulares equivale a S_1; o segundo S_2, o terceiro a S_3 e assim sucessivamente. Teremos que o 8º termo da sequência terá o quantitativo de bolinhas referente à S_8 da PA de $a_1 = r = 1$, e que será igual a 36 bolinhas.

A generalização da lei da soma, $S_n = \sum_{i=1}^{n} 1+2+3+.... = \frac{n(n+1)}{2}$ desses números triangulares pode ser construída de duas maneiras distintas. Uma atribuída a uma analogia do método de Gauss[59] para a soma dos termos de uma PA, e a outra como um processo de composição algébrica das bolinhas em forma de um triângulo equilátero[60].

[58]Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual cada termo, a parir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante r, chamada razão da PA (DANTE, 2008, p. 136.).

[59]Disponível em: <http://educacao.globo.com/matematica/assunto/algebra/soma-dos-termos-de-uma-pa.html>. Acesso em: 13 outubro 2017.

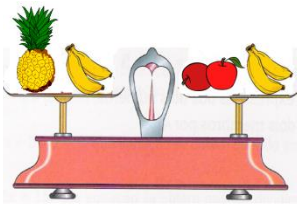
[60]Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/numeros-triangulares.htm>. Acesso em: 13 outubro 2017.

Questão 08

A balança se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro prato.

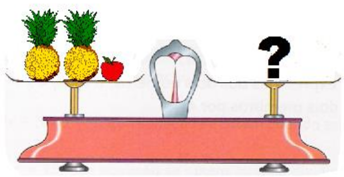
As maçãs têm o mesmo peso. As bananas têm o mesmo peso.

Figura 1



Quantas maçãs temos que colocar no prato da direita para que a balança permaneça em equilíbrio?

Figura 2



Quadro 3.3.2.8: Oitava situação-problema do teste.

A situação-problema, questão 8, aborda uma equação; de representação icônica e com nível de dificuldade sofisticada. O problema apresenta uma justaposição (mencionado na questão 2) entre os pesos dos pratos da balança, existindo entre eles (os pratos) uma relação de equivalência (explícita) sem apresentação de valores numéricos. Essa relação de equivalência apresenta de forma implícita as propriedades simétrica e transitiva que também, é a mesma observada numa equação algébrica usual, todavia sem o uso do sinal de igualdade e a notação simbólica peculiar. Os ícones pictóricos (frutas) representam as incógnitas, e os pratos os membros de uma equação.

Modelando, algebricamente, a relação da figura 1, teremos a seguinte equação: a + 2b = 2m + 2b; sendo a incógnita “a” peso de um abacaxi; a de “b” o peso de uma banana e a de “m” o peso de uma maçã. Usando os princípios de resolução de equação, teremos uma equação equivalente em que a = 2m. Observamos que existe uma correlação entre as balanças da figura 1 e 2. Isto nos permite afirmar que para que haja um equilíbrio na balança da figura 2 será preciso acrescentar no prato da direita 5 maçãs (duas para cada abacaxi, e uma para a maçã que já se encontra no prato da esquerda). Em outras palavras, para manter a equivalência entre os pesos, teremos uma sentença matemática expressa por 2a + m = 2.2 +1. Nessa situação-problema, identificamos duas propriedades das relações binárias, a simetria e a transitividade[61] (VERGNAUD, 2014).

No que tange a propriedade simétrica temos que se a = 2m, isto implica que 2b = m. Ou seja, um abacaxi equivale a duas maçãs, ou ainda, que duas maçãs têm o mesmo peso que um abacaxi. Em relação à propriedade de transitividade, teremos que se a = 2b, então 2a + m = 2. 2m + m (figura 2), equivalendo dizer que para manter o equilíbrio temos de 2a + m = 5m.

Nessa situação-problema, esperamos que o estudante perceba a relação de equivalência entre os pesos dos dois pratos na figura 1. Que seja capaz de perceber que se retirados de ambos os pratos as bananas, isso não alterará o equilíbrio desses. Conjecturamos que a partir dessa estratégia o estudante seja capaz de visualizar/inferir que um abacaxi equivale ao peso de duas maçãs. Esperamos que ele perceba a relação de igualdade (equilíbrio) não como um resultado de uma operação, e sim uma relação de equivalência (LINS; GIMENEZ, 2001).

Questão 09

Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.

1	4	7	10	...	...	...	...	...

Quando retornar, deverá concluir essa sequência, obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?

Quadro 3.3.2.9: Nona situação-problema do teste.

A situação-problema da questão 9 apresenta uma situação sequencial, de representação numérica e com nível de resolução de complexidade simples. A sequência numérica apresentada é denominada matematicamente como sequência aritmética ou progressão aritmética. Logo, a sequência proposta no problema {1, 4, 7, 10,...} é uma PA crescente e infinita de razão r = 3, cujo termo geral pode ser representado por: $a_n = 3n - 2$; sendo a_n o enésimo termo da PA e n a posição (ordem crescente) e/ou número de termos da sequência. Trata de uma sequência numérica recursiva assim como a situação-problema da questão 7.

Esperamos que nessa situação-problema, o estudante não tenha dificuldade em compreender a ordem, a regularidade dos números. Que ele perceba que para encontrar cada termo dessa sequência basta acrescentar três unidades ao seu antecessor. Presumimos que o

[61]Uma relação binária é simétrica se, e somente se, a cada vez que tivermos a relação entre um elemento x e um elemento y, tivermos necessariamente a mesma relação entre o elemento y e o elemento x. Uma relação binária é transitiva se, e somente se, a cada vez que tivermos a relação entre um elemento x e um elemento y de uma parte, e entre o elemento y um elemento de z de outra parte, tivermos necessariamente a mesma relação entre o elemento x e o elemento z (VERGNAUD, 2014, p. 41 e 43).

estudante não será capaz de estabelecer uma relação generalizada ou uma lei de formação semelhante à de uma PA para encontrar o 9º termo da sequência. Acreditamos que ele irá adicionar 3 a cada termo até obter o termo preterido numa lógica recursiva.

Questão 10

Três amigos foram ao parque de diversão. Cada um levou uma quantia de dinheiro para gastar nos brinquedos. 1. Lúcia levou 2 notas de 10 reais e mais 4 notas de 2 reais; 2. João levou a metade das notas de 10 reais e a metade das notas de 2 reais que Lúcia levou; 3. Beto levou a quantia de Lúcia e João juntos. a) Quantas notas de 10 reais e quantas de 2 reais Beto levou? b) Quantas notas de 10 reais e de 2 reais os três amigos levaram juntos para o parque?

Quadro 3.3.2.10: Décima situação-problema do teste.

A situação-problema apresentada na questão 10 aborda uma função de representação numérica e com nível de dificuldade sofisticada. Para considerarmos uma situação funcional utilizamos a definição de Euler[62] como uma função implícita não expressa por variável. A situação-problema apresenta uma relação de dependências entre as quantias de João-Lúcia e Beto-Lúcia-João. Essa relação não se constitui no acaso, mas organizada de modo sistemático sob a forma de um sistema pré-algébrico. Sua resolução demandará conhecimentos operacionais aritméticos básicos (expressão numérica) sem a necessidade de uma notação algébrica funcional. Podemos representá-las como: Lúcia: (2.10 + 4.2); João: (1.10 + 2.2) e Beto: (2.10+ 4.2) + (1.10 +2.2), nessa configuração, observamos que existe uma organização sistemática a partir dos valores de R$ 10,00 e R$ 2,00. Presumimos que quando questionamos a quantidade de notas, e não o valor total em reais estaremos a direcionar (obrigatoriamente) que sua solução tenha a natureza algébrica. Que o estudante seja capaz de estabelecer uma relação algebrizada para compor os valores referentes aos amigos Lúcia e Beto.

Esperamos que nessa situação-problema, o estudante não tenha dificuldade em estabelecer uma relação aritmética entre as quantias que cada amigo levará para o parque. Todavia ele pode de imediato calcular o valor total que cada amigo levou para o parque, sem se preocupar em

[62]Aquelas quantidades que dependem de outras, isto é, aquelas quantidades que experimentam uma variação quando outras variam, chamam-se funções dessas quantidades (EULER, 1755 apud BARONI, 2014, p. 18-19).

agrupar a quantidade correspondente de notas referentes à R$ 10,00 e R$ 2,00. Em outras palavras acreditamos que o estudante optará de início por estratégias aritméticas usuais dos anos iniciais, do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS ENCONTRADOS

Dedicaremos este capítulo para proceder com a análise dos resultados encontrados na pesquisa, tanto do ponto de vista quantitativo quanto qualitativo. Assim, o capítulo será dividido em duas seções: na primeira realizaremos a análise quantitativa, momento em que nosso foco será no desempenho dos estudantes. Importar-nos-á os percentuais de acertos dos estudantes nas questões e itens do instrumento diagnóstico. Esses acertos foram transformados e apresentados em percentuais para facilitar as comparações intra e intergrupos. Sempre que conveniente, os resultados serão submetidos a testes estatísticos a fim de conferir o seu grau de confiabilidade. Segundo nosso interesse investigativo, essa seção será subdividida em algumas subseções.

Na segunda seção, a análise qualitativa dos dados gerados a partir do instrumento diagnóstico. Nesse momento, identificação das estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolverem as situações-problema propostas no instrumento. Nesse caso, a finalidade é identificar os esquemas registrados e os níveis de raciocínio deles no processo de resolução das situações-problema.

Tanto a análise quantitativa quanto a qualitativa buscarão dialogar com o aporte teórico do estudo, discutidos nos capítulos I e II.

4.1 Análise quantitativa dos dados

Nesta seção, a análise quantitativa dos dados gerados pela pesquisa, seu comportamento estatístico, o percentual de acertos e a relação desses com os grupos investigados. Nesse quesito, um estudo dos desempenhos dos estudantes, as diferenças percentuais entre as variáveis da pesquisa e o nível de conhecimento deles diante das situações-problema pesquisadas. Esperamos encontrar resultados que nos ajudem a compreender o raciocínio dos educandos sobre conceitos algébricos elementares, antes de tê-los aprendido formalmente na escola. Além disso, interessa-nos investigar o avanço desse raciocínio entre os estudantes do final do 1º e do 2º ciclos, do Ensino Fundamental (3º e 5º anos).

No que tange a comparação do desempenho dos estudantes (o número de respostas corretas), por ano escolar, utilizamos o teste *t-student* para amostras independentes. Para testar as diferenças entre a porcentagem de acerto por ano escolar, conteúdo, dificuldade e representação foi utilizado o teste *qui-quadrado* (X^2); já para verificar o grau de dificuldade de uma questão em relação a outra foi empregado o teste de *McNemar* para amostras emparelhadas. Foi usado o nível de significância de 5%, e os dados foram analisados empregando o pacote estatístico SPSS[63].

Com intuito de relembrar as nossas variáveis de pesquisa e a relação das questões/itens do instrumento com elas, apresentamos a seguir um quadro síntese, contendo essa visão geral. Nele, os objetos matemáticos, o tipo de representação e o nível de dificuldades são apresentados relacionando uns aos outros e, principalmente, ao item do instrumento.

[63]Statistical Package for the Social Sciences – *Software* que transforma os dados de uma pesquisa em informações estatísticas (tradução nossa).

Quadro 6 – Síntese do instrumento diagnóstico, segundo suas variáveis

Objeto matemático	Tipo de representação	Nível de dificuldade	Questão/ item
SEQUÊNCIA	Icônica	Simples	3A
		Sofisticada	3B
	Numérica	Simples	9
		Sofisticada	7
EQUAÇÃO	Icônica	Simples	2
		Sofisticada	8
	Numérica	Simples	5A
		Sofisticada	4B
FUNÇÃO	Icônica	Simples	1; 6B
		Sofisticada	6A
	Numérica	Simples	5B **(excluído)**
		Sofisticada	4A; 10A; 10B

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A partir de nossas análises *a posteriori*, verificamos a necessidade de descartar a situação-problema 5B devido a um erro em sua elaboração, o qual terminava por ter que considerar como certa todas as respostas numéricas oferecidas pelos estudantes. De fato, a questão 5 tinha por objetivo investigar, se os estudantes percebiam a diferença entre uma incógnita (5A) e uma variável (5B), como mostra a questão:

Q5 – Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática. Ele pensa, concentra-se, mas está precisando de uma ajuda. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada uma das figuras?

a) ▲ – 12 = 0; Então o ▲ vale ...

b) ⏢ – ⏢ = 0; Então o ⏢ vale ...

Quadro 3.3.5: Quinta questão do teste.

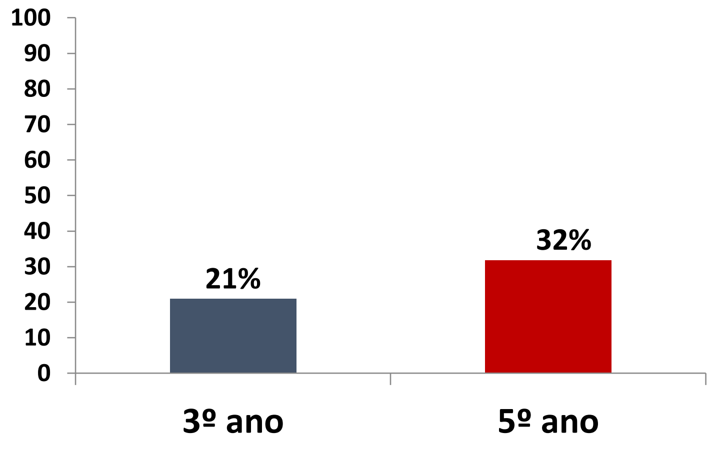
Note que no item (a) apenas a resposta 12 pode ser aceita como verdadeira. Já para o item (b) qualquer número dado como resposta atenderia ao requisito posto nele. Assim, o alvo dessa questão era identificar se os estudantes entendiam, de alguma forma, a diferença entre incógnita e variável, mas a forma como está posto no item os induz a oferecer um número específico como resposta. Portanto, não tínhamos como medir o conhecimento deles sobre variabilidade a partir de sua resposta. Esse resultado terminou por se tornar uma distorção na análise quantitativa, no sentido de informar um percentual de acerto não condizente com o conhecimento do estudante sobre o conceito de função.

Iniciaremos a apresentação dos dados a partir do desempenho geral dos estudantes investigados, o que ocorrerá na subseção 4.1.1 a seguir.

4.1.1 Análise do desempenho geral dos dois grupos

A análise quantitativa toma por referência o percentual geral de acertos de cada grupo investigado. Para facilitar a compreensão dos dados, apresentamos o gráfico 1 que retrata o comportamento estatístico quanto ao desempenho de cada grupo.

Gráfico 1 – Desempenho geral de acertos dos grupos



Fonte: Dados da pesquisa.

Os resultados apresentados, no gráfico 1, indicam que ambos os grupos apresentaram um baixo percentual de acerto, embora o 5º ano tenha atingido um percentual estatisticamente maior que o 3º ano. Isto denota que embora ambos os grupos não tenham apresentado competência satisfatória para resolver a contento as questões do instrumento diagnóstico, os estudantes do 5º ano foram os mais competentes. Essa consideração (5º ano mais competente) encontra aval em dois testes do pacote SPSS, o *qui-quadrado* (X^2) e *t-student*.

No *qui-quadrado*, demonstra que a diferença percentual representa um valor significativo, uma vez que o p-valor[64] entre elas foi inferior a 0,05 (igual a 0,000). No que tange ao teste *t-estudent*, identificamos a existência de uma diferença expressiva em relação ao desempenho dos estudantes do 5º ano para os do 3º ano, uma vez que os estudantes do 5º ano apresentam uma média de acertos de 4,45 e um desvio padrão de 2,255, enquanto que os discentes do 3º ano têm 2,97 e um 1,947, de média de acertos e desvio padrão, respectivamente. Essa diferença é estatisticamente significativa (conforme resultado $t_{(146)} = -4{,}232$; $p = 0{,}000$). Estes últimos resultados nos permitem dizer que os estudantes do 5º ano apresentam um desempenho superior aos estudantes do 3º ano, a diferença de quase uma questão e meia a mais. O que significa dizer que essa divergência é estatisticamente significativa e refleti uma disparidade cognitiva quanto aos conceitos avaliados no instrumento diagnóstico entre os estudantes do 3º e 5º anos.

Esses resultados podem ser justificados devido aos estudantes se encontrarem no período de encerramento do ciclo dos anos iniciais, do Ensino Fundamental. Uma vez que, “os alunos deste ciclo têm possibilidades de maior concentração e capacidade verbal para expressar com mais clareza suas ideias e pontos de vista” (BRASIL, 1998, p. 55). Outra possibilidade para essa diferença pode ser o próprio desenvolvimento cognitivo do ser humano, já que os alunos do grupo do 5º ano têm dois anos a mais que os do 3º ano.

Entretanto, o dado apresentado diz respeito a um panorama geral, não deixando claro em quais situações eles se saem melhor. Para tanto se faz necessário que olhemos para esses dados levando em consideração as variáveis elencadas pelo estudo, a saber: (4.1.2) o objeto matemático (sequência, equação e função); (4.1.3) o tipo de representação (icônica, numérica) e (4.1.4) o nível de dificuldade (simples ou sofisticada). Interessa-nos identificar o que significa acertar mais ou menos (situações-problema), qual o desempenho percentual dos estudantes em relação a todos os itens do instrumento diagnóstico, e se esse percentual pode variar ou se manter no nível de acertos da média geral de 21% e 32%, 3º e 5º anos respectivamente.

A seguir, análise do desempenho dos dois grupos em cada uma das variáveis envolvidas na pesquisa.

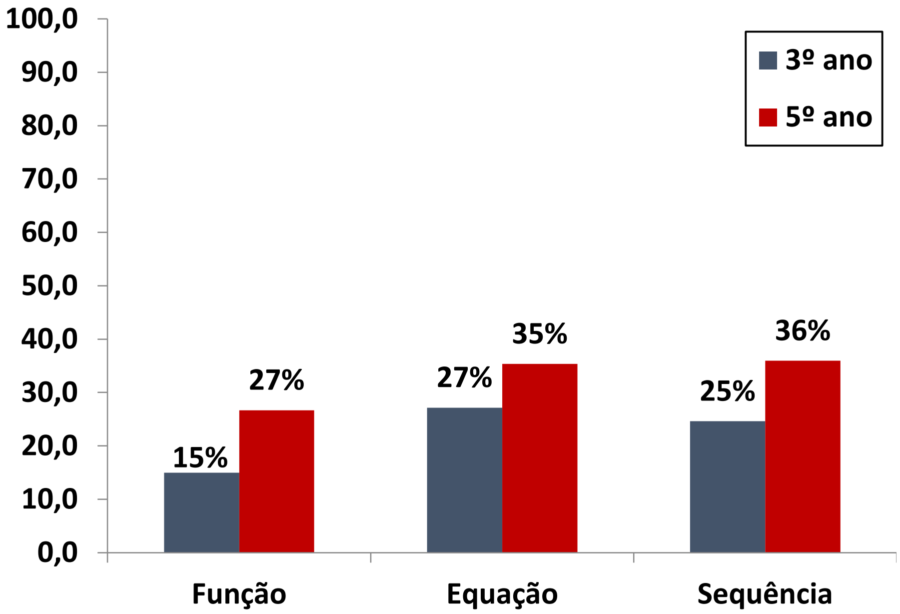
---

[64]Representa a probabilidade de a diferença identificada nos dados ser ou não resultado do acaso. Se o p-valor < 0,05 a diferença é significativa.

4.1.2 Análise do desempenho dos estudantes do 3º e 5º anos, segundo a variável objeto matemático

Nesta subseção, análise do desempenho dos estudantes do 3º e 5º anos em relação ao objeto matemático nas vertentes da sequência, da equação e da função. Para facilitar a compreensão dos dados, apresentamos o gráfico 2 que retrata o desempenho dos grupos em relação ao objeto de estudo e suas vertentes algébricas.

Gráfico 2 – Desempenho dos grupos, segundo objeto matemático



Fonte: Dados da pesquisa.

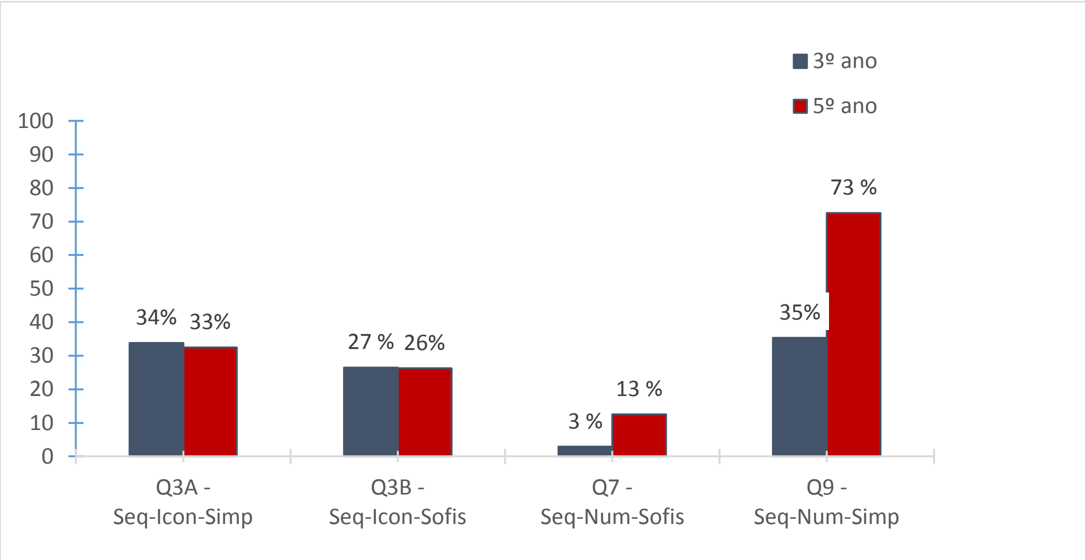
Notamos, mais uma vez, que o 5º ano se saiu melhor que o 3º ano, considerando os três objetos matemáticos. Essa diferença é estatisticamente significativa (teste x^2, p-valor igual a 0,000). Observamos também que, embora melhor novamente, o percentual de acerto do 5º ano é baixo em relação ao ideal.

Observando o padrão de comportamento dos dois grupos, identificamos que há uma tendência de conduta em relação à vertente algébrica da função, em que ambos os grupos apresentam os piores resultados em relação às outras duas. Comparando esse resultado com as duas outras variáveis, temos que ele foi estatisticamente significativo (abordaremos este item melhor na subseção 4.1.5). De acordo com o teste do *qui-quadrado*, esses resultados demonstram que para os estudantes da pesquisa existe uma diferença significativa (p-valor igual a 0,000) entre uma situação-problema ser ou não função (equação ou sequência).

Isso denota dizer que não foi por acaso que os estudantes de ambos os grupos apresentaram maior dificuldade nas questões/itens que envolviam o conceito de função do que nas questões das duas outras variáveis. E mais, se fizermos uma comparação intragrupos nos desempenhos entre as variáveis equação e sequência, constataremos que não há diferença significativa nem para o grupo do 3º ano nem do 5º ano. Em outras palavras, os itens envolvendo esses dois conceitos apresentaram o mesmo grau de dificuldade para os dois grupos.

Tendo analisado os desempenhos dos grupos, considerando a variável *objeto matemático*, passaremos a investigar tais desempenhos dentro de cada uma de suas vertentes. Assim, inicia-se pelos itens que se relacionavam com a sequência, depois com a equação e, por fim, a função. Dentro de cada vertente, atentaremos para as demais variáveis (tipo de representação e nível de dificuldade) que também estão presentes em cada uma delas.

Gráfico 3 – Desempenho dos grupos, segundo as questões referentes à sequência



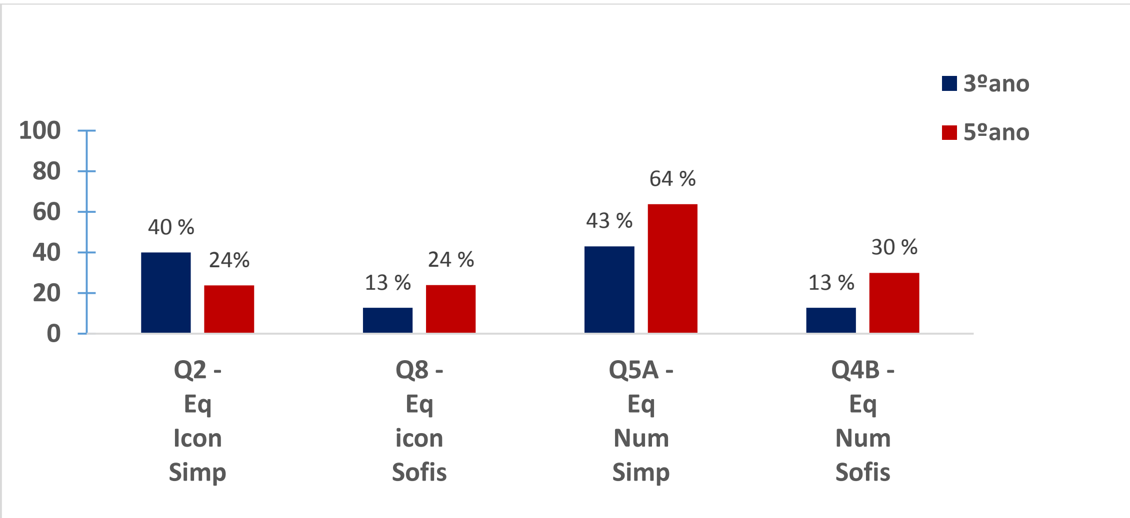
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que do ponto de vista da variável, tipo de representação, as situações-problema que envolvem a vertente das sequências icônicas foram indiferentes aos estudantes, seja simples ou sofisticada (teste X^2 e p-valor de 0,003). Ou seja, que o comportamento dos estudantes, quanto aos ícones, foi estatisticamente irrelevante para essa vertente algébrica em ambos os grupos. Enquanto que na representação numérica, esses mesmos estudantes obtiveram um desempenho significativo tanto para um maior quanto para um menor percentual e acerto.

