UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TAIANÁ SILVA PINHEIRO

DESEMPENHO E ESTRATÉGIAS DESENVOLVIDAS POR ESTUDANTES DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO AO RESOLVER PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

ILHÉUS
2016

TAIANÁ SILVA PINHEIRO

DESEMPENHO E ESTRATÉGIAS DESENVOLVIDAS POR ESTUDANTES DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO AO RESOLVER PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, com requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Doutora Sandra Maria Pinto Magina

Coorientador: Doutor Rogério Pedro Fernandes Serôdio

ILHÉUS
2016

P654 Pinheiro, Taianá Silva.
Desempenho e estratégias desenvolvidas por estudantes do 2 º ano do ensino médio ao resolver problemas combinatórios / Taianá Silva Pinheiro. – Ilhéus : UESC, 2016.
193f. : il. + anexos.
Orientadora: Sandra Maria Pinto Magina.
Coorientador : Rogério Pedro Fernandes Serôdio.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática.
Inclui referências e apêndices

1. Análise combinatória. 2. Educação matemática. I. Magina, Sandra Maria Pinto. II. Serôdio, Rogério Pedro Fernandes. III. Título.

CDD – 511.6

TAIANÁ SILVA PINHEIRO

DESEMPENHO E ESTRATÉGIAS DESENVOLVIDAS POR ESTUDANTES DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO AO RESOLVER PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, com requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em 12 de dezembro de 2016.

Professora Doutora Sandra Maria Pinto Magina
Orientadora - UESC

Professor Doutor Rogério Pedro Fernandes Serôdio
Coorientador - UBI

Professora Doutora Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa
UFPE

À minha família, pelo amor e apoio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me permitir chegar até aqui, e a Nossa Senhora pelo seu amparo durante o processo da escrita.
A minha família pelo apoio incondicional.

Ao meu pai por me permitir enxergar a vida além da dissertação; a minha mãe pela dedicação, carinho, companheirismo e esforço em entender a minha pesquisa para assim colaborar para o resultado desse trabalho. A Rodolfo pelos sacrifícios feitos e por abrir mão dos seus sonhos para que o meu pudesse ser realizado. A Júlio por ter me presenteado com a pessoa que ilumina a minha vida, a minha sobrinha Clara.

A minha orientadora profa. Dra. Sandra Magina pelo carinho e compromisso para que a pesquisa acontecesse e que me permitiu voar sob as suas asas.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Rogêrio Serôdio, que sempre se fez presente e participante, mesmo estando do outro lado do oceano, muito obrigada!

Á banca examinadora – profa Dra. Cristiane Pessoa pela sua delicadeza e educação nas contribuições para a pesquisa.

Aos professores do PPGEM pessoas que eu tive a oportunidade de conviver e que passaram pela minha vida deixando o seu melhor. A Rafael e Gabriel pela disposição em nos ajudar em qualquer momento.

A Mariana Oliveira e Adriano Lago por estarem comigo desde a época em que fomos discentes especial. Foi bom comungar dos mesmos objetivos e tê-los no meu caminho.

A minha turma 2015.1 pelo companheirismo, união e apoio durante e para além da pesquisa, os considero minha família.

À família GPEMEC, em especial à profa. Eurivalda Santana, por exigir de mim muito além do que eu sabia e pensava que poderia fazer, obrigada por enxergar além do que eu me vejo.

Aos componentes do grupo REPARE pelas contribuições e sugestões para a pesquisa.

Ao meu amigo Robson, por estar presente em mais essa etapa da minha vida. Deivid, Joede e Silvestre pela ajuda para que eu realizasse mais um sonho em minha vida.

Aos anjos que o Senhor me presenteou na reta final desse trabalho. A Lu pelo seu cuidado e carinho incondicional; a Dudu pelas brincadeiras e cuidado; a Sal pelos abraços confortantes e sorriso motivador e, em especial, a Rafa por ser um presente e se fazer presente em minha vida.

À direção, professor e alunos da escola, campo de pesquisa, por terem aceitado participar desse processo.

À FAPESB, órgão que financiou esse trabalho.

RESUMO

A partir deste estudo analisamos as estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola pública do sul da Bahia, em resoluções de problemas, antes e depois de ter estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória. Para isto foram elaborados 2 testes (14 questões cada um), envolvendo as operações combinatórias, aplicados em dois momentos: 15 dias antes de o professor iniciar as aulas sobre Análise Combinatória e 15 dias depois da última aula. As análises dos dados fundamentaram-se nos estudos de Piaget e na Teoria dos Campos Conceituais, no que concerne à formação do conceito. Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa descritiva com abordagem qualitativa e quantitativa. Como resultado, os estudantes apresentaram melhor desempenho nos problemas de produto cartesiano, seguido dos de arranjo, permutação e combinação. No que concerne à variável ordem de grandeza e a repetição, eles apresentaram os melhores resultados na ordem de grandeza pequena e, quando envolvia a repetição contribui para um baixo desempenho nos problemas envolvendo combinação. A pesquisa revelou, também, que as estratégias registro de operação, com os dados do enunciado, princípio multiplicativo e listagem de possibilidades – esta condicionando maior acerto – foram as mais utilizadas pelos estudantes, tanto no teste prévio quanto no posterior. Além disso, percebemos que o uso do princípio multiplicativo foi associado mais às questões de produto cartesiano e que o uso da estratégia listagem de possibilidades, de um teste para o outro, teve avanço, pois saiu de uma listagem não sistemática para uma sistemática. De maneira geral, temos que de um teste para o outro não houve aprendizagem significativa em relação ao conteúdo de Análise Combinatória.

Palavras-chave: Análise Combinatória; aprendizagem; estratégias; Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

From this study, we analyze the strategies developed by students of the second year of high school from a public school in the south of Bahia, in problem solving, before and after having studied, in a school environment, the content of Combinatorial Analysis. For this, two tests (14 questions each one) were elaborated, involving the combinatorial operations, applied in two moments: 15 days before the teacher starts the classes on Combinatorial Analysis and 15 days after the last lesson. The analysis of the data was based on the studies of Piaget and the Theory of Conceptual Fields, in what concerns the formation of the concept. Methodologically, this is a descriptive research with a qualitative and quantitative approach. As a result, the students presented better performance in the Cartesian product problems, followed by those of arrangement, permutation and combination. Concerning variable order of magnitude and repetition, they presented the best results in the order of small magnitude and, when it involved repetition, it contributes to a low performance in the problems involving combination. The research also revealed that the operation of registration strategies, with the data of the statement, multiplicative principle and listing of possibilities - this conditioning better results - were the most used by the students, both in the previous and in the posterior test. In addition, we realized that the use of the multiplicative principle was more closely associated with Cartesian product issues and that the use of the strategy “listing of possibilities”, from one test to the next was advanced because it went from a non-systematic listing to a systematic one. In general, we noticed that from one test to the other there was no significant learning regarding to the content of Combinatorial Analysis.

Keywords: Combinatorial Analysis; learning; strategies; Conceptual Field Theory.

LISTA QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

REDA	Regime Especial de Direito Administrativo
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
CEB	Câmara de Educação Básica
GERAÇÃO	Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A inquietação presente nesse estudo surge das experiências vividas no contexto da educação escolar quando aluna do ensino médio e quando estudante da graduação, especificamente ao cursar a disciplina *Análise Combinatória e Probabilidade*. Além das motivações que condicionaram a realização deste trabalho, aqui estão as discussões que levaram à construção da sua problemática e do seu objetivo.

No direcionamento da pesquisa, temos, como subsídios, os documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais – (PCN, 2000), Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos PCN-PCN+, 2002), e as contribuições de trabalhos de grande relevância para a temática, realizados por pesquisadores que tratam da aprendizagem da Análise Combinatória e que estão relacionados com a nossa proposta de estudo – as estratégias utilizadas pelos estudantes do 2º ano do Ensino Médio na resolução de problemas que envolvem os quatro tipos combinatórios: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Dentre os autores que aqui contribuem estão Borba (2010); Duro (2012); Pessoa, Santos e Silva (2013); Pessoa e Santos (2014).

Estamos defendendo o uso real dos conteúdos para que possamos compreender "as filiações e as rupturas entre conhecimentos [...] nos adolescentes, entendendo como «conhecimentos», tanto o saber fazer como os saberes expressos" (VERGNAUD, 1996, p.155, grifo do autor). Assim, analisar o percurso que os estudantes fazem para chegar à aprendizagem, nos torna mais sensível ao contexto educacional de forma a questionarmos como o discente entende determinado conteúdo, considerando seus conhecimentos prévios, tanto os que dizem respeito diretamente ao que será desenvolvido no ambiente escolar, quanto às experiências de vida, mas que colaboram para o processo de ensino-aprendizagem, condicionando, portanto, o desenvolvimento dos estudantes.

A aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio, por meio da memorização de fórmulas das operações combinatórias – no sentido de arquivá-las para serem utilizadas quando solicitadas em problemas propostos pelos professores –, pode ser ressignificada, ou não, na educação superior. Essa ressignificação ocorreu, de maneira particular, durante a disciplina de *Análise Combinatória e Probabilidade*, na graduação, quando o professor apresentou esse conteúdo por meio da utilização do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) com a resolução de distintas situações combinatórias, sendo elas: combinações, permutações, arranjos e produto cartesiano. Com a utilização desse princípio, percebe-se que não é necessário decorar as fórmulas, pois elas estão relacionadas ao que rege o PFC, apresentado pelo professor.

Essa constatação concilia-se com a proposta colocada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (doravante PCNEM), a qual orienta que a educação propicie ao aluno “capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente” (BRASIL, 2000, p.40). Dessa maneira, indica um processo de ensino-aprendizagem da Matemática que contribua para a formação de um sujeito crítico, capaz de associar os conteúdos vistos na escola com a sua realidade (contexto extraescolar), além de vinculá-los aos demais assuntos da Matemática e aos de outras disciplinas (contexto escolar).

Para o ensino da Análise Combinatória, os PCNEM sugerem que seja promovido nos estudantes o desenvolvimento das habilidades, que consiste em:

> [...] descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano (BRASIL, 2000, p.44).

Fica claro que a ideia é desenvolver no estudante a capacidade de articular conteúdos vistos na escola ao seu dia a dia, não que seja obrigatório o uso do conhecimento formalizado em todas as situações diárias, mas que, ao buscar desenvolver as habilidades desse estudante, ele seja capaz de visualizar o conteúdo no seu cotidiano, dando sentido ao que foi visto.

As bases para a elaboração tanto dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) quanto para a dos outros documentos que norteiam a Educação no Ensino Médio são as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio; essas diretrizes são instituídas pela Resolução CEB nº 3, de 26 de junho de 1998 – que discute em seu artigo 10 sobre a base nacional comum dos currículos do ensino médio – a qual está organizada por áreas de conhecimento, e apresenta no inciso II as diretrizes para a área do conhecimento das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, objetivando a constituição de habilidades e competências que permitam ao educando:

> [...] d) Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades.
> [...]

> m) Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas [...]. (BRASIL, 1998, s/p).

A compreensão dos conceitos ocorrerá a partir do momento em que os estudantes passam a inter-relacionar teoria e atividades diárias e aplicar os conceitos no cotidiano.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (doravante PCN+, 2002) trazem, na proposta do terceiro tema estruturador, no ensino da Matemática, a análise de dados na qual fazem parte a Estatística, a Probabilidade e a Contagem. Com relação à Contagem, este documento defende que:

> [...] decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2002, p.126).

Temos, assim, a apresentação da possibilidade de uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, a qual permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar Matemática, denominada de raciocínio combinatório. Em virtude disso, as fórmulas surgem como consequência deste raciocínio combinatório que é desenvolvido a partir da resolução de problemas diversos.

Diferentemente da forma que a Estatística, a Probabilidade e a Contagem são exploradas no ambiente escolar, "[...] esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril" (BRASIL, 2006, p.127). Isso nos leva a considerar a realidade do estudante, a questionarmos sobre o que é que ele sabe, ou seja, averiguar seus conhecimentos prévios, partindo das experiências extraescolares, e nos condiciona, também, a elaborar meios que possam contribuir para a formalização destes conteúdos.

Em razão da realidade escolar, houve um aumento, nos últimos cinco anos, da produção de trabalhos desenvolvidos nesta área. Contribui de forma significativa o Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório – GERAÇÃO[1]. Corrobora com esta assertiva, o trabalho de Pessoa e Borba (2013), no qual as autoras fazem um

[1] Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação, da Universidade Federal de Pernambuco. Este grupo tem por objetivo o desenvolvimento e a divulgação de estudos relativos ao conhecimento de Combinatória.

levantamento sobre os estudos referentes ao raciocínio combinatório a partir do GERAÇÃO.

A metodologia aplicada no nosso estudo evidencia uma proposta diferente do que vem sendo discutido no cenário educacional – no que se refere ao ensino de Análise Combinatória – como as propostas apresentadas nas pesquisas realizadas nessa área, a exemplo de Pessoa (2009); Lima, R. (2010); Santana e Oliveira (2015), pois ao analisar as estratégias utilizadas pelos estudantes, antes e depois de eles manterem contato com o conteúdo em questão, em ambiente formal, não apresentamos uma intervenção pensada e planejada para a pesquisa, mas observamos essas estratégias a partir do que o professor ensina, da forma como é explicitado esse conteúdo no livro didático, e a partir das experiências extraescolares desses estudantes, para, daí, observar quais são os direcionamentos que a aprendizagem dos estudantes toma sob esses aspectos.

Diferente do destaque que foi dado por Moreira (2014) em seu trabalho – que teve como proposta analisar as estratégias desenvolvidas pelos professores de Matemática em relação ao conteúdo de Análise Combinatória – o destaque neste trabalho foi dado para o desempenho e as estratégias utilizadas por estudantes de uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública, situada em uma cidade do sul da Bahia. Assim, buscamos na nossa pesquisa o seguinte objetivo:

- Analisar o desempenho e as estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio, antes e depois de eles terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória.

E a partir desse objetivo elaboramos uma questão de pesquisa geral, a saber:

- Qual o desempenho e quais as estratégias desenvolvidas pelos estudantes do 2º ano do ensino médio, antes e depois de terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória?

Para responder a esta questão de pesquisa, traçamos um caminho a ser seguido, descrito abaixo:

Iniciamos com esta introdução, na qual apresentamos o objetivo do estudo e, a partir dele, traçamos a questão geral de pesquisa. O capítulo um versa sobre o nosso objeto de estudo, ou seja, sobre o conteúdo matemático proposto – a Análise Combinatória. Inicialmente, abordamos esse objeto do ponto de vista do contexto histórico, percorrendo desde a origem até os dias atuais, para, em seguida descrevemos as pesquisas que, igualmente a esta, adotaram como objeto de estudo a aprendizagem em Análise Combinatória.

No capítulo dois encontra-se o quadro teórico utilizado para subsidiar a nossa análise de dados. Assim, apresentamos parte das ideias contidas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996) para fundamentar a formação de conceitos. Também relatamos os principais resultados apresentados nos estudos de Piaget e Inhelder (1951), no que refere à ideia que as crianças e os adolescentes têm do acaso. Estamos convictos que tais estudos nos auxiliarão no que diz respeito a entender os estágios de desenvolvimento cognitivo por meio das estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução dos instrumentos diagnósticos.

No capítulo três descrevemos os procedimentos metodológicos. Para alcançarmos o nosso objetivo de pesquisa, realizamos um estudo descritivo que consistiu na aplicação de um instrumento diagnóstico, contendo 14 questões, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola pública situada em uma cidade do sul da Bahia. Esse instrumento foi aplicado em dois momentos: antes das aulas sobre Análise Combinatória, ministradas pelo professor regente da turma, e depois que os estudantes tiveram as referidas aulas.

O capítulo quatro foi reservado para a análise dos dados, recolhidos a partir da realização do estudo. Nesse capítulo, temos antes da análise dos dados, a análise do livro didático; vale sublinhar que levamos em conta apenas aos livros adotados[2] pelo professor regente da turma em que realizamos a pesquisa. A análise aconteceu sob o viés quantitativo, com o objetivo de expressar o desempenho diante das aplicações dos instrumentos; e qualitativo, quando da identificação das estratégias utilizadas pelos estudantes, ao resolverem as questões dos diagnósticos, antes e depois das aulas ministradas pelo professor regente.

Por último, estão explicitadas as considerações finais, que constam das reflexões sobre o objetivo da pesquisa. Procuramos, portanto, responder a questão colocada neste trabalho. Tal resposta foi dada a partir dos resultados encontrados. Apontamos, ainda, as possíveis questões que abrem espaços para futuros estudos, que poderão ser realizados.

[2] O critério para a escolha do livro está explicado no capítulo três, *Procedimentos metodológicos,* na seção 3.2.

1 ANÁLISE COMBINATÓRIA EM PERSPECTIVA

Este capítulo, como já apontado, versa sobre o nosso objeto de estudo, ou seja, sobre o conteúdo matemático proposto – a Análise Combinatória. Para uma melhor apresentação, dividimos este capítulo em duas partes. Na primeira, encontram-se um breve histórico do desenvolvimento da Análise Combinatória ao longo do tempo, e os estudiosos que contribuíram para esse desenvolvimento. Já na segunda parte, discorreremos sobre o raciocínio combinatório, bem como as definições dos tipos de problemas combinatórios abordados nesse estudo. Além disso, consta desse capítulo alguns estudos correlatos ao nosso sobre a aprendizagem da Análise Combinatória.

1.1 O OBJETO MATEMÁTICO: A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nesta seção apontamos, como objetivo, a abordagem da Análise Combinatória tanto do ponto de vista da sua origem e desenvolvimento – contexto histórico – quanto da visão de como esta temática tem sido percebida, atualmente, pelos especialistas.

1.1.1 Contexto histórico

Entendemos necessário considerarmos os fatos históricos que fazem parte do desenvolvimento da Matemática por estes dados fornecerem importante e significativa contribuição para o ensino e a aprendizagem dessa área do conhecimento; como cita Farias (2009), “todo conhecimento produzido pelo ser humano é transversalizado pela história que o precedeu. Por essa razão é tão importante umedecer a cognição com os respingos históricos do conhecimento [...]”. Diante disso, achamos imprescindível realizar uma discussão de cunho histórico a fim de situar o leitor acerca dos fatos que contribuíram para o desenvolvimento do conteúdo de Análise Combinatória.

Os precursores dos problemas combinatórios no ocidente, segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), foram os pitagóricos com os números triangulares[3]. Na China, no século III a. C., em um documento chamado ‘Pa Kua’, um dos mais antigos, já havia problemas envolvendo o cálculo de permutações de uma série de segmentos dispostos ao redor de um círculo. A expansão da Análise Combinatória se

[3] Os números triangulares são aqueles em que “é possível ter triângulos de maior número de pontos como seis, dez ou quinze. Números com três, seis, dez, e quinze, ou em geral, números dados pela fórmula $N = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$” (BOYER, p.37, 1996).

deu não só entre as diversas culturas, mas também pelos tipos de problemas. Desta forma, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo relatam que

> [...] enquanto Porfirio (ano 275, aprox.) enumerava as comparações emparelhadas das cinco vozes aristotélicas, se conhecia na Índia uns 800 anos antes, segundo Edwads (1987), por enumeração sistemática todas as possibilidades, que as comparações dos seis gostos, tomados um a um, dois a dois, etc, todos de uma vez, eram 63. Mais tarde, um escritor com o nome de Pingala (200 a.C, aprox.), deu a regra geral para calcular o número de combinações de *n* sílabas tomadas uma a uma, duas a duas, etc. Esta regra era conhecida como " Meru Pastrara". Na Grécia a primeira tentativa de resolver um problema de permutação se atribui a Xenócrates de Calcedônia (396-314 a.c.). Cerca do ano 320, Pappus considera o problema do cálculo do número de interseções de *n* retas não-paralelas, das quais não mais de duas se cortam no mesmo ponto, chegando à solução geral do problema das combinações de *n* elementos tomados dois a dois mediante os números triangulares, isto é, usando a regra aditiva $1+2+\cdots+n$. Também o trabalho de Euclides contém o teorema binomial para $n=2$. (BATANERO, GODINO E NAVARRO-PELAYO, 1996, p.19, tradução nossa).

Ainda, o matemático hindu Báskhara (1114-1185?) – conhecido geralmente pela "fórmula de Báskhara" para a solução de equações do 2º grau –, sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de *n* objetos (MORGADO et al., 1991, p.3).

Estes antigos estudiosos são apresentados por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) como precursores do estudo sobre a Análise Combinatória. Com relação ao amplo desenvolvimento da Combinatória temos, no mundo árabe, a divisão entre os linguistas e os algebristas, em que estes a viam como um meio para resolver um problema prático, e aqueles como um instrumento técnico para a resolução de problemas teóricos.

O matemático, filósofo e astrônomo francês Levi ben Gerson, conhecido como Gersónides ou Ralbag (1288-1344) , escreveu sobre permutações e combinações, apresentando as três regras de cálculo, descobertas pelos hindus:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r} \qquad (1)$$

Lê-se: $n!$ para o número de permutação de *n* coisas; $n(n-1)\ldots(n-r+1)$ para o número de arranjos de *n* coisas tomadas *r* a *r* e para o número de combinações (BATANERO, GODINO E NEVARRO-PELAYO, 1996, p.20, tradução nossa).

Michael Stifel (1486?-1567), além de introduzir o termo coeficiente binomial, mostrou o desenvolvimento de $(1+x)^n$ a partir de $(1+x)^{n-1}$. Segundo Morgado et al. (1991), o matemático árabe Al-Karaji sabia da lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$.

No Ocidente, o primeiro aparecimento do triângulo de Pascal ocorreu em um livro de Petrus Apianus – matemático, astrônomo, cartógrafo e Humanista alemão. Tartaglia relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências de $(x+y)$. Pascal publicou um tratado (1654) mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes de $(a+b)^n$, e Jaime Bernoulli, utilizou a interpretação de Pascal para demonstrar que $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$, em seu *Ars Conjetctandi*. A segunda parte deste livro trata da teoria das combinações e permutações. Ainda em relação ao triângulo de Pascal, Newton (1654- 1705) mostrou como calcular $(1+x)^n$sem antes calcular $(1+x)^{n-1}$.

No século XVII, acontece um novo período de desenvolvimento, graças às contribuições de Fermat (1601-1661) e Pascal (1623-1662) com a Teoria das Probabilidades, que surgiu devido à curiosidade de um cavalheiro chamado Chavalier de Méré, um apaixonado por jogos de azar e que discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas. A partir dessa discussão, Pascal passou a trocar correspondências com Fermat, estabelecendo, assim, um ponto de partida para a elaboração do Tratado do Triângulo Aritmético e seus Tratados anexos.

Como disciplina científica, a Combinatória teve seu início com os trabalhos de Leibniz, a quem devemos a construção sistemática desta parte da Matemática, e com os de Jacob Bernoulli (1654- 1705), que a considerou como o principal instrumento daquela época para resolver problemas probabilísticos teóricos (BATANERO, GODINO E NAVARRO-PELAYO, 1996, p.21, tradução nossa).

A fim de sabermos como é apresentado este conteúdo atualmente nas escolas, na seção seguinte vamos expor as definições acerca deste conteúdo, com também os tipos combinatórios aplicados nesta pesquisa.

1.1.2 Análise Combinatória atualmente

No contexto histórico da Análise Combinatória vimos que este conteúdo teve o seu início com Leibniz e Bernoulli quando da sua sistematização. Seguindo a apresentação, vamos explanar a definição de Análise Combinatória na visão de alguns pesquisadores e explicitar os conceitos deste conteúdo abordados nesta pesquisa.

Deste modo, iniciamos com a compreensão da Análise Combinatória, definida por Morgado et al. (1991), como a parte da Matemática que estuda as estruturas e relações diretas. Eles destacam dois tipos de problemas que acontecem com frequência na Análise Combinatória: demonstrar a existência e contar ou classificar os subconjuntos de elementos de um conjunto finito, os quais satisfazem certas condições. E, ainda, como a parte em que se estuda "os conjuntos discretos e as configurações que podemos disponibilizar a partir de seus elementos mediante certas transformações que originam trocas na estrutura ou a composição dos mesmos" (RIBNIKOV, 1988, apud BATANERO, GODINO e NAVARRO-PELYO, p.1996, p.17).

Desta forma, a Análise Combinatória vai além de permutações, combinações e arranjos, conceitos que, muita vezes, são associados, como únicos, a esse conteúdo matemático. Esses conceitos "permitem resolver um tipo de problema de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos" (MORGADO, et.al., 1991, p.1). Mas a Análise Combinatória aborda outros tipos de problemas que precisam de outros procedimentos para a sua resolução, dentre eles: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet[4], as funções geradoras, e a teoria de Ramsey.

Antes de definirmos os tipos combinatórios[5], vamos definir dois conceitos importantes na resolução destes problemas: o fatorial e o princípio fundamental de contagem.

- O fatorial

Dado um número natural $n \geq 1$, definimos o **fatorial de *n*** (indicado por ***n!)*** por

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Lê-se *n!* como "*n* fatorial" ou "fatorial de *n*".

Por definição, para $n = 0$, temos $0! = 1$.

- Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

[4] Também conhecido como o princípio da casa dos pombos, trata-se de um problema de existência. Em sua forma mais simples este princípio pode ser enunciado da seguinte maneira: se *n* pombos devem ser postos em *m* casas, e se *n*>*m*, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo.

[3] As definições apresentadas a seguir tanto as dos tipos combinatórios quanto as de fatorial e as do princípio fundamental de contagem têm como referência os seguintes autores: Iezzi,et al. (2013); Smole e Diniz (2013).

O princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo), segundo Santos, Mello e Murari (2007), pode ser enunciado do seguinte modo: se um evento A pode ocorrer de *m* maneiras diferentes e se, para cada uma dessas *m* maneiras possíveis de A, ocorrer um outro evento B, que pode ocorrer de *n* maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A, seguido do evento B, é *m.n.*

Ressaltamos que esta definição é para um evento composto por duas etapas sucessivas, mas segue a mesma ideia para eventos com três ou mais etapas. Além disso, utilizando o princípio fundamental da contagem, é possível resolver tipos combinatórios distintos como o produto cartesiano, o arranjo, a permutação e a combinação. Para exemplificar, no Quadro 1, temos o seguinte problema[6]:

Quadro 1 – Problema envolvendo o princípio fundamental da contagem

CLAÚDIA TEM 3 BLUSAS E 4 CALÇAS. DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES ELA PODE SE ARRUMAR USANDO UMA CALÇA E UMA BLUSA?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Possível resolução: seguindo a definição, podemos tomar o evento A como a escolha da blusa (que são 3), e como evento B, a escolha da calça (que são 4). Portanto, Claúdia pode escolher uma calça e uma blusa de $3.4 = 12$ maneiras.

Assim, como na Teoria dos Campos Conceituais, como parte constituinte da terna (S, I, R) [7], para apropriação de um conceito temos: S que está relacionado ao conjunto de situações (relacionadas à tarefa e aos problemas combinatórios); I, aos invariantes do conceito, ou seja, às relações e propriedades relativas a um dado conceito; e R às diferentes representações utilizadas para externar os invariantes desse conceito. Apresentaremos, além da definição dos tipos de problemas combinatórios, os invariantes pertinentes a cada tipo de problema abordado. Começaremos tratando de um conceito, dentre os problemas combinatórios, o mais visto durante a escolarização, o produto cartesiano.

- Produto cartesiano

Dados dois (ou mais) conjuntos distintos, entende-se por Produto Cartesiano a formação de um novo conjunto, de natureza distinta dos conjuntos primários. Vejamos um problema de produto cartesiano: numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível formar um casal homem-mulher?

[6] Problema retirado do instrumento utilizado na nossa pesquisa. (APÊNDICE B)
[7] Será explicitado no capitulo 2 cada um desses elementos pertencentes à terna; a priori, apresentamo-los de forma breve.

Pelo PFC temos que há $3.4 = 12$ possibilidades de formação de casais.

Para questões envolvendo o produto cartesiano, têm-se como invariantes o seguinte:

> [...] (1) Dados dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto, e a natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado. (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. O que caracteriza estes problemas é que dois ou mais conjuntos distintos são combinados para formarem um terceiro conjunto. (PESSOA, 2009, p.78).

Diante dos demais invariantes mencionados, temos que os de produto cartesiano são os únicos que a combinação ocorre a partir de dois (ou mais) conjuntos, resultando em um terceiro conjunto distinto dos primeiros. Segundo Pessoa e Borba (2013), os problemas de produto cartesiano são considerados os mais fáceis para os alunos compreenderem, e os resultados apontam para um melhor desempenho dos estudantes nesses tipos de problemas já que estes são vistos desde a educação básica, isto é, os alunos travam contato logo cedo.

- Arranjos Simples[8]

Dado um conjunto com *n* elementos distintos, chama-se Arranjo Simples desses *n* elementos, tomados *p* a *p* (com $0 \leq p \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de *p* elementos distintos escolhidos entre os *n* existentes, com p e n naturais. Indica-se por $A_{n,p}$, $A(n,p)$ ou A_n^p, o número total desses agrupamentos, que calculamos pelo princípio fundamental de contagem:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \qquad (2)$$

Para obter uma expressão equivalente a (2) usando fatorial, basta multiplicar e dividir seu segundo membro por: $(n-p)(n-p+1)\dots 3.2.1 = (n-p)!$. De fato:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)\frac{(n-p)(n-p-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}. \qquad (3)$$

Observe que o numerador da expressão acima corresponde a *n*! Desta forma, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad (4)$$

---

[8] Denominamos por simples os tipos combinatórios em que não há repetição dos elementos.