A combinação numérica com o nível de dificuldade simples obteve um melhor desempenho para ambos os grupos, notadamente para os estudantes do 5º ano. Esses dados apresentam um percentual relevante para a representação numérica para com o nível de dificuldade simples, tanto inter como intragrupos, favorecendo o nível simples em detrimento do sofisticado. Entretanto, a representação numérica sofisticada ocasionou uma queda considerável no desempenho. Convém-nos ressaltar que a representação numérica demonstrou saltos acentuados nos dois grupos. As sequências simples foram de fato mais fáceis para ambos os grupos (teste x^2 e p-valor igual a 0,000). O resultado apontado nos dados nos permite prever que o nível de dificuldade apresentado nas situações-problema com sequências representa um aporte significativo para os estudantes no desenvolvimento das primeiras noções algébricas. Desse modo, permite-nos sugerir que uma prática em sala de aula, para os anos iniciais, do Ensino Fundamental, com atividades que explorem sequências simples podem ser um caminho favorável a construção de vários conceitos algébricos, tais como a função.

Por fim, consideramos que o resultado, quanto à variável *dificuldade simples*, pode ser um indicador que o trabalho com sequências (repetitiva ou recursiva), a generalização de padrões e a organização de leis sequenciais em diferentes contextos (BRASIL, 2012; BRASIL, 2017) oferecem oportunidades positivas para a educação algébrica dos anos iniciais, do Ensino Fundamental. Corroborando com especialistas que discutem o potencial do reconhecimento de regularidades, padrões e relações, como uma proposta plausível para a introdução do ensino da Álgebra para os anos iniciais, do Ensino Fundamental (NCTM, 2000, 2007; VALE et al, 2006; RIBEIRO, 2015; CANAVARRO,2007; BRASIL 2012; KIERAN, 2007, 2016; TEIXEIRA, 2016; dentre outros)

Gráfico 4 – Desempenho dos grupos, segundo as questões referentes à equação

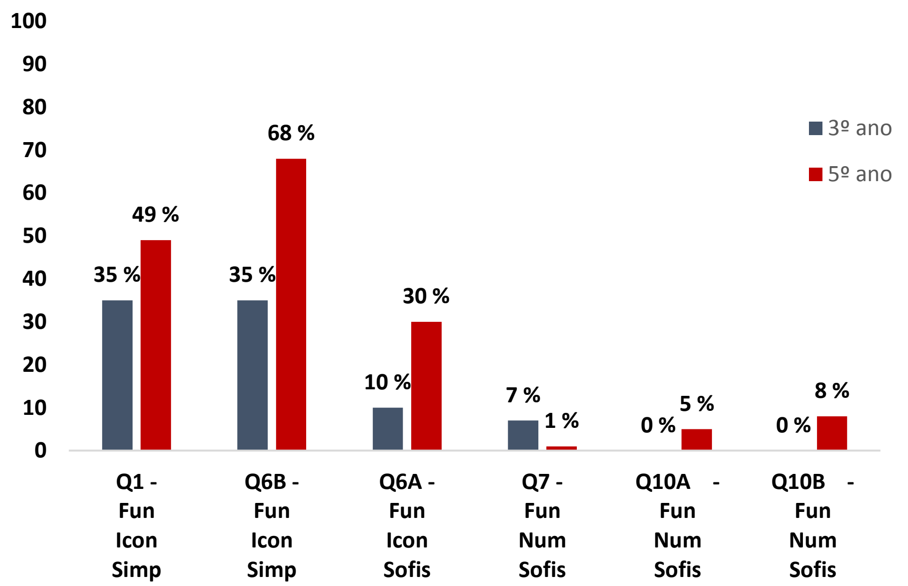


Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que as situações-problema que envolvem a vertente equação na representação simples, ambos os grupos se saem melhor, embora não seja tão significativo (x^2 e p-valor igual a 0,034). Mais uma vez, como na sequência, identificamos que a variável nível de dificuldade simples combinada com a representação numérica nos parece ser de fato realmente mais fáceis também para a vertente *equação*. E que a numérica sofisticada continua sendo para ambos os grupos a com um pior percentual de acertos.

Se olharmos apenas os estudantes do 3º ano, veremos que as situações-problema de nível de dificuldade simples seja com representação numérica ou icônica são aquelas em que os estudantes são mais bem-sucedidos. Observamos também que o fator ícone combinado com o nível de dificuldade simples os favorece significativamente. O mesmo não ocorre com os estudantes do 5º ano, pois para esse grupo a combinação que surte um efeito diferenciado das demais é apenas para representação numérica e simples (mais que o dobro de acerto). As outras combinações embora apresentem diferença percentual, ela não é significativa.

Gráfico 5 – Desempenho dos grupos, segundo as questões referentes à função



Fonte: Dados da pesquisa.

Mais uma vez, a leitura dos dados nos aponta para um melhor desempenho de ambos os grupos para a representação simples. A diferença entre uma situação-problema funcional de representação simples ou sofisticada é estatisticamente significativa segundo o teste *qui-quadrado* (p-valor igual a 0,000). Como temos observado nas vertentes da sequência e da equação, a representação simples é um fator favorável à compreensão epistemológica dos estudantes em situações-problema que envolvem as noções básicas de Álgebra Elementar.

Devido à exclusão da situação-problema 5B, que envolvia a função numérica simples, não temos como precisar se o desempenho dos grupos refletiria o mesmo favorecimento verificado nas duas vertentes analisadas nas subseções anteriores em relação à numérica simples.

Notamos que a melhor combinação para a função foi a de representação icônica simples, para ambos os grupos. E que a representação numérica sofisticada tem o efeito de chão. O maior percentual de acerto foi 8%, isso mostra que eles se equivalem, que não apresentam capacidade para discorrer sobre situações que impliquem uma relação funcional. Notamos que em nenhuma das três situações-problema numéricas sofisticadas os alunos conseguem atingir pelo menos 10%. Isto era esperado, sendo natural esse percentual, uma vez que essas situações estão ligadas ao aprendizado formal. Resolver esse tipo de situação implica construir uma função a partir de uma situação-problema que não faz parte do conjunto de conceitos contemplados nos anos iniciais, do Ensino Fundamental.

Verificamos que para a variável do objeto matemático *função* a representação icônica favorece mais que para as outras vertentes (sequência e equação), em especial, as de nível simples. Esses dados são indícios de que é possível se trabalhar funções simples com os estudantes dos anos iniciais, desde que se crie funções com suportes mediados por ícones. Mais de um terço dos estudantes do 3º ano foi capaz de resolver a situação-problema de relação funcional icônica simples mesmo sem ter nenhum tipo de conhecimento formal. Quanto aos estudantes do 5º ano, esse percentual ainda maior quando se considera a numérica simples.

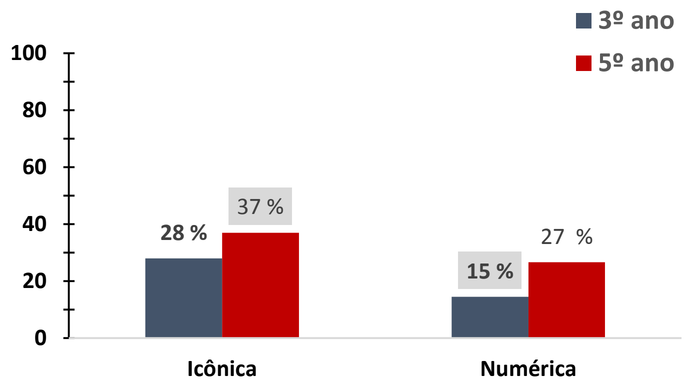
Por fim, averiguamos que a situação-problema que envolve o raciocínio funcional simples nos parece ter um custo menos sofisticado cognitivamente para os estudantes, mesmo sem esses terem sido submetidos a um processo de instrução conceitual. Uma forma de introduzir a noção de função tende a ser favorecida a partir das estruturas que envolvem as operações aritméticas. Essa postura vai ao encontro das ideias e os estudos de Quine (1987); Carraher, Schliemann e Brizuela (1999, 2000, 2005); Carraher e Schliemann (2007, 2014, 2015 2016); Carraher et al (2006), Teixeira, (2016) e outros para os anos iniciais, do Ensino Fundamental.

Após avaliarmos o desempenho dos estudantes quanto à variável objeto matemático, faremos agora uma análise comparativa entre o tipo de representação, quer seja numérico, quer seja icônico e, a seguir, quanto ao nível de dificuldade simples ou sofisticado referente aos percentuais de acertos apresentados pelos estudantes no instrumento diagnóstico.

4.1.3 Análise do desempenho dos estudantes do 3º e 5º anos segundo a variável tipo de representação

Dedicamos esta subseção para proceder com a análise comparativa do desempenho geral dos estudantes do 3º ano e 5º anos, considerando o tipo de representação geral das situações-problema, seja icônico, seja numérico. Para facilitar a compreensão dos dados apresentamos o gráfico 6 que retrata o desempenho dos grupos.

Gráfico 6 – Desempenho dos grupos, segundo o tipo de representação



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que a representação icônica favorece significativamente aos estudantes dos dois grupos, embora com um baixo percentual de acertos. Esse percentual, mesmo baixo, está em consonância com o resultado do teste *qui-quadrado* que aponta uma diferença expressiva entre ser de representação icônica ou numérica (p-valor igual a 0,000). Mas se esse percentual for comparado com a média do desempenho geral, de 21% e 32% para os estudantes do 3º e 5º anos, respectivamente, essa taxa de acertos para o icônico foi superior.

O uso do ícone favorece mais de um terço dos estudantes do 5º ano, que conseguem desenvolver e acertar as situações-problema icônicas do instrumento diagnóstico, significando que mesmo sem instrução eles apresentam competências necessárias para resolução de tarefas matemáticas que envolvem noções básicas da Álgebra Elementar. Desde que essas tragam a representação icônica em sua estrutura.

Percebemos também que mesmo com baixo desempenho os estudantes do 3º ano se beneficiam mais na representação icônica do que da numérica, haja vista que a diferença entre as representações numéricas e icônicas é estatisticamente significativa. O icônico parece ser um apoio muito forte para esses estudantes a ponto de o percentual de acertos em relação à representação numérica passar de 15% para 28%. Um aumento na casa de 87% no seu rendimento em relação às situações-problema de representação numérica.

Ressaltamos que, de acordo com nossos dados, o uso do ícone nos parece ser um suporte didaticamente favorável a Álgebra. Esse resultado pode ser um indicador substancial e estatisticamente favorável de que a associação do ícone às situações-problema pode representar uma ferramenta importante para construção das noções algébricas básicas para os anos iniciais, do Ensino Fundamental. Entretanto, temos pouca literatura sobre as implicações desse tipo de representação para o ensino e também para a aprendizagem da Álgebra.

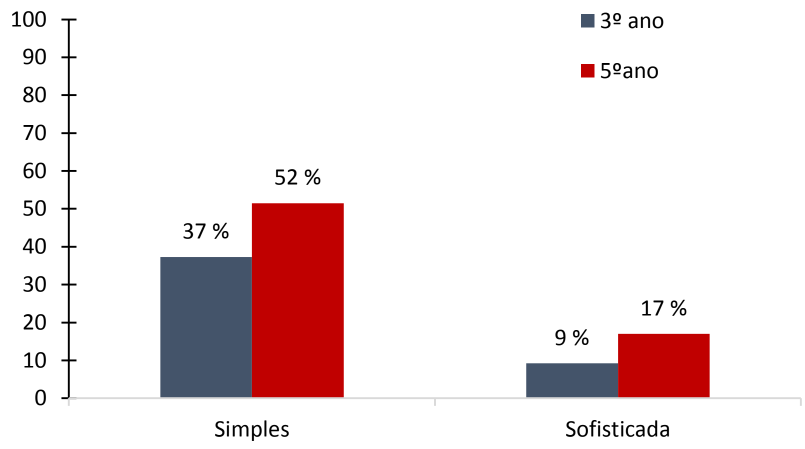
Quanto aos estudantes do 5º ano, essa diferença no percentual de acertos não foi tão expressiva, seu aumento ficou na casa de 37%. Mas se lembrarmos que uma situação icônica fala por si mesmo (Capítulo 3) estaremos contribuindo para tornar nossos estudantes autônomos na geração e construção de sua própria aprendizagem (ALARCÃO, 2011). Isto nos faz refletir até que ponto será aceitável a abordagem algébrica baseada em métodos prontos e enfadonhos.

4.1.4 Análise do desempenho dos estudantes do 3º e 5º anos segundo a variável nível de dificuldade

Destinamos esta subseção para proceder à análise do desempenho geral dos estudantes quanto ao nível de dificuldade simples ou sofisticado apresentado nas situações-problema. Vale ressaltar que para nós as situações simples são aquelas em que os educandos conseguem resolver a partir de cálculos elementares, e as sofisticadas as que requerem uma competência mais elaborada, envolvendo duas ou mais etapas na sua resolução.

4.1.4 Análise quanto ao nível de dificuldade

Gráfico 7 – Desempenho dos grupos, segundo nível de dificuldade



Fonte: Dados da pesquisa.

A leitura dos dados referentes ao nível de dificuldade simples vem mais uma vez reforçar a análise que fizemos em relação ao objeto matemático segundo as situações-problema nas vertentes da sequência, da equação e da função. Verificamos um mesmo comportamento para ambos os grupos pesquisados. Esse resultado tem amparo no teste *qui-quadrado* (p-valor igual a 0,000) que demonstra uma diferença estatística significativa entre as situações cujo nível de dificuldade seja simples ou sofisticada. As situações-problema simples foram realmente caracterizadas como elementares e básicas para os estudantes, estando de acordo com nossa análise *a priori*.

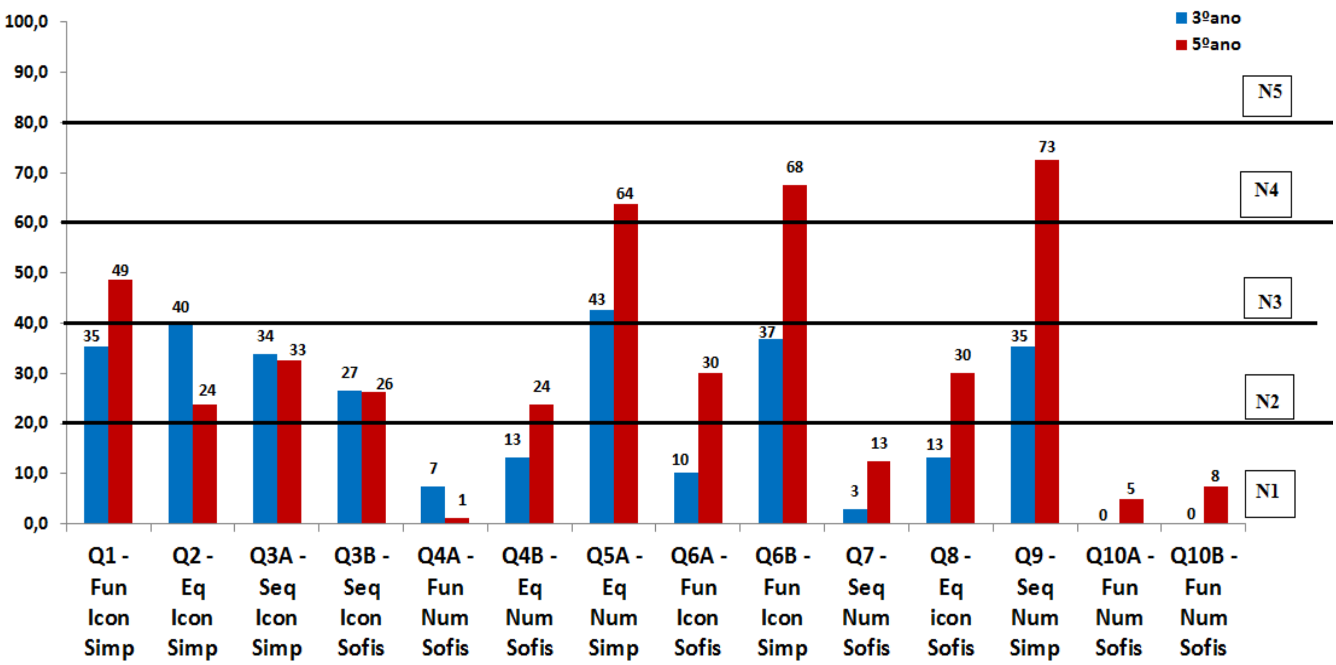
Observamos que mais da metade dos estudantes do 5º ano e mais de um terço dos estudantes do 3º ano resolveram situações-problema simples envolvendo noções básicas da Álgebra Elementar, sem nunca terem tido acesso a esse tipo de instrução. Vale relembrar que eles não passaram por nenhuma intervenção pedagógica para a realização desta pesquisa. E, no entanto, uma parcela considerável dos estudantes se mostra capacitado para resolver esse tipo de situação, desde que envolvam cálculos, relações ou generalizações simples.

O que nos permite conjecturar que não existe razão para adiar a antecipação dos conceitos algébricos para os anos iniciais, do Ensino Fundamental. E que se forem proporcionados a essas condições favoráveis para a aprendizagem, eles terão condições de desenvolver um raciocínio algébrico precoce e potencialmente progressivo. Essas ideias estão alinhadas às discussões propostas por especialistas em várias partes do mundo, como: (BOOTH, 1984; BLANTON, 2008; KAPUT, 1984; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL 1992, 1993; FALCÃO, 1993, 2003; CARRAHER; SCHIELEMANN, 2007; BRIZUELA, 2006; LINS; GIMENEZ, 2001; KIERAN, 2016). E tantos outros que defendem a *Early Algebra* como uma proposta de ensino didaticamente viável e atual, capaz de tornar possível a introdução da Álgebra desde os anos iniciais, do Ensino Fundamental.

4.1.5 Análise do desempenho dos grupos, considerando todos os itens do instrumento

Por fim, nessa subseção iremos analisar qual o percentual de acertos intergrupos, considerando cada um dos itens investigados. Quer seja em relação às suas vertentes algébricas (sequência, equação ou função); tipo de representação (numérico ou icônico) e ainda quanto o nível de dificuldade (simples ou sofisticada). Para promover a análise dos dados, vamos considerar os resultados exibidos no gráfico 8.

Gráfico 8 – Desempenho dos grupos, segundo todos os itens do instrumento diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

Para facilitar a leitura dos dados apresentados no gráfico 8, dividimos os percentuais de acertos em cinco níveis (N1, N2, N3, N4 e N5) de igual intervalo, em que cada nível abrange um percentual de 20% de acertos. Assim, o N1 refere-se ao nível mais baixo de acerto, ficando entre 0% e 20%; o N2 de 21% a 40%; o N3 de 41% a 60%, o N4 de 61% a 80% e por fim o N5 de 81% a 100% de acertos.

Numa análise intragrupo, notamos que para os estudantes do 3º ano, dos 14 itens avaliados, sete desses se encontraram no nível mais baixo de acerto. Isto significa que em metade dos itens estudados o 3º ano se encontra no N1, o nível mais elementar. Seis itens no nível N2, e apenas um no nível N3. E nenhum percentual de acerto nos níveis N4 e N5. Mesmo que majoritariamente os estudantes do 3º ano se concentram no nível N1, existe uma parcela significativa se encontra no nível N2. Essa parcela compreende um percentual de acertos razoáveis (admiráveis), uma vez que esses estudantes nunca tiveram contato com situações-problema do tipo investigado.

Enquanto que para os estudantes do 5º ano, dos 14 itens avaliados, quatro se encontram também no N1, seis no nível N2, um no nível N3 e três no nível N4. E nenhum no nível N5. O 5º ano apresenta percentual de acertos concentrados mais no nível N2. Esses resultados de ambos os grupos demonstram que mesmo sem ter conhecimento prévio das noções básicas da Álgebra Elementar, eles se mostram prontos para receber a instrução algébrica e retardá-la pode representar uma demora e um desperdício desnecessário do potencial cognitivo desses para a Álgebra futura.

Nenhum dos dois grupos atingiu o nível N5. Isto era previsível, uma vez que esses conceitos não fazem parte do currículo escolar dos anos iniciais, do Ensino fundamental, e que os discentes não foram submetidos a nenhum tipo de intervenção pedagógica durante a pesquisa. Para atingir o nível de desempenho, N5, os estudantes dependem da introdução e da formalização dos conceitos algébricos implicados nesta investigação, ou de um trabalho didático na perspectiva da *Early Algebra*.

Para uma análise geral quanto ao percentual de acertos, a diferença e o indicativo de significância (segundo x^2) entre as situações-problema em relação a ambos os grupos de estudo, apresentamos uma tabela gerada pelo sistema SPSS.

Tabela 1 – Síntese geral das variáveis de estudo, segundo sua taxa de acerto

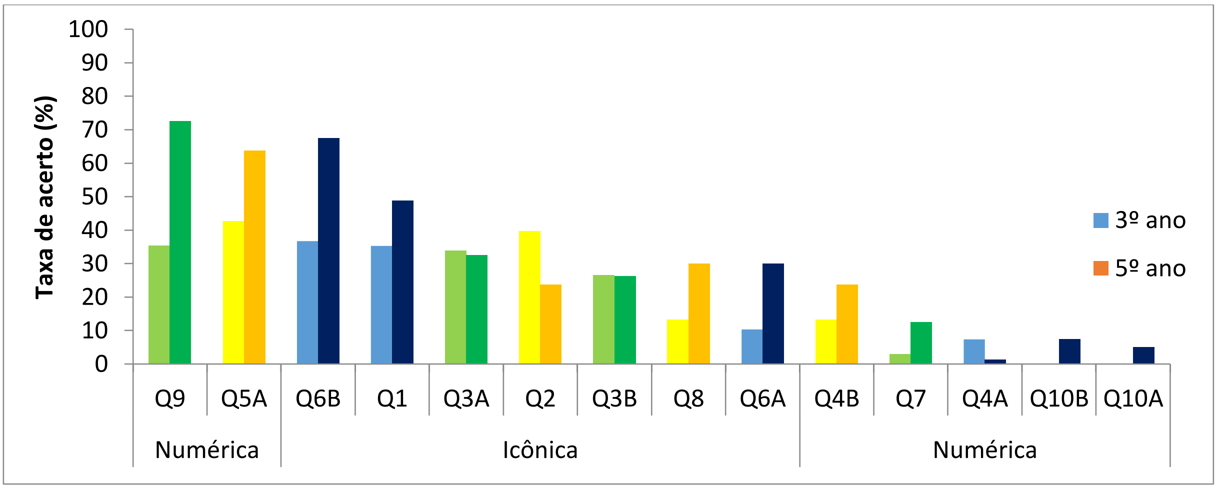
Questão	Q9	Q5A	Q6B	Q1	Q3A	Q2	Q3B	Q8	Q6A	Q4B	Q7	Q4A	Q10B	Q10A	Geral
C	S	E	F	F	S	E	S	E	F	E	S	F	F	F	
R	N	N	I	I	I	I	I	I	I	N	N	N	N	N	
D	Si	Si	Si	Si	Si	Si	So	So	So	So	So	So	So	So	
3º ano	35,29	42,65	36,76	35,29	33,82	39,71	26,47	13,24	10,29	13,24	2,94	7,35	**0,00**	**0,00**	21,22
5º ano	72,50	63,75	67,50	48,75	32,50	23,75	26,25	30,00	30,00	23,75	12,50	1,25	5,00	7,50	31,79
Geral	55,41	54,05	53,38	42,57	33,11	31,08	26,35	22,30	20,95	18,92	8,11	4,05	2,70	4,05	26,93
p-valor	0,000	0,010	0,000	0,099	0,865	0,037	0,976	0,015	0,003	0,104	0,034	0,610	0,062	0,021	0,000
Dif	37,21	21,10	30,74	13,46	-1,32	-15,96	-0,22	16,76	19,71	10,51	9,56	-6,10	5,00	7,50	10,57

Fonte: Dados da pesquisa.

Notamos que 50% dos 28 percentuais de acertos (7 para 3º ano e 7 para o 5º ano) dos estudantes se encontram nos níveis N2 e N3 (entre 20% a 40%). Em outras palavras, que a metade dos estudantes investigados consegue desenvolver satisfatoriamente as situações-problema apresentadas na pesquisa sem conhecimento dos conceitos envolvidos. Verificamos que majoritariamente as situações são do tipo de representação simples (seis em sete), com apresentação em todas as vertentes avaliadas, quer seja numéricas, quer seja icônicas. Dessas situações-problema três apresentam um maior percentual de acertos tanto para o 3º ano quanto para o 5º ano (Q5A, Q6B e Q9), variando nas três vertentes e todas simples.

Para compreensão e leituras dos dados da tabela, observemos o gráfico referente à taxa de acerto e as variáveis de estudo.

Gráfico 9 – Desempenho dos grupos, segundo as variáveis de estudo, em ordem decrescente de acerto



Fonte: Dados da pesquisa.

Legenda: Os dados no tons de cor amarela refere-se as situações-problema da vertente da equação; os de cor ver à vertente da função e de cor azul da vertente da função.

A leitura do gráfico acima reforça as discussões que trouxemos até então quanto às competências dos estudantes em resolver situações-problema envolvendo as noções básicas da Álgebra. E mais uma vez, os resultados confirmam o potencial dos educandos desde que essas apresentem um nível de dificuldade simples. Podemos verificar que os estudantes investigados dispõem de um repertório de conceitos espontâneos[65] e que esses têm referência com as noções algébricas elementares. Mesmo de forma intuitiva, os conceitos podem ser observados nos graus dos desempenhos que eles apresentam e nos protocolos de respostas gerados. Ainda com estratégias alternativas, os estudantes já conseguem desenvolver esse tipo de situação-problema sem nenhuma intervenção pedagógica. Vale, então, conjecturar que se forem disponibilizadas condições favoráveis à sua aprendizagem esses poderão desenvolver um raciocínio algébrico ainda nos anos iniciais.

Essa hipótese vai ao encontro das mudanças propostas pela BNCC (BRASIL,2017) quando propõe a introdução do pensamento algébrico como um dos eixos norteadores da Álgebra desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Reportando as observações feitas na subseção 4.1.2, identificamos nas situações-problema de raciocínio funcional de representação numérica e com um nível de dificuldade sofisticado uma falta de aptidão para a sua resolução para ambos os grupos. Apresentam o mesmo comportamento estatístico nas situações-problema Q4A, Q10A e Q10B. Esse resultado era esperado, uma vez que essas situações demandam um conhecimento algébrico mais elaborado na montagem de uma função a partir de um contexto numérico. Nessas situações-problema, o valor desconhecido assume *status* de variáveis dependentes[66], exigindo um raciocínio generalizado e formalizado do tipo $f(x) = ax + b$, que não faz parte de seu currículo da matemática dos anos iniciais, do Ensino Fundamental. Esse resultado está alinhado com as discussões de Teixeira (2016) ao, em sua pesquisa, ressaltar que os estudantes do 5º ano apresentam dificuldades em resolver situações cujo raciocínio necessário seja o funcional, visto que essas demandam um maior esforço cognitivo e um tipo de entendimento algébrico, o qual os estudantes dos anos iniciais, do Ensino Fundamental, não estão habituados (atual organização curricular). Podemos estender a observação também para os estudantes do 3º ano. Caso esse fato proceda somente poderemos compreendê-lo analisando os esquemas

[65]Segundo Vygotsky, este conceito tem caráter local, segue um caminho ascendente e é adquirido através de experiências fora do ambiente escolar (DER VEER, 1991).
[66]Abordado na seção 1.1.2, as concepções da Álgebra.

apresentados nos protocolos de resposta.[67] Desse modo, as situações-problema de nível de dificuldade simples e sofisticada apresentam um efeito teto e efeito chão, respectivamente.

Vale ressaltar que para os estudantes do 3º ano a situação-problema Q5A foi o item de maior percentual de acertos em todo o instrumento diagnóstico. Temos que nessa situação-problema a variável assume *status* de incógnita[68] ou constante e tem a função de simplificar e resolver a expressão (USISKIN, 1995). Verificamos que "atividades como esta contribuem para compreensão que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita" (BRASIL, 2017, p. 226), mas também uma relação de equivalência entre os membros de uma sentença. Esse tipo de situação-problema já é notado nos livros didáticos, todavia como resultado de operação aritmética (LINS; GIMENZ, 2001) e não como a vertente algébrica da equação.

Isto nos mostra que algumas noções básicas da Álgebra Elementar residem quietamente no currículo de matemática dos anos iniciais, do Ensino Fundamental, (CARRAHER; SCHLIEMANN; SCHWARTZ, 2005) à espera de serem despertadas. Podendo ser encontradas em tópicos de adição, multiplicação, divisão, proporção, medição e em sistemas de representação de gráficos e tabelas.

Todos os resultados aqui descriminados quanto às variáveis do estudo (objeto matemático, tipo de representação, nível de dificuldade) foram investigados pelos testes *qui-quadrado, t-student* e *McNemar* e apresentaram diferenças estatísticas que foram discutidas embasadas no aporte teórico-metodológico proposto.

Até agora estivemos discutindo as competências dos estudantes ao lidar com situações-problema envolvendo nossas variáveis de estudo, mas não sabemos o que eles fizeram. Como chegaram aos resultados apresentados. Eventualmente, os discentes podem não ter acertado, mas ter utilizado de estratégias que os levaria ao acerto. Mas não fizeram devido a um erro nas estratégias elencadas, por isso precisamos olhar a qualidade das respostas (esquemas de ação) dos estudantes. Esperamos identificar e classificar essas estratégias das respostas dos estudantes que será feito na análise qualitativa, na seção seguir.

4.2 Análise qualitativa dos dados

Na parte qualitativa buscaremos identificar as estratégias dos estudantes. A regra de ação por trás de cada esquema. Essas regras não são todas algorítmicas, vão além de um

---

[67]Esta investigação será feita na seção de análise qualitativa.
[68]Também abordado na seção 1.1.2, as concepções da Álgebra.

programa. São regras heurísticas que demonstram a causa e qual o direcionamento de determinadas reflexões no estudante, algumas são conscientes, outras não (VERGNAUD, 2014). Portanto nesta subseção nos interessa identificar e analisar como o estudante resolveu a situação-problema? Qual conceito subjaz a sua resposta? Qual o nível de raciocínio empregado? E qual a relação do seu fazer aritmético com o fazer algébrico?

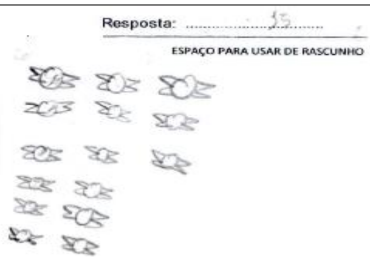
Sabemos que os estudantes de nossa pesquisa não passaram por uma instrução conceitual dos conteúdos algébricos, mas uma vez que utilizaram esquemas na resolução (ou tentativa) de forma assertiva ou não, o fato demonstra indícios de sua existência em seu repertório operacional. Compete-nos analisar os registros e gerar resultados pertinentes ao referencial teórico escolhido.

No que tange aos participantes do estudo, foram 148 estudantes, sendo 68 do 3º ano, e 80 do 5º ano. Esses estudantes responderam a um teste composto por dez situações-problema, perfazendo um total de 14 subitens. Então, a partir dos 148 protocolos gerados obtivemos 2.072 respostas, em que 952 eram referentes aos estudantes do 3º ano, e 1.120 aos estudantes do 5º ano. Desse total de respostas (2.072) descartamos 1.135 por não permitirem a realização da análise das estratégias de ação. Assim, identificamos o *grupo das respostas em branco* (155); O *grupo das respostas sem explicitação dos esquemas de ação* utilizados (977, sendo 426 do 3º ano, e 551 do 5º); e o *grupo das respostas que repetiram um dos números do enunciado* (três do 3º ano). Portanto, essa seção analisará qualitativamente 937 respostas (395 advindas dos estudantes do 3º ano, e 542 do 5º), as quais apresentaram algum tipo de esquema (certo ou errado).

A seguir, apresentaremos dois protocolos para ilustrar o segundo e o terceiro grupos acima referidos, nos quais parece evidente que os estudantes lançaram mão de algum esquema de ação, mas nós não conseguimos identificá-lo. Os dois exemplos referem-se à situação-problema Q1.

Exemplo.2.1 – Duas respostas que foram desconsideradas para efeito da análise qualitativa do estudo

Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 58, extrato do protocolo.



Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 01, extrato do protocolo.

Observamos que ambos os estudantes (3º e 5º anos) apresentam um tipo de esquema de resolução, todavia como não temos como identificar qual a ação e qual a relação dessa para com os comportamentos propostos na metodologia, optamos por desconsiderá-los como objetos de análise. Analisaremos apenas os esquemas de ação cujos registros sejam passíveis de apreciação nos extratos dos protocolos.

Dando seguimento a análise qualitativa, apresentaremos as categorias consideradas para essa, tendo-as como fatores essenciais para sua viabilização. Elas foram concebidas baseadas em dois pontos de vista: (1) categorias *a priori*, referente ao quadro teórico e (2) categorias que emergiram das respostas dos estudantes.

No tocante a primeira categoria, analisaremos as habilidades encontradas nos estudantes a partir do objeto matemático da Álgebra proposto pela BNCC[69] (BRASIL, 2017) e por especialista que fundamentam nossa pesquisa. Na segunda categoria, as estratégias utilizadas pelos estudantes utilizadas para resolver as situações-problema. Trata-se, portanto, de uma análise *a posteriori*. Nessa análise, sempre que pertinente, apontaremos os teoremas-em-ação que estão por trás dos esquemas utilizados por esses estudantes.

4.2.1 Categorias de análise qualitativa

Buscaremos nessas categorias uma possibilidade de identificar, compreender, classificar e analisar os teoremas-em-ação que habitam nas estratégias dos estudantes quando confrontados com as situações-problema investigadas. Sabemos que mediante a diferença escolar (3º e 5º anos) e desenvolvimento cognitivo dos estudantes teremos diferentes enfoques tanto para o ponto de vista epistemológico quanto para o processo estratégico.

No que tange à BNCC (BRASIL,2017), relataremos as estratégias referentes ao objeto matemático da Álgebra e as habilidades pleiteadas para os estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, segundo seu eixo estruturante[70] e aos subsídios teóricos da pesquisa para fundamentar nossas discussões. Para isto, apresentamos o quadro 7 contendo essas estratégias de análise e seus respectivos códigos. Na sequência, traremos uma exemplificação de cada uma dessas categorias encontradas.

---

[69]Ver quadro informativo na seção 1.2.1, capítulo I.
[70]O quadro contendo as estratégias na íntegra encontra-se no capítulo.

Quadro 7 – Categorias de análise, segundo referencial teórico

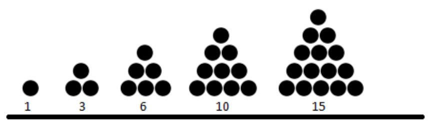
Código	Itens do teste	Objetos do conhecimento
ET1	3A, 3B, 7, 9	Identifica e constrói regularidades
ET2	2, 5A, 4B, 8	Estabelece uma relação de equivalência
ET3	1, 4A, 10A, 10B	Estabelece uma relação de proporcionalidade
ET4	1, 4A, 6A, 6B	Estabelece uma relação de funcionalidade
ET5	4A, 10A	Estabelece uma razão entre as partes e dela para com o todo

Fonte: Elaborado pela autora.
Legenda: ET1 = estratégia um baseada na categoria teórica; ET2 = estratégia dois baseada na categoria teórica; ET3 = estratégia três baseada na categoria teórica; ET4 = estratégia quatro baseada na categoria teórica; ET5 = estratégia cinco baseada na categoria teórica.

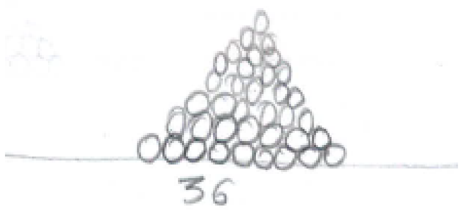
A categoria ET1 refere-se à habilidade de o estudante identificar ou construir regularidades em sequências (repetitivas e recursivas), reconhecimento de padrão e em generalizar modelos algébricos. Assim, observaremos, nas respostas dos alunos, os itens 3A, 3B, 7 e 9, se eles identificam e/ou constroem regularidades, ou se identificam elementos posteriores de uma sequência (BRASIL, 2017). A seguir, apresentamos um exemplo de resposta em que o estudante deixa claro que identifica e constrói a sequência recursiva proposta na situação-problema.

Exemplo 4.2.1.1 Resposta em que o estudante identifica e constrói regularidades

Q7 ─ Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.



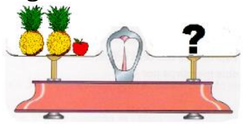
Seguindo essa mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?



Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 71, extrato do protocolo.

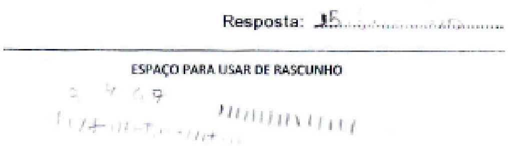
A ET2 foca em identificar a habilidade que o estudante apresenta ao manipular uma situação-problema em que o sinal de igualdade representa não apenas um resultado de operação a ser feita (LINS; GIMENEZ, 2001). Nessa, o estudante demonstra ter uma noção de equivalência e utiliza dessa relação recursos para encontrar elementos desconhecidos (BRASIL, 2017). Para exemplificar a situação apresentamos uma resposta de um estudante retirada do extrato de protocolo.

Exemplo 4.2.1.2 – Resposta em que o estudante estabelece uma relação de equivalência

Q8 – A balança se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro. As maçãs têm o mesmo peso. As bananas têm o mesmo peso. **Figura 1** 	Quantas maçãs temos que colocar no prato da direita para que a balança permaneça em equilíbrio? **Figura 2** 
 **Fonte:** Resposta do estudante do 3º ano, nº 71, extrato do protocolo.	

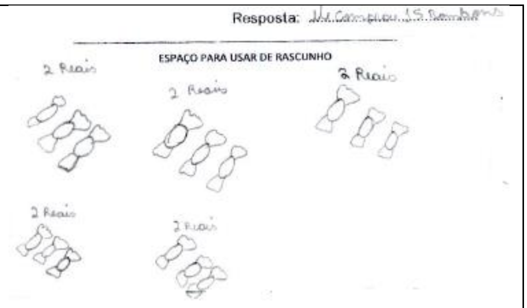
O foco da estratégia ET3 consiste na capacidade de o estudante utilizar um conhecimento de proporcionalidade direta e na variabilidade entre duas grandezas iguais para resolver uma situação-problema (POST; BEHR; LESH, 1995) em que emprega formas qualitativas de raciocinar baseadas em estimativas e habilidades perceptuais (SPINILLO, 1994), ou seja, apresenta um pensamento qualitativo entre as grandezas. A seguir, uma exemplificação dessa estratégia retirada do extrato do protocolo de respostas dos estudantes.

Exemplo 4.2.1.3 – Resposta em que o estudante estabelece uma relação de proporcionalidade

Q1 – Na venda de Dona Ana com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:  Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou? 	 **Fonte:** Resposta do estudante do 3º ano, nº 11, extrato do protocolo.

No que tange a estratégia ET4, o estudante identifica uma relação funcional entre variáveis distintas e estabelece um operador que lhe possibilite estabelecer a variabilidade entre seus elementos dependentes (BRASIL, 2017). Para melhor compreensão observe um exemplo retirado do extrato de protocolos de respostas dos estudantes.

Exemplo 4.2.1.4 – Exemplo de resposta em que o estudante estabelece uma relação de funcionalidade

Q1 – Na venda de Dona Ana com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:  Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou? 	 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 23, extrato do protocolo.

Na ET5, o estudante utiliza a noção de razão entre duas partes desiguais, de modo que uma seja o dobro da outra ou uma parte dessa. Em que coexiste uma relação de ordem entre conjuntos (BRASIL, 2017). Verifique um exemplo de resposta retirada do extrato do protocolo dos estudantes que demonstra essa habilidade.

Exemplo 4.2.1.5 – Resposta em que o estudante estabelece uma razão entre as partes e dela para com o todo

Diogo e Matheus querem saber quem tem mais dinheiro. Diogo tem um valor dentro da carteira e mais R$ 3 na mão. Matheus tem 2 vezes mais o valor que Diogo tem dentro da carteira. a) Quem tem mais dinheiro? Por quê? b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Diogo terá dentro da sua carteira?	Resposta b)  **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 72, extrato do protocolo.

A partir desse momento, nossa discussão concentra-se nas estratégias observadas nos protocolos de respostas dos estudantes pesquisados, quanto ao quesito das estratégias baseadas no referencial teórico ou apresentadas amiúde nos esquemas registrados pelos estudantes.

Tabela 2 – Estratégias utilizadas pelos estudantes, segundo referencial teórico

Anos	Código				
	ET1	**ET2**	**ET3**	**ET4**	**ET5**
3º ANO	23	28	17	10	12
5º ANO	27	50	49	13	17

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisarmos a tabela 2, notamos que a capacidade de identificar e construir regularidades se equivalem entre os estudantes de ambos os grupos. O desenvolvimento dessa habilidade faz parte do currículo de matemática desde os anos iniciais, do Ensino Fundamental, no campo das relações, quer seja na forma de regularidades sequenciais numéricas, quer seja no campo geométrico (PCN, 1997). Entretanto esse resultado similar (27 para os estudantes do 5º ano, e 23 para os do 3º ano) chama a atenção para esse emparelhamento comportamental entre os estudantes pesquisados. Todavia, não nos sentimos à vontade para julgá-lo.

O que não acontece em relação ao comportamento funcional, pois sabemos que os manuais didáticos omitem a relação existente entre as operações básicas da aritmética e as noções de funções (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2016), sendo compreensível essa afinidade (13 para os estudantes do 5º ano, e 10 para os do 3º ano). E, também, se observarmos a atual organização curricular, o conceito de função somente é estudado a partir do 8º ano, do Ensino Fundamental, assim, o resultado equivalente entre as estratégias observadas com relação à funcionalidade é reflexo dessa filosofia.

Outra observação que nos parece bastante coerente com a realidade escolar refere-se àquela que identifica a tendência da relação de proporcionalidade. É compreensível a diferença comportamental entre os estudantes do 3º ano para os do 5º ano (17 para 49, respectivamente), pois esse conceito é construído e aperfeiçoado a partir do 2º ciclo de alfabetização (PCN, 1997). No que concerne à relação de equivalência, os estudantes do 5º ano apresentam uma diferença significativa em relação aos estudantes do 3º ano. Esse comportamento pode ser entendido como a forma que o sinal de igual é comumente retrato nos manuais didáticos, resultado de uma operação (LINS; GIMENEZ, 2001) e não como uma relação de equivalência.

Com a homologação e implantação das diretrizes da BNCC (BRASIL, 2017) esse resultado tende a oportunizar a mudança do perfil (tabela 2) dos estudantes a médio e longo prazo, visto que o eixo da Álgebra trará as ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade como base para a formação do pensamento algébrico. Essas noções conceituais deverão ser enfatizadas a partir do estabelecimento de generalizações, a análise de interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (BRASIL 2017).

4.2.2 Análise das estratégias dos estudantes observadas *a posteriori*

Ao observar os extratos dos protocolos de respostas, identificamos vários tipos de registros (solução) passíveis de análise, sendo 937 respostas analisáveis (conforme explicado no início da seção). Nesse momento do estudo, compete-nos identificar, classificar e analisar a natureza das estratégias exibidas no instrumento diagnóstico. Sendo esses resultados fruto do processo de construção das soluções (ou tentativas) que os estudantes manifestaram, ou que nos permitem inferir (com base teórica). Esses esquemas nortearam nossas categorias de análise qualitativa. Para melhor compreendê-los, eles foram agrupados em categorias, perfazendo um total de seis itens.

Tabela 3 – Estratégias utilizadas pelos estudantes

Código	Estratégia
EA.1	Icônica
EA.2	Numérica
EA.3	Mista: icônica e numérica
EA.4	Estrutura aditiva
EA.5	Estrutura multiplicativa
EA.6	Mista estrutura aditiva e multiplicativa

Fonte: Elaborado pela autora.

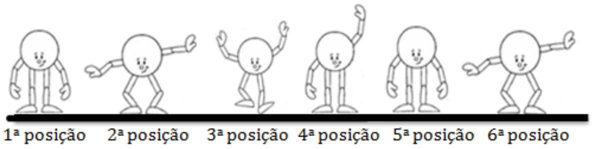
Legenda: EA.1 = estratégia baseada num esquema de representação apenas icônica; EA.2 = estratégia baseada num esquema de representação apenas numérica; EA.3 = estratégia baseada num esquema de representação mista: icônica e numérica; EA.4 = estratégia baseada num esquema numérico com estrutura aditiva; EA.5 = estratégia baseada num esquema numérico com estrutura multiplicativa; EA.6 = estratégia baseada num esquema numérico com estrutura mista: aditiva e multiplicativa.

As categorias foram identificadas quanto à natureza de sua representação, da estrutura operatória e o tipo de raciocínio apresentado pelos estudantes na resolução ou tentativa de resolução das situações-problema do instrumento diagnóstico. Vamos explanar os elementos que as compõem em particular.

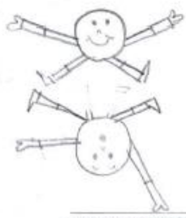
No que compete a estratégia EA.1, o estudante utiliza em seus esquemas apenas registros baseados em figuras (ícones) que estão imbricadas na situação-problema ou criação individual (representação idiossincrática), sem a necessária ligação com a resposta. A seguir, verifique um exemplo dessa estratégia retirada dos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes.

Exemplo 4.2.2.1 – Resposta utilizando uma estratégia icônica

Q3 – Carlitos é um boneco que adora fazer exercício. No exercício, ele flexiona as pernas e mexe os braços, seguindo uma ordem nos movimentos. Ele pretende continuar nessa atividade por algum tempo. Veja a ordem dos exercícios do Carlitos.



a) Desenhe ao lado como ele estará na 9ª posição.
b) Desenhe ao lado como ele estará na 58ª posição.



ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

Eu pensei em fazer assim, eu inventei porque eu pensei mesmo exercícios físicos.

Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 54, extrato do protocolo.

Na estratégia EA.2, o estudante apresenta apenas números para compor seu processo de resolução. Vale ressaltar que nessa estratégia os números são utilizados como teorema-em-ação e não apenas para descrever a resposta. Veja um exemplo desse tipo de estratégia retirada do extrato do protocolo de respostas do estudante.

Exemplo 4.2.2.2 – Resposta utilizando uma estratégia numérica

Q9 – Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.

1	4	7	10	...	...	...	...	...

Quando retornar, deverá concluir essa sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?

Resposta: 25

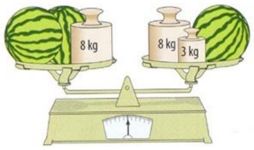
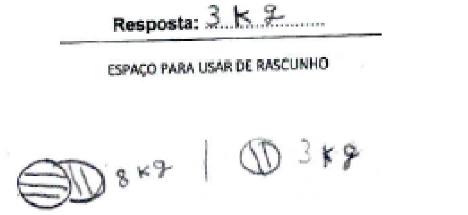
ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

1 – 4 – 7 – 10 – 13 – 16 – 19 – 22 – 25.

Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 14, extrato do protocolo.

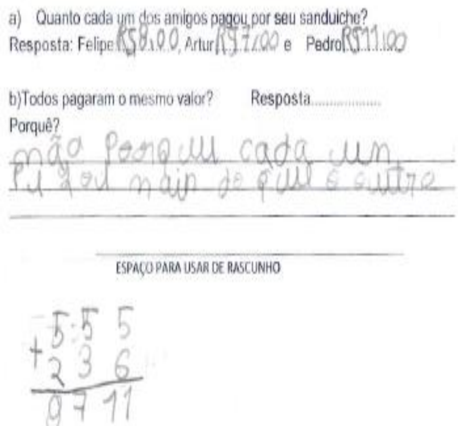
No que tange a estratégia EA.3, o estudante apresenta em seu esquema de ação um misto de representações, envolvendo ícones ou números. Uma representação se apoia na outra. Observe esse tipo de estratégia no esquema apresentado pelo estudante do 3º ano, número 47, em que utiliza as duas representações ícone (melancias) e o seu peso (número).

Exemplo 4.2.2.3 – Resposta com estratégia que envolve representação numérica e icônica, simultaneamente

Q2 – Observe que a balança abaixo se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro prato. Todas as melancias têm o mesmo peso?  Qual é o peso de apenas uma melancia?	 **Fonte**: Resposta do estudante, do 3º ano, nº 57, extrato do protocolo.

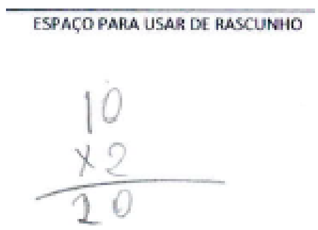
No que concerne a EA.4, o estudante apresenta na construção do esquema de ação elementos de estrutura aditiva, cujo tratamento implica aplicação de uma ou várias operações de adição ou de subtrações (VERGNAUD, 1996). Para retratar essa estratégia, apresentamos um exemplo retirado do extrato do protocolo de respostas dos estudantes.

Exemplo 4.2.2.4 – Resposta com estratégia segundo uma estrutura aditiva

Q6 – Na lanchonete da pracinha está acontecendo uma promoçã **MONTE SEU PRÓPRIO SANDUÍCHE** BÁSICO:  Pão + Bife COMPLEMENTO: Para cada um dos ingredientes acrescenta  **+ R$ 1,00** Felipe, Artur e Pedro foram lanchar. Cada um deles vai querer incrementar seu sanduíche.  Felipe pediu o básico mais queijo, ovo e cebola; Artur solicitou o básico mais queijo e bacon; Pedro turbinou o dele acrescentando no básico: queijo, ovo, tomate, alface, cebola e batata palha.	 **Fonte:** Resposta do estudante do 3º ano, nº 14, extrato do protocolo.