Vejamos um exemplo de problema de arranjo simples: para ocupar os cargos de presidente, vice-presidente e secretário do grêmio de um colégio, candidataram-se dez alunos. De quantos modos distintos pode ser feita essa escolha?

Temos, pela expressão (4) que $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} = 10.9.8 = 720$. Assim, os cargos poderão ser ocupados de 720 maneiras distintas. Temos este tipo de questão como invariantes do conceito, para problemas de arranjo simples, como aqueles:

> [...] (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais. (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados, e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades. (PESSOA, 2009, p.79).

Para este tipo de problema, Pessoa (2009) considerou o valor de p variando de 1 até $(n-1)$. Ou seja, não considerou $p = 0$ e $p = n$. A nossa interpretação para esse fato é que no caso de $p = 0$ não faz sentido falarmos de invariantes, e o caso de $p = n$, sendo distinto dos outros, será tratado na Permutação.

Em uma pesquisa feita com alunos do 5º ano sobre a resolução de problemas utilizando material manipulativo, ou lápis e papel, em intervenções sobre o conteúdo de Análise Combinatória, Pessoa, Santos e Silva (2013) sugerem que seja chamada a atenção dos alunos, durante as intervenções, para os invariantes desse tipo de situação, sendo eles: a existência de um grupo maior, e desse grupo serem retirados elementos para a formação de subgrupos, além da mudança da ordem dos elementos gerar novas possibilidades.

- Permutação Simples

A permutação simples é um caso semelhante de arranjo de *n* elementos, mas tomados *n* a *n*. Por esse motivo, a permutação simples também é conhecida por um arranjo total. Logo, se tomássemos no arranjo $p = n$ ($A_{n,n}$) obteríamos:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1. \qquad (5)$$

Para exemplificarmos, vamos apresentar um problema muito utilizado quando se trata deste tipo combinatório: os anagramas de uma palavra formada com letras distintas; o anagrama consiste em um rearranjo das letras da palavra para formar outras palavras com ou sem sentido. Vejamos um problema de permutação simples: Quantos são os anagramas da palavra CASO? Para a resolução deste problema temos quatro letras diferentes que podem ser organizadas para a formação de novas palavras. Assim, para a primeira letra temos quatro opções; para a próxima letra três opções; e como temos mais duas letras, as opções seguem da seguinte maneira:

$$P_4 = 4.3.2.1 = 24$$

Logo, há 24 anagramas da palavra CASO.

Para esse tipo de problema combinatório é necessário o aluno levar em consideração que: "[...] (1) Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades" (PESSOA, 2009, p.79).

Diferentemente do arranjo cujo invariante é caracterizado pela utilização de parte dos elementos do conjunto, no invariante da permutação usa-se todos os elementos. Pessoa e Santos (2014), ao analisarem a influência do contexto e a ordem dos tipos de problemas combinatórios na resolução, afirmaram que os estudantes que resolverem o teste tipos de problemas combinatórios, iniciado com situações envolvendo permutação, apresentaram desempenho melhor dos que resolveram o teste iniciado por produto cartesiano.

- Combinação Simples

Dados n elementos distintos, chama-se combinação simples desses n elementos, tomados p a p $(p \leq n)$, qualquer subconjunto formado por p elementos distintos, escolhidos entre os n. O número de combinações simples de n elementos tomados p a p é indicado por $C_{n,p}$ ou por $\binom{n}{p}$.

Usamos o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formado por p elementos distintos, escolhidos entre os n elementos:

$$n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)] = A_{n,p} \qquad (6)$$

Também usamos o PFC para contar o número de sequências distintas que podem ser formadas com os p elementos escolhidos (permutações de p elementos):

$$p(p-1)(p-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_p = p! \qquad (7)$$

Como qualquer permutação desses p elementos dá origem a uma única combinação, o número de combinações dos n elementos tomados p a p é:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \qquad (8)$$

Tendo em conta (2), temos:

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \quad (9)$$

Considerando n a quantidade de elementos do conjunto, e p a quantidade de elementos que formarão os subconjuntos.

Podemos perceber também que nas situações problema de combinação, para o entendimento da fórmula, é necessária a compreensão dos tipos citados anteriormente: arranjo e permutação. Isto se deve ao fato de que na combinação a ordem dos elementos não gera novas possibilidades ao número de arranjos, sendo necessário dividir pelo número de permutações dos elementos desse arranjo. Vejamos um problema de combinação simples: Quantas saladas de fruta contendo 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

Para a combinação de 10 frutas tomadas 4 a 4, temos a expressão:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210 \quad (10)$$

Assim, podemos formar 210 saladas de frutas distintas.

Em situações como esta, Pessoa (2009) salienta que é preciso que os alunos analisem os seguintes aspectos do problema,

> [...] (1) Tendo n elementos, poderão ser **formados agrupamentos ordenados** de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais; (2) a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. (PESSOA, 2009 p.80, grifo nosso).

No entanto, com relação a esta citação de Pessoa (2009), salientamos o equívoco quando a autora menciona a “formação de agrupamentos ordenados”, este equívoco foi corrigido num trabalho posterior – Assis e Pessoa (2015), no qual o primeiro invariante passou a lê-se: “[...] (1) de um conjunto maior, serão selecionados objetos ou situações que constituirão subgrupos” (ASSIS; PESSOA, 2015, p.669).

Para a nossa pesquisa, além dos tipos combinatórios em que utilizamos a denominação simples, também abordamos estes tipos levando em consideração a variável repetição. Desse modo, vamos defini-los, a seguir, apresentando uma proposta dos invariantes pertinentes a esses tipos de problemas, contribuindo para os estudos nesta área.

- Arranjo com repetição

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se Arranjo com Repetição, desses n elementos, tomados p a p, qualquer sequência de p elementos, repetidos ou não, escolhidos entre os n existentes, com p e n naturais. Indicamos por $A_r(n,k)$ o número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p. Assim, o número de arranjos com repetição será:

$$A_r(n,k) = n^p \qquad (11)$$

Observa-se que o número dos p elementos tomados de um conjunto de n elementos distintos pode ser maior que o próprio número de elementos desse conjunto. Vejamos um exemplo: Quantas palavras com 3 letras podemos formar com as 26 letras do nosso alfabeto?

Neste caso, o conjunto considerado é o alfabeto, e a quantidade de letras que vamos tomar é 3. Assim, o número de palavras com três letras que podemos formar é 26^3=17.576.

Para este tipo de problema identificamos os seguintes invariantes:

I. De um conjunto de n elementos são escolhidos p elementos, repetidos ou não;
II. Todos os elementos do conjunto podem ou não ser utilizados;
III. A ordem e a escolha dos elementos geram novas possibilidades.

- Permutação com repetição

Dado um conjunto com n elementos com pelo menos dois repetidos, chama-se permutação com repetição qualquer sequência ordenada desses n elementos.

De modo geral, se temos n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1 ($a_1$representa, por exemplo, uma letra), n_2 são iguais a a_2 ($a_2$representa outra letra), n_3 são iguais a a_3,..., n_k são iguais a a_k, com $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$,o número de permutações possíveis é dado por:

$$P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad (12)$$

Observamos que matematicamente a permutação simples é um caso particular da permutação com repetição, quando não há repetição. No entanto, como veremos, os invariantes não são todos iguais.

Vejamos um problema de permutação com repetição: Saussas é o nome de uma aldeia francesa. Quantos são os anagramas da palavra SAUSSAS?

Alguns das letras aparecem repetidas. Assim, para determinar quantos são os anagramas da palavra SAUSSAS, vamos calcular $P_7^{(1,2,4)}$.

$$P_7^{(1,2,4)} = \frac{7!}{1!\,2!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = 7 \cdot 3 \cdot 5 = 105 \qquad (13)$$

Logo, existem 105 anagramas.

Para este tipo de problema identificamos os seguintes invariantes:

I. O conjunto de *n* elementos tem elementos repetidos;

II. Todos os elementos do conjunto são utilizados, cada um apenas uma vez

III. Nem toda ordem de elementos gera novas possibilidades.

- Combinação com repetição

Consideremos um conjunto de n elementos distintos. Chama-se Combinação com Repetição desses n elementos, tomados p a p, qualquer grupo formado por p elementos distintos ou não, escolhidos entre os n. Denotamos o número destas combinações por $C_r\ (n,p)$. Aqui o número p poderá ser maior do que o número n de elementos. Qualquer elemento pode aparecer repetido no máximo p vezes. O número destas combinações é dado pela fórmula

$$C_r(n,p) = C(n+p-1,p). \qquad (14)$$

A partir desta fórmula, a contagem recai na fórmula de combinação simples.

Vejamos um exemplo para combinação com repetição: Um menino encontra-se em uma sorveteria que oferece 8 opções de sabores (chocolate, coco, tapioca, morango, cajá, maracujá, goiaba e manga). De quantas maneiras diferentes ele pode escolher um sorvete com três bolas, sabendo que ele pode repetir sabores e que a ordem não importa?

$$C_r(8{,}3) = C(8+3-1{,}3) = C(10{,}3) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3! \cdot 7!} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 \qquad (15)$$

O resultado mostra que podem ser formadas 6 combinações com repetição. São elas:

Para este tipo de problema identificamos os seguintes invariantes:

I. De um conjunto de *n* elementos são escolhidos *p* elementos, repetidos ou não, para formar um grupo;

II. O número dos *p* elementos escolhidos pode ser maior do que *n;*

III. Todos os elementos do conjunto podem ou não ser utilizados;

IV. A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

A fim de organizar melhor as informações acerca dos tipos de problemas combinatórios, temos nos Quadros 2 e 3 a sua descrição.

Quadro 2– Caracterização dos tipos de problemas sem repetição, com definição, invariantes

(Continua)

CARACTERIZAÇÃO DOS TIPOS DE PROBLEMAS SEM REPETIÇÃO			
TIPO COMBINATÓRIO	**DEFINIÇÃO**	**INVARIANTES**	**EXEMPLO**
ARRANJO SIMPLES	DADO UM CONJUNTO COM n ELEMENTOS DISTINTOS, CHAMA-SE **ARRANJO SIMPLES** DESSES n ELEMENTOS, TOMADOS *P* A *P* (COM $p \leq n$), QUALQUER AGRUPAMENTO ORDENADO DE p ELEMENTOS DISTINTOS ESCOLHIDOS ENTRE OS n EXISTENTES.	(1) TENDO n ELEMENTOS, PODERÃO SER FORMADOS AGRUPAMENTOS ORDENADOS DE 1 ELEMENTO, 2 ELEMENTOS, 3 ELEMENTOS.... P ELEMENTOS, COM $0 < p < n$, SENDO p E n NÚMEROS NATURAIS; (2) A ORDEM DOS ELEMENTOS GERA NOVAS POSSIBILIDADES.	PARA OCUPAR OS CARGOS DE PRESIDENTE, VICE - PRESIDENTE E SECRETÁRIO DO GRÊMIO DE UM COLÉGIO, CANDIDATARAM-SE DEZ ALUNOS. DE QUANTOS MODOS DISTINTOS PODE SER FEITA ESSA ESCOLHA?
PERMUTAÇÃO SIMPLES	A PERMUTAÇÃO SIMPLES É CONSIDERADA UM CASO PARTICULAR DE ARRANJO DE n ELEMENTOS TOMADOS n A n.	(1) TODOS OS ELEMENTOS DO CONJUNTO SERÃO USADOS, CADA UM APENAS UMA VEZ (ESPECIFICAMENTE PARA OS CASOS SEM REPETIÇÃO); (2) A ORDEM DOS ELEMENTOS GERA NOVAS POSSIBILIDADES.	QUANTOS SÃO OS ANAGRAMAS DA PALAVRA CASO?

Quadro 2– Caracterização dos tipos de problemas sem repetição, com definição, invariantes

(Conclusão)

CARACTERIZAÇÃO DOS TIPOS DE PROBLEMAS SEM REPETIÇÃO			
TIPO COMBINATÓRIO	**DEFINIÇÃO**	**INVARIANTES**	**EXEMPLO**
COMBINAÇÃO SIMPLES	DADOS n ELEMENTOS DISTINTOS, CHAMA-SE COMBINAÇÃO SIMPLES DESSES n ELEMENTOS TOMADOS p A p $(p \leq n)$ QUALQUER SUBCONJUNTO FORMADO POR p ELEMENTOS DISTINTOS, ESCOLHIDOS ENTRE OS n.	(1)DE UM CONJUNTO MAIOR, SERÃO SELECIONADOS OBJETOS OU SITUAÇÕES QUE CONSTITUIRÃO SUBGRUPOS (2) A ORDEM DOS ELEMENTOS NÃO GERA NOVAS POSSIBILIDADES.	QUANTAS SALADAS DE FRUTA CONTENDO 4 FRUTAS PODEMOS FORMAR SE DISPOMOS DE 10 FRUTAS DIFERENTES?
PRODUTO CARTESIANO	DADOS DOIS (OU MAIS) CONJUNTOS DISTINTOS, ESSES SÃO COMBINADOS PARA FORMAR UM NOVO CONJUNTO, SENDO A NATUREZA DOS CONJUNTOS ORIGINAIS DISTINTAS DO CONJUNTO FORMADO.	(1) DADOS DOIS (OU MAIS) CONJUNTOS DISTINTOS QUE SERÃO COMBINADOS PARA FORMAR UM NOVO CONJUNTO, CUJA NATUREZA SE DIFERE DAS DOS DOIS CONJUNTOS DE ORIGEM, OS QUAIS SE DIFEREM ENTRE SI; (2) A ORDEM DOS ELEMENTOS NÃO GERA NOVAS POSSIBILIDADES.	NUMA SALA HÁ 3 HOMENS E 4 MULHERES. DE QUANTOS MODOS É POSSÍVEL FORMAR UM CASAL HOMEM-MULHER?

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Pessoa (2009) e Assis e Pessoa (2015).

Quadro 3– Caracterização dos tipos de problemas com repetição, com definição, invariantes

(Continua)

CARACTERIZAÇÃO DOS TIPOS DE PROBLEMAS COM REPETIÇÃO, COM DEFINIÇÃO DE INVARIANTES			
TIPO COMBINATÓRIO	**DEFINIÇÃO**	**INVARIANTES**	**EXEMPLO**
ARRANJO COM REPETIÇÃO	DADO UM CONJUNTO COM n ELEMENTOS DISTINTOS, CHAMA-SE **ARRANJO COM REPETIÇÃO** DESSES N ELEMENTOS, TOMADOS p A p, QUALQUER SEQUÊNCIA DE p ELEMENTOS, REPETIDOS OU NÃO, ESCOLHIDOS ENTRE OS n EXISTENTES, COM p E n NATURAIS. INDICAMOS POR $A_r(n,k)$ O NÚMERO DE ARRANJOS COM REPETIÇÃO DE n ELEMENTOS TOMADOS p A p.	(1) DE UM CONJUNTO DE n ELEMENTOS SÃO ESCOLHIDOS p ELEMENTOS, REPETIDOS OU NÃO; (2) TODOS OS ELEMENTOS DO CONJUNTO PODEM OU NÃO SER UTILIZADOS; (3) A ORDEM E A ESCOLHA DOS ELEMENTOS GERAM NOVAS POSSIBILIDADES.	QUANTAS PALAVRAS COM 3 LETRAS PODEMOS FORMAR COM AS 26 LETRAS DO NOSSO ALFABETO?
PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO	SE TEMOS n ELEMENTOS, DOS QUAIS n_1 SÃO IGUAIS A a_1 (a_1 REPRESENTA, POR EXEMPLO, UMA LETRA), n_2 SÃO IGUAIS A a_2 (a_2 REPRESENTA OUTRA LETRA), n_3 SÃO IGUAIS A a_3,..., n_k SÃO IGUAIS A a_k, O NÚMERO DE PERMUTAÇÕES POSSÍVEIS É DADO POR: $P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$	(1) O CONJUNTO DE n ELEMENTOS TEM ELEMENTOS REPETIDOS (2) TODOS OS ELEMENTOS DO CONJUNTO SÃO UTILIZADOS, CADA UM APENAS UMA VEZ; (3) NEM TODA ORDEM DE ELEMENTOS GERA NOVAS POSSIBILIDADES.	SAUSSAS É O NOME DE UMA ALDEIA FRANCESA. QUANTOS SÃO OS ANAGRAMAS DA PALAVRA SAUSSAS?

Quadro 3– Caracterização dos tipos de problemas com repetição, com definição, invariantes
(Conclusão)

CARACTERIZAÇÃO DOS TIPOS DE PROBLEMAS COM REPETIÇÃO, COM DEFINIÇÃO DE INVARIANTES			
TIPO COMBINATÓRIO	DEFINIÇÃO	INVARIANTES	EXEMPLO
COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO	CONSIDERE UM CONJUNTO DE n ELEMENTOS DISTINTOS. ESCOLHA p ELEMENTOS DESSE CONJUNTO PODENDO REPETIR OS ELEMENTOS. O RESULTADO É UMA COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO DE n ELEMENTOS TOMADOS p A p.	(1) DE UM CONJUNTO DE n ELEMENTOS SÃO ESCOLHIDOS p ELEMENTOS, REPETIDOS OU NÃO, PARA FORMAR UM GRUPO; (2) O NÚMERO DOS p ELEMENTOS ESCOLHIDOS PODE SER MAIOR DO QUE n; (3) TODOS OS ELEMENTOS DO CONJUNTO PODEM OU NÃO SER UTILIZADOS; (4) A ORDEM DOS ELEMENTOS NÃO GERA NOVAS POSSIBILIDADES.	UM MENINO ENCONTRA-SE EM UMA SORVETERIA QUE OFERECE 8 OPÇÕES DE SABORES (CHOCOLATE, COCO, TAPIOCA, MORANGO, CAJÁ, MARACUJÁ, GOIABA E MANGA). DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES ELE PODE ESCOLHER UM SORVETE COM TRÊS BOLAS, SABENDO QUE ELE PODE REPETIR SABORES E QUE A ORDEM NÃO IMPORTA?

Fonte: Elaborado pelo autor.

1.1.3 Raciocínio combinatório

Além da explanação sobre os invariantes do conceito, relacionados aos tipos de problemas combinatórios abordados na nossa pesquisa, achamos pertinente trazer uma breve discussão sobre como o raciocínio combinatório é descrito em estudos na área e nos documentos oficiais.

Diante do proposto, apresentaremos inicialmente a ideia de raciocínio combinatório, presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+, 2000), o qual é definido como uma nova forma de pensar em Matemática, na qual

> [se] decid[e] sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis [ressaltando] que não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um

> processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2000, p.126)

Desse modo, essa nova forma de pensar em Matemática contribui para que o aluno, na resolução de problemas, busque interpretar cada situação e não somente tentar aplicar as fórmulas. Pessoa (2009) entende o raciocínio combinatório como

> [...] um tipo de pensamento que envolve contagem, mas vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Na combinatória, contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem. (PESSOA, 2009, p. 72).

Borba (2010) o apresenta como um

> [...] modo de pensar, presente na análise de situações nas quais dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. (BORBA, 2010, p.3).

Ao agrupar tais elementos, os critérios específicos citados pela autora estão associados aos invariantes prescritivos, ou seja, às propriedades e às relações próprias de cada tipo combinatório. O desenvolvimento desse raciocínio está estritamente ligado à compreensão dos alunos desses critérios nas situações analisadas e que estão atrelados às representações utilizadas nas resoluções. Apesar de ser útil no cotidiano dos alunos, pois envolvem situações – por exemplo, de formação de grupos, duplas de atletas e classificação de campeonato –, a evolução desse raciocínio deve ser trabalhada de maneira formal no decorrer da Educação Básica.

Ratificando essa ideia, Santana e Oliveira (2015), ao tratarem de raciocínio combinatório, afirmam em seu estudo que estão "[...] circunscrevendo ao encadeamento de pensamentos que nos possibilitam analisar estruturas e relações discretas relacionadas a conjuntos finitos" (SANTANA; OLIVEIRA, 2015, p.192). Esses encadeamentos de pensamentos serão analisados na nossa pesquisa a partir das estratégias de resolução, assim como as representações (árvores de possibilidades, listagem, diagramas, fórmulas) apresentadas pelos estudantes do 2º ano do Ensino Médio, participantes desta pesquisa.

1.2 A ANÁLISE COMBINATÓRIA DO PONTO DE VISTA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Esta seção é direcionada ao levantamento de artigos, teses e dissertações, dentre outras fontes relacionados à aprendizagem de Análise Combinatória. Iremos descrever os estudos de sondagem referentes ao conteúdo matemático escolhido e às análises tanto do desempenho quanto das estratégias apresentadas pelos estudantes.

1.2.1 O que as pesquisas trazem sobre a aprendizagem de Análise Combinatória – estudos correlatos

Dos estudos realizados que abordam o conteúdo aqui adotado, destacamos a pesquisa de Miguel e Magina (2003), na qual apresentam uma análise das estratégias de solução de problemas combinatórios utilizadas por 12 alunos do 1º ano de Licenciatura em Matemática, e tiveram como objetivo contribuir para a elaboração de uma sequência de ensino. Para tanto, foi aplicado um questionário relacionado ao perfil dos alunos e a problemas combinatórios; para estes, foram elaboradas 13 questões, as mesmas usadas por Batanero et al. (1997), com algumas modificações, levando em consideração as variáveis: modelo combinatório implícito (partição, seleção, distribuição); tipo de operação combinatória (arranjo, arranjo com repetição, permutação, permutação com repetição, combinação); natureza dos elementos (objetos, pessoas, números ou letras); e valores dados aos parâmetros.

Como resultado da pesquisa, as autoras apontam as dificuldades apresentadas pelos alunos em resolverem problemas e sugerem uma sequência de ensino que seja elaborada, de início, com poucas etapas e poucos elementos com operação de arranjo com repetição, passando por permutação, arranjo sem repetição, permutação com repetição e, por fim, combinação. E nesta sequência, promover o uso do diagrama de árvore, em consequência, o raciocínio multiplicativo. A pesquisa de Miguel e Magina (2003) nos orientou na elaboração dos testes, mesmo as autoras tendo pensado em uma sequência de ensino para um curso de Licenciatura em Matemática, pois como bem nos alertam elas, as dificuldades apresentadas pelos estudantes para resolver tais problemas são provenientes da Educação Básica, devido a este conteúdo não ser muitas vezes abordado no Ensino Médio por conta dos professores considerarem o assunto difícil. A nossa pesquisa se assemelha com a das autoras supracitadas por tratar do mesmo conteúdo matemático e por analisar as estratégias utilizadas pelos alunos quando da resolução de problemas, mas difere em relação aos sujeitos de pesquisa, à quantidade de questões e às variáveis adotadas.

A tese de doutorado de Pessoa (2009) teve como objetivo analisar, do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Para isso, participaram da pesquisa 568 alunos de 4 escolas (2 públicas e 2 privadas), divididos entre três níveis de escolarização, sendo 255 alunos dos anos iniciais, do fundamental; 174 dos anos finais, do Ensino Fundamental; e 139 do Ensino Médio.

A análise teve como base a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990), abordando as seguintes dimensões: significados, invariantes e representações simbólicas. Os alunos responderam a um teste contendo oito questões, com os quatro tipos combinatórios (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano), as quatro primeiras resultavam em um maior número de possibilidades de resolução, e as quatro últimas em um menor número de possibilidades na resolução.

Na análise foram verificadas as seguintes variáveis: gênero, tipo de escola, nível de ensino, nível de escolarização, significado dos problemas, e ordem de grandeza dos números nas respostas. A pesquisadora apresenta o desempenho de acordo com as variáveis adotadas. Dessa maneira, o gênero não interfere no desempenho dos alunos. Em relação aos tipos de escolas, temos que o desempenho dos alunos da escola particular é superior ao dos da escola pública. A autora evidencia a disparidade ao comparar os resultados das escolas comentando que mesmo a escola pública tendo um desempenho menor do que o apresentado pela escola privada, ocorreu progressão no desempenho analisado de uma série para a outra. O estudo também revelou que com relação ao desempenho por nível de ensino e anos de escolarização, ocorreu avanço; contudo, é mais significativo do Ensino Fundamental I para o Fundamental II, do que deste último em relação ao Ensino Médio. Além disso, Pessoa (2009) evidencia que os problemas combinatórios tiveram a seguinte ordem decrescente de acerto: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação.

No que tange à grandeza numérica das soluções, quanto maior, mais dificuldades os alunos apresentaram. Ao analisar as estratégias e respostas, a pesquisadora percebeu que os alunos, independentemente do ano escolar, mesmo que não chegando à solução correta, entendem o que é solicitado no enunciado dos problemas e que, como o passar dos anos de escolarização, eles vão se aproximando da resposta correta. Com este trabalho, a autora percebeu que o raciocínio combinatório não é só desenvolvido no ambiente escolar, mesmo sabendo que determinados tópicos fossem abordados somente em contextos educacionais. Indica, também, como resultado de pesquisa, que a escola busque utilizar as formas como os alunos resolvem os problemas, para que possa colaborar com a formalização deste conteúdo.

O nosso estudo se aproxima da tese analisada tanto por utilizar o mesmo conteúdo matemático (Análise Combinatória) quanto pela aplicação de uma atividade de sondagem. O nosso teste possuiu mais uma variável, além do número de possibilidades possíveis, variável esta denominada, na nossa pesquisa, de ordem de grandeza; temos, também, a variável repetição para os problemas de arranjo, permutação e combinação.

Pessoa e Borba (2009) trazem resultados de estudo a partir dos quais buscaram diagnosticar a compreensão de alunos, da 1ª à 4ª série, acerca de problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação). O estudo verificou as estratégias usadas por 99 alunos de duas escolas (uma pública e uma particular) e o desempenho relativo à resolução dos tipos combinatórios abordados no estudo, em relação à série, à grandeza numérica envolvida nos problemas, e ao tipo de escola (pública ou particular).

O teste aplicado possuía oito problemas combinatórios (dois de cada tipo: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação), sendo que os quatro primeiros problemas possuíam números que levavam a um maior número de possibilidades, e os quatros últimos, um número menor de possibilidades. A análise foi baseada nas estratégias utilizadas pelos alunos nas resoluções dos problemas além dos acertos e erros apresentados per eles, de acordo com as variáveis utilizadas: série, tipo de problema, números envolvidos, e tipo de escola. Como resultado das análises, observou-se que os alunos, com o avanço das séries, melhoram o desempenho em relação às séries iniciais. E que por mais que os alunos das séries mais avançadas, por exemplo – os da 4ª série –, compreendessem o que estavam buscando, ainda não possuíam capacidade de sistematização suficiente para chegarem a respostas mais precisas.

Com relação ao tipo combinatório, os alunos tiveram um desempenho melhor nos problemas de produto cartesiano, pois este tipo é visto de maneira explícita nas séries iniciais; em seguida, os de combinação e, por fim, os de arranjo e permutação, que tiveram os menores acertos. As autoras apontam o melhor desempenho da combinação em relação ao arranjo e permutação, pois na combinação o aluno consegue esgotar as possibilidades de forma rápida e com maior facilidade, para os números pequenos. Já nos tipos arranjo e permutação não, pela dificuldade em esgotar todas as possibilidades, pois neste tipo é necessário levar em consideração a ordem dos elementos.

No que diz respeito à grandeza numérica, os alunos apresentaram maior dificuldade nos primeiros problemas de cada tipo por estes apresentarem números maiores nos enunciados do que os apresentados pelos segundos problemas. Em relação ao desempenho por tipo de escola, o melhor se deu na escola particular. Além da análise quantitativa, foram realizadas análises qualitativas que tinham por objetivo identificar as estratégias utilizadas pelos alunos. Da pesquisa realizada por Pessoa e Borba (2009), os pontos que convergem com a nossa pesquisa são os seguintes: aplicação de teste com os quatro tipos combinatórios e análise das estratégias utilizadas pelos alunos. Os pontos divergentes são: o nível de escolarização, o fato de ser somente em escola pública, e as variáveis adotadas no nosso estudo: repetição e a grandeza numérica.

Borba (2010) apresenta pressupostos teóricos e evidências empíricas em defesa de um trabalho que incentive o desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação Básica: todos os anos e modalidades de ensino. A autora também ressalta a utilização dos problemas combinatórios, que são trabalhados como regra, a exemplo de produto cartesiano, nos anos iniciais do Fundamental, e dos demais problemas (combinação, arranjo e permutação) somente no Ensino Médio. Além disso, comenta sobre as pesquisas realizadas com softwares e análise de livros didáticos, evidenciando que todos estes estudos são importantes para justificar as pesquisas que levam em conta os variados problemas combinatórios de forma que, ao se complementarem, contribuam para a estimulação do raciocínio combinatório de maneira mais ampla.

A autora traz um resumo do trabalho desenvolvido por Inhelder e Piaget (1976) sobre o desenvolvimento da ideia do acaso nas crianças com idade em torno de 12 anos, estudando a resolução de problemas de permutação, ressaltando que o raciocínio combinatório pode acontecer antes do pensamento operacional formal (apresentado por Piaget), podendo ser desenvolvido também por interações sociais, tanto ocorridas dentro da escola como fora. Para fundamentar esta ideia, Borba (2010) traz os estudos de Fischbein (1975), que evidencia o papel importante da instrução escolar no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Considera aspectos comuns entre as situações combinatórias, colocando, no mesmo campo conceitual, termo presente na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), proposta por Vergnaud (1991), e a partir dos conceitos apresentados na TCC, cita os trabalhos de Pessoa e Borba (2010), que defendem os distintos problemas combinatórios desde os anos iniciais de escolarização.