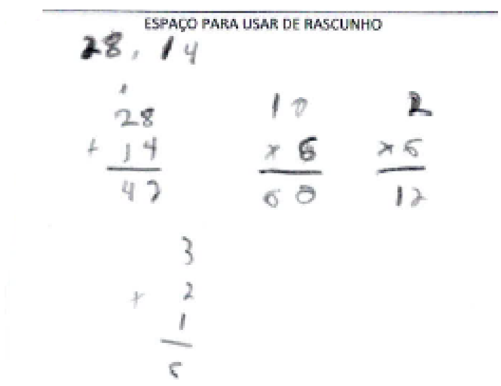
Na estratégia EA.5, o estudante apresentou na construção do esquema de resolução elementos da estrutura multiplicativa, cujo procedimento implica aplicação de uma ou várias operações, quer seja de multiplicação, quer seja de divisão (VERGNAUD, 1996). A seguir, observe um exemplo dessa estratégia retirada dos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes.

Exemplo 4.2.2.5 – Resposta com uma estratégia segundo uma estrutura multiplicativa

Q10 – Três amigos foram ao parque de diversão. Cada um levou uma quantia de dinheiro para gastar nos brinquedos. 1. Lúcia levou 2 notas de 10 reais e mais 4 notas de 2 reais; 2. João levou a metade das notas de 10 reais e a metade das notas de 2 reais que Lúcia levou; 3. Beto levou a quantia de Lúcia e João juntos. a) Quantas notas de 10 reais e quantas de 2 reais Beto levou? b) Quantas notas de 10 reais e de 2 reais os três amigos levaram juntos para o parque?	 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 28, extrato do protocolo.

No que tange a estratégia EA.6, o estudante do 5º ano, utilizou no esquema de ação, simultaneamente, elementos de uma estrutura aditiva, bem como de uma estrutura multiplicativa. Para evidenciar esse tipo de estratégias observe um exemplo retirado dos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes.

Exemplo 4.2.2.6 – Resposta de uma estratégia que apresenta estrutura aditiva e multiplicativa

Q10 – Três amigos foram ao parque de diversão. Cada um levou uma quantia de dinheiro para gastar nos brinquedos. 1. Lúcia levou 2 notas de 10 reais e mais 4 notas de 2 reais; 2. João levou a metade das notas de 10 reais e a metade das notas de 2 reais que Lúcia levou; 3. Beto levou a quantia de Lúcia e João juntos. a) Quantas notas de 10 reais e quantas de 2 reais Beto levou? b) Quantas notas de 10 reais e de 2 reais os três amigos levaram juntos para o parque?	 **Fonte**: Resposta do estudante do 5º ano, nº 72, extrato do protocolo.

Essas estratégias apresentam diferenças substanciais de estudante para estudante, de grupo para grupo. E para melhor compreendê-las, é imperativo categorizá-las conforme o comportamento apresentado pelos estudantes para que possamos avaliar os níveis de raciocínio apresentados pelos estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental.

Tabela 4 – Estratégias utilizadas pelos estudantes

Anos	**Código**					
	EA.1	**EA.2**	**EA.3**	**EA.4**	**EA.5**	**EA.6**
3º ANO	175	116	31	35	15	2
5º ANO	150	179	11	95	97	19

Fonte: Dados da pesquisa.

É imperativo nesse momento do estudo, notar que nos esquemas registrados, os estudantes não se comportaram de uma mesma maneira, apesar de estarem resolvendo as mesmas situações-problema. Os discentes do 3º ano apresentaram uma tendência de perfil oposta a dos estudantes do 5º ano, no que se refere às estratégias operatórias (211 para os estudantes do 5º ano, e 52 para os do 3º ano).

Baseado nos resultados, podemos pressupor que os estudantes do 3º ano necessitam de apoio maior de ícones que os do 5º ano (mais numérico). Isto parece-nos estar relacionado, intrinsecamente, com os estágios de desenvolvimento cognitivo, lógico, proposto por Piaget (1993)[71], visto que os alunos do 3º ano se encontram no estágio do operacional concreto, enquanto os do 5º ano estão saindo desse e movendo-se para o estágio operacional formal, que é cognitivamente mais avançado. Ou ainda, quanto aos estímulos do meio, uma vez que a escola incita muito mais o uso dos números para os estudantes do 5º ano, ao passo que, aos do 3º ano, é consentido o uso do desenho. Por fim, a maturação em que o estudante do 5º ano já se encontra mais desenvolvida cognitivamente, no campo operacional que o do 3º ano.

Ao analisar intragrupos, identificamos que os estudantes do 3º ano apresentam expressiva preferência por estratégias apenas icônicas (EA.1) em comparação com as de características numéricas[72] (EA.2+EA.4+EA.5+EA.6). Quando esses apresentam estratégias operatórias, as de estrutura aditiva se sobressaem em relação à multiplicativa (35 para 15, respectivamente). Esse resultado parece ter relação com a metodologia de ensino utilizada ao retratar a multiplicação como uma adição reiterada (quase sempre). Ou ainda, com a estrutura de cardinalidade encontrada no campo conceitual aditivo (VERGNAUD, 1996).

Entretanto, no que tange aos estudantes do 5º ano, esses utilizam, em seus esquemas, mais estruturas numéricas (EA.2+EA.4+EA.5+EA.6), que a de natureza icônica (EA.1). Isto nos permite classificá-los com um perfil numérico e novamente relacionar esse comportamento com os estágios de desenvolvimento lógico de Piaget, o de *operações concretas e operações formais*. Para referendar esse perfil numérico, podemos comparar as ocorrências numéricas (390), para as de natureza icônica (159). Desse modo, a diferença representa bem mais que o dobro das ocorrências mediadas por ícones. Agora, quanto às estratégias operatórias, aditivas e multiplicativas, não temos como separá-las, como feito nos estudantes do 3º ano, elas se equivalem estatisticamente (95 para 97, respectivamente).

4.2.3 Níveis de raciocínio algébrico na perspectiva da *Early Algebra*

[71]Mencionado no capítulo I e discutido amiúde no capítulo II.
[72]As estratégias operatórias apresentadas envolvem apenas números, por isso as consideramos numéricas.

Para identificar os níveis de raciocínio algébrico, recorremos aos comportamentos apresentados nos esquemas de ação desenvolvidos pelos estudantes. Esses comportamentos sinalizaram o nível de raciocínio, ou sua proximidade, em que os alunos dos anos iniciais se encontram em relação aos conceitos algébricos de sequência, equação e função. Esses comportamentos foram organizados segundo o objeto de estudo e compilados em quadros para uma melhor compreensão e análise.

Inicialmente, iremos compô-los em separado de acordo com a natureza de cada uma das vertentes algébricas: (1) sequência, (2) equação e (3) função. E, simultaneamente, a cada grupo de comportamentos faremos uma explanação de suas características teóricas, sua análise, interligando quando possível aos teoremas-em-ação, apresentados pelos estudantes. Observe os comportamentos observados nos extratos dos protocolos de respostas referente a vertente de sequência.

Quadro 8 – Níveis de comportamentos observados nas situações-problemas que envolveram a noção de sequências (Q3A, Q3B, Q7 e Q9)

CÓDIGO	COMPORTAMENTO
NSϕ	Não identifica regularidades nem sequência;
NS1	Não identifica a regularidade nem sequência, mas utiliza processo de contagem;
NS2	Não identifica regularidade para o elemento posterior, mas constrói uma sequência recursiva
NS3.1	Identifica uma regularidade próxima e/ou distante, mas não constrói uma sequência recursiva;
NS3.2	Identifica uma regularidade próxima e/ou distante, e constrói uma sequência recursiva

Fonte: Elaborado pela autora.
Legenda: NSϕ = Nível zero para o comportamento de sequência; NS1 = Nível um para o comportamento de sequência; NS2 = Nível dois para o comportamento de sequência; NS 3.1 = Nível três ponto um para o comportamento de sequência; NS 3.2 = Nível três ponto dois para o comportamento de sequência.

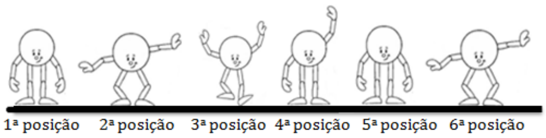
Faz-se necessário deixar claro que quando conceituamos uma situação de regularidade estamos nos referindo ao seu comportamento de padrão que apresenta uma repetição, uma configuração em que uma disposição ou arranjo de objetos (formas, cores, figuras, sons etc.) que detectam uma regularidade, uma repetição idêntica de elementos (VALE et al, 2006).

No que concerne a uma sequência, sabemos que essa também é considerada uma regularidade, uma busca por padrões (ibidem), mas nosso interesse consiste, especificamente, numa sequência numérica recursiva, cujo critério de formação seja por valor constante ou não.

A seguir, verifique exemplos de respostas retiradas dos extratos dos protocolos que exibem esquema de ação apresentados pelos estudantes que justificam cada um dos níveis de comportamentos elencados no quadro 8.

Exemplo 4.2.3.1 – Resposta de estratégia em que o estudante não identifica regularidade nem sequência

Q3 – Carlitos é um boneco que adora fazer exercício. No exercício, ele flexiona as pernas e mexe os braços seguindo uma ordem nos movimentos. Ele pretende continuar nessa atividade por algum tempo. Veja a ordem dos exercícios do Carlitos.



a) Desenhe ao lado como ele estará na 9ª posição.
b) Desenhe ao lado como ele estará na 58ª posição.

Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 54, extrato do protocolo.

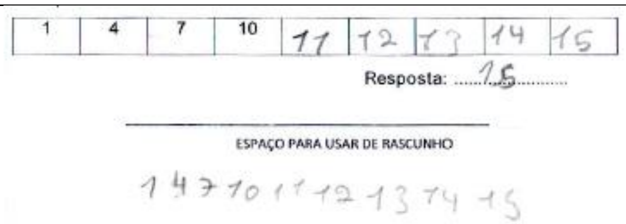
A partir do esquema de ação apresentado pelo estudante do 5º ano, identificamos que ele não compreende a regularidade nem a sequência dos movimentos efetuados pelo boneco Carlitos, uma vez que o aluno cria movimentos aleatórios para o boneco.

Exemplo 4.2.3.2 – Resposta de estratégia em que o estudante não identifica regularidade nem sequência, mas utiliza processo de contagem

Q9 – Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.

1	4	7	10	...	...	...	...	...

Quando retornar, deverá concluir essa sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?



Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 06, extrato do protocolo.

O estudante do 3º ano, em seus esquemas de ação, não demonstra ter noção do critério de formação da sequência proposta na situação-problema, Q9, e exibe uma contagem dos números da sequência na ordem crescente.

Exemplo 4.2.3.3 – Resposta de estratégia em que o estudante não identifica regularidade para o elemento posterior, mas constrói uma sequência recursiva

Q9 – Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.

1	4	7	10	...	...	...	...	...

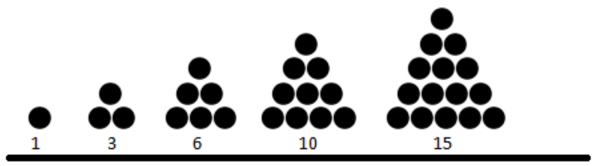
Quando retornar, deverá concluir essa sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?

Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 13, extrato do protocolo.

No que tange a estratégia utilizada no esquema de ação do estudante do 3º ano, nº 13, ele não identifica o critério de formação da sequência proposta, porém é capaz de construir uma sequência recursiva a partir de um critério próprio.

Exemplo 4.2.3.4 – Resposta de estratégia em que o estudante identifica uma regularidade próxima, mas não constrói uma sequência recursiva

Q7 – Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.



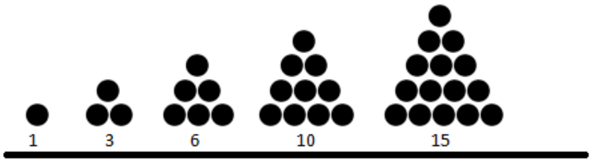
Seguindo essa mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?

Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 37, extrato do protocolo.

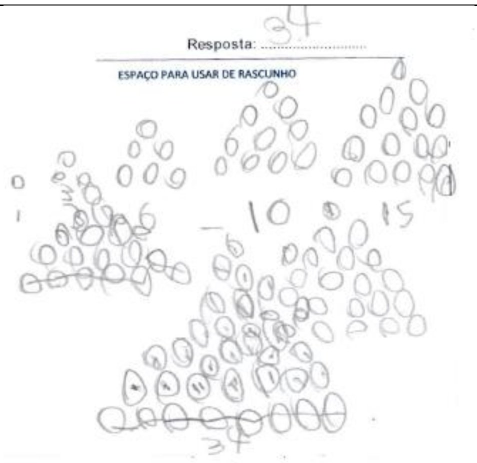
Observamos que o estudante do 5º ano, nº 37, identifica uma regularidade próxima, ou seja, constrói a 6ª figura triangular, contudo não amplia o raciocínio e constrói a sequência da figura pedida. Não temos como avaliar o que causou esse comportamento, uma vez que ele se mostra ter entendido o critério de formação da sequência ao desenhar a 6ª figura da sequência.

Exemplo 4.2.3.5 – Resposta de estratégia em que o estudante identifica uma regularidade próxima e/ou distante e constrói uma sequência recursiva

Q.7 – Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.



Seguindo essa mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?



Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 24, extrato do protocolo.

No que tange ao comportamento de nível mais sofisticado, encontramos nos esquemas de ação do estudante do 3º ano, nº 24, uma estratégia que demonstra que esse identifica o critério de formação recursiva e amplia essa relação, sendo capaz de utilizá-la para a formação de outras sequências posteriores, inclusive a solicitada na situação-problema.

4.2.4 Análise do comportamento dos estudantes nos itens que trataram a sequência por nível

Para o objeto da *sequência* foram considerados os itens Q3A, Q3B, Q7 e Q9, em que os estudantes tanto do 3º ano como os do 5º ano, enquadraram-se em apenas um dos tipos de comportamentos elencados. A partir dessa constatação, apresentamos uma tabela que retrata a distribuição dos comportamentos por estudantes, e os índices percentuais encontrados nos extratos dos protocolos.

Tabela 5 – Distribuição dos comportamentos dos estudantes, por níveis quanto ao raciocínio referente a uma sequência

	3º Ano	5º Ano
NSϕ	**12 DE 68 (17,6%)**	**6 DE 80 (7,5%)**
NS1	**10 DE 68 (14,7%)**	**4 DE 80 (5%)**
NS.2	**24 DE 68 (35,3%)**	**43 DE 80 (53,8%)**
NS3.1	**1 DE 68 (1,5%)**	**4 DE 80 (5%)**
NS3.2	**21 DE 68 (30,9%)**	**23 DE 80 (28,7%)**

Fonte: Dados da pesquisa.

Verificamos uma tendência em ambos os grupos pesquisados de se estabelecerem nos níveis N2 e N3.2, respectivamente. Temos uma parcela considerável de estudantes tanto do 3º ano como do 5º ano, que mesmo não apresentando noções de regularidades (padrões) apresenta habilidades para a construção de uma sequência recursiva.

Hipoteticamente, esse resultado tem relação com o currículo de matemática para os anos iniciais, uma vez que as sequências são abordadas ao longo dos anos iniciais, da Educação Básica, dentro do eixo dos números e suas operações (PCN, 1997, 1998). Esse comportamento pode ter sido reflexo dessa instrução elementar de sequência (contexto aritmético), que permeia os conhecimentos matemáticos dos anos iniciais, do Ensino Fundamental. E, se esse fato procede, o sistema educacional e as diretrizes curriculares estão desperdiçando oportunidades primorosas para introdução do conceito algébrico de sequências.

Temos que a formação de conceitos vinculados à sua procedência e aplicabilidade, quer seja numa sequência, quer seja numa situação geradora de padrões reside a base do conhecimento matemático e a linguagem na qual é expresso (CARRAHER, 2007; KIERAN, 2016). A matemática por ser uma ciência dos padrões, torna-se um desperdício pedagógico não aproveitar situações sequenciais no contexto aritmético para introduzir um conceito novo. Podemos construir um conhecimento imbuído de fatores de natureza algébrica em contextos reais, quer seja com significados matemáticos ou não (LINS; GIMENEZ, 2001). Por exemplo, na disposição das folhas no caule de algumas plantas, na pelagem dos animais, nas aspirais do ananás, na célebre sequência de Fibonacci[73] entre outros, daremos vida à matemática e, consequentemente, à Álgebra (VALE et al, 2006).

Observamos que os estudantes pesquisados trazem a ideia da sequência numa perspectiva intuitiva e dedutiva, muitas vezes, baseada na formação de uma sequência numérica e no processo de contagem (base diversa). Esses utilizam elementos presentes em seu repertório, constroem seus próprios entendimentos e se adaptam a situações como uma forma de resolver uma situação nova (VERGNAUD, 1996). Podemos observar no extrato do protocolo do estudante do 3º ano, nº 62, uma estratégia, um apoio em que ele utiliza uma reorganização do seu conhecimento numérico para capacitar um raciocínio algébrico (exemplo 4.2.3.2.1).

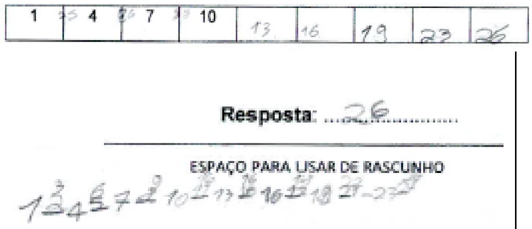
[73]Quantos pares de coelho serão produzidos num ano, começando por um só par, se, em cada mês, cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês? [1, 1, 2, 3, 5, 8,...].

Exemplo 4.2.3.2.1 – Resposta de resolução de sequência recursiva

Q9 – Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.

1	4	7	10	...	...	...	.	

Quando retornar, deverá concluir esta sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?



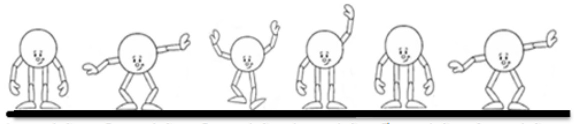
Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 62, extrato do protocolo.

Nessa estratégia de contagem, o estudante demonstra que compreende o conceito de uma sequência a partir de um esquema próprio. Essa percepção representa sua forma de pensar sequências e tende a contribuir para sua formalização conceitual no momento propício. Esse esquema de ação adotado pelo estudante pode evoluir e possibilitar uma abstração, uma generalização e a construção de leis que organizam os elementos que compõem uma sequência. Durante o processo de aprendizagem de um sistema de numeração, o educando apreende não apenas os elementos isolados, mas também, simultaneamente, compreende o sistema em si, e as regras que formam qualquer número subsequente (BRIZUELA, 2006).

Outro esquema de ação que nos chama atenção para seu sistema de organização é o do estudante do 5º ano, nº 09, por apresentar um raciocínio de alto nível (LINS; GIMENEZ, 2001). Esse reflete uma expansão no processo de contagem, uma evolução aritmética – algébrica, a partir de uma observação de fatos repetitivos. Num processo de dedução empírica, análoga ao método da recorrência ou princípio de indução completa (MILIES; COELHO, 2001) numa base algébrica com um período quatro[74] elementos.

Exemplo 4.2.3.2.2 – Resposta de resolução de sequência recursiva

Q3 – Carlitos é um boneco que adora fazer exercício. No exercício, ele flexiona as pernas e mexe os braços seguindo uma ordem nos movimentos. Ele pretende continuar nessa atividade por algum tempo. Veja a ordem dos exercícios do Carlitos.



a) Desenhe ao lado como ele estará na 9ª posição.
b) Desenhe ao lado como ele estará na 58ª posição.

Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 09, extrato do protocolo.

[74]Temos nos extratos dos protocolos estudantes que retratam essa situação-problema como um período de seis elementos, mantêm a sequência repetitiva de forma correta, porém numa base periódica seis.

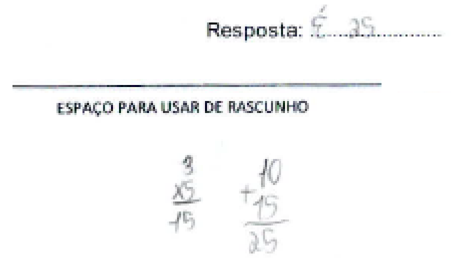
No que concerne as diretrizes curriculares esse tipo de raciocínio algébrico apresentado pelo estudante do 5º ano, nº 09, não faz parte de seu aporte teórico, mas o emprega com tamanha propriedade que fica impossível negá-lo. Temos no seu esquema de ação uma forma algébrica sofisticada. Ele identifica o padrão, estabelece uma relação de generalização entre a repetição de movimentos, agrupa os períodos, fazendo uma relação entre a posição e o valor numérico que a represente de forma precisa.

Ao identificar nesse esquema um raciocínio algébrico, traremos a Álgebra como uma linguagem das generalizações, uma elocução simples e precisa para descrever repetições (USISKIN,1995). Foi o que o estudante do 5º ano fez, utilizou uma linguagem simples para descrever a propriedade da situação-problema acima de forma adequada. Em outras palavras, empregou, em seu esquema de ação, um procedimento algébrico.

Quando possível identificamos por detrás das estratégias dos estudantes o uso de teoremas matemáticos que justificam sua ação. Como por exemplo, no esquema de ação, utilizado por outro estudante do 5º ano ao resolver uma outra situação-problema, envolvendo uma sequência recursiva.

Exemplo 4.2.3.2.3 – Resposta de resolução de sequência recursiva

<table>
<tr>
<td>Q9 – Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.

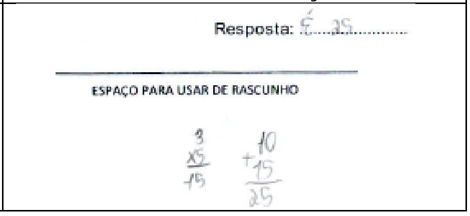
<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table>
Quando retornar, deverá concluir essa sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?</td>
<td>

Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 73, extrato de protocolo.</td>
</tr>
</table>

Verificamos que esse discente apresenta um tipo de raciocínio definido como pensamento formal que pressupõe uma forma de raciocinar sobre operações ou resultados. A partir desse fato, podemos identificar, no esquema de ação do estudante, (5º ano, nº 73) um pensamento algébrico (BOOTH, 1988; KIERAN, 1995) que tem por detrás um teorema-em-ação de uma progressão aritmética (PA).

O que justifica a eficácia da estratégia utilizada pelo estudante é o teorema-em-ação (implícito) de uma PA crescente. Nessa, o estudante faz uso da propriedade geral para se calcular o enésimo termo (a_n) de uma PA. Ele não o faz nos moldes formais (a partir do a_1), mas de forma intuitiva, uma vez que o conceito de PA é abordado no Ensino Médio. Nesse teorema-em-ação, o estudante lança mão da relação básica existente entre dois termos de uma PA e sua razão (constante). Ele identifica os saltos (razão da PA) e estabelece a relação entre a_4 e a_9.

Exemplo 4.2.3.4 – Teorema-em-ação, segundo os comportamentos do estudante

Termo geral da PA	Teorema por trás da ação	Teorema-em-ação
$a_n = a_1 + (n-1) . r$	$a_9 = a_4 + 5.r$ $a_9 = 10 + 5.3$ $a_9 = 10 + 15$ $a_9 = 25$	

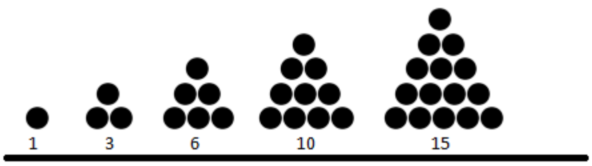
Fonte: dados da pesquisa.
Legenda: a_n = enésimo ermo da PA; a_1 = primeiro termo da PA; a_4 = quarto termo da PA; a_9 = nono termo da PA; n = número de termos da PA e r = razão ou constante da PA.

Essas formas de algebrizar os números quando apropriadas pelos estudantes possibilitam o desenvolvimento de um raciocínio algébrico organizado (precoce) e a uma não dependência de uma notação algébrica formal na formação do pensamento algébrico (BRIZUELA, 2006). Assim, as formas de representações do pensamento algébrico (precoce) dos estudantes podem ser adaptadas para se aproximar e assumir gradualmente para as formas convencionais da Álgebra Elementar (CARRAHER; SCHILIEMANN, 2014).

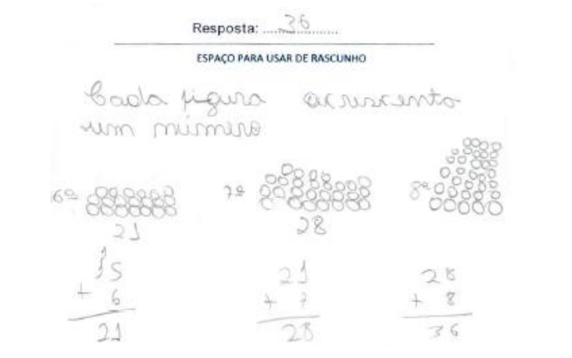
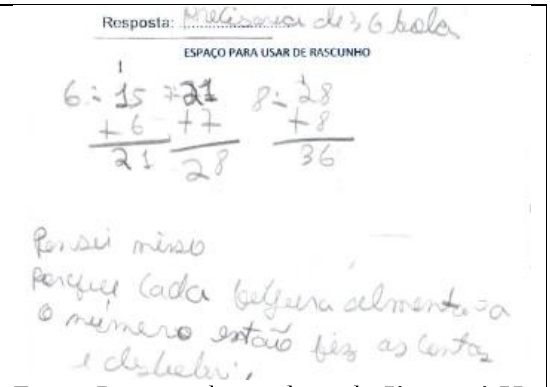
No que tange a algebrização de um número, reportaremos ao fato de que estratégias de cálculo sobre operações ou sobre seus resultados representam um raciocínio algébrico (BLANTON, 1984). Outros exemplos que podem retratar a capacidade em algebrizar números podem ser identificados nos esquemas que os estudantes disponibilizaram na resolução da situação-problema de número sete do instrumento diagnóstico (ver exemplo 4.2.3.2.5).

Exemplo 4.2.3.2.5 – Respostas de algebrização dos números a partir do critério de formação de uma sequência

Q7 – Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.



Seguindo essa mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?

 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 58, extrato do protocolo.	 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 55, extrato do protocolo.

Ao observarmos as estratégias apresentadas, nos esquemas de ação, dos dois estudantes identificamos formas complementares de raciocinar sobre uma mesma situação-problema. O teorema-em-ação por detrás é o mesmo. O estudante de nº 58, apoia-se na representação icônica para fundamentar suas estratégias e confirma seu resultado na forma operatória (adição). Enquanto que seu colega (nº 55) utiliza um discreto caminho aritmético, o que podemos inferir que compreendeu e abstraiu o comportamento do padrão. Essa forma de raciocinar algebricamente (operar sobre operações) foi adaptada de seu repertório cognitivo (VERGNAUD, 1996), uma vez que o desenvolvimento do pensamento algébrico não consta por hora no currículo (PCN, 1997).

Quando comparamos as estratégias apresentadas pelos estudantes percebemos uma filiação entre eles, seja na forma de registrar seus esquemas ou numa ideia de continuidade (VERGNAUD, 1996). Essa pode ter uma relação direta com o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, o nível de abstração em que se encontram e seus limites epistemológicos. A forma de representar e o uso de símbolos têm um significado particular nos conceitos e nas notações criadas pelos estudantes (BRIZUELA, 2006), por isso é necessário analisar suas ações para compreender seu desenvolvimento cognitivo. Eles precisam criar seus sistemas, a partir de um conjunto particular de notações adequadas ao seu desenvolvimento cognitivo e, com isso, estabelecer seus próprios argumentos (KAPUT, 1995).

Mas será que esses estudantes também apresentam formas de raciocinar algébrica em relação ao objeto da equação? Para investigar tal questão identificamos cinco (05) níveis de comportamentos nos quais os estudantes de ambos os anos se enquadravam. Trata-se, portanto, de níveis identificados por nós *a posteriori*, o que significa que tais níveis são nossas elaborações, a partir dos protocolos de respostas dos estudantes. Veja os comportamentos observados nos extratos dos protocolos de respostas referente a vertente da equação.

Quadro 9 – Níveis de comportamento dos estudantes do 3º e 5º anos observados nas situações-problemas que envolveram a noção de equação (Q2, Q4B, Q5A e Q8)

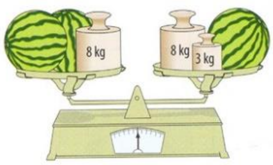
CÓDIGO	COMPORTAMENTO
NE.ϕ	Não identifica a equivalência, a igualdade nem a incógnita.
NE.1	Identifica o sinal de igual como resultado de uma operação.
NE.2	Identifica a(s) incógnita(s) da situação.
NE.3.1	Identifica parcialmente equivalência entre variáveis.
NE.3.2	Identifica a equivalência entre as variáveis da situação.

Fonte: Elaborado pela autora.

Legenda: NE.ϕ = nível zero de comportamento na equação; NE.1 = nível um de comportamento na equação; NE.2 = nível dois de comportamento na equação; NE.3.1 = nível três ponto um de comportamento na equação; NE3.2 = nível três ponto dois de comportamento na equação.

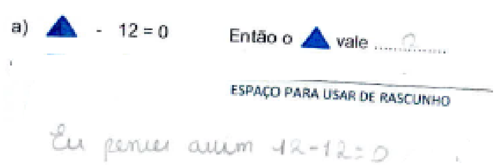
Assim posto, apresentaremos um exemplo de cada um desses comportamentos apresentados nos esquemas de ação dos estudantes. Iniciaremos a partir dos níveis menos elaborados para os mais sofisticados cognitivamente.

Exemplo 4.2.3.2.1 – Resposta em que o estudante não identifica a equivalência, a igualdade nem a incógnita

Q2 – Observe que a balança abaixo se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro. Todas as melancias têm o mesmo peso.  Qual é o peso de apenas uma melancia?	 **Fonte:** Resposta do estudante do 3º ano, nº 06, extrato do protocolo.

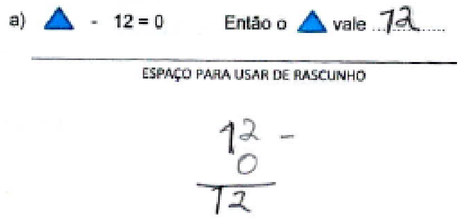
Observamos que o estudante do 3º ano, nº 06, não apresenta noção sobre a relação de equivalência apresentada na situação-problema, Q2. Ele apenas identifica as melancias, utilizando processo de contagem como um recurso didático.

Exemplo 4.2.3.2.2 – Resposta em que o estudante identifica o sinal de igual como resultado de uma operação

Q5 – Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática. Ele pensa, concentra-se, mas, está precisando de uma ajuda. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada uma das figuras? a) △ - 12 = 0; Então o △ vale ...	 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 54, extrato do protocolo.

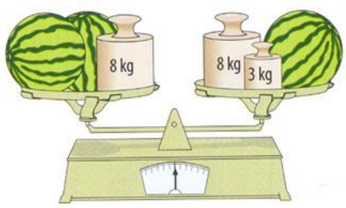
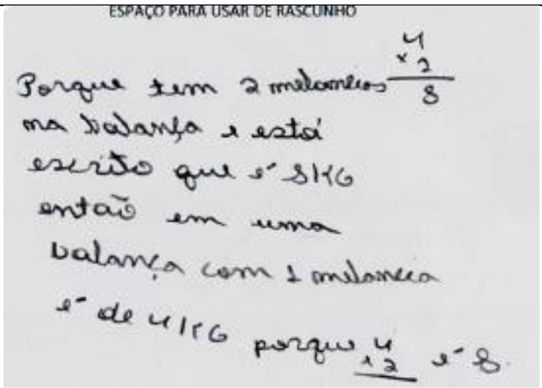
O estudante do 5º ano, nº 54, não reconhece o sinal de igual como uma equivalência, não percebe o valor numérico por detrás do triângulo (uma constante). Para ele, o sinal de igual refere-se ao resultado da operação de subtração como demonstrado no seu esquema de ação.

Exemplo 4.2.3.2.3 – Resposta em que o estudante identifica a(s) incógnita(s) da situação

Q5 – Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática. Ele pensa, concentra-se, mas, está precisando de uma ajuda. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada uma das figuras? a) △ - 12 = 0; Então o △ vale ...	 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 52, extrato do protocolo.

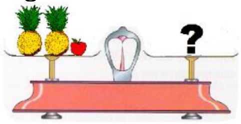
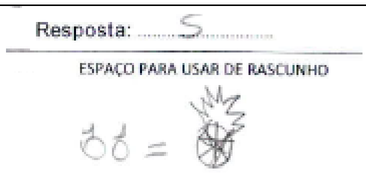
Verificamos na estratégia operatória do estudante do 5º ano, nº 52, que esse, ao contrário de seu colega do exemplo anterior, reconhece e identifica o valor da incógnita, como um valor que atribuído ao triângulo torna a sentença verdadeira, equivalente a zero.

Exemplo 4.2.3.2.4 – Resposta em que o estudante identifica parcialmente equivalência entre variáveis

Q2 – Observe que a balança abaixo se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro. Todas as melancias têm o mesmo peso.  Qual é o peso de apenas uma melancia?	 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 57, extrato do protocolo.

Nessa situação-problema, temos uma relação de equivalência entre os pratos da balança, conforme descrito no seu enunciado. Todavia, o estudante do 5º ano, nº 57, não percebe essa relação entre os pratos (esquerda=direita). Para ele, a equivalência existe (isolada) apenas no interior de cada prato, tanto da esquerda como no da direita. Desse modo, ele apenas identifica parcialmente as variáveis da situação-problema.

Exemplo 4.2.3.2.5 – Resposta em que o estudante identifica a equivalência entre as variáveis da situação

Q8 – A balança se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro. As maçãs têm o mesmo peso. As bananas têm o mesmo peso. **Figura 1** 	Quantas maçãs temos que colocar no prato da direita para que a balança permaneça em equilíbrio? **Figura 2** 
 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 58, extrato do protocolo.	

Ao observarmos a estratégia presente no esquema de ação do estudante de nº 58, verificamos que esse identifica a relação entre os pratos (direita=esquerda) e, também, entre as frutas. Conforme sua representação icônica em que um abacaxi equivale a duas maçãs e tendo a resposta final correspondente a cinco maçãs. Ele move-se entre as propriedades de uma relação de equivalência (simétrica para a transitiva) com facilidade.

4.2.3.2.1 Análise do comportamento dos estudantes nos itens que trataram de equação, por nível

Para o objeto equação, foram considerados os itens Q2, Q4B, Q5A e Q8. É importante esclarecer que vários estudantes poderiam se enquadrar em mais de um nível. Por exemplo, o estudante poderia ser enquadrado dentro do nível N1 no Item 5A e já no item 2 ser classificado como NE3.1. Esse estudante receberia então duas classificações: NE1 e NE3.1. Por essa razão tivemos 104 classificações para os 68 estudantes do 3º ano, e 134 classificações para os 80 estudantes do 5º ano.

Assim, apresentamos uma tabela contendo os resultados encontrados nos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes investigados.

Tabela 6 – Distribuição dos comportamentos dos estudantes, por níveis quanto ao raciocínio referente a uma equação

	3º ano	**5º Ano**
NE.ϕ	**30 de104 (28,8%)**	20 de 134 (14,9%)
NE.1	**20 de104 (19,2%)**	10 de 134 (7,5%)
NE.2	**28 de 104 (27%)**	**49 de 134 (36,5%)**
NE.3.1	18 de 104 (17,3%)	**30 de 134 (22,4%)**
NE.3.2	8 de 104 (7,7%)	**25 de 134 (18,7%)**

Fonte: Dados da pesquisa.

Numa primeira análise, podemos identificar que em relação aos conhecimentos adequados e as relações imbricadas numa equação, os grupos se posicionam paradoxalmente. Os estudantes do 3º ano nos níveis mais inferiores: NE.ϕ e NE.1 (48% do total), e os estudantes do 5º ano nos níveis mais sofisticados: NE.3.1 e NE.3.2 (41,1% do total). Isto era esperado, uma vez que o ensino matemático curricular (PCN, 1997 e 1998) disponibilizado a ambos os grupos segue uma tendência progressiva em relação à noção de equivalência e suas propriedades no decorrer dos anos escolares (do 3º para o 5º ano). O ponto de referência entre os comportamentos algébricos situa-se na existência de uma das habilidades predecessoras do pensamento algébrico (USISKIN, 1995) a capacidade de identificar uma incógnita (NE.2).

Assim, como mencionado anteriormente, identificamos a existência de estudantes que se enquadraram em mais de um nível de comportamento referente à vertente da equação. Ao utilizar mais de um comportamento operatório, podemos nos perguntar: quantos desses estudantes (3º e 5º anos) se encontram nos dois níveis ao mesmo tempo? Ou apenas, em um desses níveis? Para responder a esses questionamentos, analisaremos os dados da tabela 6 a partir da observação dos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes numa análise comparativa intragrupo.

Nessa análise, identificamos que 59,4% dos estudantes do 3º ano utilizaram mais de um comportamento nos itens que abordam a vertente da equação. Todavia, esses situam-se dispersos entre os níveis de comportamentos associados. No tocante ao grupo dos estudantes do 5º ano, esse índice é um pouco maior, 67,5%. A diferença, mesmo que discreta, retrata um perfil cognitivo mais sofisticado em relação aos estudantes do 3º ano. Outro resultado que reforça essa hipótese reside no quantitativo dos índices referentes aos comportamentos dos níveis NE.2, NE.3.1 e NE.3.2 (17,4% para os estudantes do 3º ano, para e de 45% para os do 5º ano). Esse fato, também, pode ser evidenciado quando observamos a quantidade de estudantes que se localizam, simultaneamente, nos níveis NE.2 e NE.3.1 (10,1% para os estudantes do 3º ano, e de 25% para os do 5º ano).

Os resultados gerados anteriormente e a justaposição entre os dois níveis NE.2 (identifica a(s) incógnita(s) da situação) e NE.3.1 (identifica parcialmente equivalência entre variáveis) permitem inferir que os estudantes do 5º ano se encontram em condições favoráveis de serem introduzidos aos conceitos da equação.

4.2.3.3 Comportamentos observados nos extratos dos protocolos de respostas referente à vertente da função

No que tange uma função, podemos considerá-la como uma relação de dependência entre grandezas, num modelo de generalização e organização de leis matemáticas. Para Carraher e Schliemann (2008), as funções situam-se como um elo importante entre os vários conceitos propostos no currículo de matemática, dos anos iniciais. Podendo ser expressas por operações básicas da aritmética, como: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

Assim como descrito nas vertentes algébricas anteriores, identificamos nas situações-problema de abordagem funcional comportamentos que mereceram destaque nos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes.

Quadro 10 – Tipo de comportamentos observados nas situações-problemas que envolveram a noção de função (Q1, Q4A, Q6A, Q6B, Q10A e Q10B)

CÓDIGO	COMPORTAMENTO
NFϕ	Não identifica uma relação.
NF.1	Utiliza a estrutura aditiva.
NF.2	Utiliza a adição de parcelas iguais ou a estrutura escalar multiplicativa.
NF.3.1	Estabelece relação parcial entre as variáveis.
NF.3.2	Estabelece relação completa entre as variáveis.

Fonte: Elaborado pela autora

A seguir, apresentamos exemplos de respostas encontradas nos extratos dos protocolos que justificam a escolha de cada um desses comportamentos como balizadores dos níveis de raciocínio funcional anunciados nos esquemas de ação dos estudantes.

Exemplo 4.2.3.3.1 – Exemplo de resposta em que o estudante não identifica uma relação

Q6 – Na lanchonete da pracinha, está acontecendo promoção.

MONTE SEU PRÓPRIO SANDUÍCHE

BÁSICO	COMPLEMENTO
 R$5,00 Pão + Bife	Para cada um dos ingredientes acrescenta  **+ R$ 1,00**

Felipe, Artur e Pedro foram lanchar. Cada um deles vai querer incrementar seu sanduíche.

Felipe pediu o básico mais queijo, ovo e cebola;
Artur solicitou o básico mais queijo e bacon;

a) Quanto cada um dos amigos pagou por seu sanduíche?

Felipe 5 reais, Artur 5 reais e Pedro 5 reais...

b) Todos pagaram o mesmo valor? Por quê?

Sim

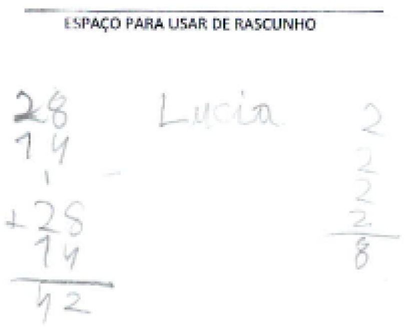
porque compra o mesmo lanche

Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 20, extrato do protocolo.

Pedro turbinou o dele acrescentando no básico: queijo, ovo, tomate, alface, cebola e batata palha.	

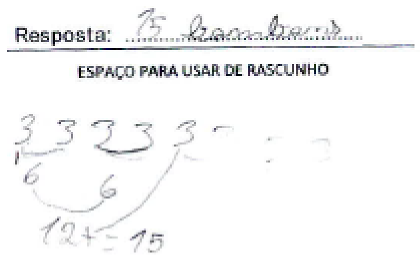
Observamos que o estudante do 3º ano, nº 20, não demonstra identificar a relação de variabilidade entre os tipos de sanduíches e os complementos. Ele identifica apenas o valor básico a pagar sem atentar para o fato de que o custo em real, a ser pago, por cada sanduíche apresenta uma relação de variabilidade entre as grandezas (complementos).

Exemplo 4.2.3.3.2 – Resposta em que o estudante utiliza uma estrutura aditiva

Q10 – Três amigos foram ao parque de diversão. Cada um levou uma quantia de dinheiro para gastar nos brinquedos. 1. Lúcia levou 2 notas de 10 reais e mais 4 notas de 2 reais; 2. João levou a metade das notas de 10 reais e a metade das notas de 2 reais que Lúcia levou; 3. Beto levou a quantia de Lúcia e João juntos. a) Quantas notas de 10 reais e quantas de 2 reais Beto levou? b) Quantas notas de 10 reais e de 2 reais os três amigos levaram juntos para o parque?	 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 15, extrato do protocolo.

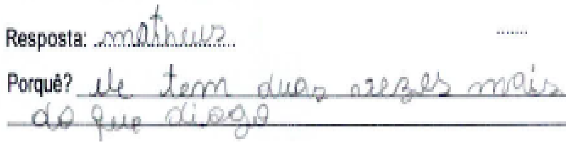
O estudante do 5º ano, nº 15, utiliza a estrutura aditiva para encontrar a solução da situação-problema e aplica a operação de adição nos dados de forma implícita e explícita.

Exemplo 4.2.3.3.3 – Resposta em que o estudante utiliza a adição de parcelas iguais ou a estrutura escalar multiplicativa

Q1 – Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:  Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou? 	 **Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 09, extrato do protocolo.

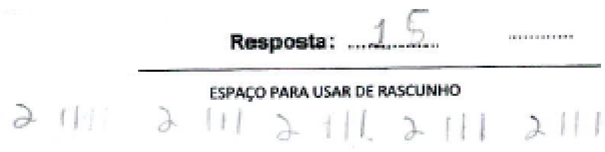
Identificamos no esquema de ação do estudante do 5º ano, nº 09, uma relação coerente entre os dados da situação-problema. Para isso, faz uso de uma estrutura escalar multiplicativa em que a operação de multiplicação acontece a partir de uma organização da soma de parcelas iguais.

Exemplo 4.2.3.3.4 – Resposta em que o estudante estabelece relação parcial entre as variáveis

Q4 – Diogo e Matheus querem saber quem tem mais dinheiro. Diogo tem um valor dentro da carteira e mais R$ 3,00 na mão. Matheus tem 2 vezes mais o valor que Diogo tem dentro da carteira. a) Quem tem mais dinheiro? Por quê? b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Diogo terá dentro da sua carteira?	a)  **Fonte:** Resposta do estudante do 3º ano, nº 40, extrato do protocolo.

No tocante a resposta do estudante do 3º ano, nº 40, identificamos que esse apenas percebe a relação de ordem (VERGNAUD, 1996) existente entre os valores que os amigos Diogo e Matheus apresentam. Não demonstra perceber que esse valor perpassa pelo valor que Diogo terá na carteira e, também, na mão. Ou seja, ele identifica parcialmente a relação entre a quantia que Diogo e Matheus têm como uma relação funcional.

Exemplo 4.2.3.3.5 – Resposta em que o estudante estabelece relação completa entre as variáveis

Q1 – Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:  Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou? 	 **Fonte:** Resposta do estudante do 3º ano, nº 70, extrato do protocolo.

Nos esquemas de ação do estudante do 3º ano, nº 70, identificamos que ele estabelece uma relação funcional entre o valor em real e a quantidade de bombons que comprará.

4.2.3.3.1 Análise do comportamento dos estudantes nos itens que trataram da função, por nível

Como reportado na vertente da equação, no objeto função, foram considerados os itens Q1, Q4A, Q6A, Q6B, Q10A e Q10B. É importante esclarecer que vários estudantes poderiam se enquadrar em mais de um tipo de comportamento. Por exemplo, o estudante poderia ser enquadrado dentro do nível N.2 e também ser classificado como N.3.2 no item Q1. Esse estudante receberia então duas classificações: N.2 e N.3.2. Por essa razão, tivemos 86 classificações para os 68 estudantes do 3º ano, e 123 classificações para os 80 estudantes do 5º ano.

A seguir, apresentamos uma tabela contendo os resultados da distribuição dos comportamentos encontrados nos extratos dos protocolos de respostas.

Tabela 7 – Distribuição dos comportamentos dos estudantes, por níveis quanto ao raciocínio referente à função

	3º ano	**5º Ano**
NFϕ	30 de 86 (35%)	3 de 123 (2,4%)
NF.1	14 de 86 (16,3%)	47 de 123 (38,2%)
NF.2	9 de 86 (10,5%)	18 de 123 (14,6%)
NF.3.1	13 de 86 (15%)	29 de 123 (23,6%)
NF.3.2	20 de 86 (23,2%)	26 de 123 (21,2%)

Fonte: Dados da pesquisa.

No tocante a distribuição dos comportamentos nos itens Q1, Q4A, Q6A, Q6B, Q10A e Q10B, podemos observar que a habilidade dos estudantes em identificar relações apresenta tendências diferentes entre os do 3º ano para com os do 5ºano.

No que tange aos níveis NF.3.1 e NF.3.2, numa análise (comparativa-intersecção) intragrupo com relação aos níveis NF.3.1 3 NF.3.2, verificamos que 22,2% dos estudantes do 3º ano, e 11,1% os do 5º ano transitam entre esses dois níveis. Dentre esses (22,2% e 11,1%, respectivamente 3º e 5º anos) temos que, 77,8% dos estudantes do 3º ano conseguem estabelecer uma relação completa entre as variáveis abordadas nos itens de análise, e no grupo dos estudantes do 5º ano esse índice sobe para 88,9% dos estudantes. Os dados nos permitem deduzir que esses estudantes se encontram aptos à introdução dos conceitos algébricos relativo à variável presente numa situação funcional.

Seguindo a análise intragrupo, temos ainda que dentre os estudantes do 3º ano que utilizaram uma estrutura aditiva (NF.1), 50% desses conseguem estabelecer uma relação parcial entre as variáveis envolvidas, por outro lado, esse índice para o 5º ano cai para 25,5%. Em outras palavras, para àqueles cujo comportamento aporta-se no campo aditivo, esse recurso favorece mais especificamente aos estudantes do 3º ano.

A apresentação do comportamento aditivo, em ambos os grupos, não segue, ou seja, não evolui para o padrão do campo multiplicativo. Muitos estudantes encontram-se apenas no campo aditivo. No que concerne ao nível NF.2 para àqueles estudantes que apresentam um comportamento multiplicativo identificamos uma tendência para ambos os grupos. Verificamos que esse comportamento nunca acontece sozinho, ele oscila entre seus pares, agregando uma compreensão parcial ou total para o raciocínio funcional.

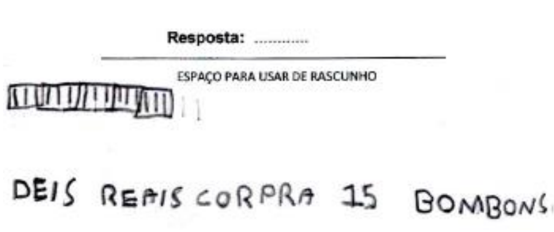
A partir desses resultados, podemos presumir que um dos pré-requisitos básicos para o raciocínio funcional se apoia nas estruturas multiplicativas, por ter nela uma filiação, uma continuidade conceitual (VERGNAUD, 1996). Consideramos ainda que as operações de multiplicação e de divisão, que a razão e as invariantes encontradas nessa estrutura funcionam como um dos pilares para o desenvolvimento da proporcionalidade (PONTE et al, 2007). E a proporcionalidade situa-se como um apoio para o raciocínio funcional (SPINILLO, 1994).

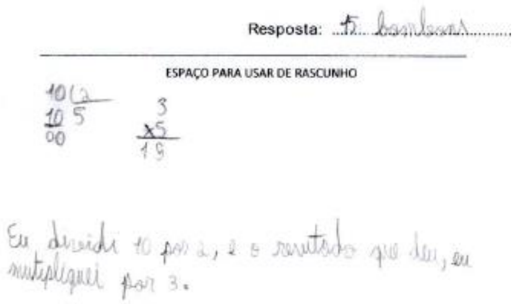
Os tipos de comportamentos categorizados neste estudo tiveram como suporte os extratos dos protocolos de respostas dos estudantes, que remetessem a um tipo de raciocínio funcional exceto o primeiro. Pois, em Nϕ, temos retratado a falta de conhecimento ou a noção conceitual de uma relação de dependência entre grandezas. Desse modo, observe exemplos de respostas que balizaram este estudo investigativo no campo da vertente algébrica da função, que possibilitaram fazer as inferências sobre os níveis de raciocínio algébrico que os sujeitos da pesquisa se situaram.

Exemplo 4.2.3.11 – Resposta que apresenta um comportamento, segundo um raciocínio proporcional

Q1 – Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:

Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?

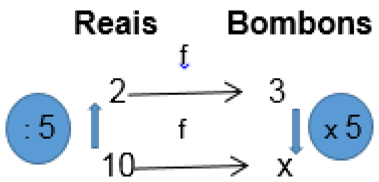




Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 59, extrato de protocolo.	**Fonte:** Resposta do estudante do 5º ano, nº 73, extrato do protocolo.