Apresenta também Schliemann (1988), que pesquisou a resolução de permutações com adultos escolarizados e com pouca escolarização; Miguel e Magina (2003), que investigaram estratégias de alunos de 1º ano de Licenciatura em Matemática na resolução de permutação simples e com repetição, de arranjo simples e com repetição, e de combinações; Moro e Soares (2006), que pesquisaram as crianças do 6º e 7 º, levando em conta os problemas de produto cartesiano. Borba (2010) descreve estes trabalhos a fim de ressaltar a tendência das pesquisas em isolar os tipos de problemas combinatórios e os tipos de níveis e modalidades de ensino. Por fim, destaca que o raciocínio combinatório pode ser desenvolvido por experiências escolares, vivências profissionais, instrução específica, ensino direto ou indireto. Com relação aos recursos didáticos (livros e softwares analisados), considera que se faz necessário ter uma maior discussão sobre a Combinatória.

De maneira geral, todo o conjunto de temática apresentado contribui para um maior desenvolvimento do raciocínio combinatório. Esta contribuição deve permitir ao estudante a capacidade de generalizações de tal forma a compreender o princípio multiplicativo (Principio Fundamental da Contagem), que é a base das fórmulas utilizadas nas situações combinatórias.

No que diz respeito à nossa pesquisa, o trabalho de Borba (2010) nos impulsiona a escrever sobre as estratégias utilizadas pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio – antes e depois de obterem conhecimento formal de Análise Combinatória – quando da resolução dos quatros problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação). A escolha por estes quatro problemas se deu por conta das pesquisas já realizadas, como cita Borba (2010), com alunos do Ensino Médio, não incluírem o produto cartesiano, associando-o às séries do Ensino Fundamental. Além disso, a proposta de analisar as estratégias apresentadas antes e depois do conhecimento formal do conteúdo de Análise Combinatória se deu em razão de as pesquisas anteriores, como a de Borba, et al (2013); Moro e Soares (2006); e Pessoa e Borba (2010), não terem evidenciado este procedimento no sentido de compará-las em relação à compreensão de Combinatória.

Com o objetivo de analisar a compreensão de indivíduos da Educação de Jovens e Adultos (doravante EJA) no que diz respeito aos problemas de estruturas multiplicativas, de maneira mais específica os que envolvem raciocínio combinatório, e levando em conta todos os módulos (I – dois primeiros anos do Ensino Fundamental 1;

II – dois últimos anos do Ensino Fundamental 1; III – dois primeiros anos do Ensino Fundamental 2; IV – dois últimos anos do Ensino Fundamental 2 e V – Ensino Médio Profissionalizante), Lima, R. (2010) desenvolveu uma pesquisa envolvendo 150 alunos do EJA, de escolas públicas do Estado de Pernambuco. Para isso, aplicou um teste contendo 16 questões multiplicativas (incluindo todas as combinatórias), as quais os alunos responderam individualmente.

Como resultados da pesquisa para as variáveis abordadas (série, tipo de problema, atividade profissional, faixa etária, estratégias), a que não interferiu no desempenho dos alunos foi a faixa etária. No que toca aos anos de escolarização, quanto mais avançam, melhor o desempenho dos alunos, evidenciando que o desempenho no módulo do Ensino Médio Profissionalizante foi melhor do que nos demais (anos inicias e finais do Ensino Fundamental). Nos problemas multiplicativos e combinatórios, o melhor desempenho deu-se nos que envolviam multiplicação direta, quotição e partição. Analisando somente os problemas combinatórios, a autora concluiu que os mais fáceis são os de produto cartesiano, seguidos dos de permutação, combinação e arranjo. Das estratégias evidenciadas na pesquisa, a mais utilizada foi a listagem de possibilidades. Mesmo tendo um público-alvo diferente do nosso, levamos em consideração os alunos do Ensino Médio, e os tipos de problemas abordados – uma vez que além dos combinatórios, a autora considerou os multiplicativos do tipo quotição e partição –, as análises realizadas sobre os tipos de respostas e as estratégias utilizadas pelos alunos assemelham-se às da nossa pesquisa.

Schliemann (2011) apresentou resultados de uma pesquisa sobre o raciocínio combinatório a partir de dois problemas de permutação, com três grupos de sujeitos: cambistas do jogo do bicho, alunos recém-aprovados no vestibular, e trabalhadores que pertenciam ao mesmo grupo socioeconômico dos cambistas. Nessa pesquisa, foi observado que apesar de os alunos apresentarem um desempenho melhor do que o apresentado pelos demais grupos, a diferença não foi tão significativa. Os sujeitos dos grupos observados, segundo a autora, estabeleceram relação dos problemas, apresentados na pesquisa, com alguma situação anterior que envolvia Análise Combinatória. Concluiu-se que tanto as experiências proporcionadas pelo jogo do bicho quanto a escolar contribuíram para o desenvolvimento da sistematização de todas as permutações possíveis. E que a experiência escolar, especificamente sobre a Análise Combinatória, não possui papel relevante, vinculando o melhor desempenho dos alunos ao tempo de escolarização do que à instrução que receberam sobre esse conteúdo.

Dessa maneira, ressaltou a importância de agregar ao modelo racionalista – que faz uso de símbolos e fórmulas para expressar relações matemáticas – a experiência diária e extraescolar. Esse estudo, comparado ao nosso, apresenta aspecto divergente em relação aos sujeitos, por não envolver apenas alunos, mas também profissionais que por ventura fazem o uso da combinatória, mais especificamente, a permutação. O ponto de convergência está na apresentação dos estudos de Piaget (1951) como referência teórica, nós o utilizamos como um dos nossos aportes para determinar em qual nível se encontra as soluções apresentadas pelos sujeitos pesquisados na nossa investigação.

Em sua dissertação, Duro (2012) busca entender a psicogênese do pensamento combinatório por meio de quatro problemas experimentais (com três materiais manipulativos), envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem e os tipos combinatórios: permutação, arranjo e combinação, considerando a variável repetição e os sujeitos da pesquisa (oito alunos de EJA e 10 do Ensino Médio regular). Esse estudo tem por subsidio teórico a Epistemologia Genética, de Jean Piaget, para definir os níveis em que os sujeitos da pesquisa se encontram para problemas que envolvem a Combinatória. Nos resultados obtidos têm-se níveis e subníveis que vão desde a falta de sistematização até à constituição da Combinatória formal. Os alunos mais jovens apresentaram mais qualidade e quantidade de tomadas de decisões, já os mais velhos buscaram resolver os problemas por associações a situações cotidianas e não evidenciaram uma melhor argumentação acerca das soluções apresentadas.

Essa pesquisa analisa quando os sujeitos iniciam a formação do pensamento combinatório. No nosso caso, analisamos as estratégias sob os estudos de Piaget e Inhelder (1951), que apresentam como base a teoria aqui adotada quando da análise dos dados por trabalhar, em parte, com sujeitos que se encontram no mesmo contexto apresentado na nossa pesquisa (estudantes do 2º ano do Ensino Médio). Os estudantes/informantes foram consideramos por se encontrarem no período formal, mas que podem variar de período, dependendo das experiências e maturidade de cada sujeito.

O estudo de Pessoa e Borba (2012) versa sobre uma análise da compreensão dos alunos com relação aos problemas combinatórios, com base nas resoluções e nas estratégias apresentadas por eles em duas situações distintas. A primeira, quando os alunos não conhecem o conteúdo formalmente, e a segunda, após o conhecimento formal do conteúdo. Além disso, as autoras buscaram investigar quais os significados e os invariantes são reconhecidos com maior frequência pelos alunos, tendo em vista as ideias de Vergnaud (1990) e também as ideias de Inhelder e Piaget (1955), que acreditam que a compreensão das operações combinatórias se dá a partir de níveis e que, ao atingir o nível das operações formais, os alunos são capazes de desenvolver algoritmos para enumeração e contagem combinatória.

Os participantes desse estudo foram alunos do 2º ao 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do 1º ao 3º ano do Ensino Médio, que foram submetidos a um teste contendo oito problemas combinatórios sobre produto cartesiano, arranjos, permutações e combinação. Foi percebido pelas autoras que em alguns casos os alunos utilizam os dados numéricos das questões, mas não as respondem corretamente, pois utilizam operações que não são condizentes com o problema. Os alunos acertavam mais em questões em que as grandezas numéricas foram consideravelmente pequenas. Na sua maioria, as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos do Ensino Fundamental que não vivenciaram o conteúdo e as apresentadas pelos alunos do ensino médio que vivenciaram o conteúdo são bastante parecidas, pois fazem uso, dentre outros, de listagem dos elementos e desenho. Ao compararmos esse estudo com o nosso, percebemos que as autoras também pesquisam as estratégias, mas não só do 2º ano do Ensino Médio. O instrumento também se difere, pois contém apenas oito questões, sendo duas de cada tipo: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação, levando em consideração a variável denominada em nosso estudo de ordem de grandeza.

A influência do material manipulativo na compreensão da Combinatória foi verificada por Pessoa, Santos e Silva (2013), que compararam o desempenho dos alunos na resolução de problemas combinatórios com uso de material manipulativo ou do lápis e papel. Essa pesquisa foi realizada com duas turmas do 5º ano do Ensino Fundamental, sendo aplicados dois testes (pré e pós) intercalados por duas sessões de intervenção em que numa turma foi utilizado lápis e papel, e na outra o material manipulativo.

Nas sessões de intervenção foram trabalhados os conteúdos a partir de três pilares, considerados fundamentais para a compreensão da Combinatória, a saber: (a) os invariantes específicos de cada tipo combinatório, (b) a sistematização da estratégia, e a (c) percepção de regularidade / generalização. Como resultados, as autoras concluíram que o uso do material manipulativo parece não ter auxiliado na compreensão do conteúdo, quando comparados com lápis e papel, e que independentemente do material utilizado, é essencial que os alunos compreendam os invariantes e saibam utilizar diversas estratégias de resolução. Essa pesquisa analisa os dados a partir dos pilares (a), (b) e (c) sendo também esses aparentes na nossa análise. Os resultados encontrados nessa pesquisa nos levam a pensar se encontraremos certa tendência nos nossos dados, mesmo tratando de sujeitos em anos escolares diferentes, já que os nossos sujeitos são estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

Pessoa e Borba (2013) apresentam um estudo sobre o raciocínio combinatório a partir de um grupo de estudos voltado ao ensino e à aprendizagem da Combinatória, o GERAÇÃO. Esse grupo tem por objetivo a produção de estudos que investigam diversos aspectos desse conteúdo que antes da existência do grupo possuía baixa produção, além de permitir mudanças nesse contexto educacional. Tal grupo é constituído por pesquisadores docentes de instituições superiores de ensino (público e privado), professores de Ensino Básico, e estudantes de graduação e pós-graduação (que cursaram ou cursam o Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (EDUMATEC/UFPE). No GERAÇÃO, são produzidos trabalhos juntos com crianças, adolescentes, jovens e adultos de várias modalidades e níveis de ensino, soma-se a isso a participação de professores do Ensino Básico. Dessa maneira, essas produções originaram trabalhos a serem publicados em evento nacionais, internacionais, revistas, e em outras vias de publicações.

Nesse trabalho consta como referência teórica, a Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud (1986), para o desenvolvimento de conceitos em campos conceituais, e os estudos de Shullman (2005) sobre os conhecimentos docentes. As autoras supracitadas apresentam uma breve síntese sobre os diversos trabalhos desenvolvidos a partir dos estudos realizados por esse grupo, dentre eles: estudos de sondagem, o qual apresenta resultados da pesquisa de Lima, R. (2010); estudo sobre o que os alunos da EJA conhecem de Combinatória, o trabalho de Martins (2010); sobre o que os livros da EJA apresentam sobre Combinatória, Rocha (2011); e o de Santana (2011), sobre o que os professores conhecem no que se refere às noções intuitivas de Probabilidade.

Esse trabalho traz, também, estudos de intervenção dentre os quais temos: o de Barreto (2012), partindo da hipótese que os alunos da EJA desconheciam como representar situações simbólicas, quando da proposta de investigar qual é o papel dessas representações no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos dessa modalidade de ensino; o de Azevedo (2013), sobre a influência da construção de árvores de possibilidades com a utilização de lápis e papel, ou com o software educativo Diagramas de Árbol (AGUIRRE, 2005), por crianças dos anos iniciais.

Por fim, as autoras citam os trabalhos em andamento (até a publicação do livro) os quais possuem como orientadora a professora Rute Borba, sendo os de Danielle Avanço, sobre o número de etapas de escolha da situação interferir no desempenho dos tipos de problemas combinatórios; o de Ana Paula Lima, que investiga sobre o conhecimento dos professores sobre a relação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) com as fórmulas da Análise Combinatória, dificuldades do alunos em relação ao uso do PFC, e como se trabalhar com o PFC para desenvolver as fórmulas da permutação, arranjo e combinação; e os trabalhos sob orientação da professora Cristiane Pessoa: o de Adrianne Assis, que trata do efeito da formação continuada sobre combinatória nos conhecimentos e planejamentos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental; o de Maria de Jesus Cunha, que pesquisa sobre os conhecimentos dos professores em relação à Combinatória, de maneira específica, na elaboração de problemas com base no estudo de Rocha (2011); e o trabalho desenvolvido por Pablo Silva, que analisa a abordagem de problemas condicionais em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, além de analisar as sete coleções aprovadas no PNLD do Ensino Médio de 2012.

A breve descrição dos trabalhos realizados pelo GERAÇÃO é pertinente aqui nosso estudo, porque a partir do que foi descrito podemos perceber que as informações apresentadas contribuem para as discussões na área. Nossa pesquisa se encaixa nos estudos de sondagem, conforme foi apresentado no capítulo do livro; ela se diferencia dos estudos aqui apresentados, pois analisa as estratégias utilizadas pelos alunos antes e depois da intervenção do professor regente da turma, ou seja, não propomos uma intervenção pensada para a esta pesquisa que analisa as estratégias dos alunos após a formalização do conteúdo dada pelo professor, especificamente a Análise Combinatória.

Pessoa e Santos (2014) investigaram tanto a possível influência do contexto envolvido no enunciado quanto a ordem de organização dos problemas na compreensão de 40 alunos do 5º ano, tendo como instrumento de coleta de dados um teste contendo oito problemas, sendo dois de cada tipo combinatório (produto cartesiano, permutação, combinação e arranjo), considerando dois tipos de contexto: infantil e adulto. Como referencial teórico, essas pesquisadoras se aportaram em alguns elementos da Teoria dos Campos Conceituais, sendo eles: o tripé da formação do conceito, ou seja, o conjunto de situações, invariantes e representações.

Como resultado, perceberam que o contexto não exerceu influência na resolução dos problemas combinatórios já a ordem interferiu, pois o teste que tive início a permutação, o desempenho apresentado pelos alunos foi melhor do que o apresentado no teste iniciado por produto cartesiano. A partir dessas considerações, as autoras pontuam, como sugestão, que os professores deveriam estimular o uso de estratégias diversas na resolução desses tipos de problemas, além de ressaltar a importância de um contexto para a compreensão do que está sendo pedido na situação apresentada, e que estas situações sejam relacionadas ao cotidiano dos alunos para que eles se sintam motivados a resolvê-las.

Apesar de os sujeitos serem de anos escolares diferentes, e a proposta do instrumento de coleta estar relacionada com contexto e ordem dos tipos de problemas – variáveis que não adotamos na nossa pesquisa –, observamos que os resultados vão ao encontro dos objetivos que tivemos ao elaborar nosso instrumento, pois achamos pertinente abordar problemas (que na TCC chamamos de situações) contextualizados para que os alunos se sentissem motivados na resolução.

Na dissertação de mestrado, Moreira (2014), foi investigado o desempenho e as estratégias apresentadas por 18 professores que lecionam Matemática, ingressantes no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Para subsidiar a pesquisa, alguns elementos da Teoria dos Campos Conceituais: formação de conceito, noção de esquema e as situações; e os estudos de Shullman, relativo ao conhecimento do professor foram fundamentais. Para a coleta de dados foram utilizados dois instrumentos, sendo um composto de cinco questões – com o objetivo de traçar o perfil profissional dos sujeitos da pesquisa; e o outro composto de oito questões, duas de cada tipo de problema combinatório, cuja aplicação se deu antes de os professores/alunos informantes cursarem, no Mestrado, a componente curricular relativa à pesquisa, Análise Combinatória.

A análise se deu a partir de três pontos: o perfil, o desempenho apresentado pelos professores, e os tipos de respostas e estratégias utilizadas por eles. Os resultados mostraram que mesmo os professores estando preocupados com sua formação continuada, apresentaram desempenho baixo ao resolverem os problemas. Em relação aos tipos de problemas, a maior dificuldade concentrou-se nos de combinação, seguido por permutação, produto cartesiano e arranjo. No que se refere aos tipos de respostas, as que mais se destacaram foram as em branco, as incorretas, as corretas devidamente justificadas, e as incorretas com estabelecimento de relação. Já no que concerne às estratégias, as mais utilizadas foram o princípio fundamental da contagem e as fórmulas.

Esse estudo, em relação ao nosso, além de pesquisar sobre os mesmos tipos de problemas combinatórios (produto cartesiano, permutação, combinação e arranjo) também analisam as estratégias e o desempenho dos sujeitos, mesmo que na nossa pesquisa esses sujeitos sejam os estudantes do 2º ano. E o aporte teórico em relação à formação dos conceitos é o mesmo, trata-se da Teoria dos Campos Conceituais.

Santana e Oliveira (2015) identificaram e classificaram os raciocínios apresentados por 577 estudantes de final do ciclo do Ensino Fundamental (3º, 5º, 7º e 9º anos) e do 2º ano do Ensino Médio, de três escolas públicas. O estudo tem como base a Teoria dos Campos Conceituais e os resultados do estudo de Piaget e Inhelder (1951). Na coleta de dados foram utilizados um instrumento composto por cinco questões (uma de cada tipo de problema combinatório) e uma entrevista semiestruturada. Como resultado, a pesquisa apresentou três níveis de raciocínio combinatório, sendo eles: ausência de raciocínio (R1); indício de raciocínio (R2); presença de raciocínio (R3). Ao analisar esses níveis por ano escolar, destacaram o maior percentual do nível R1, ao final dos quatro ciclos do Ensino Fundamental, evidenciando falta de domínio da parte dos estudantes. Mas perceberam o avanço quando foi relacionado a progressão de um nível para o outro com o decorrer dos anos escolares, reforçando resultados de pesquisas anteriores, a exemplo dos resultados apresentados por Pessoa (2009) e Pessoa e Borba (2009).

Essa pesquisa tem o mesmo aporte teórico e trabalha com os mesmos tipos combinatórios (com variáveis diferentes) adotados na nossa pesquisa, tendo a nossa um público somente do 2º ano do Ensino Médio – diferentemente do da pesquisa de Santana e Oliveira (2015), na qual consideram alunos do Ensino Fundamental – e a aplicação do instrumento acontece em dois momentos, antes e depois de os alunos terem visto formalmente o conteúdo de Análise Combinatória.

A pesquisa sobre a ordem de apresentação dos problemas influenciarem no desempenho de 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, de uma escola particular, foi realizada por Pessoa e Santos (2014), que utilizaram um instrumento contendo 8 questões, sendo duas de cada tipo com contexto alterado sem que influenciasse no resultado, ou seja, o resultado de cada par de problemas era o mesmo; os alunos já haviam visto pelo menos o produto cartesiano. Além desse detalhe, os 40 alunos foram divididos em dois grupos de 20 alunos cada um. Para o primeiro grupo, foi entregue um teste contendo a seguinte ordem: permutação, combinação, arranjo e produto cartesiano e, para o segundo, um teste iniciando por produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação.

Após a aplicação dos testes, observou-se que para o primeiro grupo, aquele que iniciou pela permutação, a quantidade de acertos foi maior, além de utilizarem estratégias que não foram somente a de multiplicação direta – estratégia mais usada pelos alunos do grupo em que o teste iniciou por problemas de produto cartesiano. Essa indicação contribui para o professor poder trabalhar a Combinatória não iniciando somente pelo produto cartesiano, mas também pelos demais problemas combinatórios. Esse trabalho, em relação ao nosso, apresenta os mesmos tipos combinatórios, já os sujeitos da pesquisa se diferem por se tratar de estudantes do Ensino Fundamental, enquanto que na nossa pesquisa levamos em consideração estudantes do Ensino Médio. Além disso, a nossa pesquisa analisa os estudantes em dois momentos, antes e depois de eles terem visto, no ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória.

Na pesquisa de Assis e Pessoa (2015), referente à contribuição de uma formação continuada – voltada para o ensino de Combinatória, na prática de uma professora dos anos iniciais –, as autoras utilizam uma entrevista inicial, quatro encontros de formação, e uma entrevista final para analisar o progresso dessa professora em relação ao conteúdo de Combinatória, enquanto conteúdo escolar, nesse processo formativo que teve como subsídio o tripé da formação do conceito proposto por Vergnaud (1986): situações, invariantes e representações simbólicas de combinatória.

Como principais resultados, as autoras apontam que a formação contribuiu para apropriação do conteúdo de Combinatória, por exemplo, o entendimento das características de cada tipo combinatório, bem como na diferenciação dos invariantes pertinentes a cada tipo de problema, na identificação de qual situação é a mais fácil (produto cartesiano) e a de mais difícil compreensão. Em relação às representações utilizadas pelos alunos, as pesquisadoras sublinham a necessidade de reflexão, por parte da professora/informante, sobre as diversas formas, mesmo sem saber defini-las. Do ponto de vista didático do conteúdo abordado na formação, a orientação foi a de a professora passar a defender a necessidade de abordá-lo no decorrer da Educação Básica.

Essa pesquisa, mesmo não trabalhando com o mesmo público que o nosso, além de abordar aspectos ligados ao ensino, já que o nosso trabalho é sobre aprendizagem, possui a mesma base teórica que aqui adotamos – Teoria dos Campos Conceituais –, fazendo, assim, um paralelo com a nossa pesquisa. Já que visitamos a aula do professor, poderíamos, se este fosse sujeito da nossa pesquisa, associar os resultados encontrados por Assis e Pessoa (2015) as nossas observações, além de evidenciar a relação entre as representações utilizadas pelos alunos e a forma como o professor aborda tal conteúdo, o que pode interferir nas estratégias utilizadas no teste posterior às aulas.

Assim, nesse capítulo apresentamos os estudos que contribuíram para o contexto da nossa pesquisa, em que associamos com o nosso trabalho, os aspectos relacionados ao conteúdo matemático (Análise Combinatória), aporte teórico, além de pontos relativos ao objetivo da nossa pesquisa, bem como o público-alvo. Assim, percebemos que esse estudo contribui para o cenário pertinente ao conteúdo de Análise Combinatória. A seguir, abordaremos o referencial teórico que nos subsidiou.

2 SUBSÍDIOS TEÓRICOS PARA O ESTUDO

Neste capítulo, temos como objetivo descrever sobre os aportes teóricos que fazem parte da nossa pesquisa; inicialmente vamos falar sobre os estudos de Piaget e Inhelder (1951), especificamente sobre a ideia do acaso, de acordo com os estágios apresentados na Epistemologia Genética. Seguindo a nossa descrição, abordamos a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud (1996), esclarecendo alguns pressupostos da teoria, os quais subsidiaram a nossa análise.

2.1 ESTUDOS DE PIAGET

Nesta seção consta a descrição dos estudos de Piaget e Inhelder (1951) a partir do livro intitulado *A gênese da ideia de acaso na criança*, pressupostos basilares para a compreensão das estratégias analisadas posteriormente. Nesta obra, dividida em três partes, os pesquisadores conduzem diferentes experiências para estudar o acaso, e na descrição vamos apresentá-las associando-as, respectivamente, à noção do acaso em relação aos eventos físicos, à probabilidade e às operações combinatórias.

Dos conteúdos desta obra, vamos descrever, de maneira detalhada, os que compõem a terceira e última parte, os quais estão relacionados às operações combinatórias: permutação, arranjo e combinação. No que diz respeito às duas primeiras partes, vamos situar o leitor acerca das experiências e dos principais resultados obtidos a partir de questionamentos feitos aos sujeitos participantes (crianças de 4 a 12 anos). A razão de detalharmos a última parte está na ideia de o acaso ser associado à apropriação das operações combinatórias pelas crianças, ou seja, à medida que elas compreendem a permutação, combinação e arranjo, elas vão construindo a compreensão acerca do acaso.

2.1.1 *A gênese da ideia de acaso na criança*: primeira e segunda parte – Noções de acaso e probabilidade

A primeira parte da obra os autores dividiram em três capítulos, estes apresentam, respectivamente, a descrição, os comentários, e as observações pertinentes aos experimentos realizados. Primeiramente, para trabalhar a ideia de mistura irreversível, os pesquisadores utilizaram um dispositivo contendo bolas vermelhas e bolas brancas (oito de cada) sobre uma balança cujo movimento condicionava uma progressiva mistura. A segunda experiência envolve as distribuições centralizadas e uniformes, tendo como dispositivo um plano inclinado de madeira, cheios de pregos dispostos em xadrez, com uma abertura no meio da parte superior e uma folha de papel dividida em quadrados, na qual foram espalhadas esferas, simulando gotas de chuva. A terceira experiência apresenta a diferença entre fenômenos que acontecem ao acaso e aqueles que possuem uma relação não casual. O teste é realizado com a utilização de uma roleta e com o uso alternado de imãs.

Como principais observações, a partir dessas três experiências, Piaget e Inhelder (1951) destacam que durante o primeiro estágio (até os sete anos), a mistura é concebida como um deslocamento global de elementos, mas sem intuição de permutação das posições individuais nem a antecipação de uma interferência das trajetórias. Esse deslocamento global conduz a um estado de desordem, não definitivo, e com ulterior à ordem; não existe nem mistura, nem acaso. Em relação à compreensão sobre distribuição fortuita, nesse estágio é inexistente.

No segundo estágio, idade entre sete e onze anos, há uma “tendência para acreditar numa mistura real e progressiva e não mais aparente e regressiva” (PIAGET; INHELDER, 1951, p.37), evidenciando a ideia de mistura irreversível dos elementos. No que tange à distribuição fortuita, ela é caracterizada por um início de generalização, mas por falta da compreensão acerca do papel dos grandes números, ela é insuficiente. Esses resultados são justificados, pois os sujeitos possuem um pensamento operatório, sendo incapaz de generalizar. Nesse estágio as crianças já distinguem dispersão fortuita de não casual.

No terceiro estágio é compreendido o processo de mistura, o sujeito percebe a interferência das trajetórias ao esboçá-las, apresentam as posições modificadas devido ao choque entres os elementos, enxergando a mistura como irreversível (excluindo os casos raros) e concebida como um sistema de permutações. Compreende a relação entre os grandes números e a distribuição de eventos aleatórios.

Na segunda parte da obra encontramos o tratamento de jogos relativos à sorte: cara ou coroa (capítulo IV), retirada ao acaso de pares de tentos de uma urna (capítulo V) com o propósito de prever a composição dos pares sucessivos a partir de uma tabela de distribuição, e a quantificação de probabilidade de retiradas ao acaso de pequenas coleções (capítulo VI). Das experiências relacionadas à probabilidade, tem-se que a quantificação desta ocorre de fato no terceiro estágio, caracterizado como formal. Os autores comentam da importância das operações combinatórias (permutação, combinação e arranjo) para a compreensão das noções de acaso e de probabilidade, abordadas até o momento.

2.1.2 *A gênese da ideia de acaso na criança*: terceira parte – Operações combinatórias

A terceira parte da obra, os autores reservaram para evidenciar a importância da evolução das operações combinatórias para o entendimento das ideias de acaso e probabilidade. As discussões presentes são de fundamental importância para a análise das estratégias apresentadas pelos estudantes, já que os nossos sujeitos de pesquisa se encontram no terceiro estágio, determinado por Piaget, ou seja, com um nível de pensamento formal ou hipotético dedutivo, no qual é esperada a capacidade de sistematização e formalização relativas a um pensamento mais sofisticado.

A última e terceira parte está dividida em quatro capítulos, apresentando no primeiro capítulo considerações sobre as combinações, seguindo com as permutações, os arranjos; e no último capítulo estão as conclusões acerca das observações sobre os tipos combinatórios analisados, da formação da ideia do acaso e da quantificação das probabilidades. Vamos nos debruçar sobre os capítulos pertinentes às operações.

No capítulo *O desenvolvimento das operações de combinação,* os autores abordam um experimento apresentado no capítulo V, da segunda parte, mas solicitando dos sujeitos, a partir de quatro montes de tentos (de cores diversas) que estão sobre a mesa, formar pares que poderiam ora ser formados por tentos de cores iguais, ora por cores diferentes.

Para essa experiência, tendo como referência os estágios propostos por Piaget, têm-se como resultados para o primeiro estágio (até os 7 anos) combinações empíricas – os sujeitos determinam os resultados possíveis através de tentativas, sem sistematizá-las (sem ter certeza de extrapolação). Eles ainda não traçam planos para indicar as primeiras associações.

Para o segundo estágio, os autores apresentaram sistemas que progrediram para um método correto, no qual a determinação das combinações passou da ideia aditiva da justaposição para a associação multiplicativa, evidenciando, assim, métodos de constituição de pares sucessivos e independentes, “como se cada um deles existisse à parte, isto é, fosse formado por elementos considerados sem relação com sua presença em outros pares” (PIAGET; INHELDER, 1951, p.239).