No que tange aos esquemas dos estudantes (3º e 5º anos) identificamos representações escritas diferentes, mas que remetem a um mesmo teorema-em-ação. Podemos identificar o tipo de teorema utilizado (implícito e explícito, respectivamente) e sua estrutura escalar na figura a seguir:

Quadro 11 – Apresentação do teorema-em-ação e sua representação

Teorema-em-ação	Estrutura escalar
$10 \rightarrow 2$ $x \rightarrow 3$	

Fonte: Dados da pesquisa.

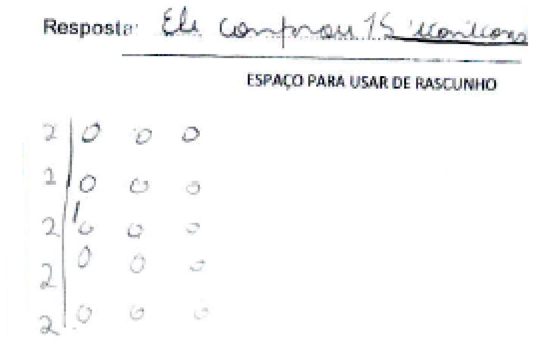
Comparando a figura 4.2.3.12 com os esquemas apresentados pelos estudantes (3º ano, nº 59, e 5º ano, nº 73), observamos que ambos demonstram ter noção conceitual de uma relação proporcional, já que apresentam comportamentos semelhantes. O estudante do 3º ano se apoia nas estruturas icônicas na sua ação, enquanto que o estudante do 5º ano tem como sustentáculo as operações de divisão e multiplicação e consegue explicitar suas ações, mas ambos retratam os mesmos procedimentos operatórios.

Exemplo 4.2.3.13 – Exemplo de resposta que apresenta um comportamento, segundo um raciocínio funcional

Q1 – Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:

Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?

Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 12, extrato do protocolo.



Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 21, extrato do protocolo.

No que concerne aos esquemas de ação dos estudantes, observamos que tanto o estudante do 3º ano, nº 12, como o do 5º ano, nº 21, apresentam uma noção funcional que foi adaptada ao seu repertório cognitivo. Como mencionado na análise do exemplo 4.2.3.11, os estudantes apresentam um mesmo teorema-em-ação, porém agora com um nível de equivalência apurado. Podemos verificar essa relação na figura a seguir:

Quadro 12 – Apresentação do teorema-em-ação e sua representação

Teorema-em-ação	Estrutura escalar
$2 \rightarrow 3$ $10 \rightarrow x$	**Reais** **Bombons** $2 \xrightarrow{f} 3$ $10 \xrightarrow{f} x$

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seus esquemas de ação, os estudantes utilizam notações simbólicas (particulares) para representar um mesmo comportamento relacional. Temos que a construção, a compreensão, a relação entre notações e conceitos ocorrem de forma interativa, e que essas conexões enriquecem tanto as notações quanto a formação dos conceitos (BRIZUELLA, 2006).

Esses discentes não passaram por nenhuma instrução formal sobre uma função linear, no entanto apresentam, em seus esquemas de ação, uma noção generalizada sobre a relação funcional proposta na situação-problema do instrumento diagnóstico. Uma possibilidade para essa adaptação pode ser reflexo da metodologia de estudo e da abordagem conceitual das quatro operações básicas da aritmética (adição, subtração, multiplicação e divisão) ao longo dos anos iniciais, uma vez que, em sua base, temos as noções de função (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2008)

Mesmo não passando por instrução algébrica identificamos uma relação peculiar para um estudante dos anos iniciais, como mostra o exemplo de resposta do extrato do protocolo de resposta dos estudantes do 3º ano.

Exemplo 4.2.3.14 – Resposta de comportamento de reconhecimento da invariante de uma variável algébrica

Q4 – Diogo e Matheus querem saber quem tem mais dinheiro.
Diogo tem um valor dentro da carteira e mais R$ 3,00 na mão.
Matheus tem 2 vezes mais o valor que Diogo tem dentro da carteira.

a) Quem tem mais dinheiro? Por quê?

Não tem como saber quem tem mais dinheiro porque não mostra o valor que tem na catera

b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Diogo terá dentro da sua carteira?

Resposta: 6

Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 64, extrato do protocolo.

Notamos no esquema descrito pelo estudante do 3º ano, nº 64, que esse apresenta uma noção sobre uma incógnita, seja no *status* de variável, seja no constante[75] Vimos nesse tipo de comportamento uma característica interpretativa da variável, que ultrapassa os limites conceituais propostos ao longo dos anos iniciais, uma vez que a noção de variável é abordada apenas a partir do 6º ano, do Ensino Fundamental. Essa percepção cognitiva do estudante vai ao encontro das discussões de Vergnaud (1996) que sugere que a partir da capacidade adaptativa, no potencial implícito de um repertório dos estudantes residem o cerne de um conceito científico. Todavia, observa-se que esse potencial é desperdiçado pelas diretrizes curriculares e planejamentos pedagógicos no quesito de um conceito algébrico. As limitações impostas no estudo da aritmética (BOOTH, 1988), a relação dualista de continuidade e ruptura entre a aritmética e a Álgebra e o conhecimento enciclopédico presentes nos manuais de ensino retardam os saltos epistemológicos necessários à aprendizagem dos conceitos algébricos. Entretanto, ao trazer para o currículo de matemática a abordagem do pensamento algébrico no eixo da Álgebra (inédito para os anos iniciais) a BNCC (BRASIL,2017) poderá desmitificar a concepção e a ordem hierárquica, aritmética-álgebra, até então estabelecida.

[75] Conceito abordado no capítulo I.

Seguindo nessa linha de raciocínio do estudante do 3º ano, nº 64, encontramos outros cinco exemplos (extratos dos protocolos dos estudantes do 3º ano) que direcionam para a existência de uma noção de variabilidade de uma grandeza. Isto sem mencionar quantos conseguem identificá-la como uma incógnita ou constante. Novamente, os dados reforçam nossas discussões sobre a possibilidade de desenvolver e ampliar o potencial algébrico dos estudantes desde os anos iniciais, do Ensino Fundamental. Visto que se forem possibilitadas instruções adequadas, esses estudantes poderão desenvolver um raciocínio algébrico sólido (BOOTH, 1984), evitando os insucessos verificados nas avaliações de aprendizagem nos anos finais, do Ensino Fundamental (SOUSA; PANOSSIAN; e CEDRO, 2014), como, por exemplo, no Programme for International Student Assessment – PISA e na Prova Brasil.

Pesquisas como a de Teixeira (2016), Carraher e Schliemann (2016) e Silva (2012) apontam que os estudantes dos anos iniciais apresentam uma dificuldade na abordagem do raciocínio funcional, o que era de se esperar, uma vez que esse conceito não faz parte de seu currículo. Todavia, o que observamos nos resultados gerados sugerem que se forem propostas atividades aritméticas-algébrica na forma de resolução de problemas[76], esses aprenderão o que aparentemente não sabem (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2008). No entanto, vale ressaltar a necessidade de ajustes nas situações-problema presentes nos manuais de ensino para que essas se tornem adequadas ao potencial algébrico dos estudantes. Uma vez que em situações pautadas por uma intencionalidade algébrica os insucessos não resistirão a uma instrução (BOOTH, 1994).

4.2.3.4 Os níveis de raciocínio algébrico dos estudantes a partir dos comportamentos observados nos protocolos de respostas

Como já anunciado no capítulo III, metodologia, procuramos identificar nos comportamentos apresentados nos protocolos de respostas dos estudantes do 3º e 5º anos, pistas dos conceitos e seus invariantes algébricos presentes (mas nem sempre explícito) nos comportamentos desses estudantes. E, a partir disso, associá-las a níveis de raciocínios algébricos ou sua proximidade. Esses níveis estão relacionados aos conceitos de sequência, de equação e de função (linear).

Convém ressaltar que os níveis de raciocínio algébrico que almejamos identificar referem-se àqueles surgidos na perspectiva da *Early Algebra*, ou seja, àqueles que trazem em

[76] ONUCHIC, Lourdes de La Rosa (1999).

sua natureza elementos caracterizadores e constitutivos do pensamento algébrico[77]. A categorização desses raciocínios nessas duas ordens, aconteceu por entendermos que eles não estão necessariamente formalizados para esses estudantes, o que permite com que muitos ainda se encontrem implícitos nos esquemas de ação do estudante, no âmbito do contexto aritmético (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2005).

Consideramos que o raciocínio algébrico de 1ª ordem consiste naquele em que a forma de raciocinar dos estudantes evidenciam a existência de *noções primárias* sobre os conhecimentos algébricos. Enquanto que o raciocínio algébrico de 2ª ordem é aquele em que essas *noções são mais consistentes e mais bem-acabadas* que o de 1ª ordem em relação à generalização, à equivalência e à funcionalidade.

Para melhor explicar essas duas ordens e, ainda, estabelecer uma associação entre os tipos de comportamentos identificados e os níveis de raciocínios algébricos, apresentamos a tabela 8 em que os raciocínios algébricos, de 1ª e 2ª ordens, estão associados a uma categoria do tipo de comportamento dos estudantes e, também, a ação observada no protocolo de resposta do estudante.

Tabela 8 – Relação entre os comportamentos observados no objeto de estudo e os níveis de raciocínio algébrico

Nível de raciocínio	Tipo de comportamento	Ações observadas
RACIOCÍNIO ALGÉBRICO DE 1ª ORDEM (NR.1)	NS.3.1	IDENTIFICA UMA REGULARIDADE PRÓXIMA E/OU DISTANTE; MAS NÃO CONSTRÓI UMA SEQUÊNCIA RECURSIVA;
	NE.3.1	IDENTIFICA PARCIALMENTE EQUIVALÊNCIA ENTRE VARIÁVEIS;
	NF.3.1	ESTABELECE RELAÇÃO PARCIAL ENTRE AS VARIÁVEIS;
RACIOCÍNIO ALGÉBRICO DE 2ª ORDEM (NR.2)	NS.3.2	IDENTIFICA UMA REGULARIDADE PRÓXIMA E/OU DISTANTE E CONSTRÓI UMA SEQUÊNCIA RECURSIVA;
	NE.3.2	IDENTIFICA A EQUIVALÊNCIA ENTRE AS VARIÁVEIS DA SITUAÇÃO;
	NF.3.2	ESTABELECE RELAÇÃO COMPLETA ENTRE AS VARIÁVEIS.

Fonte: Elaborada pela autora.
Legenda: NS.3.1= Nível três do comportamento de sequência e se encontra na ordem um; NE.3.1 = Nível três do comportamento de equação e se encontra na ordem um; NF.3.1 = Nível três do comportamento de função e se encontra na ordem um; NS.3.2 = Nível três do comportamento de sequência e se encontra na ordem dois; NE.3.2 = Nível três do comportamento de equação e se encontra na ordem dois; NF.3.2 = Nível três do comportamento de função e se encontra na ordem dois.

[77] Assunto abordado no capítulo I.

Conforme avançamos na investigação do estabelecimento de relação entre os comportamentos dos estudantes e seus níveis de raciocínios, identificamos que eles não se concentram em apenas um nível de raciocínio algébrico. Isto quer dizer que quando era possível identificar os comportamentos e/ou sua proximidades de um certo estudante, percebíamos que esses oscilavam entre ser de 1ª ou 2ª ordem (classificação da natureza estabelecida). Como já discutido na subseção “Qual a relação entre os domínios da aritmética e da Álgebra?”, capítulo I, essa forma raciocinar algebricamente dos estudantes é intuitiva, fruto de uma dedução proveniente de suas experiências nos domínios da aritmética, de suas estruturas generalizáveis e de suas relações intrínsecas com os conceitos algébricos.

Reproduzindo os dados gerados na análise dos comportamentos, traremos os resultados numa configuração ordenada para que esses possam delimitar o nível de raciocínio algébrico de 1ª e 2ª ordens (ou sua proximidade). Faremos uma análise de cada grupo de estudante em particular (intragrupos) e depois entre os dois (intergrupos). Devido à pesquisa ter se concentrado apenas nos comportamentos apresentados nos esquemas gerados nos protocolos de respostas, não poderemos avançar muito, como gostaríamos, nesta linha de classificação.

Seguindo a análise qualitativa da pesquisa, apresentaremos uma compilação dos dados gerados entre os tipos de comportamentos observados em cada uma das vertentes algébricas estudada e a classificação do nível do raciocínio algébrico (estabelecida anteriormente). Inicia-se pelos resultados encontrados nos protocolos de respostas dos estudantes do 3º ano.

Tabela 9 – Raciocínio algébrico identificado nas ações dos estudantes do 3º ano

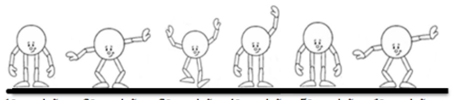
	Raciocínio algébrico			
Ações observadas	**1ª ordem**		**2ª ordem**	
	Código	**Ocorrências**	**Código**	**Ocorrências**
Sequência	NS.3.1	1,5%	NS.3.2	30,9%
Equação	NE.3.1	17,3%	NE.3.2	7,7%
Função	NF.3.1	15%	NF.3.2	23,2%

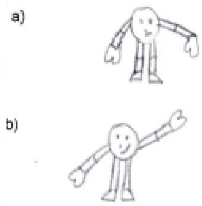
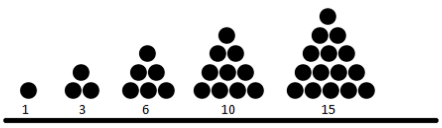
Fonte: Dados da pesquisa.

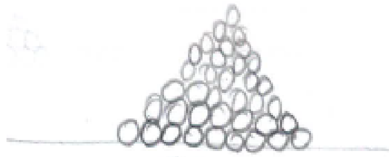
No que tange aos estudantes do 3º ano, observamos, na tabela 9, que na vertente da sequência esses já se encontram em um processo evolutivo considerável. Em outras palavras, o nível de raciocínio algébrico dos alunos situa-se muito mais na categoria de 2ª ordem que na 1ª (30,9% contra 1,5%, respectivamente). Esse resultado pode ser explicado como uma consequência de sua proximidade com as atividades escolares. Seja na relação da aritmética generalizável, seja nas suas estruturas algebrizadas (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2008; BRIZUELLA, 2006; BROCARDO et al, 2006; GÓMEZ, 2006; VALE et al, 2006; NCTM, 2000; USISKIN, 1995; BOOTH et al, 1995, entre outros).

O exemplo 4.2.3.4.3, a seguir, mostra três extratos do protocolo de respostas em questões que envolviam o conceito de sequência, os quais foram classificados no nível de raciocínio algébrico de 2ª ordem. Referem-se aos itens Q3A, Q3B, Q 7 e Q9, respectivamente.

Exemplo 4.2.3.4.3 – Respostas de raciocínio algébrico de 2ª ordem, por um estudante do 3º ano na vertente da sequência

<table>
<tr>
<td>Q3 – Carlitos é um boneco que adora fazer exercício. No exercício, ele flexiona as pernas e mexe os braços seguindo uma ordem nos movimentos. Ele pretende continuar nessa atividade por algum tempo. Veja a ordem dos exercícios do Carlitos.


a) Desenhe ao lado como ele estará na 9ª posição.
b) Desenhe ao lado como ele estará na 58ª posição.</td>
<td>a)
b)

Eu contei um por um</td>
</tr>
<tr>
<td>Q7 – Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.


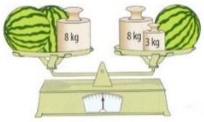
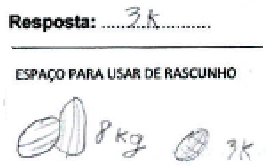
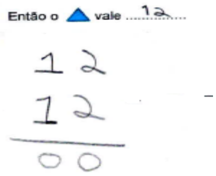
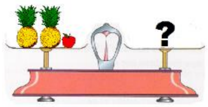
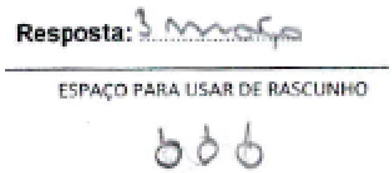
Seguindo essa mesma ordem, quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?</td>
<td>
36</td>
</tr>
<tr>
<td>Q9 – Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.
| 1 | 4 | 7 | 10 | ... | ... | ... | ... | ... |
Quando retornar, deverá concluir essa sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?</td>
<td>| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |
Resposta: 25</td>
</tr>
</table>

Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 71, extratos do protocolo.

Observamos nos comportamentos do estudante do 3º ano, nº 71, que ele compreende o conceito de sequência. Apoiado no processo de contagem, o estudante forma agrupamento (sequência de quatro elementos), quando esse diz ter contado de “um por um”, ou seja, ele percebe a composição periódica do movimento do boneco na Q3. Na situação-problema Q7, o estudante se ampara nos ícones para encontrar a 8ª figura de forma intuitiva. O recurso de imagens icônicas com um visual numérico favorece o desenvolvimento de abordagens intuitivas (LINS; GIMENEZ, 2001). Presumimos que de maneira indutiva ele tenha identificado o critério de formação de sequência na organização (posição e quantidade) das bolinhas. Observamos também que na Q9 ele não demonstra ter encontrado dificuldades em reproduzir a sequência numérica. Na Q9, conjecturamos que o aluno tenha estabelecido a sequência a partir de uma adição de parcelas reiteradas, de três em três.

Para contrapor aos exemplos de respostas classificadas como de 2ª ordem, no exemplo anterior, o exemplo 4.2.3.4.4, a seguir, apresenta três exemplos de comportamentos extraídos do protocolo de resposta de um estudante nº 57, do 3º ano, em que identificamos indícios de um raciocínio algébrico apenas de maneira elementar, o que aludimos ser de 1ª ordem, desta vez não nas questões que envolveram o conceito de sequência, mas sim de equação.

Exemplo 4.2.3.4.4 – Respostas de raciocínio algébrico de 1ª ordem, por um estudante do 3º ano, na vertente da equação

Q2 – Observe que a balança abaixo se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro. Todas as melancias têm o mesmo peso.  Qual é o peso de apenas uma melancia?	
Q5 – Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática. Ele pensa, concentra-se, mas, está precisando de uma ajuda. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada uma das figuras? a) △- 12 = 0; Então o △ vale...	
Q8 – A balança se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro. As maçãs têm o mesmo peso. As bananas têm o mesmo peso.  Quantas maçãs temos que colocar no prato da direita para que a balança permaneça em equilíbrio? 	

Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 57, extratos do protocolo.

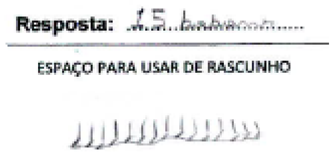
No que tange a vertente da equação, observamos, na tabela 9, que havia muito mais estudantes do 3º ano no nível de raciocínio algébrico de 1ª ordem que de 2ª (17,3% contra 7,7%). O resultado era previsível, uma vez que a relação de equivalência abordada nos anos iniciais é retratada como resultado de uma operação (LINS; GIMENEZ, 2001), ou seja, ela abrange apenas a propriedade básica da equivalência “a igualdade” (GOMERO, 2017). Nos manuais didáticos para o ensino da matemática, dos anos iniciais, do Ensino Fundamental, quando surge alguma situação de equivalência essa apresenta-se em atividades do tipo “2 + 3 = ?, ou ? + 5 = 8”. Numa situação desse tipo o estudante apenas interpreta o sinal de igual como o resultado da adição. Não se dispõe na ocasião outras interpretações desse sinal, como, por exemplo, uma situação em que uma operação possa ser representada como relação de equivalência entre os membros dessa operação, por exemplo: 2 + 3 = 1 + 4, ou 2 + 3 = 9 - 4 , em que o estudante possa perceber a relação de equivalência envolvida na situação.

Raramente encontramos nos manuais didáticos dos anos iniciais, do Ensino Fundamental, situações-problema mediadas por balança de dois pratos. Essa organização didática é um desperdício de oportunidades, uma vez que a balança de dois pratos, como uma ferramenta cultural permite uma ponte entre os conhecimentos espontâneos e científicos dos estudantes. Uma "metáfora do princípio de equivalência" (DA ROCHA, 2003, p. 61) que possibilita a familiaridade algébrica, além de ser um recurso analógico de justaposição através das leis do equilíbrio (FIORENTINI, 1993). Esse recurso visual pode desencadear a noção de equivalência numa base elementar para os anos iniciais (conjunto dos números naturais).

Ressaltamos que as atividades mediadas por balança de dois pratos apesar de favorecerem a construção do princípio de equivalência, apresentam limitações conceituais, o que demanda outros suportes didáticos para a formação do conceito algébrico. Se o objetivo for a apropriação do conceito (formal) de uma equação algébrica, bem como seus elementos a atividade deverá apresentar também o caráter de abstração. Esse caráter subsidiará saltos conceituais, pois no avançar dos campos numéricos (por exemplo, no conjunto dos números inteiros) esse recurso analógico apresenta limites epistemológicos e não fornece condições para a transição do concreto para o campo abstrato (LINS; GIMENEZ, 2001).

Por fim, no que concerne a vertente da função, os comportamentos dos estudantes do 3º ano apresentados em porcentagem na tabela 9 mostra uma diferença entre os níveis de raciocínio algébrico de 1ª e 2ª ordens, a favor da última (8,2%), o que sugere que para um quarto desses estudantes a noção função e seus elementos caracterizadores já começam a ser despertados ou implicitamente conhecidos. Podemos conjecturar que eles se encontram num período de transição entre os raciocínios algébricos de 1ª e 2ª ordens. Para exemplificar esse tipo de raciocínio, apresentamos, a seguir, um extrato do protocolo de respostas do estudante nº 65, do 3º ano, em que identificamos seu desempenho nas situações-problema Q1, Q6 e Q10, no que se refere ao conceito de função.

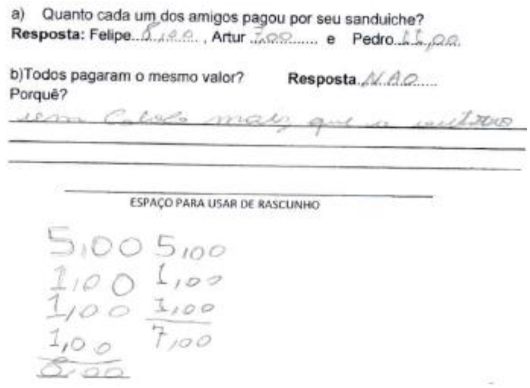
Exemplo 4.2.3.4.5 – Respostas de raciocínio algébrico de 1ª ordem, por um estudante do 3º ano, na vertente da função

Q1 – Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:  Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?	

<table>
<tr>
<td> = ?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Q6 – Na lanchonete da pracinha está acontecendo promoção.
MONTE SEU PRÓPRIO SANDUÍCHE
<table>
<tr><td>BÁSICO

R$5,00
Pão + Bife</td><td>COMPLEMENTO
Para cada um dos ingredientes acrescenta

+ R$ 1,00</td></tr>
</table>
Felipe, Artur e Pedro foram lanchar. Cada um deles vai querer incrementar seu sanduíche.

Felipe pediu o básico mais queijo, ovo e cebola;
Artur solicitou o básico mais queijo e bacon;
Pedro turbinou o dele acrescentando no básico: queijo, ovo, tomate, alface, cebola e batata palha.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Q10 – Três amigos foram ao parque de diversão.
Cada um levou uma quantia de dinheiro para gastar nos brinquedos.
1. Lúcia levou 2 notas de 10 reais e mais 4 notas de 2 reais;
2. João levou a metade das notas de 10 reais e a metade das notas de 2 reais que Lúcia levou;
3. Beto levou a quantia de Lúcia e João juntos.

a) Quantas notas de 10 reais e quantas de 2 reais Beto levou?
b) Quantas notas de 10 reais e de 2 reais os três amigos levaram juntos para o parque?</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Resposta do estudante do 3º ano, nº 65, extratos do protocolo.

A partir dos esquemas de ação usados pelo estudante nº 65, do 3º ano, identificamos que ele compreende a noção de dependência entre as grandezas envolvidas (valor monetário e quantidade do produto), com um apoio icônico (Q1 pauzinhos e Q10 desenho de notas). O discente demonstra ter um raciocínio funcional elementar. Nos parece que a estrutura multiplicativa das situações-problema favoreceu a compreensão funcional e que a associação dessa com os ícones na Q1 (PEREZ, 2016) foi um suporte adequado na elaboração do teorema-em-ação por trás do teorema matemático[78]. No tocante a Q10, temos que a relação funcional foi compreendida e desenvolvida pelo estudante a partir das operações básicas da aritmética, operações como função (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2008).

Entretanto, na classificação quanto ao raciocínio algébrico dos estudantes do 3º ano, do Ensino Fundamental, em relação à vertente da função, não temos como matematicamente classificá-lo. A esse fato podemos fazer uma analogia com as discussões de Teixeira (2016),

[78]Discussão apresentada na subseção anterior deste capítulo IV.

quando chama atenção para a dificuldade dos estudantes do 5º ano em relação ao conceito de função. Essa discussão do autor nos permite presumir que se a função é um conceito sofisticado para os estudantes do 5º ano, quiçá para os estudantes do 3º ano. Percebemos que os estudantes do 3º ano até conseguem estabelecer uma relação de dependência entre os elementos das situações-problema, mas sua forma de raciocinar encontra-se ainda limitada cognitivamente.

Seguindo a análise da relação entre os níveis de raciocínio algébrico dos estudantes a partir dos comportamentos observados nos protocolos de respostas, conheça, agora, os resultados gerados a partir das respostas dos estudantes do 5º ano.

Tabela 10 – Raciocínio algébrico identificado nas ações dos estudantes do 5º ano

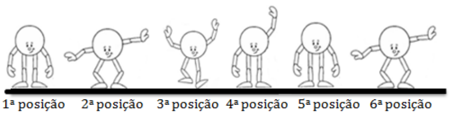
	Raciocínio algébrico			
Ações observadas	**1ª ordem**		**2ª ordem**	
	Código	**Ocorrências**	**Código**	**Ocorrências**
Sequência	NS.3.1	5%	NS.3.2	28,7%
Equação	NE.3.1	22,4%	NE.3.2	18,7%
Função	NF.3.1	23,6	NF.3.2	21,2%

Fonte: Dados da pesquisa.

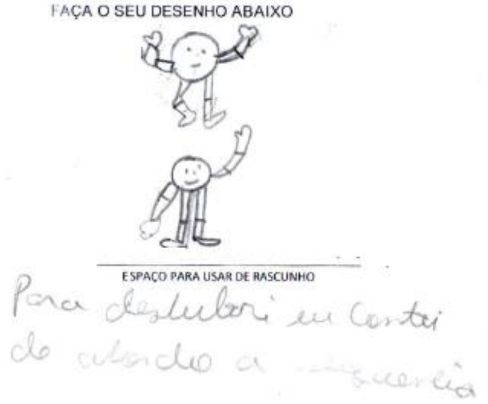
Em relação a vertente da sequência, observamos nos resultados ocorridos para os estudantes do 5º ano, assim como para os estudantes do 3º ano, que os raciocínios algébricos deles também se encontram mais na categoria de 2ª ordem que na de 1ª (de 5% para 28,7%, respectivamente). Para fundamentar essa classificação, verifique os extratos do protocolo de resposta do estudante do 5º ano, nº 55, que retratam o seu raciocínio algébrico nas questões Q3, Q7 e Q9, referente ao conceito de sequência.

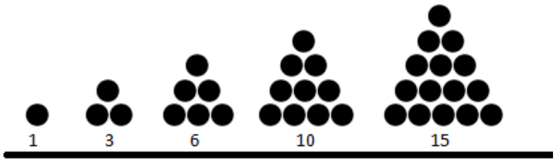
Exemplo 4.2.3.7 – Resposta de raciocínio algébrico de 2ª ordem, por um estudante do 5º ano, na vertente da sequência

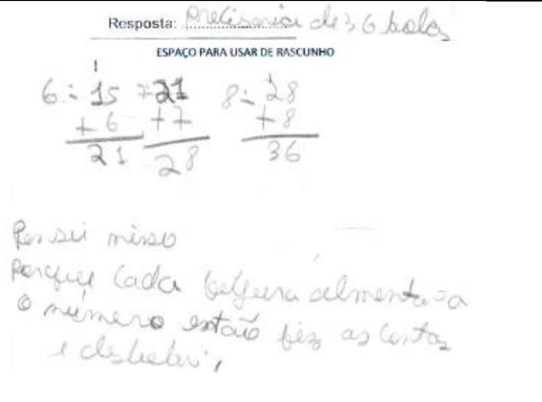
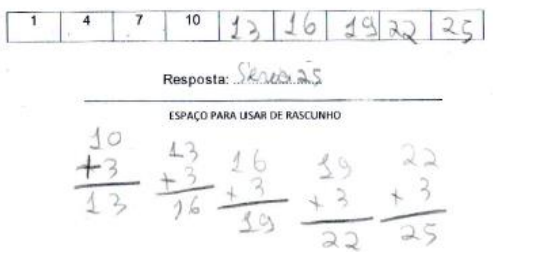
Q3 – Carlitos é um boneco que adora fazer exercício. No exercício, ele flexiona as pernas e mexe os braços seguindo uma ordem nos movimentos. Ele pretende continuar nessa atividade por algum tempo. Veja a ordem dos exercícios do Carlitos.



a) Desenhe ao lado como ele estará na 9ª posição.
b) Desenhe ao lado como ele estará na 58ª posição.



<table>
<tr>
<td>Q7 – Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.


Seguindo essa mesma ordem quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Q9 – Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.
| 1 | 4 | 7 | 10 | ... | ... | ... | ... | ... |
Quando retornar, deverá concluir essa sequência obedecendo à mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 55, extratos do protocolo.

Como podemos notar nos esquemas de ação do estudante do 5º ano, de nº 55, apresentado nos três extratos do protocolo de resposta, percebemos que ele compreende o conceito de regularidade e/ou sequência e a lei de formação envolvida, fundamenta-se na generalização da relação existente entre os elementos da sequência para encontrar termos desconhecidos. Quanto à capacidade de compreensão das sequências envolvidas nas situações-problema investigadas e os esquemas de ação apresentados nas respostas nos permite dizer que, de acordo com a classificação, o estudante do 5º ano apresenta um raciocínio algébrico de 2ª ordem.

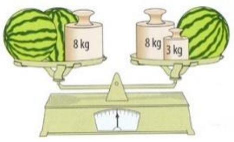
Identificamos que o estudante do 5º ano, em questão, consegue verbalizar o fator generalizador (estrutura aditiva) e demonstra em seu teorema-em-ação[79] uma noção palpável, porém de domínio aritmético, do que seja uma sequência como conceito algébrico. Presumimos que essa habilidade de generalização, é reflexo de uma capacidade algébrica (*Early Algebra*) que subjaz em seu repertório cognitivo (VERGNAUD, 1996) cuja origem tem sido adaptada das operações básicas da aritmética. Esse estudante opera sobre os resultados encontrados, isto implica uma estreita ligação com o pensamento algébrico (BLANTOM, 1984).

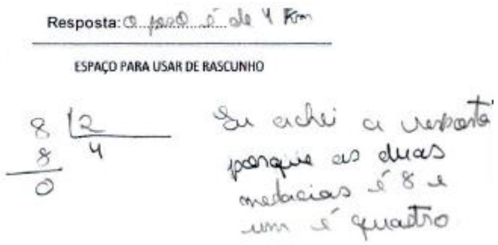
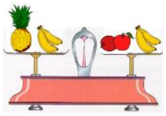
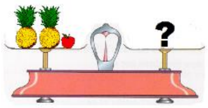
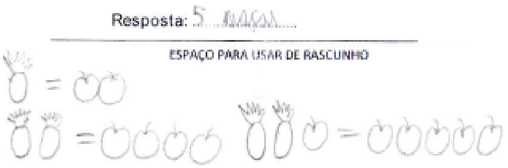
[79] Os teoremas por trás dessas ações já foram apresentados na subseção anterior deste capítulo IV.

Na situação-problema Q3, ele identifica uma sequência periódica composta de seis elementos[80], e relata que encontrou a posição do boneco mediante a descoberta da sequência. Na verbalização da ação ("eu contei de acordo com a sequência"), mais uma vez o aluno demonstra ter conhecimento do que seja uma sequência.

Contrapondo os exemplos de raciocínio de 2ª ordem encontrados na sequência, no que concerne a vertente da equação, os estudantes do 5º ano encontram-se na categoria de 2ª ordem (de 22,4% para 18,7%, 1ª e 2ª ordens respectivamente). Novamente, identificamos outra semelhança com as categorias de raciocínio algébrico de seus colegas do 3º ano, porém com uma diferença menor (17,3% para 7,7% para os estudantes do 3º ano) e um contorno que se aproxima para o raciocínio algébrico de 2ª ordem que os estudantes do 3º ano. No intuito de discutir essa posição, observe os extratos do protocolo de respostas das situações-problemas Q2 e Q8, do estudante do 5º ano, nº 62, para aportar essa suposição.

Exemplo 4.2.3.8 – Respostas de raciocínio algébrico de 1ª ordem, por um estudante do 5º ano, na vertente da equação

<table>
<tr>
<td>Q2 – Observe que a balança abaixo se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro. Todas as melancias têm o mesmo peso.


Qual é o peso de apenas uma melancia?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Q8 – A balança se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro. As maçãs têm o mesmo peso. As bananas têm o mesmo peso.
Figura 1

Quantas maçãs temos que colocar no prato da direita para que a balança permaneça em equilíbrio?
Figura 2

</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

[80]Essa possibilidade foi relatada no capítulo III, metodologia.

Fonte: Resposta do estudante do 5º ano, nº 66, extratos do protocolo.

Ao observamos os esquemas de ação utilizados pelo estudante do 5º ano, nº 62, identificamos um conhecimento parcial dos conceitos que envolvem uma equação. Vimos na situação-problema Q2, que ele não identifica a relação de equivalência ilustrada pela balança de dois pratos. Nessa incapacidade algébrica estabelece apenas uma relação de igualdade (apenas em um prato), afirmando que se as duas melancias pesam 8 kg, então uma melancia é igual a 4 kg. Mesmo nessa visão parcial, o educando constrói uma relação de equivalência que lhe seja conveniente. Assim, essa organização, particular do estudante, sugere que mesmo identificando como uma igualdade, ele demonstra ter uma noção de equivalência, uma vez que toda relação de igualdade é uma relação de equivalência, pois admite as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva (VERGNAUD, 2014), base para toda e qualquer relação de equivalência.

Essa visão parcial de equivalência pode ser entendida como uma falta de familiaridade com esse tipo de tarefa nos anos iniciais, visto que ele deve ter conhecimento o que seja uma balança de dois pratos e da condição de equilíbrio presente. Esse fato pode ter uma explicação na distância existente entre os conhecimentos da experiência cotidiana e os conhecimentos de base algébrica. A Álgebra é um conhecimento estritamente escolar (LINS; GIMENEZ, 2001), o que dificulta sua relação com os conhecimentos sociais.

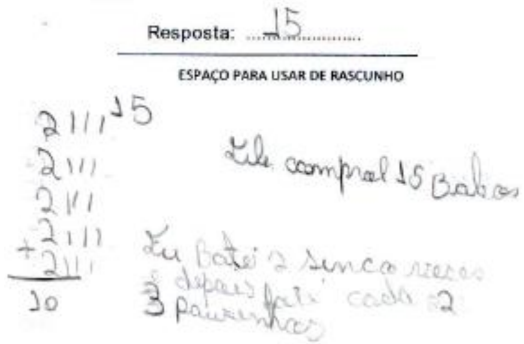
Por outro lado, na situação-problema Q8, o estudante do 5º ano identifica e compreende a noção integral de uma relação de equivalência entre as frutas, elementos presentes na questão. Percebe a lei do equilíbrio entre os pratos e exibe, em seu esquema (linguagem materna), a relação entre as propriedades simétrica e transitiva. O que podemos dizer que o teorema por trás de sua ação é legítima, ou seja, se um abacaxi equivale a duas maçãs, então dois abacaxis equivalem a quatro maçãs, logo dois abacaxis e uma maçã equivalem a cinco maçãs.

Concluindo a análise quanto ao raciocínio algébrico dos estudantes do 5º ano, no que concerne a categorização em relação a vertente da função, apresentado na tabela 10, identificamos uma diferença entre os níveis de raciocínio algébrico de 1ª e 2ª ordens, a favor para 1ª ordem (2,4%). Essa diferença sugere que quase um quarto dos estudantes ainda dispõem de uma noção parcial do raciocínio funcional. Esse fato traz indícios de uma dependência aritmética que pode comprometer sua noção algébrica (LINS; GIMENEZ, 2001; SOUSA, PASSIAN; CEDRO, 2014). A seguir, apresentamos os extratos do protocolo de resposta de um estudante do 5º ano, nº 69, que justifica essa classificação.

Exemplo 4.2.3.9 – Respostas de raciocínio algébrico de 1ª ordem, por um estudante do 5º ano, na vertente da função

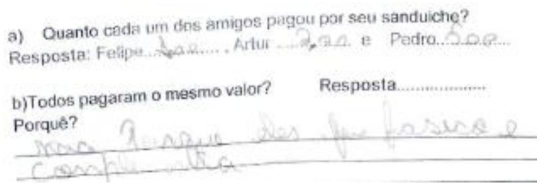
<table>
<tr>
<td>Q1 – Na venda de Dona Ana, com R$ 2,00 se compra três bombons vermelhos como mostra a figura abaixo:

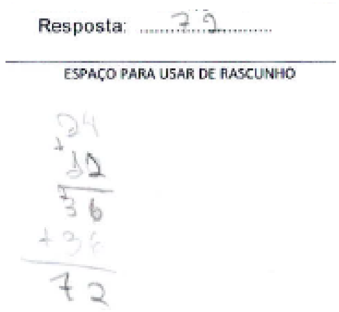
Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?

</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Q6 – Na lanchonete da pracinha está acontecendo promoção.
MONTE SEU PRÓPRIO SANDUÍCHE
<table>
<tr><td>BÁSICO

R$5,00
Pão + Bife</td><td>COMPLEMENTO
Para cada um dos ingredientes acrescenta

+ R$ 1,00</td></tr>
</table>
Felipe, Artur e Pedro foram lanchar. Cada um deles vai querer incrementar seu sanduíche.

Felipe pediu o básico mais queijo, ovo e cebola;
Artur solicitou o básico mais queijo e bacon;
Pedro turbinou o dele acrescentando no básico: queijo, ovo, tomate, alface, cebola e batata palha.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Q10 – Três amigos foram ao parque de diversão. Cada um levou uma quantia de dinheiro para gastar nos brinquedos.
1. Lúcia levou 2 notas de 10 reais e mais 4 notas de 2 reais;
2. João levou a metade das notas de 10 reais e a metade das notas de 2 reais que Lúcia levou;
3. Beto levou a quantia de Lúcia e João juntos.

a) Quantas notas de 10 reais e quantas de 2 reais Beto levou?
b) Quantas notas de 10 reais e de 2 reais os três amigos levaram juntos para o parque?</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Respostas do estudante do 5º ano, nº 69, extratos do protocolo.

Como podemos notar, temos novamente nos esquemas de ação do estudante do 5º ano, nº 69, que esse se apoia na representação mista (icônica e numérica) para demonstrar o seu raciocínio funcional (teorema-em-ação implícito). Seus esquemas de ação apresentam uma organização algorítmica (domínios aritméticos) e permitem o estabelecimento das relações entre essas operações, como uma forma de raciocínio funcional (CARRAHER;

SCHLIEMANN, 2008; CARRAHER et al, 2006). Uma instância específica de uma função e suas relações (CARRAHER: SCHLIEMANN; SCHWARTZ, 2005). Para estabelecer e verificar a relação de dependência entre os elementos das situações-problema (Q1, Q6 e Q10), o estudante utilizou como suporte a estrutura aditiva, o que nos permite supor a existência de um elo muito forte entre essa e a estrutura dos campos conceituais da Álgebra.

Essa proximidade entre os domínios da aritmética (operações) e da algébrica favorece o desenvolvimento das ideias da variabilidade presente no raciocínio funcional (BRASIL, 2017). Fica tangível na forma operatória como os estudantes do 5º ano, assim como os do 3º ano, se apoiam para resolver as situações-problema (Q1, Q6 e Q10) referente ao conceito de função.

Esses comportamentos observados na vertente da função, por estudantes do 5º ano, foram baseados nos comportamentos de potencial algébrico, os esquemas de ação dos estudantes que procuramos identificar e classificar as categorias (ou a sua proximidade conceitual) referente aos níveis de raciocínio algébrico apresentados pelos estudantes nas vertentes algébricas pesquisadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo apresentaremos nossas conclusões e considerações construídas a respeito da compreensão e manipulação dos conceitos algébricos na perspectiva da *Early Algebra: prelúdio da álgebra por estudantes do 3º e 5º anos do ensino fundamental*. Traremos os resultados gerados na pesquisa (quantitativamente e qualitativamente), a percepção e a capacidade dos estudantes em relação aos conceitos primitivos da sequência, da equação e da função. Assim, apresentaremos os níveis de raciocínio algébrico catalogados no estudo, e as perspectivas futuras de estudo nessa área.

Iniciaremos recordando o objetivo desta pesquisa *"comparar as competências e os esquemas de ação que os estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, utilizam ao lidarem com situações-problema, envolvendo os conceitos da Álgebra Elementar e, ainda, identificar seus níveis de raciocínio algébrico usados para resolver tais situações"*. Tendo, em vista, esse objetivo elaboramos três questões, a saber: *Quais as competências que os estudantes de 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar? Quais os esquemas que os estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar? Quais os níveis de raciocínio algébrico que estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar?*

Na busca em atingir tais objetivos, gerar dados consistentes, coerentes com o aporte teórico eleito, atendendo às expectativas iniciais e as motivadas no processo e, assim, poder responder às questões elencadas, apresentamos, a seguir, a trajetória que percorremos nesta dissertação para tal.

1 BREVE RELATO DA TRAJETÓRIA DO ESTUDO

O primeiro momento da dissertação, a introdução foi pautada na minha experiência de professora de matemática da Educação Básica e, também, na perspectiva de mãe, cujos filhos encontravam-se em etapas distintas ao longo do Ensino Fundamental (alfabetização, 4º e 6º anos). A partir dessa fase, buscamos (eu e a orientadora) levantar teorias, discussões de pesquisadores e especialistas que pudessem nos ajudar a responder as indagações iniciais. Por exemplo, como crianças, que ainda não tiveram acesso às noções da Álgebra, conseguem raciocinar de acordo com os parâmetros algébricos?

Na sequência, traçamos o desenho da pesquisa, bem como os capítulos teóricos que iriam fundamentá-la. A opção metodológica foi um estudo descritivo, tendo como base da investigação um instrumento diagnóstico, aplicado a 69 estudantes do 3º ano, e 80 do 5º ano, do Ensino Fundamental. As análises decorreram dos dados coletados por esse instrumento, o qual continha dez situações-problema, perfazendo 14 itens. Esses itens envolviam situações relativas a três vertentes algébricas: sequência, equação e função. Os dados nos permitiram realizar inicialmente uma análise quantitativa, baseada no desempenho dos estudantes e, depois, uma análise qualitativa, em que o foco foram as ações dos estudantes ao lidarem com tais situações.

Cabe ressaltar que os objetivos, as questões propostas e os capítulos foram construídos de forma concatenada. Essa estrutura teve por base as discussões da *Early Algebra* para estudantes dos anos iniciais, do Ensino Fundamental, na perspectiva de pesquisadores, como: Booth (1984), Kaput (1984), Usiskin (1995), Lins e Gimenez (2001), Brizuela (2006), Blanton (2007), Carraher (2007), Schliemann (2007), Magina (2008), Kieran (2016) dentre outros.

No primeiro capítulo, fizemos uma explanação da Álgebra sobre dois pontos de vista “da escola e da matemática”. Nele, apresentamos subsídios teóricos para discutir o surgimento (parcial) da Álgebra como um ramo da matemática e sua posição, atualmente, no contexto escolar. Traçamos também uma relação entre os domínios da aritmética no Ensino Fundamental e dos conceitos da Álgebra.

No segundo capítulo, apresentamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), a relação dessa para com o campo conceitual algébrico e os estudos que subsidiaram e referendaram a fundamentação teórica-epistemológica da pesquisa. Esses embasaram a elaboração do instrumento investigativo, suas situações-problema e contribuíram na compreensão e análise dos dados gerados nos protocolos de pesquisa.

No terceiro capítulo, apresentamos os procedimentos que fundamentaram a opção teórico-metodológica, o desenho do experimento, o universo pesquisado e a amostra escolhida, bem como os motivos que os elegeram como propícios ao estudo. Dentro do desenho do experimento, apresentamos a miúde o instrumento diagnóstico (teste), a partir do qual obtivemos os dados geradores da pesquisa.

No quarto capítulo, foi destinado às análises. Nele, iniciamos pela a organização e compilação dos dados, gerando, assim, os primeiros resultados gerados extraídos do instrumento investigativo. Buscamos desde o início estabelecer um diálogo desses dados com o aporte teórico do estudo. Essa análise foi feita sob dois aspectos: quantitativo e qualitativo. Os resultados foram erguidos a partir dos percentuais de acertos dos itens do instrumento, seguido pela identificação dos esquemas de ação dos estudantes e da comparação dos comportamentos de raciocínio algébrico ressaltados pelos sujeitos da pesquisa.

Posto isto, apresentaremos nossas conclusões e considerações finais a respeito dos resultados da pesquisa e as expectativas para pesquisas futuras. Faremos essa explanação observando a ordem imposta no escopo da dissertação.

Na certeza e fidelidade do trabalho efetuado, no decorrer do período de coleta e análise dos dados gerados, traremos uma sucinta síntese dos resultados obtidos para subsidiar as respostas das três questões arquitetadas na introdução do estudo.

2 SÍNTESE DOS RESULTADOS ANALISADOS

Na primeira seção da análise e discussão dos dados, destinada ao fator quantitativo, o foco foi o desempenho dos estudantes (acertos), as diferenças percentuais entre as variáveis da pesquisa e o nível de conhecimento desses para as situações-problema (itens) do instrumento investigativo (teste).

No que tange ao desempenho geral, identificamos que os estudantes do 5º ano foram mais competentes que os do 3º ano. Porém, observando isoladamente os índices percentuais de acertos alcançados pelos dois grupos foram muito baixos (21% e 32%, respectivamente). Todavia, estes índices não nos surpreendem, uma vez que esses nunca foram expostos ou nunca estudaram os conceitos algébricos investigados na pesquisa. Mesmo assim, intergrupo, essa diferença foi estatisticamente significativa, refletindo uma disparidade cognitiva quanto aos conceitos avaliados no teste, podendo ser explicada tanto pela diferença do ano escolar que cada grupo se encontra (maturidade conceitual), ou ainda, pelo próprio desenvolvimento cognitivo do ser humano, já que os estudantes do grupo do 5º ano têm, no mínimo, dois anos a mais que os do 3º ano.

Partindo para um desempenho específico das variáveis da pesquisa: objeto matemático (sequência, equação e função), tipo de representação (icônica, numérica) e nível de dificuldade (simples ou sofisticada), identificamos diferenças percentuais entre os desempenhos dos estudantes, as quais merecem ser notadas.

No que concerne aos três objetos matemáticos, novamente, os discentes do 5º ano mantêm uma vantagem de acertos em relação aos do 3º ano. Isto nos permite inferir que esses se encontram mais propícios à introdução dos conceitos da Álgebra Elementar que os do 3º ano.

No tocante ao desempenho dos estudantes, na vertente da sequência, a combinação numérica com o nível de dificuldade simples obteve um melhor desempenho para ambos os grupos, notadamente para os estudantes do 5º ano. Tal resultado nos faz conjecturar que os alunos, de um modo geral, se beneficiam se a situação for apresentada num nível de dificuldade simples, independentemente da situação a ser apresentada por meio da representação numérica ou icônica.

Quanto à vertente da equação não identificamos uma diferença percentual significativa de acertos nem intra ou intergrupos. Entretanto, no que tange a combinação com a variável representação simples, ambos os grupos se saem estatisticamente melhor. Assim como na sequência, identificamos que a variável nível de dificuldade simples combinada com a representação numérica nos parecem ser de fato realmente mais fáceis também para a vertente da equação. Salientamos que o pior percentual de acertos continua sendo a numérica sofisticada para ambos os grupos pesquisados.

No que concerne a vertente da função, tanto o 3º como o 5º ano tiveram maior dificuldade nela do que nas outras duas vertentes. A miúde, mesmo com toda a dificuldade para resolver as situações funcionais, quando essas apresentavam nível de dificuldade simples, ambos os grupos se saíram bem melhor do que em relação ao nível de dificuldade sofisticada. Já ao compararmos, dentro de cada grupo, os desempenhos entre as variáveis equação e sequência, constatamos que não há diferença significativa nem para o grupo do 3º ano nem do 5º ano. Em outras palavras, os itens envolvendo esses dois conceitos apresentaram o mesmo grau de dificuldade para os dois grupos.

Levando em consideração a variável tipo de representação, independente do objeto matemático, identificamos que a representação icônica favorece significativamente os estudantes dos dois grupos em comparação com a numérica. Baseadas nesses resultados, consideramos que o ícone é um apoio importante para ambos os grupos, uma vez que mesmo sem instrução formal os estudantes apresentaram competências necessárias para resolução de situações-problema que envolvem noções básicas da Álgebra Elementar.

Quanto ao nível de dificuldade, ser simples ou sofisticado, como previsível na análise *a priori*, as situações-problema cuja dificuldade fora categorizada como simples foram realmente elementares, básicas para os estudantes dos dois grupos. De fato, mais da metade dos estudantes do 5º ano e mais de um terço dos estudantes do 3º ano resolvem situações-problema simples, envolvendo noções básicas da Álgebra Elementar.

Posto isto, ressaltamos que não existe *razão quantitativa* para adiar a antecipação dos conceitos algébricos (básicos) para os anos iniciais, do Ensino Fundamental, uma vez que existe uma relação de continuidade entre os domínios da aritmética e da Álgebra. Desde que seja proporcionado aos educandos as condições favoráveis (situações icônicas e/ou com graus de dificuldade simples) para sua aprendizagem. Tal afirmação baseia-se na necessária competência demonstrada por esses para a formação de conceitos referente à sequência, equação e função.

Em relação ao ponto de vista *qualitativo,* concluímos que os estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, mostram-se capazes para identificar e/ou construir regularidades, para estabelecer relações de equivalência e, também, de dependência entre grandezas numéricas. Essa hipótese fundamenta-se nos esquemas de ação registrados nos protocolos de respostas dos estudantes tanto do 3º ano como os do 5º ano pesquisados.