Houve progresso também quanto à interseção dos pares, com a ideia da justaposição mesmo que entrecruzada, quando os sujeitos, por exemplo, para seis cores determinaram AB, BC, CD, DE, e EF. Ou ainda quando da justaposição entrecruzada, relacionaram a primeira com a última cor (AF), além de obtenção dos resultados por simetria, podendo determinar AB, depois FE, seguido de BC e ED e CD. Por fim, apresentaram um método que indicou uma tendência ao terceiro estágio, que seria as interseções, mesmo que inacabadas (o sujeito coloca AB, AC, AD, AE, BC, BD, e BE, mas se sente inseguro ao seguir uma mesma direção, voltando a usar o método da simetria). Como característica do segundo estágio, a intenção foi a de utilização, por parte dos sujeitos do experimento, de um sistema, mesmo errando. Iniciaram-se as primeiras associações que variaram entre a justaposição e a simetria.

Já no terceiro estágio, o sistema foi realizado de maneira completa, ou seja, o sujeito percebeu as características pertinentes às combinações, focando a regularidade na sequência de modo que determinou uma generalização para *n* termos. Mesmo tendo adquirido operações como a seriação qualitativa e as relações de correspondências (simples, biunívocas e co-unívocas) desde os sete anos, é somente no estágio formal que elas são determinadas; pois, segundo Piaget e Inhelder (1951), diferente das operações combinatórias, as correspondências compõem um sistema único e interdependente.

Para o capítulo intitulado *Operações de Permutações*, os sujeitos continuam utilizando os tentos (iniciando com dois até quatro) para determinar as permutações realizáveis com os elementos. Piaget e Inhelder (1951) evidenciaram que os sujeitos, em relação à combinação, têm um atraso para determinar a compreensão do sistema quando se trata desse tipo de operação.

No primeiro estágio os sujeitos do experimento apresentaram dificuldade para entender a ideia de permutação – não encontraram um sistema que resultasse em todas as possibilidades para três elementos (nem que fosse por tentativas). Desse modo, os autores não fazem a experiência com quatro elementos. A ausência do sistema é associada à falta de compreensão do que seria irreversibilidade. Assim, os sujeitos tiveram mais dificuldades em relação à permutação, pois foi solicitada a mudança de ordem, o que para os entrevistados desse nível seria necessária uma “certa mobilidade, seja de natureza operatória (estágio II), seja acentuando ao menos o que chamamos em outra parte de descentralizações próprias das ‘intuições articuladas” (PIAGET; INHELDER, 1951, p.251).

No segundo estágio, para esse tipo de operação, alguns sujeitos apresentaram desde impressões de regularidades, sem perceber a tendência a um sistema, até a reflexão e dedução. A permutação, mesmo no estágio operatório – no qual seria esperada a antecipação e descoberta de parte da ordem real –, ocorre de maneira demorada. Essa operação apresentou ser mais difícil que a combinação por se tratar de mudança de ordem e não uma combinação de elementos entre si.

A descoberta do sistema ocorre no estágio III, as reações desse nível constituem como a generalização dos sistemas parciais apresentados no estágio anterior. Em relação às permutações sucessivas houve uma inversão ($n! = 1X2X3 \ldots Xn$) sistemática e que permite a generalização. A justificativa para que a permutação seja mais difícil que a combinação está na razão de a primeira se caracterizar como uma operação em segunda potência, ou seja, “uma operação que leva a outras operações” (PIAGET; INHELDER, 1951, p.267), sendo característica de uma operação formal.

No que concerne a “operações de arranjo”, os sujeitos do primeiro estágio as executaram por tentativa, sem perceber a existência de um sistema. No que diz respeito à mistura e a ausência de um sistema nesse tipo de operação, o indicativo foi o de que os indivíduos não compreenderam a ação da brassagem e acreditaram numa ordem oculta das cartas misturadas, além de apresentarem justificativas sem uma lógica específica e não compreenderem grande número de possibilidades.

Há um progresso gradual para o segundo estágio, no que tange à compreensão de regularidade e sistematização, assim como para as permutações e combinações; os sujeitos apresentam um entendimento da lei para determinar os arranjos, mas é algo empírico. No terceiro estágio, além da descoberta da lei, compreende a razão dessa lei de forma a extrapolar todos os arranjos possíveis. Para essa experiência, os indivíduos percebem a repetição presente no problema, determinando as generalizações possíveis.

Nesta seção apresentamos a descrição da compreensão gradual dos sujeitos no que envolve as operações combinatórias, arranjos, permutações e combinações (PIAGET; INHELDER, 1951), além das respostas pertencentes aos estágios propostos por Piaget (1951) e que podem servir como referências para compreendermos em qual estágio estão inseridas as respostas dos estudantes pertencentes à nossa pesquisa. Como continuidade do nosso aporte teórico, a seguir, vamos dissertar sobre alguns elementos da Teoria dos Campos Conceituais, os quais foram importantes para o momento da análise dos nossos dados.

2.2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Em relação à Teoria dos Campos Conceituais (doravante TCC), aqui apresentaremos os principais elementos dessa teoria, evidenciando a definição de campo conceitual, bem como os elementos necessários para a formação do conceito, sendo eles: conjunto de situações, de invariantes e de representações simbólicas – tripé para a formação do conceito.

A TCC trata-se de uma teoria cognitivista, desenvolvida pelo psicólogo, professor e pesquisador francês Gérard Vergnaud (1996) e recebeu maiores contribuições piagetianas e algumas vygostkyanas. Essa teoria se preocupa com o processo de ensino-aprendizagem. Desse modo, acredita-se que diversos fatores influenciam no desenvolvimento de conceitos, entre eles resoluções de situações (teóricas ou práticas) que promovam a apropriação de um conceito, pois para que isso aconteça é necessária uma diversidade de situações. Da mesma forma que uma situação pode abordar vários conceitos. Assim, um conceito não está atrelado somente a uma definição.

Para o nosso instrumento priorizamos uma maior variedade de situações quando inserimos no instrumento diagnóstico as quatro operações combinatórias juntamente com as variáveis repetição e ordem de grandeza. Pois é através da variedade das situações que o conceito passa a fazer sentido para a criança.

Vergnaud (1996) distingue duas classes de situações, sendo elas:

> 1 – classe de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2 – classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abordadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso. (VERGNAUD, 1996, p.156).

Em relação às situações apresentadas pelo autor, mesmo que o nosso instrumento tenha sido aplicado em momentos estanques – antes e depois de os estudantes terem visto formalmente o conteúdo de Análise Combinatória – estamos levando em consideração, para o primeiro momento de aplicação, as várias situações prévias à aula de Combinatória além das experiências vivenciadas por esses estudantes no ambiente extraescolar. E para o segundo momento (posterior à aula) – por mais que seja um prazo curto na aprendizagem da Matemática, que “refere-se a situações suscetíveis de serem utilmente propostas aos estudantes em um ou outro momento do seu desenvolvimento, em função de competências já adquiridas ou parcialmente adquiridas." (VERGNAUD, 2011, p. 16) –, consideramos que os estudantes tiveram acesso a um rol de situações que os possibilitaram melhores estratégias para esse momento posterior.

Vergnaud (1987) coloca que as competências dos estudantes são ferramentas de essencial importância para a descrição e análise das lentas aquisições feitas por eles e que também são complexas, sendo que tais competências podem ser traçadas por meio de ações numa dada situação. Ainda de acordo com Vergnaud (1987), as competências dos estudantes na resolução de situações-problema podem ser rastreadas através de uma ação, tais situações (resoluções de problemas) aparecem através da escolha dos dados e operações, não sendo explicitado nehum raciocínio.

E para que seja realizada a verificação dessas competências, segundo Gitirana et AL. (2014), é necessária a análise das tarefas de Matemática e da atitude do estudante frente a essas tarefas. E que para que essa avaliação ocorra, devem-se considerar três aspectos: (a) análise de acerto e do erro; (b) análise da estratégia utilizada, e (c) análise de escolher o melhor método de resolução. O aspecto (b) está sublinhado no nosso estudo, evidenciando que analisaremos as estratégias dos estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

Ao resolver tais situações há vários conceitos envolvidos, então não faz sentido falar na formação de um conceito, mas, sim, de um campo conceitual que é um conjunto de situações e representações que se articulam. Desse modo, Vergnaud (1996) apresenta elementos que compõem a terna de conjuntos que fazem parte da formação de um campo conceitual.

> **S** é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo; **I** é um conjunto de invariantes (propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações; **R** conjunto de formas pertencentes à linguagem que permite representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). (VERGNAUD, 1996, p.166, grifo nosso).

Assim, o conjunto de situações é o referente do conceito, estando relacionado à realidade; os invariantes são os significados e as representações simbólicas, os significantes. Diante desse tripé, cabe a nós esclarecermos cada um desses elementos. Desse modo, temos que a situação apresentada na teoria está associada à tarefa, a exercícios, às atividades que fazem com que os estudantes possam confrontar-se de modo a desenvolver processos cognitivos e as respostas associando duas principais ideias para as situações:

> 1. a de *variedade*: existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis;
> 2. a de *história*: os conhecimentos são elaborados por situações que eles enfrentaram e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes. (VERGNAUD, 1996, p.12, grifo nosso).

Então, para o campo conceitual, em relação às variáveis de situações, as várias formas de apresentá-las também podem influenciar no conceito. Outra questão seria a complexidade das situações. As variáveis de situações são entendidas como tudo que permeia a situação (questões internas ou externas) como, por exemplo, os conhecimentos prévios dos alunos, estejam estes conhecimentos diretamente ligados ou não à Análise Combinatória.

Temos para a nossa pesquisa a ideia de variedade das situações já que estamos analisando as estratégias utilizadas pelos estudantes nos dois momentos que já citamos anteriormente (antes e depois de terem travado contato com o conteúdo de Análise Combinatória), considerando as situações decorrentes das aulas ministradas pelo professor da turma. Além das situações, com parte pertencente ao tripé, temos os invariantes que representam o que se conservam nos conceitos e que permitem que sejam reconhecidos nas situações: são os conhecimentos contidos nos esquemas, os quais podem ser explícitos ou implícitos.

Para completar a terna de conjuntos, temos a representação simbólica que são as várias formas de os estudantes expressarem o seu entendimento a partir das soluções dadas, temos alguns exemplos como: linguagem natural, gráficos, tabelas, diagramas, métodos formais. Cada representação simbólica faz sentido para quem a usa, ou seja, uma representação válida para um aluno, pode não ser para outro; o mais importante desse elemento, pertencente ao tripé do conceito, é que ele está atrelado à forma como o sujeito entende e busca resolver tais situações, não interessando se está certo ou não, incompleto ou não.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Retomando o nosso objetivo de analisar o desempenho e as estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio (de uma dada escola pública), antes e depois de eles terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória, elaboramos um estudo para atingir tal objetivo. Neste capítulo delineamos a nossa proposta de pesquisa; sendo, assim, iniciamos discutindo a nossa opção teórico-metodológica e, na sequência, apresentamos o universo que envolve a temática aqui proposta e, dentro dele, a nossa amostra. Discutimos o material utilizado neste estudo, o instrumento diagnóstico aplicado antes e após a intervenção do professor – cujas aulas foram visitadas a fim de observar se todos os conteúdos do tema em questão foram explorados –, e as anotações registradas no caderno de um estudante que se mostrou mais organizado e interessado nas aulas, apenas para ilustrar que de fato a turma manteve contato com todo o conteúdo que envolve Análise Combinatória. Por fim, descrevemos como as etapas do nosso estudo aconteceram.

Soma-se à proposta de aplicação de instrumentos diagnósticos aplicados antes e após a intervenção do professor da turma, no que concerne à Análise Combinatória – sendo que tais instrumentos foram elaborados a partir de situações contextualizadas (contextos matemáticos ou não) que permitiram ao estudante associação do conteúdo que perpassa o ambiente escolar –, a descrição da aplicação desta proposta de modo a permitir ao leitor vincular a ela aspectos presentes nas estratégias dos estudantes, as quais são pertinentes à aula do professor. Vale sublinhar mais uma vez que não analisamos as aulas do professor regente, pois ele não é sujeito nem o foco da nossa pesquisa, ele é colaborador.

Para que pudéssemos aferir nosso instrumento, aplicamos um teste piloto (Apêndice A) em dois momentos, sem que os estudantes soubessem antecipadamente da aplicação. O teste aconteceu em uma turma de pós-graduação, com 17 estudantes, e teve como objetivo saber se as respostas dadas pelos pós-graduandos, em ambos os testes, eram equivalentes. Ao final de cada teste, os estudantes foram questionados sobre a elaboração e a escrita das questões, de modo a melhorar a qualidade do teste para futura aplicação dos instrumentos diagnósticos. Neste trabalho não vamos descrever acerca desta experiência, já que nosso foco é a experiência com os estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

A nossa pesquisa foi desenvolvida com estudantes do 2º ano do Ensino Médio, com o intuito de investigar quais são o desempenho e as estratégias desenvolvidas por esses estudantes quando da resolução de problemas que envolvem a Análise Combinatória, antes e depois de terem visto, em ambiente escolar, este conteúdo. Compreendemos a relevância deste trabalho para o processo de ensino-aprendizagem, pois nos permite perceber, a partir da análise destas estratégias, como ocorre o raciocínio desses estudantes e como eles constroem e desenvolvem o conhecimento, colaborando, assim, para o ensino da Matemática. Com este estudo, buscamos mostrar resultados que evidenciam opções e sugestões de como contribuir para um ensino/aprendizagem cada vez mais significativo, além de pensar em formas de intervir no ensino.

3.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS METODOLÓGICOS

A fim de responder a questão de pesquisa, metodologicamente, realizamos uma pesquisa do tipo descritiva que, segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), acontece quando o pesquisador descreve, de forma detalhada, uma situação, fenômeno ou problema utilizando da observação e aplicação de questionários.

Temos ainda para a definição da nossa pesquisa como descritiva, a investigação do desempenho dos estudantes do 2º ano de Ensino Médio na resolução de problemas combinatórios, descrevendo e categorizando as estratégias utilizadas por eles, antes e depois de ter estudado tal conteúdo. Como apontado por Gil (2002, p.42), este tipo de pesquisa se caracteriza pela descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis.

Para a prática dessa investigação, realizamos um experimento que nos permitiu conclusões acerca das hipóteses aqui formuladas. Este experimento se deu com um grupo de alunos do 2º ano do Ensino Médio com os quais foi aplicado um teste prévio à intervenção do professor, em aula de Análise Combinatória, e um teste posterior, buscando demonstrar se a aula provocou alguma mudança nas estratégias utilizadas pelos estudantes para resolver os testes. Para entendermos mais esta pesquisa, segue a sua descrição.

3.2 UNIVERSO DA PESQUISA

Nesta seção vamos descrever a escola – a amostra da pesquisa; uma vez que o nosso interesse é o ensino formal da Análise Combinatória, o experimento foi aplicado na turma de estudantes do 2º ano do Ensino Médio (como já explanado) em uma escola pública estadual, situada em uma cidade do sul da Bahia.

A escolha pela instituição está relacionada aos seguintes fatores: por entendermos ser pertinente que haja diálogo entre a Educação Básica e a Universidade para a melhoria do ensino público, pela receptividade da direção para a realização da pesquisa, e pela aceitação do professor e da turma.

A escola onde ocorreu a pesquisa localiza-se em uma área central da cidade e a sua clientela é oriunda dos diversos bairros. Funciona nos turnos matutino e noturno para a Educação Básica, e no período vespertino ocorrem as atividades do Programa Mais Educação[9]. Possui uma estrutura física constituída de quadra de esportes, auditório, biblioteca, sala da direção, sala dos professores, secretaria, cozinha, dois sanitários, um masculino e outro feminino. A escola possui dois blocos com 12 salas, mas somente um bloco é usado, este possui 8 salas e todas as salas são utilizadas.

O professor da turma é formado em Matemática, mestrando do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT[10]) e atua há 5 anos (e trabalha com o 2º ano desde o início), sendo contratado em Regime Especial de Direito Administrativo (REDA)[11]. O livro-texto utilizado por ele é o *Matemática ensino médio 2*, dos autores Kátia Stocco, Smole e Maria Ignez Diniz (2013). Segundo o professor, a escolha por este livro ocorreu a partir de uma pesquisa feita pela Secretaria de Educação do Estado, e este foi o livro mais votado pelos professores para ser distribuído na rede

---

[9] O Programa Mais Educação, instituído pela Portaria Interministerial nº 17/2007 e regulamentado pelo Decreto 7.083/10, constitui-se como estratégia do Ministério da Educação para induzir a ampliação da jornada escolar e a organização curricular na perspectiva da Educação Integral. As escolas das redes públicas de ensino estaduais, municipais e do Distrito Federal fazem a adesão ao Programa e, de acordo com o projeto educativo em curso, optam por desenvolver atividades nos macrocampos de acompanhamento pedagógico; educação ambiental; esporte e lazer; direitos humanos em educação; cultura e artes; cultura digital; promoção da saúde; comunicação e uso de mídias; investigação no campo das ciências da natureza e educação econômica.

[10] O PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é um curso semipresencial, com oferta nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, que visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente.

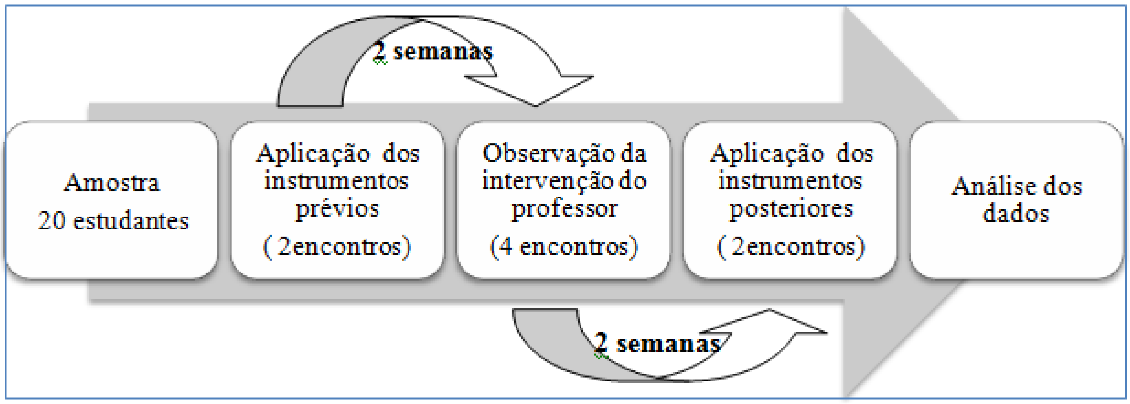
[11] Processo seletivo simplificado para contratação por tempo determinado, em Regime Especial de Direito Administrativo, contrate-se pessoas por 2 anos sendo prorrogável por mais por igual período.

de ensino estadual. Além desse livro, foi utilizado pelo professor da turma, a fim de complementar o assunto, o livro *Matemática: ciência e aplicações 2º ano*, de Gelson Iezzi[et al.] (2013).

A escola possui duas turmas 2º ano do Ensino Médio (A e B). A escolha pela turma (A) se deu em razão do direcionamento dado pelo professor das turmas; ele argumentou que a turma em questão tem melhor rendimento e apresenta frequência mais assídua. Além do interesse demonstrado por esta turma em participar da pesquisa, ela é composta de maior número de estudante (37) cuja faixa etária varia entre 16 e 18 anos.

A participação dos estudantes na pesquisa se deu em três etapas: a primeira, a aplicação do teste prévio, que foi realizado em dois encontros; a segunda, as aulas que aconteceram em quatro encontros; e na terceira etapa, o teste posterior, que também foi realizado em dois encontros, seguido das análises dos dados. Esta dinâmica está retratada na Figura 1 abaixo.

Figura 1 – Resumo do desenho do experimento



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os estudantes não tiveram acesso prévio às questões dos testes (anterior e posterior). Para participar da nossa pesquisa, eles teriam que estar presentes nos oito encontros; dos 37, compareceram 20 estudantes. Ressaltamos que os estudantes faltosos, mesmo não sendo mais informantes deste estudo, sempre que presentes poderiam participar das atividades da pesquisa com os demais estudantes.

Como já dito, os estudantes participaram de três etapas; Na primeira, foi aplicado um teste[12] composto de 16 questões, das quais oito questões foram respondidas no primeiro encontro; e uma semana após, eles resolveram as questões restantes. Entre a etapa 1 e a etapa 2 passaram-se quatro semanas. As aulas de Matemática aconteciam em dois dias da semana, (duas aulas na quarta-feira e uma na quinta-feira, totalizando três aulas semanais), cada aula se dava no período de 50 minutos, as aulas de Análise Combinatória totalizaram sete aulas por conta de questões relacionadas ao calendário escolar; ressaltamos que o professor também não teve acesso às questões do teste. Entre a etapa 2 e a etapa 3, que é a aplicação do teste posterior, passaram-se duas semanas.

O teste posterior foi respondido pelos alunos em dois dias. Estas questões possuíam o mesmo teor das questões apresentadas no teste prévio (número de questões, mesmo tipos combinatórios com as mesmas variáveis adotadas), foram substituídos, apenas, os elementos dos problemas, como podemos perceber no Quadro 4 que segue

Quadro 4 – Equivalência entre os testes (continua)

	TESTES			
CARACTERÍSTICAS	**Anterior às aulas**		**Posterior às aulas**	
Números de questões	14		14	
Tipos combinatórios	Produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação.		Produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação.	
Variáveis adotadas	Tipo combinatório, repetição e ordem de grandeza.		Tipo combinatório, repetição e ordem de grandeza.	
Elementos dos problemas	Q1- vestuário	Q10-sabores de sorvetes	Q1-vestuário (praia)	Q10-opções de brincadeira
	Q2-números (3,5,11,28)	Q11-pessoas para entrevista	Q2-números (5,7,13,17)	Q11- pessoas para fila da lanchonete
	Q3-palavra Saussas	Q12-sequência de símbolos	Q3-palavra Carrara	Q12-sequência de objetos

[12] Sobre o teste, resaltamos que o mesmo possuía 16 questões e que foram retiradas as duas questões relativas ao tipo de problema combinatório produto cartesiano. A retirada foi justificada pelo fato de tais questões não serem do tipo produto cartesiano, parte-todo. Tal motivo será explicado na seção 3.3.1

Quadro 4 – Equivalência entre os testes (conclusão)

	TESTES			
CARACTERÍSTICAS	**Anterior às aulas**		**Posterior às aulas**	
Elementos dos problemas	Q4-membros de diretoria	Q13-números (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)	Q4-posição no pódio (atletas)	Q13- números (0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20)
	Q5-números (2,5,6,8)	Q14- palavra amor	Q5-números (3,5,7,9)	Q14- palavra gato
	Q7-duplas de tenistas	Q15- Lanche	Q7-duplas de jogadores de xadrez	Q15- Almoço
	Q8-comissões	Q16-palavra pano	Q8-grupos de trabalho	Q16- palavra mito

Fonte: Elaborado pelo autor.

Depois de apresentar a discussão teórica e metodológica, o desenho do experimento, os sujeitos e o universo da pesquisa, na próxima seção encontra-se a descrição dos materiais utilizados para a coleta de dados.

3.3 MATERIAL PARA A COLETA DE DADOS

Nesta seção, descrevemos os materiais utilizados para a coleta de dados: os instrumentos diagnósticos (testes), a observação das aulas e o caderno do estudante. Iniciamos escrevendo sobre os instrumentos diagnósticos, sua elaboração e caracterização. Em seguida, analisamos as questões dos testes (prévio e posterior). Na sequência, apresentamos a descrição das observações das aulas e, por fim, comentamos sobre o caderno do estudante.

3.3.1 Instrumentos diagnósticos

Foram descritos os instrumentos (testes) utilizados tanto para evidenciar quais estratégias os estudantes do 2º ano utilizaram antes de verem, em ambiente formal, o conteúdo de Análise Combinatória quanto para destacar quais as estratégias utilizadas pelos estudantes após a aula ministrada pelo professor da turma. Os instrumentos que salientamos aqui são o teste prévio (teste 1 e 2) e o teste posterior (teste 3 e 4), apresentados a seguir.

Achamos pertinente informar que a quantidade de questões contidas nos testes sofreu alterações, pois no momento da análise dos dados, percebemos que as questões elaboradas por nós, relativas ao produto cartesiano, do tipo parte-todo não se encaixam na definição de produto cartesiano, ou seja, dados dois conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto, e a natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.

A partir do que definimos anteriormente, as questões que acreditávamos ser de produto cartesiano, eram de divisão. Assim, retiramos as questões 6 e 9. Dessa maneira, passamos a ter 14 questões nos instrumentos diagnósticos. Ressaltamos também que fizemos a retirada de tais questões sem enumerar novamente os testes, pois isso poderia comprometer os protocolos que adotamos no momento da análise de dados.

Então mesmo a aplicação do teste sendo com as oito questões, qualquer comentário acerca da aplicação ou análise será sobre um futuro teste com apenas 7 questões.

3.3.1.1 Elaboração e caracterização do teste

Os testes utilizados para a nossa coleta de dados contém 14 questões referentes aos tipos de problemas combinatórios cada um, a saber: (a) produto cartesiano, (b) permutação, (c) arranjo e (d) combinação, sendo que para cada tipo combinatório foi levado em consideração a variável repetição (com ou sem) e ordem de grandeza (pequena ou grande).

A escolha dos quatro tipos de problemas se deu pelo fato de que o nosso estudo envolve a Análise Combinatória, conteúdo da grade curricular do 2º ano do Ensino Médio. Os PCN recomendam que este conteúdo seja trabalhado no decorrer do Ensino Fundamental, mas, de acordo com Pessoa e Borba (2009), a maioria dos problemas envolvendo o raciocínio combinatório (arranjo, permutação, combinação) só é visto no 2º ano do Ensino Médio. Assim, são trabalhados de maneira formal durante o Ensino Fundamental os problemas de produto cartesiano; os demais tipos são poucos vistos e de maneira não sistemática.

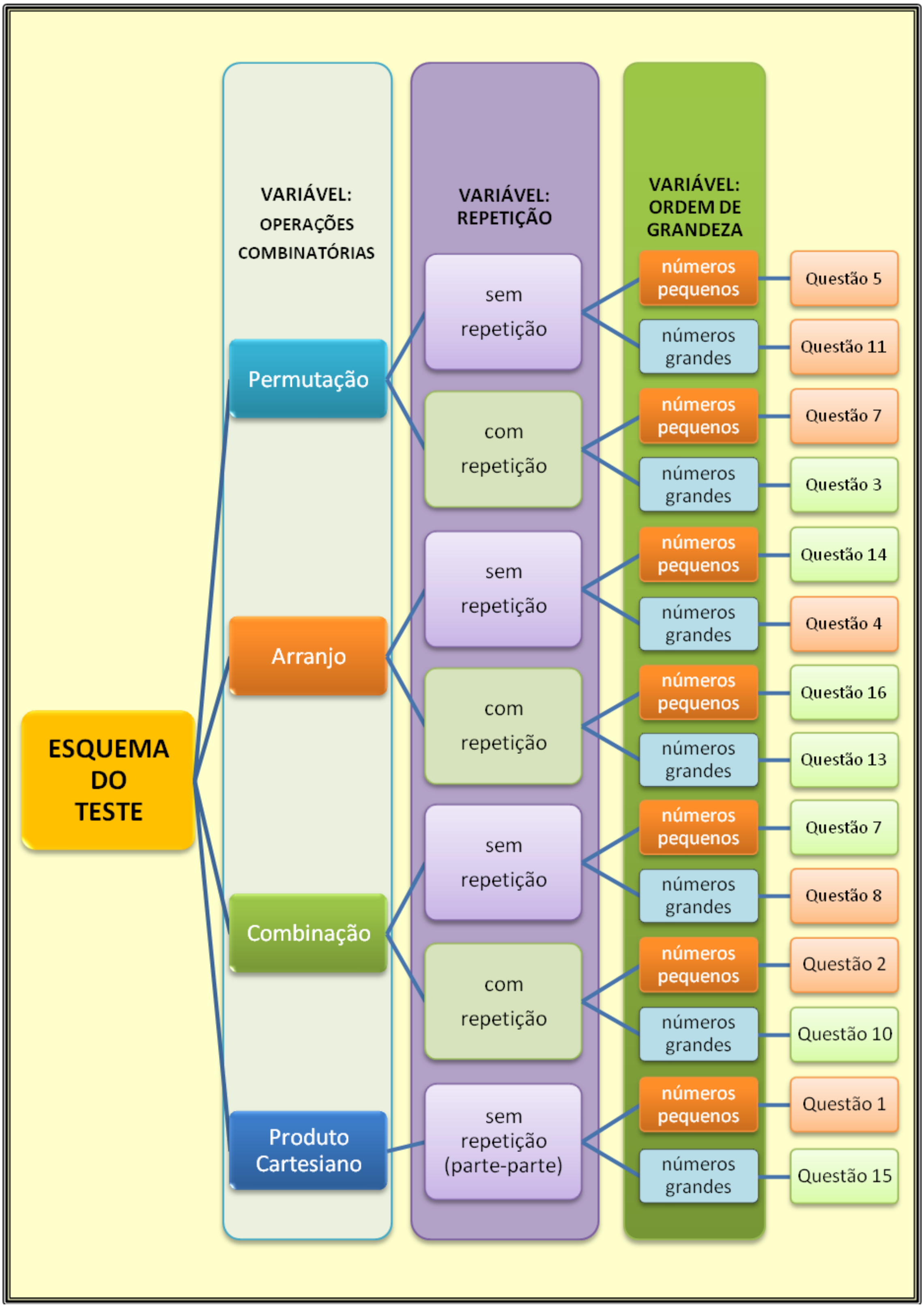
Esse teste foi dividido em dois momentos, uma vez que entendemos que ao colocar 14 questões em um único teste ficaria muito extenso e esse fato poderia prejudicar o resultado da coleta dos dados, por ser muito cansativo resolver todas de uma só vez. Distribuímos, assim, as questões em dois grupos, cada um contendo oito questões: para o teste prévio, temos o teste 1 e o teste 2, e para o teste posterior, o teste 3 e o teste 4, que estão no apêndices B.

Como critério de escolha das questões de cada teste, para que a distribuição das questões fosse a mais equilibrada possível, temos, pelo menos, uma questão de cada tipo (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), com e sem repetição e com ordem de grandeza, pequena, com intervalos de 7 à 24 e grande, com intervalos de 36 à 210.

Como citamos anteriormente, são duas as etapas que teremos para a aplicação dos instrumentos, sendo uma antes e a outra depois da intervenção de ensino do conteúdo de Análise Combinatória. Estas etapas foram subdivididas em dois encontros cada; no caso do teste prévio, a aplicação do teste 1 (contendo oito questões) aconteceu 14 dias antes do início da aula de Análise Combinatória, e a do teste 2, sete dias antes. Para o teste posterior, a aplicação aconteceria da mesma forma, mas a aplicação dos testes 3 e 4, aconteceram 14 e 21 dias, respectivamente, depois da última aula de Análise Combinatória, por questões relacionadas ao calendário da escola.

Para melhor entendermos a estrutura do teste, apresentamos o esquema do teste que utilizamos na nossa pesquisa. Para isso, deixamos claro que as cores presentes na última coluna do esquema, em que resulta no total de 14 questões, apresentam cores distintas justamente para situar o leitor de que as questões 1 a 8 (com tom alaranjado, destacando que foi retirada a questão 6) pertencem aos testes 1 e 3, e as questões de 9 a 16 (com a tonalidade esverdeada, sendo retirada a questão 9) aos testes 2 e 4. Segue a Figura 2.

Figura 2 – Esquema do teste



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dessa divisão, para que pudéssemos aferir nosso instrumento, aplicamos os testes piloto (contendo oito questões cada um) em dois momentos. Os testes foram realizados em uma turma de pós-graduação, com 17 estudantes, a fim de saber se os dois testes seriam equivalentes. Ao final de cada teste, os estudantes foram questionados em relação à escrita e elaboração das questões, de modo a melhorar a qualidade do teste para a futura aplicação dos instrumentos diagnósticos.

De posse dos dados, observando os resultados diante das variáveis consideradas (repetição e ordem de grandeza), percebemos que a variável repetição influenciava no resultado de operações combinatórias e que somando a variável ordem de grandeza à repetição, alterava negativamente tal operação. Com base nessa análise, fizemos uns ajustes, entre os dois instrumentos, de modo que, além de terem a mesma quantidade de problemas combinatórios, passaram a possuir, também, as variáveis repetição e ordem de grandeza, divididas em quantidades iguais. A partir do teste piloto foram feitas algumas mudanças nas questões a fim de diminuir os distratores.

No entanto, em virtude de um equívoco na troca das questões, o instrumento aplicado na escola, em que a pesquisa foi realizada, não resultou na equivalência prevista pelo teste de hipótese do teste piloto e das nossas análises. Acreditamos que esse detalhe não vai alterar a qualidade da pesquisa, já que a ideia de dividir os testes (o teste prévio e o teste posterior) em dois, cada um, seria para que a sua resolução se tornasse mais atrativa e menos cansativa. O instrumento aplicado na escola, em que a pesquisa foi realizada, contém a configuração apresentada no Quadro 5, desta maneira buscamos esclarecer quais problemas ficaram em cada teste[13].

Quadro 5 – Classificação das questões de acordo com as variáveis adotadas (Continua)

PROBLEMA COMBINATÓRIO	CLASSIFICAÇÃO
Q1) Claúdia tem 3 blusas e 4 calças. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar usando uma calça e uma blusa?	Produto cartesiano, parte-parte, pequeno
Q2) Somando dois números do conjunto $G = \{3, 5, 11, 23\}$, repetidos ou não, quantos resultados diferentes são possíveis se obter?	Combinação com repetição pequeno
Q3) Saussas é o nome de uma aldeia francesa. Quantos são os anagramas da palavra SAUSSAS? (Anagrama de uma **palavra é uma nova “arrumação” das letras dessa palavra)**	Permutação com repetição grande
Q4) A diretoria de um clube é composta por 7 membros que podem	Arranjo sem repetição grande

[13] Ressaltamos que as questões apresentadas são do pré-teste, mas que as questões do pós-teste possuem a mesma estrutura , mudando apenas os nomes próprios, os objetos envolvidos nos enunciados, e parte das imagens dos objetos envolvidos.

Quadro 5 – Classificação das questões de acordo com as variáveis adotadas (Conclusão)

PROBLEMA COMBINATÓRIO	CLASSIFICAÇÃO
ocupar o cargo de presidente, vice-presidente ou secretário. De quantas maneiras podemos formar, com esses membros, chapas que contenham presidente, vice-presidente e secretário?	Arranjo sem repetição grande
Q5) Quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 2,5,6 e 8?	Permutação sem repetição pequeno
Q7) Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 6 tenistas?	Combinação sem repetição pequeno
Q8) Quantas comissões diferentes, de 3 pessoas, podem ser formadas a partir de um grupo com 10 pessoas?	Combinação sem repetição grande
Q10) Um menino encontra-se em uma sorveteria que oferece 8 opções de sabores (chocolate, coco, tapioca, morango, cajá, maracujá, goiaba e manga). De quantas maneiras diferentes ele pode escolher um sorvete com três bolas, sabendo que ele pode repetir sabores e que a ordem não importa?	Combinação com repetição grande
Q11) Foram selecionadas para uma entrevista 5 pessoas (André, Mateus, Joana, Carla e Bruna) que chegaram ao mesmo tempo à entrevista. De quantas maneiras diferentes eles podem formar filas enquanto aguardam a sua vez?	Permutação sem repetição grande
Q12) Quantas sequências diferentes, de 4 símbolos, podemos formar com os símbolos abaixo △ △ □ ○	Combinação sem repetição pequeno
Q13) Suponhamosque $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quantos pares ordenados, (x, y) distintos, podemos formar utilizando todos os valores possíveis para x e y ?	Arranjo com repetição grande
Q14) Quantas palavras de 3 letras, distintas – com ou sem significado –, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?	Arranjo sem repetição pequeno
Q15) Numa lanchonete há 12 tipos de sanduíche e 5 tipos de refrigerante. Quantas opções de lanche podem ser formadas com 1 sanduiche e 1 refrigerante?	Produto cartesiano, parte-parte, grande
Q16) Quantas palavras distintas de duas letras podem ser formadas a partir da palavra PANO podendo repetir as letras?	Arranjo com repetição pequeno

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a divisão dos problemas entre os instrumentos que foram aplicados na turma, conforme evidencia o Quadro 6, descrevemos as possíveis soluções, questão por questão. Lembrando que descrevemos e analisamos as questões contidas tanto no teste prévio (teste 1 e 2), em que os estudantes responderam a partir do seu conhecimento – através de contextos extraescolares –, quanto no teste posterior (teste 3 e 4), após o conhecimento formal, buscando explorar as estratégias utilizadas por eles para a resolução das questões nesses dois momentos distintos.

3.3.1.2 Análise das questões do teste prévio

Aplicamos o teste com o intuito de avaliarmos o conhecimento prévio dos alunos a respeito da Análise Combinatória, sem terem visto o conteúdo de maneira formal, tendo, como referência, as experiências extraescolares, para as resoluções de situações problema. Também serviu de parâmetro para avaliarmos, depois da intervenção do professor, se houve um indicativo de construção do conceito abordado.

Falamos da necessidade de dividirmos o nosso instrumento, composto de 14 questões, em dois testes contendo 7 questões, cada um, com ordem de grandeza pequena ou grande, além de possuírem, ou não, a variável repetição. Ao acrescentar essas variáveis aos tipos combinatórios, no caso da ordem de grandeza, há possibilidade de o estudante elencar as possíveis respostas, pensando em uma provável generalização, de modo que resolva, também, o de ordem de grandeza maior. E em relação à repetição, que o estudante ao analisar a questão consiga diferenciar a resolução para a presença ou não desta variável.

A seguir, apresentamos questão por questão, além de discutirmos e apresentarmos as possíveis respostas para o teste prévio, dividido em dois testes (1 e 2). Analisamos as questões do teste 1 e, em seguida, as do 2. Para que o leitor tenha uma ideia geral do primeiro momento do teste prévio, vamos apresentar a análise das questões. Na análise dessas questões foram consideradas estratégias tanto que levaram ao acerto quanto as que levaram ao erro. No Quadro 6, a seguir, que se refere à questão de produto cartesiano, temos:

Quadro 6 – Primeira questão do teste prévio/teste 1

Claúdia tem 3 blusas e 4 calças. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar usando uma calça e uma blusa?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para as questões de produto cartesiano, pensamos que os alunos poderiam ter um melhor desempenho, já que esse tipo combinatório, como citado por Pessoa (2009), é visto no decorrer do Ensino Fundamental. Além da variável tipo combinatório, associamos a essa questão, a variável ordem de grandeza pequena, que possibilita ao estudante listar as combinações existentes, ou fazer o uso da árvore de possibilidades. Para essa questão, ainda temos a variável do tipo parte-parte, ou seja, são dadas as partes para que determine o todo.

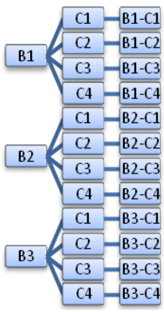
Nesta questão, temos um caso de produto cartesiano, numa situação de combinação de roupas, de forma que a quantidade do conjunto das blusas e das calças resulta em um novo conjunto (blusa-calça), que surge da combinação destas duas peças. Para a resolução desta questão o estudante deverá associar uma blusa a cada calça, buscando resolver esta situação para a quantidade de blusas e calças presente na questão. Assim, apresentamos a seguir as respostas que poderiam ser apresentadas pelos estudantes.

Neste caso, temos um pequeno número de possibilidades, permitindo ao estudante, por se tratar de um problema de produto cartesiano, a utilização de várias estratégias na resolução, sendo elas: árvore de possibilidades, enumeração das possibilidades, uma tabela, registro pictórico, além do princípio fundamental de contagem, pois se esperava que o estudante tivesse visto no decorrer do ensino fundamental sobre problemas envolvendo esse conceito.

Sabemos que o Princípio Fundamental de Contagem dá conta de resolver, mas como a quantidade de maneiras para se arrumar usando uma calça e uma blusa apresenta uma ordem de grandeza pequena, o estudante poderá responder utilizando:

a) árvore de possibilidades, como apresentada na figura abaixo.

Figura 3 – Árvore de possibilidades para a primeira questão – teste 1



3 x 4 = 12 possibilidades

Fonte: Elaborado pelo autor.

Estamos considerado as letras e números $B1$, $B2$ e $B3$ as blusas, e $C1$,$C2$,$C3$ e $C4$ as calças.

(b) Aplicação do princípio multiplicativo

$$3\ X\ 4 = 12$$

Já na questão 2, que segue, no Quadro 7, temos :

Quadro 7 – Segunda questão do teste prévio/teste 1

Somando dois números do conjunto $G = \{3, 5, 11, 23\}$, repetidos ou não, quantos resultados diferentes são possíveis se obter?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Trata-se de uma questão de combinação, na qual é considerada a variável repetição com a ordem de grandeza pequena. Nesta questão, esperamos que o estudante enumere todas as possíveis somas, utilize a árvore de possibilidades, por termos também um resultado com um número pequeno, sendo possível aos estudantes visualizarem os elementos repetidos de modo a excluí-los e encontrar o resultado. Para isso o estudante deverá fazer a adição dos números com eles próprios e com todos os números entre si. Caso ele faça esta adição, número a número, poderá identificar que haverá resultados repetidos, sendo necessário excluir as opções que se repetem, mas pode ser que o estudante não perceba a existência desta variável, representando no resultado o valor de todas as somas.

Por possuir a ordem de grandeza pequena, consideramos essa questão fácil, pois como apontam Pessoa e Borba (2009), na combinação com números pequenos, os estudantes conseguem esgotar as possibilidades de forma rápida e com maior facilidade. Dessa forma, apresentamos as possíveis respostas para essa questão.

(a) Elencar as possíveis somas e excluir as repetidas

Dentre as possíveis soluções, por ser uma questão de ordem de grandeza pequena, o estudante poderá resolvê-la através de todas as somas possíveis e depois excluir as que se repetem. Enumerando todas as somas:

$3+3$	$5+3$	$11+3$	$23+3$
$3+5$	$5+5$	$11+5$	$23+5$
$3+11$	$5+11$	$11+11$	$23+11$
$3+23$	$5+23$	$11+23$	$23+23$

Totalizando 16 somas, retirando as que se repetem (que totalizam 6), restam 10 somas.

(b) Não levar em consideração as somas que se repetem

Outra solução possível é o estudante usar o primeiro elemento do conjunto (número 3) fazer a adição dele com os outros (somando-se quatro adições), e generalizar para os outros elementos, obtendo como resultado 16, que é o produto de 4 x 4, não levando em conta as somas que se repetem.

Dando continuidade a nossa análise, temos no Quadro 8, a seguir, a questão 3.

Quadro 8 – Terceira questão do teste prévio/teste 1

Saussas é o nome de uma aldeia francesa. Quantos são os anagramas da palavra SAUSSAS? (Anagrama de uma palavra **é uma nova “arrumação” das letras dessa palavra**).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Trata-se de um problema de permutação com repetição e ordem de grandeza grande. Para essa questão, acredita-se que os alunos apresentem mais dificuldades para resolvê-la em razão de a ordem da grandeza possuir um valor alto, se enquadrando no intervalo que determinamos como grande (entre 36 e 210). Sendo assim, os estudantes teriam mais dificuldades em esgotar todas as possibilidades.

Nessa questão é apresentada uma palavra composta por sete letras, das quais uma se repete quatro vezes (a letra S), outra se repete duas vezes (a letra A), e a outra aparece apenas uma vez (a letra U). Foi solicitado ao estudante que ele apresentasse as possibilidades de arrumações; a variável repetição aparece como um elemento que dificulta, assim como a ordem de grandeza, a resolução da questão, pois na tentativa de listar essas possíveis arrumações, os alunos podem se equivocar e/ou repetir opções já escritas, impossibilitando a generalização.

Além de a permutação ser considerada mais difícil, para os estudantes do Fundamental I, por considerar a ordem dos elementos – como cita Pessoa e Borba (2009) – o fato de os estudantes não terem visto, formalmente, esse tipo combinatório, pode ser um fator que contribua para a dificuldade que os alunos apresentam na resolução da questão. Este problema apresenta, ainda, um fator que possibilitaria a não resolução da questão: o desconhecimento da definição da palavra anagrama; por mais que não pudéssemos, apresentamos uma breve descrição sobre seu significado. Segue uma possível resposta para esta questão.

(a) Tentativa de elencar os anagramas

Temos que é esperado dos estudantes não conseguirem resolver esta questão ou que inicie uma tentativa de elencar os possíveis anagramas, mesmo sabendo que existem mais opções, não expressa, por causa da ordem de grandeza, como o exemplo a seguir:

Quadro 9 – Tentativa de elencar os anagramas para a terceira questão/teste 1

ASUSSAS – UASASSS - SASSAUS – SUASSAS - AUSSSAS...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a questão de número 4, apresentada no Quadro 10, temos um problema do tipo arranjo sem repetição com ordem de grandeza grande.

Quadro 10 – Quarta questão do teste prévio/ teste 1

A diretoria de um clube é composta por 7 membros, que podem ocupar o cargo de presidente, vice-presidente ou secretário. De quantas maneiras podemos formar, com esses membros, chapas que contenham presidente, vice-presidente e secretário?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Trata-se de um problema combinatório envolvendo arranjo sem repetição com ordem de grandeza grande, no qual a pretensão foi a de que os estudantes se atentassem à quantidade de cargos a fim de distribuir os membros. Nesta questão, esperamos que eles percebessem a ordem como um fator que vai interferir para a resolução do problema.

Resolução: sabendo que existem três cargos (presidente, vice-presidente e secretário) e sete membros, para o cargo de presidente existirá 7 opções de membros; para o cargo de vice, 6 opções; e, por fim, no cargo de secretário, 5 opções. Multiplicando as opções entre si, ao final teríamos 210.

Para essa questão, em que é trabalhado o arranjo – no livro didático 1 (o livro da turma) –, esse tipo combinatório é apresentado através de um problema envolvendo quantidade de placas de automóvel e de senhas bancárias, com ordem de grandeza pequena, utiliza de árvores de possibilidades para determinar o resultado. Já na seção de exercícios resolvidos, o livro do aluno apresenta problemas em que a ordem de grandeza é grande, utilizando-se do princípio multiplicativo. Moreira (2014) aponta, em sua pesquisa desenvolvida com professores do Ensino Básico, que os problemas de arranjo são um dos que os professores possuem o melhor desempenho.

Para a quarta questão do teste prévio (Quadro 11), temos a possível resposta:

(a) Esboçar algumas prováveis chapas

Neste momento da pesquisa foi esperado que os estudantes tentassem esboçar algumas prováveis chapas, mas em virtude de elas se apresentarem diversificadas se torna desmotivador elencá-las.

_____._____._____

Secretário
Vice-presidente
Presidente

Sendo $1,2,3,4,5,6,7$ os números que representam os membros, no quadro de número 11, temos as seguintes opções de chapas:

Quadro 11– Opções de chapas para a quarta questão/teste 1

$1-2-3 \quad / \quad 1-3-4 \;/\; 1-4-5 \;/\; 1-5-6 \;/\; 1-6-7 \ldots$

Fonte: Elaborado pelo autor.

(b) Multiplicação dos dados da questão

Nesse caso, o estudante utilizaria os dados existentes no enunciado, o número de membro, que são 7, multiplicados pela quantidade de cargos, que são 3. logo:

$$7 \times 3 = 21$$

Totalizando 21 chapas.

A seguir, temos no Quadro 12 a questão de permutação sem repetição com ordem de grandeza pequena.

Quadro 12 – Quinta questão do teste prévio/teste 1

Quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 2,5,6 e 8?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esta questão é de permutação sem repetição, ordem de grandeza pequena, sendo solicitado ao estudante que utilizasse os 4 algarismos diferentes, expostos para a composição de novos números cujo algarismos não podem ser repetidos. Dentre as estratégias que pensamos, poderão ser utilizadas pelos estudantes as seguintes: árvore de possibilidades, enumeração dos possíveis números.

A resolução desta questão ocorre com base no seguinte raciocínio: o número possui 4 algarismos, se na ordem de milhar existem 4 opções, isso implica que, na ordem da centena haverá 3 opções; na dezena 2, e na unidade, apenas 1 opção. Assim, ao final, o aluno deverá realizar uma multiplicação entre as opções citadas $(4.3.2.1)$ tendo como resultado 24 opções.

Problemas envolvendo permutação sem repetição foram considerados no trabalho de Lima, I. (2015) ao pesquisar sobre o raciocínio combinatório de estudantes da Educação de Jovens e Adultos, percebendo que os problemas multiplicativos e combinatórios como o mais fácil, depois do produto cartesiano. Acreditamos que esse tipo combinatório nessa questão seja fácil devido ser possível elencar as possibilidades, por conta da variável de grandeza ser pequena, além de não possuir a variável repetição. Vejamos algumas possíveis respostas.

(a) Elencar os possíveis números

Para as questões em que pedimos que os alunos apontassem o número de possibilidades, eles apontam as prováveis maneiras, total ou parcial, escrevendo o total das maneiras distintas de escrever o número de 4 algarismos, ou quando, parcialmente, não indica qual a quantidade. Assim, temos:

2568 2856 5628 6258 6825 8562

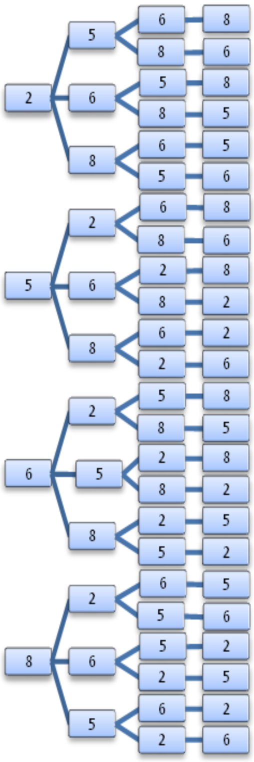
2586 2865 5682 6285 6852 8526

2658 5268 5826 6528 8256 8625

2685 5286 5862 6582 8265 8652

(b) Árvore de possibilidades

Figura 4 – Árvore de possibilidades para a quinta questão, teste 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a questão 6, temos no Quadro 13 um problema de combinação sem repetição de ordem de grandeza pequena.

Quadro 13 – Sétima questão do teste prévio/teste 1

Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 6 tenistas?

Fonte: Elaborada pelo autor.

Este problema é classificado como de combinação sem repetição de ordem de grandeza pequena. Acreditamos que nessa questão os estudantes tenham uma tendência ao erro, já que temos uma situação em que o ele teria que associar o contexto da situação a uma representação (seja através de números, letras ou desenho), para que posteriormente inicie a listagem das prováveis duplas. Por ter um número de possibilidades pequeno, o estudante pode elencar as opções de duplas, mas pode, nesse momento, não perceber a repetição e determinar o valor errado.

Santos e Pessoa (2014) sugerem que o contexto dos problemas seja elaborado de maneira a ser entendido o que está sendo pedido na situação apresentada e que os contextos também estejam relacionados com o cotidiano dos alunos para que eles se sintam motivados a resolvê-los, mesmo que esses aspectos do cotidiano não estejam presentes em todas as questões, no caso da nossa pesquisa. Assim, por mais que tivéssemos essa preocupação no momento da elaboração da pesquisa, os erros podem estar associados a problemas conceituais, por exemplo, o aluno não se atentar ao invariante da repetição ou ordem. Dentre as prováveis estratégias utilizadas pelos estudantes, temos enumerar as duplas e o princípio fundamental da contagem. Vejamos possível resposta.

(a) Elencar as duplas

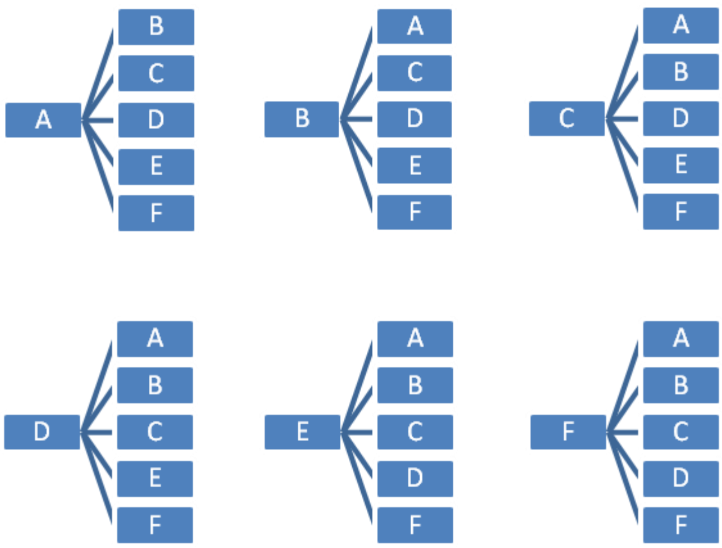
Para os 6 tenistas a seguinte representação:Ana, Breno, Cau, Dan, Edio e Fal e para elencar as duplas, temos:

Ana/Breno	**Ana/Cau**	**Ana/Dan**	**Ana/Edio**	**Ana/Fal**
Breno/Ana	**Breno/Cau**	**Breno/Dan**	**Breno/Edio**	**Breno/Fal**
Cau/Breno	**Cau/Ana**	**Cau/Dan**	**Cau/Edio**	**Cau/Fal**
Dan/Breno	**Dan/Ana**	**Dan/Cau**	**Dan/Edio**	**Dan/Fal**
Edio/Breno	**Edio/Ana**	**Edio/Cau**	**Edio/Dan**	**Edio/ Fal**
Fal/Breno	**Fal/Ana**	**Fal/Cau**	**Fal/Dan**	**Fal/ Edio**

Excluindo as 15 duplas que se repetem, restam 15. Os estudantes também poderão não notar duplas repetidas e afirmar que a reposta será de 30 duplas.

(a) Árvore de possibilidades

Figura 5 – Árvore de possibilidades para a sétima questão/teste 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como última questão do teste 1, a questão 8, a seguir (Quadro 14) trata-se de uma do tipo combinação sem repetição com grandeza grande.

Quadro 14– Oitava questão do teste prévio/teste 1

Quantas comissões diferentes, de 3 pessoas, podem ser formadas a partir de um grupo de 10 pessoas?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para resolver essa questão vamos levar em consideração as três vagas que compõem uma comissão. Sendo que para a primeira vaga existirão 10 opções; para a segunda, 9 opções; e para a terceira, 8, multiplicando as opções entre si e dividindo, respectivamente, pelas combinações entre si 3 e 2, resultando em 120 comissões diferentes.

Por ter a ordem de grandeza grande, nesta questão os alunos podem apresentar certa dificuldade para determinar todas as comissões possíveis. A nossa assertiva se dá por estarmos levando em consideração que este é um teste prévio e, por isso, os estudantes poderiam apresentar certa dificuldade para perceber a regularidade e a generalização para esse tipo de problema combinatório. Além disso, tem um detalhe para o qual os estudantes podem passar despercebidos – o invariante de ordem, ou seja, a ordem não gera novas possibilidades.

Para esta questão, as prováveis estratégias serão a tentativa de listar as comissões e a multiplicação dos dados contidos na questão. Para fazer a listagem, o estudante pode utilizar de números, por exemplo. Iniciando as possíveis combinações e por ser um número de possibilidades grande, o aluno pode colocar reticências para indicar que existirão mais possibilidades, mas que não serão listadas todas. No caso da multiplicação dos dados contidos na questão, ele multiplicará a quantidade de pessoas do grupo, que são 10, pela quantidade de pessoas por comissão, que são 3.

É necessário que estratégias como listagem de possibilidades, busca de regularidades e generalização, dentre outras que apresentamos, sejam percebidas pela escola, para que sirvam de ponto de partida para o ensino de Análise Combinatória, como é concluída na pesquisa de Pessoa e Borba (2012). Segue algumas possíveis respostas dadas pelos estudantes para esse tipo de problema combinatório, antes de eles terem visto, formalmente, o conteúdo em ambiente escolar.

(a) Listagem

Sendo o grupo formado por 10 pessoas sendo representadas por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Assim, o estudante começaria a listar e daria um indicativo de continuidade:

$1-2-3$ $\quad$ $1-2-8$

$1-2-4$ $\quad$ $1-2-9$

$1-2-5$ $\quad$ $1-2-10$

$1-2-6$ $\quad$ $1-3-2$

$1-2-7$ $\quad$ $1-3-4\ldots$

(b) Multiplicação dos dados da questão

$3 \times 10 = 30$

Como o pré-teste foi dividido em dois momentos, para o teste 2, temos a análise das questões, a seguir. Iniciamos com uma questão de combinação com repetição e ordem de grandeza grande.

Quadro 15 – Décima questão do teste prévio/teste 2

Um menino encontra-se em uma sorveteria que oferece 8 opções de sabores de sorvete (chocolate, uva, tapioca, morango, abacaxi, banana, goiaba, pitanga). De quantas maneiras diferentes ele pode escolher um sorvete com duas bolas, sabendo que ele pode repetir sabores e que a ordem não importa?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Trata-se de uma questão de combinação com repetição, com número de possibilidade grande. Para resolvê-la será necessário perceber a interferência da variável repetição, assim a questão possuirá duas etapas. A primeira etapa será calcular as possíveis combinações em que as duas bolas de sorvete sejam do mesmo sabor, tendo 8 sabores, portanto, 8 opções. Na segunda etapa, o estudante determinará o resultado para as opções de sorvetes com as duas bolas diferentes.

Assim, para a primeira opção de bola de sorvete serão 8, e na segunda bola, 7, multiplicando entre si as opções, resultará em 56 opções, sabendo que haverá opções repetidas (por exemplo, a opção de sorvete com duas bolas, sendo uma de chocolate + tapioca = tapioca+ chocolate), divide-se por 2, resultando em 28. Encontrando este valor e somando ao resultado da primeira etapa (8), teremos como resultado final 36.

Na resolução desta questão, os estudantes podem iniciar uma tentativa de elencar essas combinações, além de calcular as combinações sem levar em consideração as repetidas. Para a resolução do instrumento teste posterior, além das alternativas de estratégias apresentadas, eles poderão utilizar a fórmula de combinação com repetição.

Em Miguel e Magina (2003), mesmo não pesquisando a variável repetição, associado ao tipo combinatório, temos que combinação, numa sequência de ensino, deve ser o último problema combinatório a ser visto. Se observarmos a definição de combinação (no capítulo 1, seção 1.1.2), vamos perceber que a compreensão desse tipo combinatório está interligada com o entendimento do que é arranjo e permutação e quais são seus invariantes. Temos, assim, as possíveis respostas:

(a) Princípio fundamental da contagem

$8.7 = 56$

(b) Tentativa de elencar as opções de sabores

Representando as opções de sabores com as respectivas iniciais: chocolate = ch, uva = u, tapioca = t, morango = m, abacaxi = a, banana = b, goiaba = g, pitanga = p, elenca algumas prováveis combinações.

Quadro 16 – Prováveis combinações para a décima questão do teste prévio/teste 2

$ch + u, u + t, m + u, m + b, a + b, g + p$

Fonte: Elaborado pelo autor.

No Quadro 17, apresentamos a questão 11, de permutação sem repetição com ordem de grandeza grande.

Quadro 17 – Décima primeira questão do teste prévio/teste 2

Foram selecionadas para uma entrevista 5 pessoas (André, Mateus, Joana, Carla e Bruna) que chegaram ao mesmo tempo à entrevista. De quantas maneiras diferentes elas podem formar uma fila enquanto aguardam a sua vez?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Do tipo permutação sem repetição com opções de resposta grande. Nessa questão em que é solicitado as diferentes possibilidades de organizar as 5 pessoas em uma fila, temos então que pensar em 5 posições, sendo que na primeira posição teria 5 opções para as pessoas, para a segunda teríamos 4, em seguida, 3, logo após, 2 e por fim, 1 opção; ao final, o estudante deveria multiplicar, entre si, as opções (5.4.3.2.1= 120 maneiras).

Na pesquisa de Pessoa e Santos (2014), os estudantes ao responderem os testes que iniciaram por permutação (problema considerado mais difícil), apresentaram o melhor desempenho do que nos testes que iniciaram por produto cartesiano (problema considerado mais fácil). É esperado que o discente, para este momento, tente elencar algumas opções de organização da fila, não sendo capaz de generalizar, para, assim, encontrar as diversas maneiras. Para a questão apresentada, temos a possível resposta:

(a) Tentativa de elencar as maneiras de organizar a fila

1º André 2º Mateus 3º Joana 4º Carla 5º Bruna
1º André 2º Joana 3º Carla 4º Bruna 5º Mateus
1º Joana 2º Mateus 3º André 4º Carla 5º Bruna
1º Bruna 2º Mateus 3º Carla 4º André 5º Joana ...

No próximo quadro, de número 18, temos uma questão envolvendo permutação com repetição e ordem de grandeza pequena.

Quadro 18 – Décima segunda questão do teste prévio/teste 2

Quantas sequências diferentes, de 4 símbolos, podemos formar com os símbolos abaixo? △ △ □ ○

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a resolução dessa questão, espera-se que o estudante preste atenção na variável repetição. Para essa questão temos uma sequência com 4 símbolos, sendo que um símbolo (triângulo) aparece repetido em algumas sequências. O que se acredita é que o aluno vá responder a partir do desenho das prováveis sequências por ela se apresentar em pequeno número o que tendência o estudante a esgotar todas as possibilidades.

Mesmo com a variável repetição, essa questão pode ser considerada fácil em virtude da ordem de grandeza ser pequena. Por conseguinte, o estudante tem a possibilidade de listar todas essas sequências. A variável repetição pode contribuir para que, ao listar as possibilidades, ele se equivoque e apresente sequências repetidas. De acordo com os estágios apresentados por Piaget e Inhelder (1951), para as operações combinatórias de permutação, temos que essas possíveis respostas estão relacionadas ao segundo estágio, no qual os autores concluem que os sujeitos da sua pesquisa apresentaram impressões de regularidades sem perceber a tendência a um sistema. Vejamos uma possível resposta

(a) Enumerar as prováveis sequências

△△○□ △□○△ □△△○ □○△△
△△□○ △□△○ ○△△□ □△○△
△○△□ △○□△ ○□△△ ○△□△

Seguindo com análise das questões, temos no Quadro 19, uma de arranjo com repetição, com ordem de grandeza grande.

Quadro 19 – Décima terceira questão do teste prévio/teste 2

Suponhamos que $x, y \ \epsilon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quantos pares ordenados (x, y), diferentes, podemos formar utilizando todos os valores possíveis para $x \ e \ y$?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta questão infere-se que os estudantes se recordassem do conceito de par ordenado. O contexto em que foi apresentada essa questão provocou distratores, já que temos tanto o fato de o conjunto possuir 11 e não 10 elementos (como aparentemente mostra) quanto o fato de questionar sobre pares ordenados diferentes, sendo que, na verdade, nós vamos admitir pares com elementos repetidos; tal detalhe foi observado no momento da análise dos dados. Então, essa informação pode fazer com que eles pensem que seja um arranjo sem repetição. O esperado foi o de que os estudantes tentassem representar alguns pares ordenados, além de utilizar o princípio fundamental de contagem de maneira equivocada, pois ao pensar que se trata de um tipo de questão de arranjo sem repetição, multiplicaria 11 por 10 e não 11 por 11. Nesse caso, seria necessário que os estudantes tivessem bem clara a ideia do que é invariante de cada conteúdo, assim como define Vergnaud (1996) sobre os invariantes que trata de propriedades e relações que podem ser reconhecidos e utilizados para outras situações. Para esta questão, temos as possíveis respostas:

(a) Princípio Fundamental da Contagem errado

$$11.10 = 110$$

(b) Elencar alguns pares ordenados

$$P = \{\ (0,1), (0,2), (0,3), (04), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (0,9), (0,10), (1,0), (1,2) \dots \}$$

A seguir temos, no Quadro 20, a questão de arranjo sem repetição, com ordem de grandeza pequena.

Quadro 20 – Décima quarta questão do teste prévio/ teste 2

Quantas palavras de 3 letras diferentes, com ou sem significado, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para esta questão, temos que, a partir da palavra AMOR, determinar quantas palavras, com três letras, podemos formar, sabendo que as letras não podem se repetir. Assim, para uma palavra com três letras, temos, para a primeira letra, 4 opções; para a segunda, 3; e para a terceira, 2; para encontrarmos o resultados basta multiplicarmos 4.3.2, resultando em 24.

O estudante poderá resolver essa questão utilizando estratégias dentre as quais estão: a listagem completa das palavras e a utilização do princípio fundamental da contagem. Por ser ordem de grandeza pequena, é provável que ele esgote todas as possibilidades. Pensamos que para esse teste, o estudante ainda não perceberá a regularidade e, assim – como nos atentam Piaget e Inhelder (1951) – ele encontra-se no segundo estágio do desenvolvimento cognitivo, apresentado por estes autores. Possíveis respostas.

(a) Listagem completa das palavras

$$AMO \quad AOM \quad AMR \quad ARM \quad AOR \quad ARO$$

$$MAO \quad MOA \quad MAR \quad MRA \quad MOR \quad MRO$$

$$OMA \quad OAM \quad OAR \quad ORA \quad OMR \quad ORM$$

$$RMA \quad RAM \quad RMO \quad ROM \quad ROA \quad RAO$$

(b) Utilização do princípio fundamental da contagem

$$4.3.2 = 24$$

Segue o Quadro de número 21, com a questão de produto cartesiano do tipo parte-parte, com ordem de grandeza grande.

Quadro 21– Décima quinta questão do teste prévio/teste 2

Numa lanchonete há 12 tipos de sanduíche e 5 tipos de refrigerante. Quantas opções de lanche podem ser formadas com 1 sanduiche e 1 refrigerante?

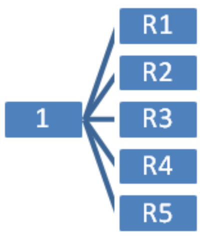
Fonte: Elaborado pelo autor

Questão de produto cartesiano (parte-parte) com ordem de grandeza grande. Nesta questão, assim como na primeira questão do instrumento, solicita-se dos estudantes a combinações entre dois conjuntos: aqui, no caso, tipos de sanduiche, com 12 opções e tipos de refrigerante, com 5 tipos. Basta multiplicar 12 por 5 para termos as opções de lanche.

Por ser um tipo combinatório com ordem de grandeza grande, talvez os estudantes apresentem mais dificuldade em utilizar a estratégia árvore de possibilidades, pois para esgotá-las daria mais trabalho. Para resolver esta questão, eles podem utilizar como estratégias a árvore de possibilidades e o princípio fundamental da contagem. Esse tipo de problema, nos estudos de Lima, R. (2010), foi o que apresentou melhor desempenho por parte dos alunos. Segundo Pessoa e Borba (2009), isso pôde acontecer por contribuição da escola, pois o produto cartesiano é trabalhado no ensino fundamental (3º ou 4º ano) juntamente com outros significados das estruturas multiplicativas como a proporcionalidade, configuração retangular e comparativa, por exemplo. Vejamos as possíveis respostas.

(a) Árvore de possibilidades

Figura 6 – Árvore de possibilidades para a décima quinta questão/teste 2



Inicialmente, o estudante faz a combinação de um sanduiche com os 5 tipos de refrigerante e tenta uma generalização para os demais tipos de sanduiche.

(b) Princípio fundamental da contagem

$$12.5 = 60$$

Segue o Quadro de número 22, com a questão de arranjo com repetição, ordem de grandeza pequena.

Quadro 22 – Décima sexta questão do teste prévio/teste 2

Quantas palavras diferentes de duas letras, podendo repeti-las, podem ser formadas a partir da palavra PANO?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta questão de arranjo com repetição, a possibilidade de palavras novas é pequena, possibilitando ao estudante enumerá-las por levar em consideração as letras repetidas para cada letra da palavra nova (que possui duas letras), temos os mesmo números de opções, 4 opções para a primeira letra e a mesma quantidade para a segunda letra, resultando em 16.

Por mais que apresente a variável repetição, temos que a variável ordem de grandeza permite a listagem de possibilidades. É provável que os estudantes não saibam dos invariantes desse tipo de questão, mas a ordem de grandeza contribui para que eles possam acertar o resultado. Como possíveis respostas, temos a utilização da listagem completa e a do princípio fundamental da contagem.

Nesse teste, acreditamos numa tendência de os estudantes listarem todas as possibilidades. Essa estratégia é evidenciada em Piaget e Inhelder (1951), para o segundo estágio, em relação a essa operação combinatória. Em Miguel e Magina(2003), esta estratégia aparece como a primeira operação a ser trabalhada numa sequência de ensino (composta por arranjo com repetição, permutação, arranjo sem repetição, permutação com repetição, e combinação), para ser trabalhada com estudantes de graduação. Para esta questão, temos as possíveis respostas:

(a) Listagem completa das palavras

$$\begin{array}{cccc} PP & AA & NN & OO \\ PA & PN & PO & AP \\ OA & ON & AO & AN \\ NA & NO & NP & OP \end{array}$$

(b) Princípio fundamental da contagem

$$4 \, .4 = 16$$

3.3.1.3 Análise das questões do teste posterior

Para a análise, não vamos descrever o teste posterior, pois como explicado anteriormente e exposto no Quadro 5 estes instrumentos serão de igual teor, mudando somente o contexto das questões. Buscando manter os mesmos algarismos nas questões do pós-teste, ressaltamos que somente a questão 3, do teste posterior, sofreu alteração das palavras presentes no respectivo problema (a mudança foi da palavra SAUSSAS para CARRARA), em que ocasionou a mudança no valor do resultado.

O teste posterior tende a investigar se houve, em ambiente escolar, no que está relacionado ao conteúdo de Análise Combinatória, contribuições para as estratégias utilizadas pelos estudantes. Na análise das questões do teste posterior, vamos descrevê-la considerando as alterações em seu contexto, mas deixamos claro que se acharmos necessário fazer algum comentário extra acerca da questão, assim o faremos.

Para as possíveis soluções que esperamos ser apresentadas pelos estudantes, após a intervenção do professor – além das soluções esperadas no teste prévio, como descrevemos anteriormente –, acreditamos que eles passem a utilizar, também, a fórmula (certa ou errada), já que a aula do professor é direcionada mais para o uso de fórmulas.

Da mesma maneira como ocorreu na aplicação do teste prévio, o teste posterior foi dividido em dois momentos. Segue as análises das questões, após a intervenção do professor. Assim, vejamos.

Quadro 23 – Primeira questão do teste posterior/teste 3

Andreia tem 3 maiôs e 4 cangas. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar usando um maiô e uma canga?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta questão, temos um caso de produto cartesiano, do tipo parte-parte, com ordem de grandeza pequena, numa situação de combinação de roupas de praias, de forma que a quantidade do conjunto de maiôs, que são 3, e o das cangas, que são 4 resultam em um novo conjunto (maiô-canga), que surge da combinação destas duas peças, e para representar tal resultado basta multiplicar 4 por 3. Para a resolução desta questão, o estudante deverá associar um maiô a cada canga, buscando resolver esta situação para a quantidade de maiôs e cangas presente na questão. Assim, elencamos, a seguir, as respostas que poderiam ser dadas pelos estudantes.

Tanto no teste prévio quanto no posterior, pensamos que os estudantes não mudariam as estratégias em razão deste tipo de problema ser visto durante o Ensino Fundamental e acreditarmos que isto pouca interferência apresentasse na atual abordagem no Ensino Médio. Segue a possível resposta.

Neste caso, temos um número de possibilidades pequeno, permitindo ao estudante, por se tratar de um problema de produto cartesiano – assim como apresentado na questão do teste prévio – várias estratégias na resolução, sendo elas: árvore de possibilidades, enumeração das possibilidades, tabela, registro pictórico, além do princípio fundamental de contagem.

(a) Princípio multiplicativo

$$3 \times 4 = 12$$

Seguindo a análise, temos no Quadro 24 uma questão de combinação com repetição, como ordem de grandeza pequena.

Quadro 24– Segunda questão do teste posterior/teste 3

Somando dois números do conjunto $G = \{5,7,13,17\}$, repetidos ou não, quantos resultados diferentes são possíveis se obter?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta questão, caso de combinação com repetição, ordem de grandeza pequena, apresentamos o mesmo contexto da questão do teste prévio, mudando somente os números do conjunto. Assim, além das respostas apresentadas na seção anterior, acrescentamos o uso da fórmula. Vejamos a possível resposta.

(a) Fórmula

$$Cr_{4,2} = C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4.3!}{2.3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Em relação à terceira questão, temos um caso de permutação com repetição, ordem de grandeza grande, a qual se encontra no Quadro 25.

Quadro 25 – Terceira questão do teste posterior/teste 3

Carrara é uma província na região da Toscana, na Itália. Quantos são os anagramas da palavra CARRARA? (Anagrama de uma palavra **é uma nova "arrumação" das letras dessa palavra**).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a resolução, após a intervenção do professor, é esperado do estudante que ele utilize o princípio fundamental da contagem ou aplique a fórmula. Para a substituição da palavra utilizada no teste 1 (Saussas), utilizamos a palavra Carrara a fim de verificar se o estudante entendeu o significado de anagrama. Nesta questão é apresentada uma palavra composta por sete letras, das quais as letras (R e A) se repetem três vezes, e a letra (C) aparece apenas uma vez. Foi solicitado ao estudante que ele apresentasse o número possível de arrumações, levando em consideração a variável repetição, e que, mesmo tendo a ordem de grandeza grande, ele iniciasse uma listagem. Assim temos como possível resposta:

(a) Aplicação da fórmula de permutação com repetição

$$P_7^{3,3,1} = \frac{7!}{3!\,3!\,1!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!\,3.2.1} = 7.5.4 = 140$$

No Quadro 26 temos uma questão envolvendo combinação sem repetição com ordem de grandeza grande.

Quadro 26 – Quarta questão do teste posterior/teste 3

Em um tipo de corrida estão participando 7 atletas. De quantas maneiras estes atletas podem ocupar o primeiro, segundo e terceiro lugar?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a resolução, sabendo que são três lugares no pódio, sendo eles: primeiro, segundo e terceiro, temos para o primeiro lugar 7 opções; assim, para o segundo lugar terá 6 opções; e, por fim, no terceiro lugar, 5 opções. Multiplicando as opções entre si, ao final teríamos 210 opções como resposta. Assim vejamos a possível resposta:

(a) Fórmula

$$C_{7,3} = \frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 7.6.5 = 210$$

A seguir, no Quadro 27, temos a quinta questão, permutação sem repetição com ordem de grandeza pequena.

Quadro 27 – Quinta questão do teste posterior/teste 3

Quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 3, 5, 7 e 9?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, da mesma maneira do teste prévio, mudamos somente os números presentes na questão. Dessa forma, o resultado será o mesmo. A resolução desta questão ocorre a partir do seguinte raciocínio: o número possui 4 algarismos, se na ordem de milhar existem 4 opções, isso implica que na ordem da centena, haverá 3 opções; na dezena, 2 ; e na unidade, apenas 1 opção. Assim, ao final o aluno deverá realizar uma multiplicação entre as opções citadas $(4.3.2.1)$ obtendo, como resultado, 24 opções. Possível resposta:

(a) Fórmula

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Temos no Quadro 28 na sétima questão envolvendo um problema envolvendo combinação sem repetição, com ordem de grandeza pequena.

Quadro 28 – Sétima questão do teste posterior/teste 3

Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 6 jogadores de xadrez?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para resolver essa questão, os estudantes devem levar em consideração a formação de uma dupla. Sendo assim, na primeira alternativa existem 6 opções de jogadores de xadrez e na segunda, 5. Multiplicando essas opções entre si, temos como resultado $(6.5 = 30)$. Sabendo que haverá duplas repetidas, basta dividir por 2, resultando em 15 duplas diferentes. Vejamos a possível resposta:

(a) Fórmula

$$C_{6,2} = \frac{6!}{4!} = \frac{6.5.4!}{4!\,2!} = \frac{30}{2} = 15$$

Para a oitava questão, temos, no Quadro 29, um contexto de combinação sem repetição com ordem de grandeza grande.

Quadro 29 – Oitava questão do teste posterior/ teste 3

Dos 10 alunos do 2º ano que gostam de xadrez, a professora Clébia pode escolher 3 para participarem de um campeonato. Quantos grupos diferentes ela pode formar?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para resolver essa questão, vamos levar em consideração as três pessoas que compõem o grupo. Sendo que para a primeira vaga existirão 10 opções; para a segunda, 9 opções; e para a terceira 8. Multiplicando as opções entre si e dividindo o resultado, respectivamente, pelas combinações entre si 3 e 2, resultará em 120 grupos diferentes. Assim, Temos a possível resposta:

(a) Fórmula

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.7!} = 10.3.4 = 120$$

Para o segundo momento da aplicação do teste posterior prévio, vamos iniciar com a questão de combinação com repetição, de ordem de grandeza pequena.

Quadro 30 – Décima questão do teste posterior/ teste 4

Uma criança tem 8 opções de brincadeiras (carrinho, peão, boneca, bola, X-box, bicicleta, gude, dominó). De quantas maneiras diferentes ela pode escolher duas, sabendo que pode repetir brincadeiras e que a ordem não importa?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para resolver essa questão será necessário perceber a interferência da variável repetição; assim, a questão possuirá duas etapas. A primeira etapa será calcular as possíveis combinações cujos pares de brincadeiras sejam os mesmos, tendo 8 brincadeiras, portanto, 8 opções. Na segunda etapa, o estudante determinará o resultado para as opções de brincadeiras com as duplas diferentes.

Dessa forma, temos para a primeira opção de brincadeira 8 opções, e na segunda opção, 7, multiplicando entre si as opções, resultará em 56 opções, sabendo que dessas opções haverá repetição (por exemplo, a opção de brincadeira, sendo uma carrinho + peão = peão +carrinho), divide-se por 2, Resultando em 28. Encontrando este valor, e somando ao resultado da primeira etapa (8), teremos como resultado final 36 opções. Possível resposta:

(a) Fórmula

$$Cr_{8,2} = C_{9,2} = \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{9.8.7!}{2.7!} = 9.4 = 36$$

No quadro 31 apresentamos a décima primeira questão, que contempla um problema de permutação sem repetição, com ordem de grandeza grande.

Quadro 31 – Décima primeira questão do teste posterior/teste 4

Foram sorteadas para ganhar um lanche 5 pessoas (André, Mateus, Joana, Carla e Bruna) que chegaram ao mesmo tempo à lancheria. De quantas maneiras diferentes, elas podem formar uma fila enquanto aguardam a sua vez?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa questão em que é solicitada a quantidade de maneiras diferentes de organizar 5 pessoas em uma fila, temos então que pensar em 5 posições, sendo que na primeira posição teria 5 opções de organização da fila; para a segunda, teríamos 4; em seguida, 3; logo após, 2; e por fim, 1 opção. Ao final, o estudante deveria multiplicar entre si as opções (5.4.3.2.1= 120 maneiras). Ressaltamos que o contexto dessa questão permaneceu o mesmo da do teste prévio. Abaixo explanamos a possível resposta:

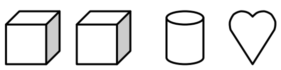
(a) Fórmula

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Na décima segunda questão, temos no Quadro 32, um problema envolvendo permutação com repetição, com ordem de grandeza pequena.

Quadro 32 – Décima segunda questão do teste posterior/teste 4

Quantas sequências diferentes, de 4 objetos, podemos formar com os objetos abaixo?



Fonte: Elaborado pelo autor.

Trata-se de uma questão que, para a sua resolução, espera-se que o estudante preste atenção na variável repetição. Para essa questão temos uma sequência com 4 objetos, sendo que apresenta-se repetido (duas vezes) o cubo. Dessa maneira, o aluno resolveria este problema por meio de 4! , que resultaria em 24 e, seguidamente, dividiria por 2! (o número de repetições do cubo), para eliminar as sequências repetidas. Vejamos a possível resposta:

(a) Fórmula

$$P_4^{(2,1,1)} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = \frac{4.3.2!}{2!\,1.1} = 12$$

No Quadro 33, temos uma questão de arranjo com repetição com ordem de grandeza grande.

Quadro 33 – Décima terceira questão do teste posterior/teste 4

Suponhamos que $x, y \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Quantos pares ordenados (x, y), distintos podemos formar utilizando todos os valores possíveis para x e y ?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta questão, o esperado é que os estudantes recordassem do conceito de par ordenado. O contexto em que foi apresentada essa questão provocou distratores, mas para esse teste, temos que para o estudante saber quantos elementos possuíam no conjunto, ele teria que contar. Assim, diminuiria um distrator, a quantidade de elementos do conjunto, pois ele possui 11. Mas o distrator relativo à ideia de par ordenado continuaria, pois o aluno pode entender, como citamos na análise do teste prévio, que ao se tratar de pares ordenados diferentes, não podemos admitir pares com elementos repetidos. Assim, temos a possível resposta:

(a) Fórmula

$$Ar_{11,2} = 11^2 = 121$$

Para a questão envolvendo arranjo sem repetição com ordem de grandeza pequena, temos o Quadro 34.

Quadro 34 – Décima quarta questão do teste posterior/teste 4

Quantas palavras de 3 letras distintas, com ou sem significado, podem ser formadas com as letras da palavra GATO?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para esta questão temos que, a partir da palavra GATO, determinar quantas palavras, com três letras podemos formar. Sabendo que as letras não podem se repetir: para a primeira letra temos 4 opções; para a segunda, 3; e para a terceira, 2 e, assim, para encontrarmos o resultado, basta multiplicarmos 4.3.2, resultando em 24 palavras. Segue a possível resposta:

(a) Fórmula

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4.3.2 = 24$$

Seguindo a análise, temos no Quadro 35, a questão de produto cartesiano, do tipo parte-parte, com ordem de grandeza grande.

Quadro 35 – Décima quinta questão do teste posterior/teste 4

Em um restaurante cada refeição é composta por uma salada e um prato quente. Sabendo que existem 5 tipos de saladas e 12 tipos de pratos quentes, quantos opções de refeições são compostas por um tipo de salada e um tipo de prato quente?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Temos, aqui, uma questão que solicita dos estudantes a combinação entre dois conjuntos, no contexto apresentado, tipos de saladas, com 5 opções, e tipos de prato quentes, com 12 tipos. Para sabermos o resultado, basta multiplicar 12 por 5 e aí teremos 60 opções de refeições. Possível resposta:

(a) Princípio fundamental da contagem

$$12.5 = 60$$

Na última questão do teste, temos um problema envolvendo arranjo com repetição e ordem de grandeza pequena.

Quadro 36 – Décima sexta questão do teste posterior/teste 4

Quantas palavras distintas de duas letras podem ser formadas a partir da palavra MITO, podendo repetir as letras?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para resolver essa questão, temos que levar em consideração que o que se pede é a formação de palavras com duas letras. Neste contexto, temos para a primeira letra 4 opções a partir das letras da palavra MITO. Por admitir formação de palavras com letras repetidas, para a segunda letra também temos 4 opções (M, I, T, O). Por fim, multiplicando 4 por 4 temos a formação de 16 palavras. Logo, temos a possível resposta:

(a) Fórmula

$$Ar_{4,2} = 4^2 = 16$$

Após a análise das questões, apresentaremos a seguir a observação das aulas de Análise Combinatória bem como o caderno de um dos estudantes.

3.3.2 Observação das aulas de Análise Combinatória

Após a aplicação do teste prévio, iniciamos a observação das aulas sobre Análise Combinatória (três aulas por semana, sendo duas aulas contínuas na quarta-feira e uma aula na quinta-feira). Este material teve a função de descrever a aula no que diz respeito ao conteúdo trabalhado, quantidade e tipo de problemas. Ressaltamos que não é objetivo da pesquisa analisar a aula do professor, mas somente observar se o que ele explicou em sala de aula estava escrito no caderno do estudante.

3.3.3 Caderno do estudante

Este material (Anexo A) foi escolhido a partir da frequência e participação do estudante; assim sendo, serviu para que pudéssemos ver como ele percebeu a aula do professor além de retratar a lousa; serviu também para confirmar o que consta no diário de classe (Anexo B).

3.4 PROCEDIMENTOS

Nesta seção, descrevemos detalhadamente as etapas da pesquisa na sequência em que elas ocorreram. Iniciamos com o momento de conversa e convite à escola para a participação na pesquisa seguindo com a descrição da aplicação do teste prévio e a observação das aulas, e a aplicação do teste posterior. Os sujeitos da pesquisa participaram de nove encontros, totalizando 16 horas-aula. Detalhando a divisão destes encontros, temos: no primeiro encontro se deu a apresentação da pesquisa para a turma; no segundo e terceiro encontros a aplicação do pré-teste; do quarto ao sétimo encontro, a observação da intervenção do professor (ensino da Análise Combinatória); e no oitavo e nono encontros, a aplicação do pós teste.

3.4.1 Conversa com a direção da escola

Antes de darmos início à pesquisa de campo, conversamos com o diretor da escola, explicando sobre o projeto da pesquisa e solicitamos a autorização para a sua realização, que nos foi concedida através da Carta de Anuência (Anexo C). Em relação ao professor, ele assinou uma autorização (Anexo D), permitindo que a pesquisa fosse realizada em sua turma. Também estivemos na sala de aula explicando a pesquisa e seus objetivos para que os alunos ficassem cientes de todo o processo deste estudo e de como se daria a participação deles.

Desta forma, depois de aceitado o convite, submetemos o projeto de pesquisa ao Comitê de Ética na Pesquisa da Universidade Estadual de Santa Cruz (CEP/UESC/Ilhéus-Bahia). Após a aprovação pelo CEP, foram entregues aos estudantes o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Apêndice C) para serem assinados pelos seus pais, bem como o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) (Apêndice D), pois a faixa etária dos estudantes está entre 16 e 18 anos. Após o recolhimento dos termos, devidamente assinados pelos estudantes e por seus pais, iniciamos a pesquisa de campo.

3.4.2 Aplicação do teste prévio

Elaborado o instrumento diagnóstico (teste 1 e 2) contendo 7 questões cada um, envolvendo as operações combinatórias, eles foram aplicados em dois momentos. O primeiro momento em 14 dias, e o segundo em 7 dias, antes do professor iniciar o assunto de Análise Combinatória.

Assim, para o primeiro momento optamos por aplicar o teste no dia em que a turma possuía duas aulas contínuas, nos dois primeiros horários. Deste modo, a sala foi organizada em filas e foram entregues os testes para todos os estudantes e explicado que se tratava de uma atividade diagnóstica que deveria ser feita individualmente.

Em seguida, foi dito que seria necessário que tentassem responder a todas as questões, sinalizando, também, se deixaram de responder a questão por não terem entendido o enunciado ou por não saberem. Foi solicitado aos estudantes que utilizassem somente caneta, passando um traço no que havia desconsiderado para a resolução da questão, do mesmo modo como foi feito em trabalho realizado por Magina e Miguel (2003), pois assim nos permitiu saber quais foram o raciocínio inicial e suas mudanças.

Após as orientações, os estudantes iniciaram o teste; durante a aplicação eles fizeram perguntas relativas à interpretação da questão, solicitando que fosse explicado o que estava sendo pedido. Entretanto, eles foram orientados a responder a questão da maneira como entenderam. A turma terminou o teste antes do final da segunda aula. Dos 37 estudantes, 33 responderam ao teste 1.

Na semana seguinte, os estudantes não sabiam que iriam fazer o segundo teste. Além de ter sido aplicado nas mesmas condições, seguindo as mesmas orientações do teste 1, eles iniciaram o teste 2. Para esta aplicação percebemos a turma mais desmotivada, alguns estudantes entregaram o teste antes do término da primeira aula.

Em conversa com eles, após o teste, comentaram que seria melhor responder 16 questões em 2 aulas contínuas do que da forma como foi realizada. Nesta segunda aplicação, percebemos que os mesmos estudantes ficavam por último, tentando resolver todas as questões. Desta segunda aplicação participaram 31 estudantes.

3.4.3 Observação das aulas

Esta etapa aconteceu em quatro encontros, totalizando sete aulas (cada aula com duração de 50 minutos). O total de aulas foram sete, pois, durante a intervenção do professor – por conta do calendário escolar –, não houve aula. Assim, iniciando a descrição das aulas de Análise Combinatória, no primeiro encontro o professor iniciou sua explanação pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC); no segundo, permutação e arranjo simples; na sequência, combinação simples; e, por fim, permutação, arranjo e combinação com repetição. Para cada encontro, o professor trazia exercícios para a aplicação da fórmula vista. Quando observamos as aulas, buscamos evidenciar o que o professor trabalhou do conteúdo de Análise Combinatória, não didaticamente no sentido da postura do professor, mas o que ele levou em consideração ao abordar tal conteúdo.

3.4.4 Aplicação do teste posterior

Nesta última etapa da coleta de dados, tivemos o cuidado de aplicar o teste posterior nas mesmas condições em que foi aplicado o teste prévio; ou seja, os estudantes responderam no dia em que tinham aulas contínuas, nos dois primeiros horários, sem aviso prévio da aplicação.

Os alunos, novamente, apresentaram dúvidas na interpretação das questões. Durante a aplicação destes testes buscaram usar as fórmulas que aprenderam ou pelo menos tentaram lembrar para aplicar. Na aplicação do teste 3, participaram 34 dos 37 estudantes, e da última aplicação (teste 4), responderam 30. Ao final, os sujeitos da pesquisa se resumiram a 20, total este dos que participaram de todas as etapas da pesquisa.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos a análise dos livros didáticos utilizados pelos professor regente da turma, bem como os resultados obtidos a partir da aplicação dos instrumentos diagnósticos (testes prévio e posterior) numa turma de estudantes do 2º ano do Ensino Fundamental, de uma determinada escola. Lembramos que entre a aplicação desses instrumentos (testes), houve uma sequência de aulas, ministradas pelo professor da turma, para que pudéssemos aplicar o teste posterior.

Antes de iniciar as análises quantitativa e qualitativa, vamos analisar os dois livros utilizados pela turma do 2º ano do Ensino Médio. Isso vai nos permitir perceber se os estudantes apresentam nas estratégias aspectos relativos ao que é abordado nos livros.

Após a análise dos livros didáticos, desenvolvemos este processo dando início a dois tipos de análises. Primeiramente observamos o desempenho dos estudantes a partir das questões que apresentaram 100% (cem por cento) de acertos em ambos os testes; em seguida, focamos os processos adotados por esses mesmos estudantes ao lidarem com os problemas dos instrumentos. Nesse caso, observamos as estratégias que eles utilizaram ao resolverem as questões.

No que se refere à análise do desempenho dos discentes, partimos da visão geral dos seus acertos nos testes, observando o percentual total de acerto no teste prévio e no teste posterior. Em seguida, olhamos os desempenhos desses estudantes sempre comparando o teste prévio com o posterior, de acordo com as três variáveis assumidas pelo estudo (tipo combinatório, repetição, ordem de grandeza). Por estarmos analisando valores numéricos referentes às respostas dos estudantes, esta análise é quantitativa.

No que tange à análise do raciocínio utilizado pelos estudantes, identificamos quais foram as estratégias utilizadas por eles para responder as questões; estratégias estas que os levaram ao acerto. Por esta parte da análise estar interessada nos processos utilizados por esses estudantes ao lidarem com os problemas do instrumento, não importando aqui os valores numéricos, a análise será qualitativa. Mas antes de apresentarmos as análises, segue uma breve discussão a respeito da nossa amostra.

Queremos retornar aos dois critérios utilizados que justificam a não participação de 17 participantes: o quadro era de, inicialmente, 37 estudantes e no final esse número foi reduzido a 20. Lembramos que o primeiro critério foi que o participante fosse estudante da turma escolhida (Turma A); e o segundo, que o estudante tivesse participado em todas as aplicações dos testes prévio e posterior (teste 1, 2, 3 e 4) e que possuísse uma frequência de 75 % (setenta e cinco por cento) nas aulas que foram ministradas pelo professor da turma.

Outro fator importante a ser esclarecido diz respeito às questões contidas nos instrumentos (prévio e posterior). Estas apresentaram a mesma quantidade e ordem de problemas, estando presentes, em ambos os instrumentos, as mesmas variáveis do estudo (tipo combinatório, repetição, ordem de grandeza) mudando apenas os elementos para o contexto – já explanado no Quadro 4 – *Equivalência entre os testes*, a fim de que fosse minimizada a possibilidade de eventual memorização por parte dos sujeitos da pesquisa –, sem alterar os números e as contas envolvidas.

Em relação à representatividade da amostra, não tivemos a intenção de extrapolar os resultados para além do universo de nossa pesquisa. Mas entendemos que eles podem trazer apontamentos valiosos para o entendimento de como ocorre a formação do conceito relativo à Análise Combinatória. Poderíamos explorar também as estratégias utilizadas pelos alunos nas questões que não apresentaram 100% de acertos, mas isso demandaria um estudo mais aprofundado e consequentemente mais tempo de pesquisa; daremos ênfase a este recorte nos próximos estudos.

4.1 O LIVRO DIDÁTICO UTILIZADO PELO PROFESSOR REGENTE E A ABORDAGEM SOBRE A ANÁLISE COMBINATÓRIA

O livro didático muitas vezes é o único guia dos professores para nortear o ensino de Matemática; "mesmo que [estes profissionais] tenham acesso a outros materiais, o livro didático serve como apoio para as escolhas do professor e consequentemente para o que será ensinado" (SILVA, P.,2015, p.21).

Quando da observação das aulas, na turma visitada, percebemos que o professor utilizou dois livros didáticos: o livro-texto da turma e um livro que foi utilizado para complementar a aula. Ao analisá-los, buscamos compreender como estas obras, por si só, interferiram nas estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de problemas. Os livros analisados foram: *Matemática Ensino Médio 2º ano*, de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, 2013, e *Matemática: ciência e aplicações 2º ano,* de Gelson Iezzi [et al.], 2013.

Para realizarmos uma breve avaliação dos livros, utilizamos, como referência, os critérios apresentados por Pires (2009) e Silva, P. (2015). Evidenciamos que, ao escolhermos estes critérios, objetivamos associar as estratégias apresentadas pelos estudantes à apresentação feita nos livros adotados pelo professor. Tais critérios estão elencados no quadro abaixo:

Quadro 37 – Critérios utilizados para a análise dos livros

REFERÊNCIA	CRITÉRIOS
PIRES (2009)	NÚMERO DE PÁGINAS DESTINADAS AO ASSUNTO
SILVA, P. (2015)	ABORDAGEM SOBRE COMBINATÓRIA
SILVA, P. (2015)	TIPOS DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS TRABALHADOS NOS LIVROS
PIRES (2009)	PROBLEMAS E EXERCÍCIOS QUE SÃO APRESENTADOS
SILVA, P. (2015)	FORMAS DE REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS

Fonte: elaborado pelo autor a partir de Pires (2009) e Silva (2015).

4.1.1 Análise do livro didático 1

O primeiro livro analisado foi *Matemática Ensino Médio 2º ano*, de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, 2013. É o livro base da turma. Em relação ao número de páginas, verificamos que ele possui 286 páginas e, destas, 20 páginas são destinadas ao assunto. Apesar de reservar um espaço considerável para o tema em questão, as autoras abordam somente o Princípio fundamental de contagem, arranjo, permutação e combinação, sem levar em consideração a variável repetição.

Em relação à abordagem da Combinatória, as autoras iniciam o conteúdo a partir de situações cotidianas, promovendo questionamentos que levam à dedução das fórmulas, além de mostrar, nas abordagens dos conceitos, que através do princípio fundamental da contagem também é possível resolver os problemas. Essa abordagem do conceito de Análise Combinatória, nesse livro, vai ao encontro com o que é proposto pelos documentos legais (PCNEM, 2000; PCN+, 2002; e OCEM, 2006) e que sugerem trabalhar o desenvolvimento do raciocínio combinatório através de problemas que envolvem os invariantes de cada um.

Em relação aos tipos de problemas combinatórios, neste livro didático, os mais explorados foram os de produto cartesiano (27 situações problema) , seguido de arranjo e permutação (20/ 8 diretos[14] e 12 situações problema) e, por fim, o de combinação (17/ 3 diretos e 14 situações problemas). Salientamos que o tipo combinatório permutação é colocado como um caso particular do arranjo, mas ressaltamos que mesmo concordando

[14] Estamos denominando de exercício do tipo direto aqueles que possuem o enunciado como: “Resolva”, “Calcule”, “simplifique”, “efetue”.

com essa afirmativa, esses tipos combinatórios apresentam invariantes distintos. Em relação à combinação, não ocorre a dedução da fórmula, como aconteceu nos demais tipos combinatórios.

Em pesquisas como a de Pessoa (2009), por exemplo, nesse tipo combinatório os estudantes apresentaram menor desempenho. Percebe-se que a combinação envolve a compreensão do que é arranjo e permutação, além de considerar o invariante de ordem que, para este caso, não gera novas possibilidades. A falta de dedução para esse tipo combinatório – no livro analisado e utilizado pela turma – bem como o número de questões envolvendo a combinação ser o menor (se comparado com os demais tipos) poderão contribuir para o desempenho dos estudantes no teste posterior às aulas.

Quanto aos problemas e exercícios, no nosso entendimento, eles são adequados ao assunto, pois apresentam situações de contexto matemático voltadas para o cotidiano dos estudantes de modo que os ajudam a entender o conceito abordado. E por mais que o número de problemas e exercícios não tenha distribuição equitativa, existe uma quantidade de situações (64 exercícios, envolvendo exercícios do tipo direto e problemas) a serem exploradas de modo que possa ocorrer a apropriação dos conceitos.

No que concerne às representações simbólicas, o livro faz menção a várias no decorrer da introdução de cada conceito, como por exemplo: árvore de possibilidades, tabela, diagrama, desenho, listagem, o princípio fundamental de contagem ou fórmulas. Mas a que predomina, no momento dos exercícios resolvidos, é a fórmula, principalmente quando se trata da combinação.

4.1.2. Análise do livro didático 2

O livro didático 2, *Matemática: ciência e aplicações 2º ano*, de Gelson Iezzi [et al.] 2013, foi utilizado pelo professor para complementar o conteúdo explicado. Em relação ao número de páginas, a obra possui 308 páginas e são dedicadas 25 páginas ao assunto aqui abordado. Os autores, além de apresentarem os tipos combinatórios simples, apresentam a permutação, somente com repetição, e aborda ainda um conceito não visto no livro didático 1 (já apresentado), quando associado à Análise Combinatória, o binômio de Newton.

Neste livro, a abordagem da Combinatória é feita de maneira adequada, na nossa perspectiva, pois para todas as formas de contagem apresentadas, os autores seguem uma estrutura para explicitar o conteúdo a ser abordado, na qual eles apresentam uma situação problema, que logo em seguida é discutida e resolvida, para depois apresentar, através do PFC, como resolver os dados dos problemas, e apresentam a definição e a fórmula proveniente de uma resolução bem explicada.

Em relação aos tipos de problemas combinatórios, os mais explorados foram os de produto cartesiano (26 situações problema), seguido dos de combinação (17 – 1 direto e 16 situações problemas), permutação (14 – 2 diretos e 12 situações problemas) e, por fim, arranjo (13 – 1 direto e 12 situações problema). O tipo combinatório permutação é explicado, de modo diferente do apresentado no livro didático 1, sem associar, como um caso particular do arranjo. Em relação ao tipo combinação, diferentemente do livro didático 1, os autores o abordam da mesma maneira que abordam os demais tipos combinatórios.

Quanto aos exercícios e problemas apresentados, o livro 2 oferece, assim como o livro 1, exercícios com contexto matemático relacionado ao dia a dia do aluno, auxiliando-o na compreensão do conteúdo. No que concerne às representações simbólicas, destacam-se, neste livro, a árvore de possibilidades, tabela, diagrama, listagem, o princípio fundamental de contagem ou fórmulas. Os autores estimulam o uso das diversas representações, tanto apresentado nos problemas resolvidos, quanto através de questionamentos ao final da explicação de cada conceito.

A partir dessa breve análise, podemos perceber que o livro didático 2, *Matemática: ciência e aplicações 2º ano*, de Gelson Iezzi [et al.], 2013, utilizado pelo professor para auxiliá-lo nas aulas, distribui melhor os conteúdos, além de possuir uma sequência para a explicação do conceito, se compararmos com o livro da turma – o livro didático 1, *Matemática Ensino Médio 2º ano*, de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, 2013. A utilização desse segundo livro (justifica o professor da disciplina) seria para explicar o conceito de combinação, pois o livro utilizado pela turma não o explicitava de forma clara.

Para a análise dos dados, vamos nos reportar aos livros analisados, buscando associar os elementos que definimos para a análise dos livros com as estratégias apresentadas pelos estudantes no teste posterior à aula de Análise Combinatória.

4. 2. ANÁLISE QUANTITATIVA DOS INSTRUMENTOS DIAGNÓSTICOS (PRÉVIOS E POSTERIORES)

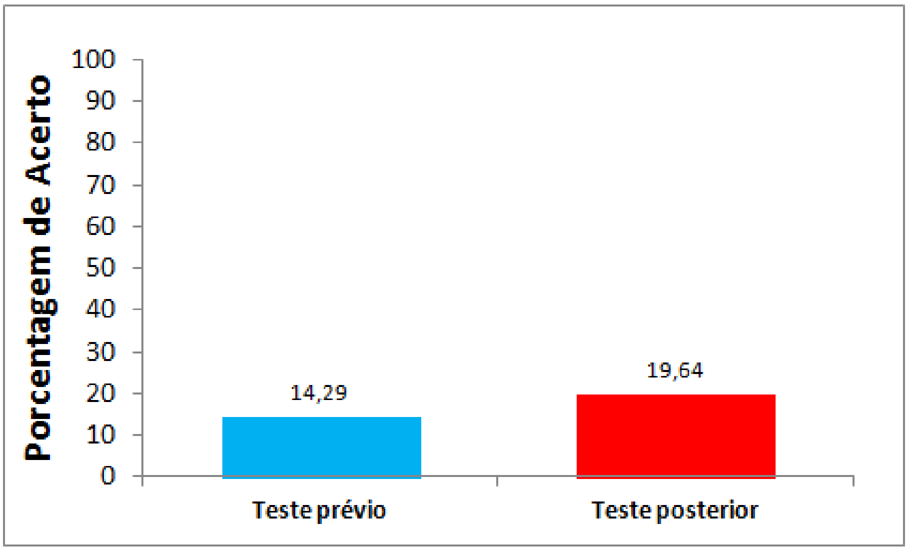
Como foi explicitado, iniciamos a análise dos resultados do nosso estudo pela análise do desempenho geral da turma em relação aos testes (prévios e posterior), seguida da análise do desempenho dos estudantes, segundo as variáveis do estudo (tipo combinatório, ordem de grandeza e repetição). Por fim, apresentamos a interferência simultânea das variáveis repetição e ordem de grandeza para cada tipo combinatório.

4.2.1 Análise geral do desempenho

Iniciamos esclarecendo que mesmo se tratando de uma análise quantitativa, não tivemos a intenção de olhar somente o resultado numérico, mas buscamos entender o que eles expressam. A partir desta perspectiva, pretendemos identificar elementos que nos possibilitem, no momento da análise qualitativa, formar um quadro mais completo sobre as competências desses estudantes no que diz respeito a problemas envolvendo Análise Combinatória.

O instrumento diagnóstico possui 14 questões e todas elas têm somente uma pergunta. Multiplicando-as pela amostra de 20 estudantes, então temos um total de 280 respostas. Tendo como base esta quantidade, apresentamos a seguir o gráfico 1 no qual está representado o desempenho geral nos dois testes diagnósticos.

Gráfico 1 – Desempenho geral dos alunos nos testes diagnósticos

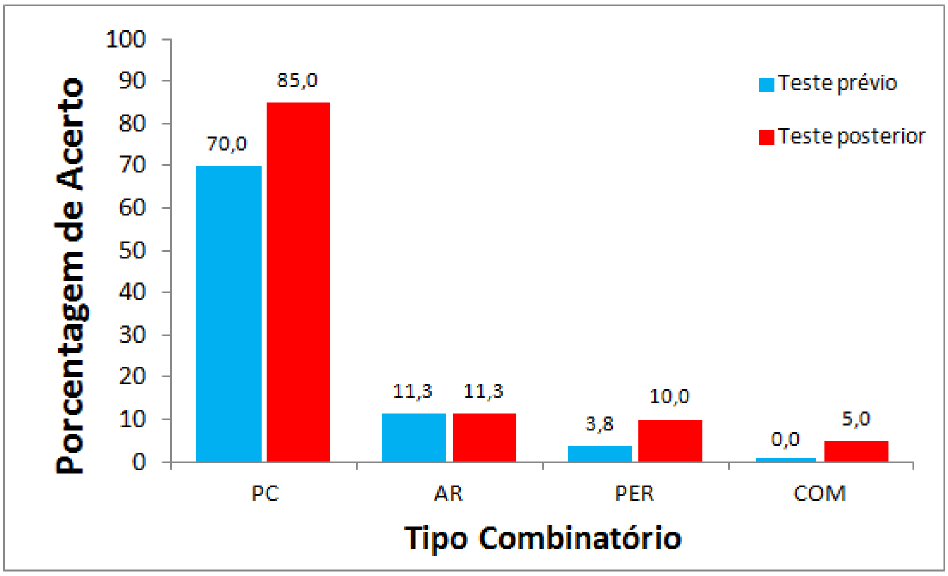


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como podemos observar, em ambos os testes os alunos apresentam desempenho não muito alto. O resultado ficou abaixo de um quarto de respostas certas. Mas houve um tímido crescimento no desempenho dos estudantes para as questões do teste posterior em relação às questões do teste prévio. A princípio, a nossa primeira inferência, para justificar estes resultados, foi a de que a sequência de aulas do professor parece não ter surtido efeito para a aprendizagem dos estudantes sobre a Análise Combinatória. Isso nos leva a considerar a realidade do aluno, a questionarmos sobre o que é que ele sabe, ou seja, averiguar seus conhecimentos prévios, partindo das experiências extraescolares, e nos leva também a elaborar meios que possam contribuir para a formalização destes conteúdos, pois o que eles já sabiam antes da sequência não se expandiu; parece não ter havido aparentemente apropriação dos conceitos ensinados pelo professor. No entanto, se levarmos em conta o curto intervalo de tempo entre a aplicação de um teste e outro (em torno de cinco semanas), esses alunos apresentaram um desenvolvimento passível de ser considerado. Entendemos, assim, que "[...] esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril" (BRASIL, 2006, p.127).

O resultado apresentado no Gráfico 1 revela o desempenho do grupo de estudantes como um todo, tomando por base todos os problemas dos testes. Mas sabemos que eles foram elaborados levando em consideração algumas variáveis, a primeira delas foi o tipo de problema combinatório: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. No intuito de saber se os desempenhos dos estudantes variam de acordo com esses tipos de problemas (considerando sempre a comparação de desempenho entre o teste prévio e o posterior), apresentamos o Gráfico 2, que retrata o desempenho dos estudantes por tipo de problema combinatório.

Gráfico 2 – Desempenho por tipo de problema combinatório[15]



Fonte: Elaborado pelo autor.

Explorando o Gráfico 2, percebemos que os percentuais de 14,29% e o de 19,64% apresentado no teste prévio e no posterior, respectivamente (Gráfico 1), se deu devido ao desempenho dos alunos nas questões que envolveram produto cartesiano, que apresentou 70,0% para o teste prévio e 85,0% para o teste posterior para o total das questões. Esse fato se justifica se considerarmos que nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 2000) é proposto que se busque o desenvolvimento do raciocínio combinatório no decorrer da Educação Básica e para que isso ocorra deve-se "[...] levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo" (BRASIL, 1998, p.52). Apesar de ser recomendado pelos PCN que seja trabalhado tal conteúdo no decorrer do Ensino Fundamental, de acordo com Pessoa e Borba (2010), a maioria dos problemas envolvendo o raciocínio combinatório (arranjo, permutação, combinação) só é visto no 2º ano do Ensino Médio, sendo primordialmente e sistematicamente trabalhados durante o Ensino Fundamental os problemas de produto cartesiano. Quando comparados os percentuais dos demais tipos problemas, vimos que o maior foi o do arranjo, com 11,3%.

Também percebemos que mesmo o produto cartesiano tendo o maior percentual no teste prévio, cerca de 70,0%, o aumento nos acertos após as aulas de Análise Combinatória foi pequeno, apenas de 15 pontos percentuais para o teste posterior. Da

[15] Para as abreviações que aparecem no gráfico temos que PC corresponde aos problemas de produto cartesiano, AR aos de arranjo, PER aos de permutação, e COM aos de combinação.

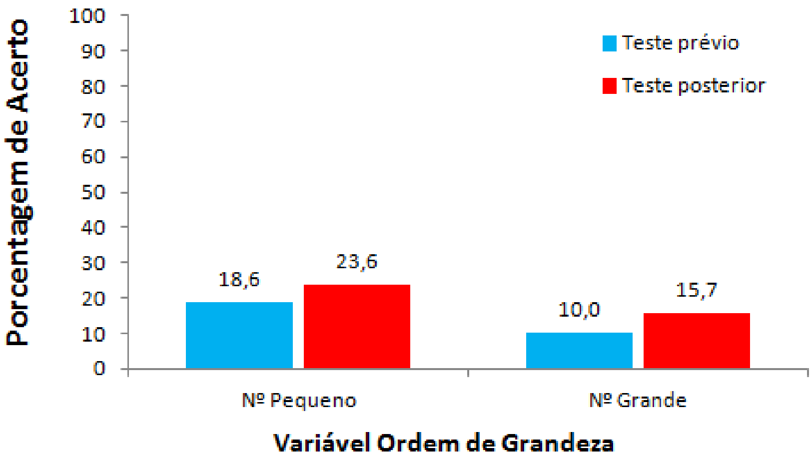
mesma maneira, concluímos que os pontos percentuais foram pequenos nos demais tipos de problemas combinatórios. Assim, temos no caso dos problemas envolvendo permutação, um aumento de 6,2 pontos percentuais. Nos de combinação, que no teste prévio apresentou um desempenho nulo, alcança 5% das respostas no teste posterior.

Com relação ao melhor desempenho em questões envolvendo produto cartesiano, esse resultado corrobora com as pesquisas na área, dentre as quais temos a de Lima, R. (2010), realizada com estudantes da Educação de Jovens e Adultos, na qual esse tipo combinatório, para os alunos, se mostrou mais fácil, seguido do arranjo, combinação e permutação. Comparando essa pesquisa com a nossa, no que tange aos demais tipos combinatórios, temos que a nossa apresenta a seguinte ordem: arranjo, permutação e combinação. O nosso resultado segue a mesma ordem do trabalho de Pessoa (2009), para o mesmo nível de ensino da nossa pesquisa, que realiza a pesquisa com estudantes da Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio).

A fim de compreendermos se as demais variáveis interferem nos resultados apresentados, na Figura (7) abaixo apresentamos o desempenho a partir da variável ordem de grandeza.

Figura 7 – Desempenho de acordo com a variável ordem de grandeza

	Teste prévio	**Teste posterior**
Nº Pequeno	**26 de 140** possíveis respostas certas	**33 de 140** possíveis respostas certas
Nº Grande	**14 de 140** possíveis respostas certas	**22 de 140** possíveis respostas certas



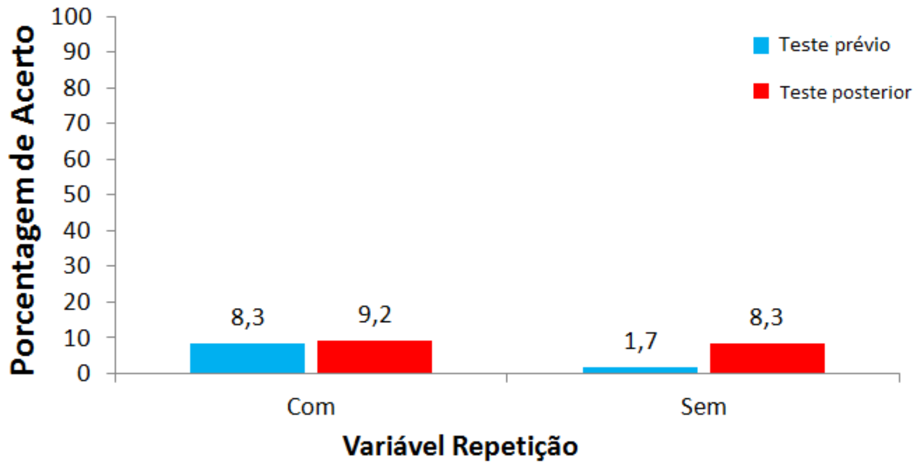
Fonte: Elaborado pelo autor.

Como podemos perceber pelos dados fornecidos, tanto o número de ordem de grandeza pequeno quanto o de ordem de grandeza grande apresentaram percentuais baixos de crescimento entre o teste prévio e o posterior (em torno de 5 pontos percentuais, em ambos os casos). Mesmo sendo um crescimento não tão significativo, se analisarmos entre o número pequeno e o número grande percebemos uma tendência dos estudantes para acertarem mais os problemas de ordem de grandeza pequena. No estudo que Pessoa e Santos (2012) realizaram com estudantes do 5º ano do ensino fundamental – considerando a contribuição de intervenções que utilizam a listagem de possibilidades como estratégias de resolução para os problemas combinatórios –, observamos que, na analise qualitativa, esses percentuais de acertos estão relacionados ao uso dessa estratégia, mesmo se tratando de níveis de ensino diferente.

Para analisar a interferência da variável repetição no desempenho dos estudantes, apresentamos a Figura (8) a seguir.

Figura 8 – Desempenho de acordo com a variável repetição

	Pré-teste	Pós-teste
Sem Repetição	**2 de 120** possíveis respostas certas	**10 de 120** possíveis respostas certas
Com Repetição	**10 de 120** possíveis respostas certas	**11 de 120** possíveis respostas certas

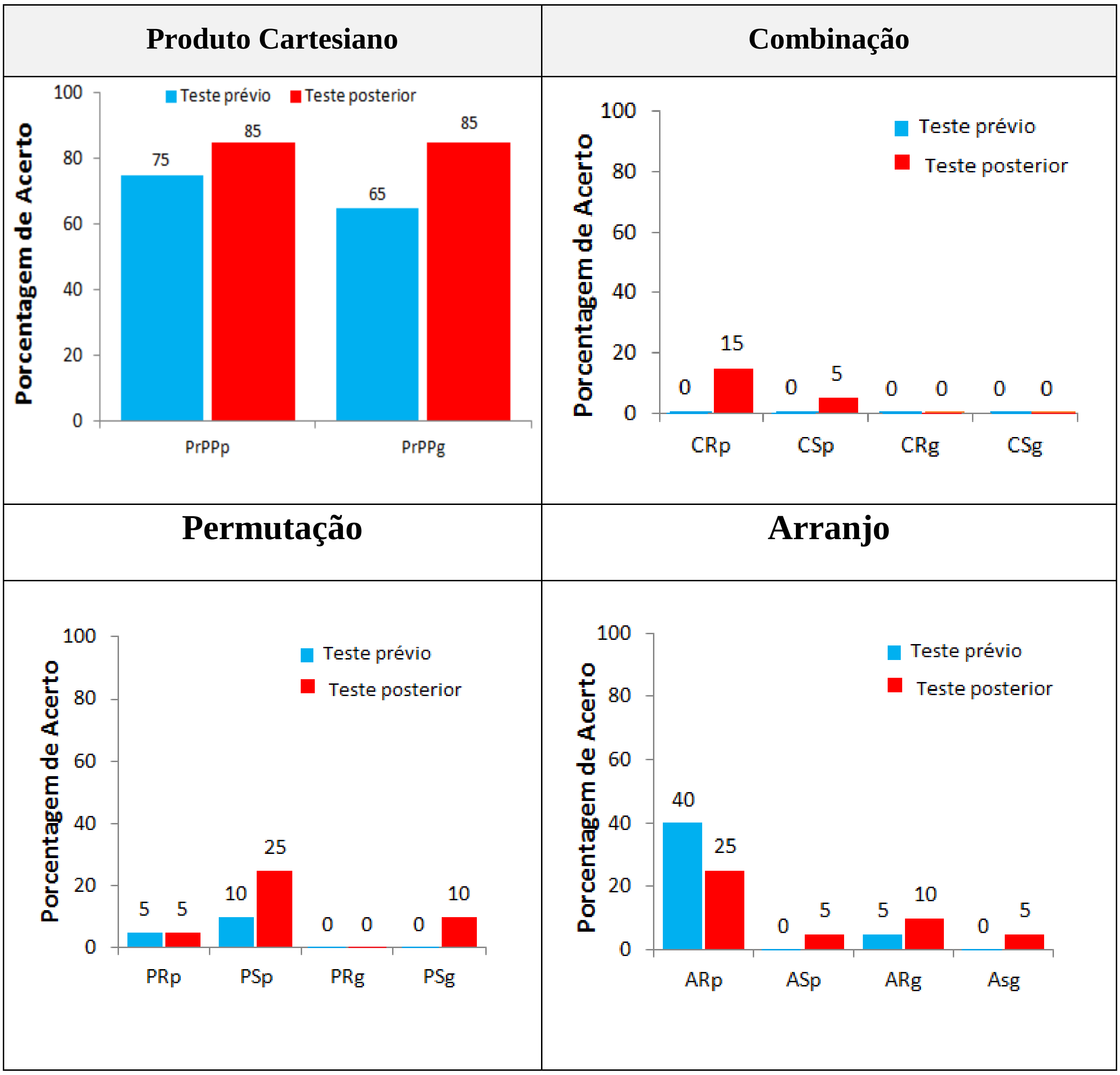


Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando analisamos a variável repetição, vemos que esses percentuais são menores ainda, não chegando a 10% das possíveis respostas. Mas, diferentemente do que poderíamos pensar, os problemas do tipo com repetição apresentaram valores maiores do que os assinalados nos tipos sem repetição, melhor dizendo, os estudantes apresentaram melhor desempenho tanto no teste prévio quanto no posterior. Nos problemas com repetição, o aumento foi menor do que 1 ponto percentual. Nos problemas sem repetição, o aumento foi pouco mais do que 6,5 percentuais. Este resultado não era esperado por nós, pois o esperado era que para os problemas sem repetição os alunos apresentassem melhor desempenho. Mas, por exemplo, Miguel e Magina (2003), em sua pesquisa na qual foram analisadas estratégias de 12 estudantes do 1º ano de Licenciatura em Matemática, a fim de contribuir para a elaboração de uma sequência de ensino em um curso de graduação, sugerem que sejam trabalhados em relação aos tipos de problemas envolvidos na pesquisa (arranjo, arranjo com repetição, permutação, permutação com repetição, combinação) na seguinte ordem: arranjo com repetição passando por permutação, arranjo sem repetição, permutação com repetição e, por fim, combinação. A partir desse estudo, pensamos que a variável repetição para os tipos combinatórios não precisassem seguir a ordem em que aparece no livro usado pela turma, no qual são trabalhados os problemas combinatórios sem repetição para depois ser trabalhado os com repetição.

Para que possamos perceber as interferências das variáveis utilizadas para a elaboração do nosso teste, vamos mostrar o desempenho da turma por tipo combinatório com relação às variáveis repetição e ordem de grandeza, na Figura 9.

Figura 9 – Desempenho por tipo de problema combinatório de acordo com variáveis repetição e ordem de grandeza



Fonte: Elaborado pelo autor.

Legenda - Começando do produto cartesiano e seguindo o sentido horário: PrPPp= Produto Cartesiano Parte-parte pequena; PrPPg= Produto Cartesiano Parte-parte grande; CRp=Combinação com repetição pequena; CSp=Combinação sem repetição pequena; CRg=Combinação com repetição grande; CSg=Combinação sem repetição grande; ARp=Arranjo com repetição pequena; ASp= Arranjo sem repetição pequena; Arg= Arranjo com repetição grande; ASg= Arranjo sem repetição grande;

PRp=Permutação com repetição pequena; PSp=Permutação sem repetição pequena; PRg=Permutação com repetição grande; PSg= Permutação sem repetição grande.

Observando a figura acima, percebemos facilmente os maiores percentuais no produto cartesiano, e os menores na combinação. Observamos também que, excluindo o produto cartesiano, das 12 questões restantes, somente a de arranjo com repetição e ordem de grandeza pequena foi a que apresentou um decréscimo significativo. Isto nos chama a atenção, pois sendo uma questão com ordem de grandeza pequena, o estudante poderia tentar resolver através de árvores de possibilidades, listagens, bem como o uso da fórmula. Diante dessa observação, nos questionamos sobre qual fator contribuiu par essa queda no percentual. Pensamos que o fato de ser a última questão do teste e que foi aplicado no segundo dia, os estudantes poderiam estar cansados ou sem motivação. Em relação à associação das variáveis adotadas na pesquisa (repetição e ordem de grandeza), temos que na combinação o número grande, na ordem de grandeza, zerou tanto o teste prévio quanto o posterior, mesmo quando comparamos com a variável repetição.

Em contrapartida, se analisarmos a ordem de grandeza pequena, a presença da repetição no contexto do problema resulta num melhor desempenho do que quando sem repetição. Este fato nos chama atenção, pois esse invariante pode passar despercebido pelo estudante no momento da leitura e interpretação do problema. Vamos retomar essa discussão no momento da análise das estratégias utilizadas pelos estudantes para esse tipo combinatório. Para a combinação e a permutação, a presença da variável repetição e da ordem de grandeza grande contribuiu para zerar essas questões, o que não aconteceu nas questões que envolviam arranjo. Pelo contrário, os resultados apresentaram um acréscimo de um teste para o outro.

Após analisarmos o desempenho da turma nos dois testes, segundo as variáveis do estudo (tipo combinatório, ordem de grandeza e repetição), bem como interferência simultânea das variáveis repetição e ordem de grandeza para cada tipo combinatório, surge a necessidade de realizarmos uma análise das estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução das questões apresentadas nos testes prévio e posterior.

4.3 ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS

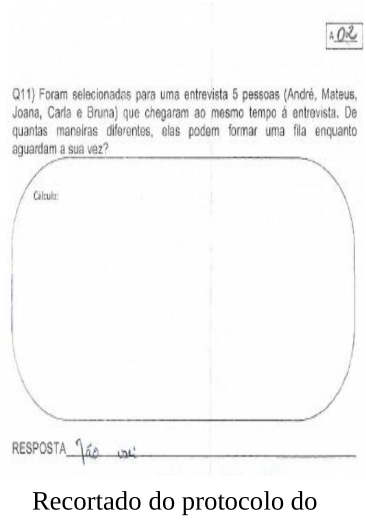
Nesta seção analisaremos os dados com enfoque nas estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolverem as situações-problema presentes nos testes diagnósticos.

Primeiramente identificaremos e categorizaremos as estratégias utilizadas pelos estudantes, tendo como referência Pessoa (2009) e Lima (2011). Na sequência, analisaremos as estratégias utilizadas por eles nos dois testes, baseadas na categorização que identificamos. Para subsidiar esta parte da análise, teremos como referência os estudos de Piaget (1951) sobre a ideia do acaso e a Teoria dos Campos Conceituais, no que concerne ao tripé da formação de conceito, bem como os estudos correlatos apresentados no capítulo 1.

4.3.1 Identificação e categorização das estratégias

Ao observarmos as respostas dos estudantes nos dois testes diagnósticos, identificamos nove tipos de estratégias. Além disso, houve respostas em branco e ainda aquelas em que os estudantes ofereceram como resposta: “não entendi” ou “não sei”. Tais respostas foram classificadas em um único grupo que denominamos estratégia zero (E0), não sendo então consideradas como estratégias de resolução e, portanto, não sendo possível analisá-las. Mesmo não as considerando para a nossa análise, achamos adequado apresentar exemplos das situações-problema classificadas como E0. Estes exemplos estão expostos na Figura abaixo.

Figura 10– Situação problema - E0


A02

Q11) Foram selecionadas para uma entrevista 5 pessoas (André, Mateus, Joana, Carla e Bruna) que chegaram ao mesmo tempo à entrevista. De quantas maneiras diferentes, elas podem formar uma fila enquanto aguardam a sua vez?

Cálculo:

RESPOSTA Não sei

Recortado do protocolo do estudante A02- Q11


A03

Q13) Suponhamos que $x, y \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Quantos pares ordenados (x, y) distintos podemos formar utilizando todos os valores possíveis para x e y?

Cálculo:

RESPOSTA Não entendi

Recortado do protocolo do estudante A03- Q13


Q10) Um menino encontra-se em uma sorveteria que oferece 8 opções de sabores (chocolate, uva, tapioca, morango, abacaxi, banana, goiaba, pitanga). De quantas maneiras diferentes ele pode escolher um sorvete com duas bolas, sabendo que ele pode repetir sabores e que a ordem não importa?

Cálculo:

RESPOSTA

Recortado do protocolo do estudante A05- Q10

Fonte: Recortado do protocolo dos estudantes A02/A03/A05.

A seguir, apresentaremos nos dados do Quadro 38 as estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes, com os respectivos códigos.

Quadro 38 – Estratégias utilizadas pelos estudantes e seus códigos

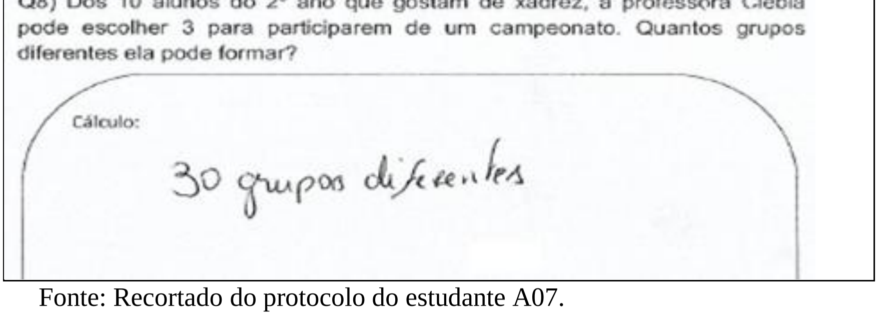
CÓDIGO S	**ESTRATÉGIAS**
E1	NÃO EXPLICITOU ESTRATÉGIA (APENAS RESPOSTA)
E2	REGISTRA UMA OPERAÇÃO COM OS DADOS DO ENUNCIADO OU CRIADOS PELO ALUNO.
E3	DESENHO
E4	ÁRVORE DE POSSIBILIDADES
E5	QUADRO/ DIAGRAMA
E6	LISTAGEM DE POSSIBILIDADES
E7	ADIÇÃO ADEQUADA DE PARCELAS REPETIDAS
E8	PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO
E9	USO DE FÓRMULAS

Fonte: Elaborado com base em Pessoa (2009) e Lima (2011).

Como explicado na metodologia, os testes diagnósticos (prévio e posterior) foram compostos de 14 situações-problema, explicaremos cada uma das nove estratégias apresentadas pelos alunos quando das respostas das questões; cada estratégia que identificamos está representada por um exemplo. Ressaltamos que esses exemplos independem das respostas estarem corretas ou incorretas, pois para a categorização das estratégias, nem sempre as que foram utilizadas levaram ao acerto das questões.

Não explicitou estratégia (E1), quando o estudante apresenta somente a resposta. Para exemplificar esta estratégia, apresentaremos a Figura 11, que exemplifica a Estratégia E1 na resolução da Q8 (combinação sem repetição grande), recortado do protocolo do estudante A07, no teste posterior, no qual ele escreveu somente a resposta “30 grupos diferentes”. Nesse caso, pode ser que ele tenha feito um cálculo mental, utilizado uma calculadora ou até ter feito numa folha à parte, mas isso só são inferências, pois não entrevistamos os estudantes. Vejamos a figura abaixo.

Figura 11 – Estratégia E1 na resolução da Q8 (combinação sem repetição grande)


Q8) Dos 10 alunos do 2º ano que gostam de xadrez, a professora Clébia pode escolher 3 para participarem de um campeonato. Quantos grupos diferentes ela pode formar?

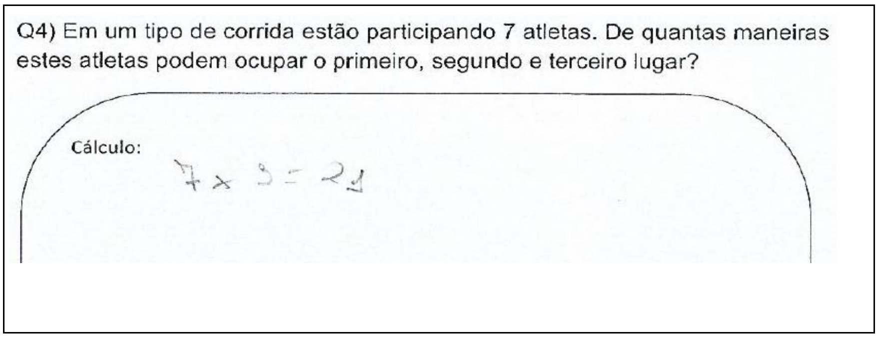
Cálculo:

30 grupos diferentes

Fonte: Recortado do protocolo do estudante A07.

Seguimos com a **Estratégia que registra uma operação com os dados do enunciado ou criado pelo estudante (E2) –** Para esta estratégia, temos que o estudante registrou uma operação (seja adição, subtração, multiplicação ou divisão), utilizando os dados do enunciado ou com um número criado. Na Figura 12 – Exemplo da Estratégia E2 na resolução da Q4 (arranjo com repetição pequeno), recortado do protocolo do estudante A02 no teste posterior – é apresentada a utilização desta estratégia. Nesse exemplo, o estudante multiplicou os algarismos presentes no enunciado – sete (atletas) vezes três (lugares no pódio), isso pode ser entendido como o não desenvolvimento do raciocínio combinatório por parte do aluno, que tentou resolver um problema de arranjo usando a mesma estratégia utilizada nos problemas de produto cartesiano.

Figura 12– Exemplo da Estratégia E2 na resolução da Q4 (arranjo com repetição pequeno)


Q4) Em um tipo de corrida estão participando 7 atletas. De quantas maneiras estes atletas podem ocupar o primeiro, segundo e terceiro lugar?

Cálculo:

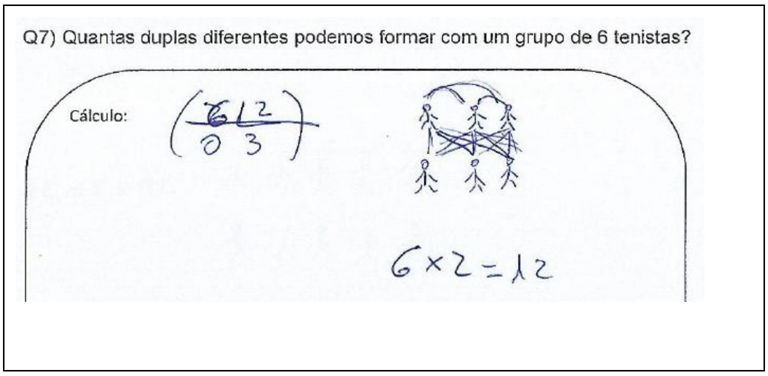
7 x 3 = 21

Fonte: Recortado do protocolo do estudante A02.

Estratégia desenho (E3), assim denominada quando o estudante desenha as possibilidades utilizando-se dos dados presentes nas situações-problema. Esse desenho pode estar vinculado ao contexto da situação ou representar a quantidade abordada no enunciado. A resposta do estudante pode apresentar ou não sistematização dos elementos, bem como esgotar ou não todas as possibilidades.

Na Figura 13 – Exemplo da Estratégia E3 na resolução da Q7(combinação sem repetição pequeno), recortado do protocolo do estudante A18, no teste posterior –, é ilustrado o uso desta estratégia quando o estudante desenha seis bonecos, divididos em dois grupos com três bonecos cada, dispostos um de frente para o outro. Ele desenha as combinações entre os bonecos dos grupos diferentes, mas quando deveria fazer as combinações entre os bonecos do mesmo grupo, faz isso somente com um, não esgotando as possibilidades.

Figura 13 – Estratégia E3 na resolução da Q7(combinação sem repetição pequeno)

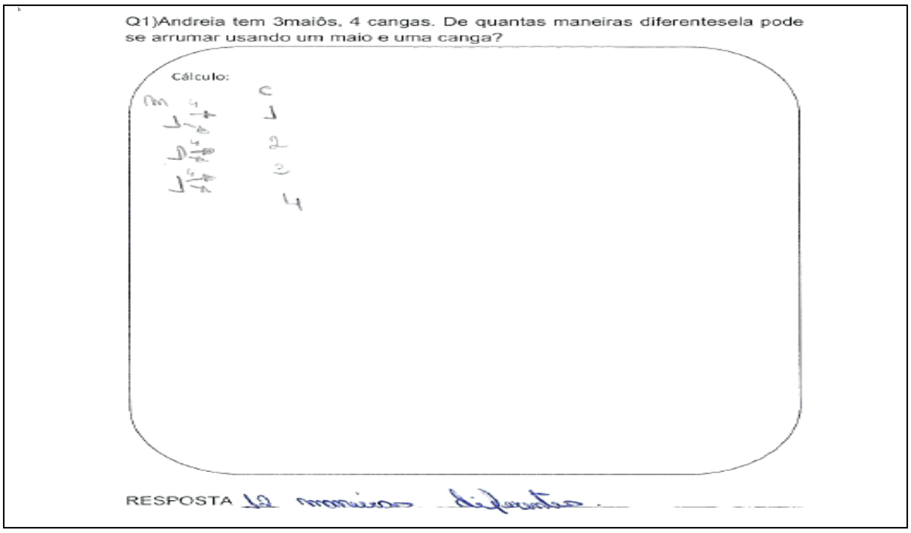


Fonte: Recortado do protocolo do estudante A18.

Na **Estratégia árvore de possibilidades (E4)**, o estudante constrói uma árvore de possibilidades, seja ela numérica, pictórica ou alfabética. A resposta do estudante pode apresentar ou não sistematização dos elementos, bem como pode esgotar ou não todas as possibilidades.

A Figura 14 – Exemplo da Estratégia E4 na resolução da Q1 (produto cartesiano parte-parte pequeno) recortado do protocolo do estudante A14, no teste posterior –, ilustra o uso desta estratégia quando o estudante constrói uma árvore de possibilidade e, a partir do contexto da situação-problema, utiliza números para representar a quantidade de maiôs e cangas, associando para cada maiô 4 cangas e escrevendo ao final, por meio também da estratégia princípio multiplicativo, 12 possibilidades de se arrumar usando um maiô e uma canga.

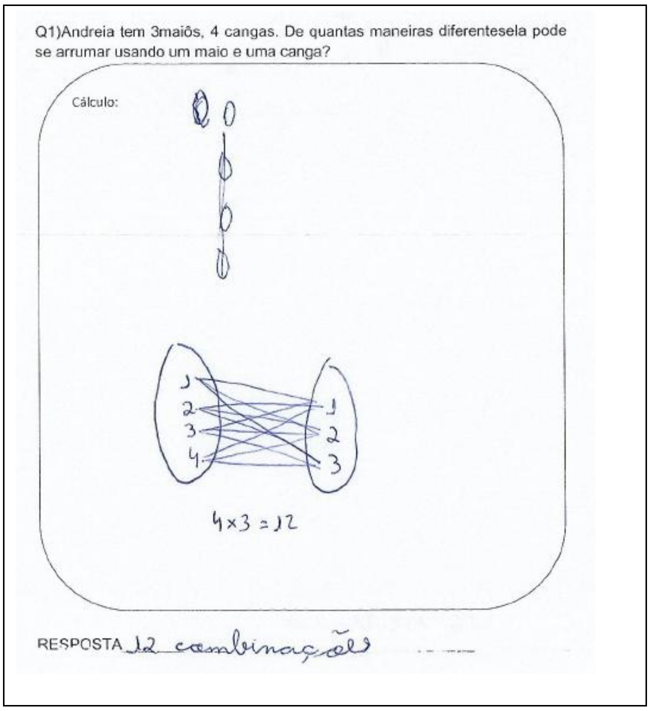
Figura 14 – Exemplo da Estratégia E4 na resolução da Q1
(produto cartesiano parte-parte pequeno)



Fonte: Recortado do protocolo do estudante A14.

A **Estratégia quadro/diagrama (E5)** é utilizada quando o estudante constrói um quadro ou um diagrama para representar o processo de solução. A resposta do estudante pode apresentar ou não sistematização dos elementos, bem como pode ter esgotado ou não todas as possibilidades. Na Figura 15 – Exemplo da Estratégia E5 na resolução da Q1(produto cartesiano parte-parte pequeno) recortado do protocolo do estudante A18, no teste posterior – é apresentado o uso da estratégia E5, na qual o estudante desenha um diagrama fazendo uso de números para representar a quantidade de maiôs e cangas que aparecem no contexto da situação-problema, esgotando todas as possibilidades e, por fim, ainda apresenta a estratégia princípio multiplicativo para indicar que são 12 as maneiras diferentes de arrumações.

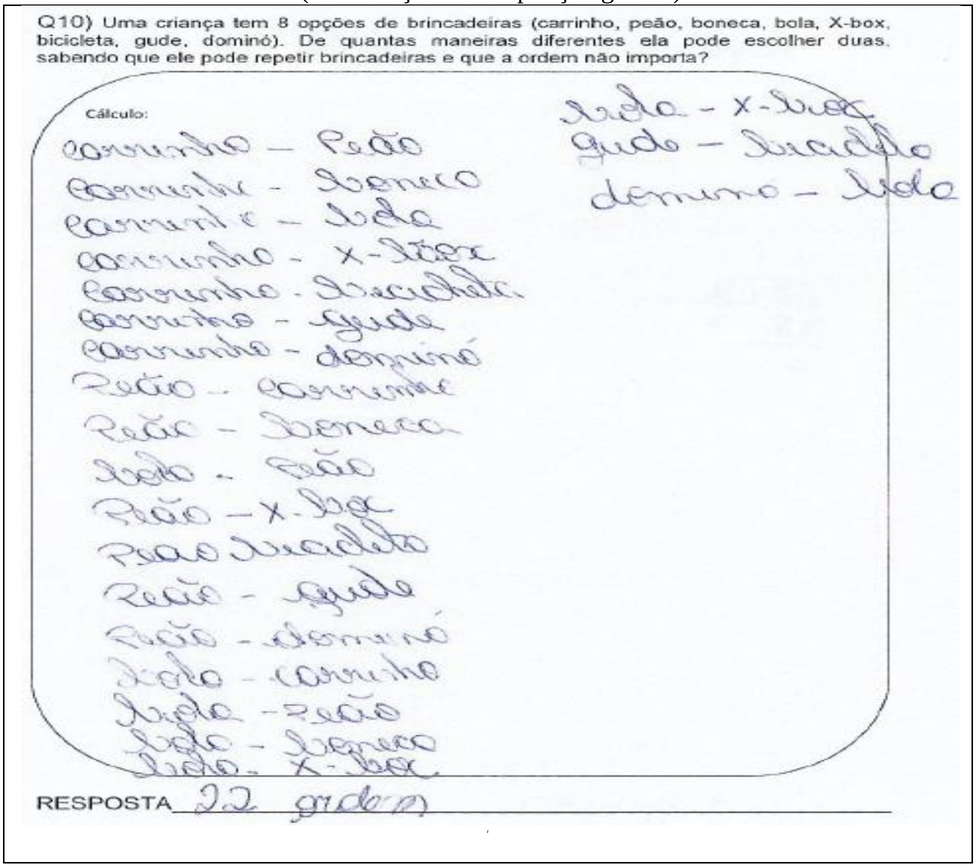
Figura 15 – Exemplo da Estratégia E5 na resolução da Q1
(produto cartesiano parte-parte pequeno)



Fonte: Recortado do protocolo do estudante A18.

Na Estratégia – **listagem de possibilidades (E6) –,** o estudante listou as possibilidades, sejam elas alfabética, pictórica ou numérica, ou seja, quando usam símbolos para representar os elementos. A resposta do estudante pode apresentar ou não sistematização dos elementos, bem como pode ter esgotado ou não todas as possibilidades. Na Figura 16 – que exemplifica a Estratégia E6 na resolução da Q10 (combinação com repetição grande), recortada do protocolo do estudante A19, no teste posterior –, podemos notar que o estudante faz uso desta estratégia quando lista as possibilidades de brincadeiras. Inicialmente lista de maneira sistemática, mas no decorrer da listagem parece não está ciente quanto ao fato da ordem não gerar novas possibilidades, já que apresenta opções como “**carrinho-peão / peão-carrinho”**. Além disso, repete duplas de brincadeiras.

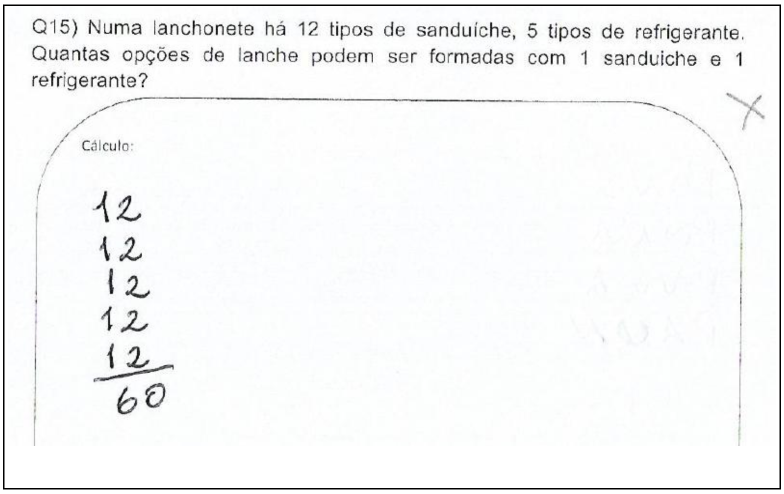
Figura 16 – Exemplo da Estratégia E6 na resolução da Q10
(combinação com repetição grande)



Fonte: Recortado do protocolo do estudante A19.

Estratégia adição adequada de parcelas repetidas (E7). Esta estratégia aconteceu quando o estudante percebeu que podia utilizar uma adição de parcelas repetidas para resolver o problema, geralmente substituindo a multiplicação adequada. Na Figura 17 – Exemplo da Estratégia E7 na resolução da Q15 (produto cartesiano parte-parte grande), recortado do protocolo do estudante A12, no teste prévio –, o estudante escreve o número 12, cinco vezes, e como resultado apresenta o número 60, mesmo sem utilizar o sinal de adição (+) para representar a operação.

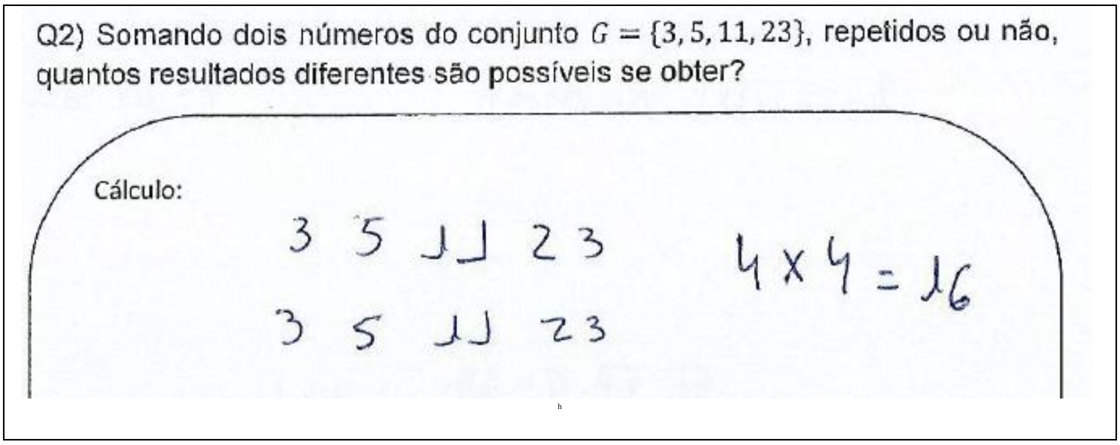
Figura 17 – Exemplo da Estratégia E7 na resolução da Q15
(produto cartesiano parte-parte grande)



Fonte: Recortado do protocolo do estudante A18.

Na **Estratégia princípio multiplicativo (E8)**, o estudante utiliza este princípio podendo ser adequado, ou não, para a situação a ser resolvida. Na Figura 18 – que apresenta exemplo da Estratégia E8 na resolução da Q2 (combinação com repetição pequeno) recortado do protocolo do estudante A18, no teste prévio –, o estudante multiplica a quantidade de elementos pertencentes ao conjunto *G*, parecendo estar ciente do que é tido no enunciado, em relação à repetição desses elementos na soma solicitada, multiplicando 4X4, não considera, no entanto, que a ordem não gera novas possibilidades.

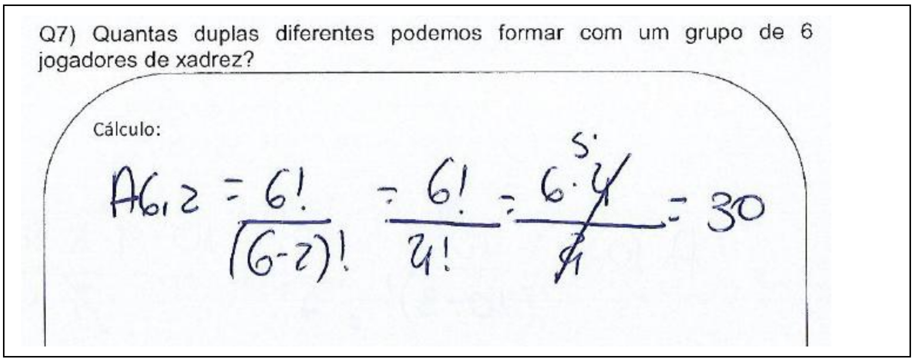
Figura 18 - Exemplo da Estratégia E8 na resolução da Q2
(combinação com repetição pequeno)



Fonte: Recortado do protocolo do estudante A18.

Nesta última, **Estratégia uso de fórmulas (E9)**, o aluno utiliza uma fórmula para resolver uma situação, podendo ou não ser adequada para o problema em causa. Na Figura 19, temos exemplo da Estratégia E9 na resolução da Q7 (combinação sem repetição pequena), recortado do protocolo do estudante A15, no teste posterior. Percebe-se que o estudante, ao resolver a situação, utiliza a fórmula do arranjo em vez de usar a da combinação, mostrando não estar ciente de que a ordem não gera novas possibilidades. Vejamos.

Figura 19 – Exemplo da Estratégia E9 na resolução da Q7
(combinação sem repetição pequena)



Fonte: Recortado do protocolo do estudante A15.

Ressaltamos por fim que nosso olhar quando da análise dos dados foi diferente do olhar direcionado por Pessoa (2009). Esta autora, ao analisar as estratégias utilizadas pelos estudantes, identificou a estratégia “percepção e busca da regularidade”. Em nosso trabalho vamos considerar essa estratégia, mas indiretamente. Isto é, ela, de certa forma, estará diluída no uso das estratégias 4 (árvore de possibilidades), 6 (listagem de possibilidade), 8 (princípio multiplicativo), e 9 (uso da fórmula).

4.3.2 Análise das estratégias identificadas de acordo com a utilização nos testes (prévio e posterior)

Para esse momento da análise, apresentaremos um panorama das estratégias utilizadas pelos estudantes no teste prévio e posterior; para tanto, segue o Quadro 38 e o Quadro 39, referentes as quais e quantas estratégias foram utilizadas pelos estudantes, tanto no teste prévio quanto no posterior. O primeiro quadro possui as estratégias dos 10 primeiros estudantes, apresentadas no teste prévio e posterior; e o segundo