Quanto às regularidades presentes nas sequências algébricas (repetitiva ou recursiva), abordadas no teste, podemos dizer que os estudantes demonstram estar aptos para identificar os comportamentos de padrão, e as leis que as regulam. Notamos que eles utilizam, em sua maioria, uma noção intuitiva (domínios aritméticos) para estabelecer uma generalização algébrica e a utiliza como recurso/apoio para encontrar elementos desconhecidos (posteriores). Esses elementos desconhecidos são mais facilmente descobertos se estiverem próximos, mas isso não significa que não consigam identificar os elementos distantes (mesmo que não com a mesma frequência dos mais próximos). Identificamos em alguns esquemas registrados, na vertente da sequência teoremas-em-ação, equivalente a teoremas matemáticos sofisticados e improváveis conceitualmente para o nível curricular dos estudantes pesquisados.

No que tange a vertente da equação, verificamos que os estudantes identificam uma relação de equivalência, baseando-se na identificação do sinal de igualdade apenas como resultado de uma operação. Utilizam desse apoio e o ampliam (propriedade simétrica) para identificar as variáveis (parcial ou total) envolvidas na relação. A relação transitiva aparece nos registros dos esquemas de ação dos estudantes, porém, num sentido figural (icônico). Isto nos sugere uma noção inacabada dessa propriedade no âmbito dos conceitos algébricos da equação.

No quesito de relações funcionais, verificamos que os estudantes tanto do 3º quanto os do 5º ano apresentam maior dificuldade nessa vertente que a observada nas vertentes da sequência ou da equação. Utilizam, em sua maioria, na resolução das situações-problema, recursos de estruturas aditivas para encontrar o(s) valor(es) da(s) grandeza(s) desconhecido(s). Observando os procedimentos registrados nos esquemas dos estudantes quanto às estruturas aditivas e multiplicativas, identificamos nos estudantes do 5º ano uma forte tendência a utilizar a escala multiplicativa. Enquanto que os estudantes do 3º ano não deixam claro seus esquemas, muitas vezes, passando pelo uso de ícones, outras em conjunto com números (mas não necessariamente operações). Essa diferença nos parece previsível, uma vez que os do 5º ano encontram-se adentrando no campo proporcional com mais intensidade que os do 3º ano. Mesmo a operação de multiplicação, ela é bem mais trabalhada com estudantes do 5º que do 3º ano. Este último costuma estudar basicamente a adição, e a multiplicação vem a seu reboque, vista apenas como adição de parcelas iguais.

Observamos também que os estudantes de ambos os grupos se beneficiaram significativamente das situações-problema nos três objetos matemáticos investigados, desde que no âmbito da representação icônica e de nível de dificuldade simples. Dessa maneira, podemos dizer que a antecipação dos conceitos básicos das variáveis algébricas investigadas não é apenas possível, mas também viável ao longo dos anos iniciais, do Ensino Fundamental. Essa antecipação conceitual é apenas uma formalidade curricular que tende a ser oportunizada pelas diretrizes da BNCC (BRASIL,2017) quanto ao eixo da Álgebra.

Para fundamentar nosso argumento quanto a capacidade algébrica dos estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, (amostra investigada) identificamos dois níveis de raciocínio algébrico. Esses foram baseados nos comportamentos registrados nos esquemas de ação dos estudantes extraídos dos protocolos de respostas e categorizados mediante cada uma das três vertentes algébricas abordada nas situações-problema do instrumento investigativo (teste). Um de primeira ordem, N1 em que se evidencia uma forma de raciocinar com *noções primárias* sobre os conhecimentos algébricos; o outro de segunda ordem, N2, sendo àquele em que essas *noções são mais consistentes e mais bem-acabadas* que os de N1.

No que concerne aos níveis de raciocínio algébrico para a vertente da sequência, os estudantes do 3º ano assim como os do 5º ano, situam-se no nível de raciocínio algébrico de 2ª ordem, quanto aos conceitos básicos das sequências algébricas abordados no teste investigativo. Isto significa que, de acordo com nossos resultados, os estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, encontram-se aptos a serem conduzidos aos domínios nas sequências algébricas e, consequentemente, ao campo conceitual da Álgebra.

Situação oposta é observada na vertente da equação para ambos os grupos pesquisados. Os estudantes do 3º ano assim como os do 5º ano encontram-se no nível de raciocínio algébrico de 1ª ordem. Assim, eles ainda se encontram com noções muito elementares em relação ao conceito de equação. De acordo com os dados gerados na pesquisa, identificamos nesses discentes uma dificuldade em se moverem entre as duas propriedades básicas da relação de equivalência, ou seja, de irem da relação simétrica para a transitiva. E isto os impediu de avançar na identificação e na compreensão das variáveis (incógnitas) presentes nas situações-problema dedutíveis à uma equação de primeiro grau abordadas.

Observando o emparelhamento entre os níveis de raciocínio algébrico dos grupos nas vertentes da sequência e da equação, ficou tangível a proximidade algébrica entre eles. Identificamos na forma operatória registrada nos extratos dos protocolos de respostas, que os estudantes do 5º ano, assim como os do 3º ano se apoiam de forma análoga (embora o 5º ano seja mais sofisticado) para resolver as situações-problema referentes aos conceitos básicos investigados.

Todavia, na vertente da função, a relação entre os níveis de raciocínios algébricos (N1 e N2) dos estudantes do 3º ano para com os do 5º ano apresentam uma diferença comportamental. Os alunos do 3º ano transitaram livremente, sem nenhum compromisso com a coerência, entre os dois níveis de raciocínio algébrico, não apresentando uma característica comum (intragrupo), que permita fixá-los em apenas um único nível de raciocínio algébrico. Não nos sentimos à vontade para fazer essa classificação, uma vez que diante dos níveis categorizados esses estudantes, 3º ano, podem ainda se encontrar em um nível anterior a que propusemos. Entretanto, os educandos do 5º ano se encontram no nível de raciocínio algébrico de 1ª ordem, N1. Isto equivale dizer que os do 5º ano, nesse momento curricular, apresentam condições mais favoráveis à introdução do conceito de função que os do 3º ano, do Ensino Fundamental.

3 RESPONDENDO ÀS QUESTÕES DE PESQUISA

Dedicaremos nesta seção às respostas das seguintes questões de pesquisa que foram assim descritas:

I. *Quais as competências que os estudantes de 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar?*

II. *Quais os esquemas que os estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar?*

III. *Quais os níveis de raciocínio algébrico que estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar?*

I. *Quais as competências que os estudantes de 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar?*

Quanto às competências observadas nos registros esquemáticos dos estudantes do 5º ano, assim como os do 3º, quanto às situações-problema do teste, podemos responder que ambos os grupos às apresentam. Essas competências são muito semelhantes (teorema-em-ação), são de natureza intuitiva/dedutiva mobilizadas na direção de responder às situações-problema sem nenhum compromisso algébrico (domínios da aritmética). Mostram-se capazes de compreender, construir e inferir sobre regularidades sequenciais (repetitivas e recursivas), utilizando-se de procedimentos de competência numérica, operacional e de ilações algébricas.

No que tange as equações, as relações de equivalência (implícitas) esses mesmos estudantes, 3º e 5º anos, em sua maioria, mostram-se competentes em estabelecer e/ou relacionar as propriedades básicas de uma equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva), mas de uma forma parcial. O domínio majoritário dessas competências equacionais refere-se somente às duas propriedades: a reflexiva e a simétrica. O que nos é completamente previsível devido à organização curricular vigente (PCN, 1997 e 1998). Mas isso não significa que não são capazes de estabelecer a transitividade, apenas que seu domínio é ainda insipiente em ambos os grupos.

Por fim, quanto às competências relativas a uma função de 1º grau (teste), identificamos que os grupos se distanciam quanto às capacidades apresentadas. Os estudantes do 3º ano demonstram uma habilidade ancorada nos desenhos, ou seja, constroem uma sequência icônica de fatos (linear) da situação-problema. Em seus esquemas, os estudantes exibem uma compreensão das dependências entre as grandezas mediadas por sua historicidade (enunciado). Por conseguinte, os educandos do 5º ano demonstram ser capazes de compreender, inferir e estabelecer as relações de dependência mediados pelo raciocínio proporcional.

II. *Quais os esquemas que os estudantes do 3º e 5º anos do, Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar?*

Quanto aos esquemas, podemos responder que os estudantes de ambos os grupos (3º e 5º anos) ao responder (ou tentar) as situações-problema do teste, eles apresentam registros icônicos, de contagem (numérico e ícones) e de operações (aditiva e multiplicativa). Esses esquemas independem da vertente algébrica (sequência, equação ou função) abordada na situação-problema.

A representação apenas icônica tem maior ocorrência nos registros dos estudantes do 3º ano, visto que os estudantes do 5º ano quando utilizam esse tipo de esquema o fazem aliados a estruturas numéricas. Quanto aos esquemas de estruturas aditivas e multiplicativas são mais observados nos esquemas dos estudantes do 5º ano. Mas isso não significa que os estudantes do 3º ano não apresentam esquemas operatórias, apenas que eles o fazem em menor grau que os do 5º ano.

III. *Quais os níveis de raciocínio algébrico que estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, apresentam ao lidar com problemas da Álgebra Elementar?*

Quanto aos níveis de raciocínio algébrico identificados/classificados nos estudantes pesquisados ao resolver situações-problema, envolvendo noções básicas da Álgebra Elementar, podemos responder que:

- De *2ª ordem, N2*, na vertente da sequência tanto para os estudantes do 3º como os do 5º ano;
- De *1ª ordem, N1*, na vertente da equação tanto para os estudantes do 3º ano como os do 5º ano;
- De *1ª ordem, N1*, na vertente da função apenas para os estudantes do 5º ano.

De acordo com o estudo, os resultados encontrados e os comportamentos observados/categorizados como entes algébricos na vertente da função não encontramos subsídios que possibilitassem a classificação de um nível de raciocínio algébrico (segundo nosso estudo) para amostra dos estudantes do 3º ano pesquisados.

Como podemos observar, encontramos evidências suficientes para referendar à condução dos estudantes do 3º e 5º anos, do Ensino Fundamental, aos domínios do campo conceitual da Álgebra. Desde que essa retrate a sequência, a equação e a função mediante situações-problema com uma representação baseada em ícones ou um misto numérico/icônico e de nível de dificuldade simples. Assim, defendemos a posição que tal condução algébrica é plenamente viável didaticamente, uma vez que os estudantes pesquisados apresentam competências, esquemas e nível de raciocínio algébrico que os torna aptos à sua instrução.

Após responder às questões de pesquisas incitadas (inicialmente), percebemos que há muito ainda por fazer nessa área, da *Early Algebra*, e amparados nos resultados gerados e discussões elencadas sentimo-nos à vontade para fazer sugestões de estudos futuros que possam ter como marco a pesquisa aqui dissertada.

4 PENSANDO EM PESQUISAS FUTURAS

A presente pesquisa buscou entender como estudantes dos anos iniciais pensam e agem na frente de situações embebidas em conceitos algébricos elementares. Para tanto traçou como objetivo “comparar as competências e os esquemas de ação que os estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental utilizam ao lidarem com situações-problema envolvendo os conceitos da Álgebra elementar e, ainda, identificar seus níveis de raciocínio algébrico usados para resolver tais situações”. Por se tratar de um estudo ainda com características exploratórias, limitou-se a pesquisar por meio de um único ambiente investigatório (teste diagnóstico escrito) e apenas em dois anos escolares (3º e 5º anos). Assim, temos consciência de não ser possível levantar generalizações a respeito dos desempenhos e estratégias presentes no universo de todo Ensino Fundamental. Por outro lado, acreditamos que nosso estudo traz luz para refletirmos sobre a álgebra nos anos iniciais, pois deixa-nos antever ações repetitivas de várias dessas crianças pesquisadas ao lidarem com as situações propostas.

Então, tendo claro as limitações do estudo, nossa *primeira sugestão* refere-se à elaboração de futuras pesquisas na mesma perspectiva da *Early Algebra* e, ainda, focando nos mesmos anos escolares que o nosso, em que se investigue com outros instrumentos. Nesse caso, poderia ser usado o método clinico piagetiano, em que a criança responderia ao instrumento diagnóstico escrito na presença apenas da pesquisadora, a qual poderia intervir fazendo perguntas para mais bem entender o procedimento.

Outro caminho que também poderia contribuir muito para nossa compreensão de como os estudantes dos anos iniciais raciocinam e agem frente a situações-problema, poderia ser a aplicação de um instrumento diagnóstico em que a criança contaria com material manipulativo de forma individual para servi-lhe de apoio. Assim, nossa segunda sugestão de pesquisa seria a realização de um estudo em que o pesquisador, tal qual na proposta anterior, também lançaria mão do método clínico piagetiano para interrogar a criança sobre suas ações.

Uma terceira sugestão de estudo, por fim, poderia ser a junção dos dois anteriores, com parte das crianças formando um grupo que teria o apoio do material manipulativo e a outra parte sem tal apoio, sendo que ambos seriam investigados utilizando o método acima referido. Nesse caso seriam quatro grupos, dois do 3o ano e dois do 5o, sendo que cada um se subdividiria em dois outros grupos: o com apoio do material manipulativo e o sem apoio.

Nossa terceira sugestão, refere-se aos sujeitos da pesquisa. Não ser apenas em dois anos, e sim ao longo de todo o Ensino Fundamental, para que se pudesse analisar os estudantes a partir de uma instrução algébrica, uma vez a BNCC (BRASIL,2017) como força de lei, implantará o eixo da Álgebra no currículo de Matemática.

E por fim, nossa quarta sugestão, refere-se à uma pesquisa feita amiúde de cada uma das vertentes algébricas estudadas por nós. Ou seja, uma pesquisa contendo apenas conceitos algébricos da sequência e suas variações, outra abordando apenas a equação e as relações de equivalência e, uma última com os conceitos da função de 1º grau. Para esta última pesquisa, da função, sugerimos também que esta possa trazer elementos pesquisados por nós e por Teixeira (2016), uma vez que este foi um dos precursores nesta perspectiva da *Early Algebra*.

REFERÊNCIAS

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. Hygino H. Domingues, tradução. São Paulo: Atual, 1995.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** Elza F. Gromide, tradução. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BECK, V.C. **Os Problemas Aditivos e o Pensamento Algébrico no Ciclo da Alfabetização.** 2015.75f. Dissertação (mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2015.

BLANTON, M. et al. Early Algebra. In: VICTOR, J. K. (Ed.) **Algebra:** Gateway to a Technological Future. Columbia/USA: The Mathematical Association of America, 2007

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Elementos Conceituais e Metodológicos para os Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão. Brasília. MEC, 2017. Disponível em: <http:// www.basenacionalcomumcurricular.gov.br>. Acesso em: 15 abril 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: MEC/SEF, 2017.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Maria Adriana veríssimo Veronese, tradução. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v,XVI, n. 2, p. 81-118, 2007

CARRAHER, D. W, SCHLIEMANN. A. D. O lugar da Álgebra no Ensino Fundamental. In: Ernani M.; Síntria L. (Org.). **Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores**: contribuições da Psicologia da Educação Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: Autografia, 2016.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early Algebra and matematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, p. 3-22, 2008.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELA, B. Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol 7, 2006.

CIVINSKI, D. D. **Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no ensino fundamental.** 2015.155f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências Naturais) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2015.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, v. 24, n. 38, p. 97-126, abril 2011.

COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org). **As ideias da Álgebra**. Hygino H. Domingues, tradução. São Paulo: Atual, 1995.

Falcão, J.T. Représentation du probleme, écriture de formules et quidage dans le passage de l'arithmetique à l'algebre. Tese de Doutorado, Universidade de Paris-V, 1992

FALCÃO, J.T et. al. **Psicologia da Educação Matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In MACHADO, S. A (Org.). **Aprendizagens em matemática:** Registros de Representação Semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

FERREIRA, M. C. N. **Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:** uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico. 2017. 148 f. Dissertação (mestrado em Ensino) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL. A. Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**, v,4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FREIRE, R. S. **Objetos de aprendizagem para o desenvolvimento para o pensamento algébrico no Ensino Fundamental**. 2007.132 f. Dissertação (mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

______. Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental. 2011. 181 f. Tese (doutorado em Educação) –Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

GÓMEZ, B. O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios? In: VALE et. al. (Org.) **Números e Álgebra:** na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: Gráfica Visão, 2006.

KATZ, Victor. J. **Álgebra**: Gateway to a Technological Future, Columbia: MAA Reports, 2007.

KIERAN, Carolyn et al. **Early Algebra**: Research into its Nature, its Learning, its Teaching. Hamburg: ICME, 2016.

LEITÃO, A; CANGUEIRO, L. **Princípios e Normas do NCTM –** um percurso pela Álgebra. Grupo de trabalho das Publicações, da APM, 2007. Disponível em: www.apm.pt/files/ConfCangueiroLeitao487e4d92df2el.pdf. Acesso em 22 de agosto de 2016

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 2006.

LIMA, J. R. C.; BIANCHINI, B. L. A álgebra e o pensamento algébrico na proposta de Base Nacional Curricular Comum para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matemática**, São Paulo, v. 6, n.1, p. 197-208, 2017.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus, 2001.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAGINA, S. A. **Teoria dos Campos Conceituais:** contribuições da Psicologia para a prática docente. São Paulo: PROEM, 2007.

MAGINA et. al. **Repensando adição, subtração:** contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATEMATICS (NCTM 2000). Disponível em: </www.nctm.org/...and.../PSSM_ExecutiveSummary.pdf>. Acesso: 20 maio de 2016

PEREZ, L. C. A. Texto icônico. **Brasil Escola**. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/redacao/texto-iconico.htm>. Acesso em: 11 agosto 2016.

PIAGET, J. & INHELDER, B. **A Psicologia da Criança**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1995.

PIAGET, J. **The Essential of Piaget Gruber & Vonèche.** Nova York: Basic Book, 1977.

PONTE, J. Números e Álgebra no currículo escolar. In: VALE, I. et. al. **Números e álgebra** na aprendizagem da matemática e na formação dos professores. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: Gráfica Visão, 2006.

PONTE, J. P; BRANCO, N. Pensamento algébrico na formação inicial de professores. **Educar em Revista** Curitiba, Brasil, n. 50, p. 135-155, out./dez. 2013. Editora UFPR.

RIBEIRO, A. J, CURY, H.C. **Álgebra para a formação do professor**: Explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

ROONEY, A. **A história da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books, 2012.

SANTANA, E. R.S. **A adição e subtração:** o suporte didático influência a aprendizagem do estudante? Ilhéus: Editus, 2008

SANTOS, L.G. **Introdução do pensamento algébrico:** um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. 2007. 231 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2007.

SCHLIEMANN, A. L. et. al. **Estudos em Psicologia da Educação**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

SOUSA, M. C; PANASSIAN, M. L; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** O percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado das Letras, 2014.

TEIXEIRA, A. C. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental:** uma proposta de intervenção. 2016. 134 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2016.

VALE et. al. Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. In: VALE, I. et al. **Números e álgebra** na aprendizagem da matemática e na formação dos professores. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: Gráfica Visão, 2006.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. ed. rev. Maria Lúcia Faria Mouro, tradução. Curitiba: Ed da UFPR, 2014.

______. A teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Maria José Figueiredo, tradução. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ANEXO –

Instrumento diagnóstico – teste

Layout do instrumento diagnóstico – TESTE

Esse instrumento diagnóstico, teste utilizado pela pesquisa foi um livrinho contendo 10 questões, subdivididas em item, perfazendo um total de 15 itens. Abaixo apresentamos um quadro síntese em que a estrutura de nosso diagnóstico pode ser vista dentro de um único panorama.

Quadro 1 síntese das questões e seus itens

	TESTE															Total
QUESTÕES	Q1	Q2	Q3		Q4		Q5		Q6		Q7	Q8	Q9	Q10		**T=10**
ITEM	A	A	A	B	A	B	A	B	A	B	A	A	A	A	B	T=15

Fonte as autoras

- Esse teste foi diagramado em formato de livrinho, composto por seis páginas. Essas páginas foram formadas por três folhas A4 (frente e verso), diagramada na orientação paisagem. Cada página desse livrinho continha apenas uma questão.

Nome: ____________________

Idade: __________ Ano.: __________

ATIVIDADES DE MATEMATICA

1) Na venda de Dona Ana com R$2,00 se compra 3 bombons vermelhos como mostra a figura abaixo

Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?

Resp: __________

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

Nome: ____

Idade: ______________ Ano : _______________

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

1) Na venda de Dona Ana com R$2,00 se compra 3 bombons vermelhos como mostra a figura abaixo

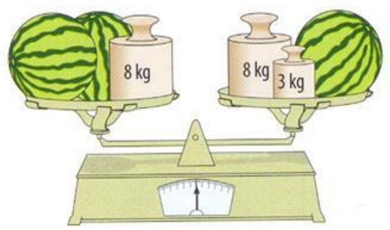
Diogo gastou R$ 10,00 comprando esses bombons vermelhos. Quantos bombons ele comprou?

= ?

Resp: ______________________

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

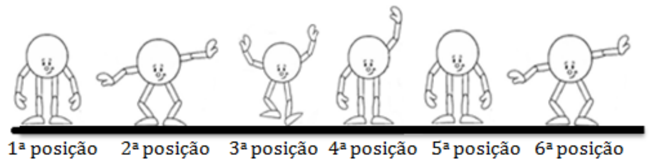
2) Observe que a balança abaixo se encontra em equilíbrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro prato. Todas as melancias têm o mesmo peso.



Qual o peso de apenas uma melancia? Resp: _______________

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

3) Carlitos é um boneco que adora fazer exercício. No exercício ele flexiona as pernas e mexe os braços seguindo uma ordem nos movimentos. Ele pretende continuar nesta atividade por algum tempo. Veja a ordem dos exercícios do Carlitos.



ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

a)Desenhe abaixo como ele estará na 9ª posição

b)Desenhe abaixo como ele estará na 58ª posição.

4) Diogo e Matheus querem saber quem tem mais dinheiro.
Diogo tem um valor dentro da carteira e mais R$3,00 no bolso.
Matheus tem 2 vezes mais o valor que Diogo tem dentro da carteira.

a) Quem tem mais dinheiro? ___________________
Por quê? ____
____
____

b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Diogo terá dentro da sua carteira? _________________________

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

5) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática Ele pensa se concentra, mas, esta precisando de uma ajuda. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada uma das figuras

a)  - 12 = 5 Então o  vale ....

b)  -  = 0 Então o  vale ....

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

6) Na lanchonete da pracinha esta acontecendo uma promoção.

MONTE SEU PRÓPRIO SANDUÍCHE

BÁSICO	COMPLEMENTO Para cada um dos ingredientes acrescenta
 **R$5,00** Pão + Bife	 **+** **R$1,00**

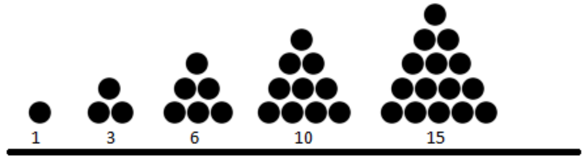
Felipe, Artur e Pedro foram lanchar. Cada um deles vai querer incrementar seu sanduíche.

Felipe pede o básico mais queijo, ovo e cebola;
Artur o básico mais queijo e bacon e
Pedro turbinou o dele acrescentando no básico: queijo, ovo, tomate, alface, cebola e batata palha.

a) Quanto cada um dos amigos pagou por seu sanduiche?
b) Todos pagaram o mesmo valor? Por quê?

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

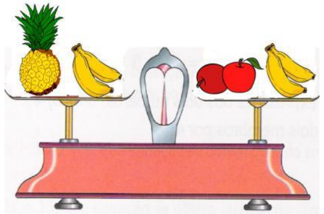
7) Observe a sequência das figuras triangulares formada por bolinhas.



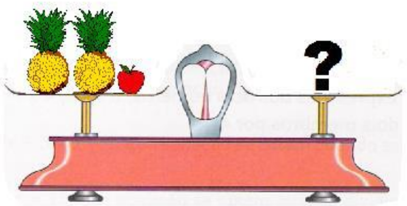
Seguindo esta mesma ordem quantas bolinhas serão necessárias para fazer 8ª figura? Resp............

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

8)A balança se encontra em equilibrio, ou seja, o peso de um prato é igual ao do outro prato.
As maças tem o mesmo peso.
As bananas tem o mesmo peso.



Quantas maças teremos que colocar no prato da direita para a balança permaneça em equilíbrio?



Resp.........

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

9) Bibi passa horas brincando de escrever sequências. Certo dia saiu às pressas deixando a sequência incompleta.

1	4	7	10					

Quando retornar, deverá concluir esta sequência obedecendo a mesma ordem. Qual será o 9º número (termo) que ela escreverá?
Resp ....

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

10) Três amigos foram ao parque de diversão.
Cada um levou uma quantia de dinheiro para gastar nos brinquedos.

1. Lúcia levou 2 notas de 10 reais e mais 4 notas de 2 reais;
2. João levou a metade das notas de 10 reais e a metade das notas de 2 reais que Lúcia levou;
3. Beto levou a quantia de Lucia e João juntos.

a)Quantas notas de 10 reais e quantas de 2 reais Beto levou?

b)Quantas notas de 10 reais e de 2 reais os três amigos levaram juntos para o parque?

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO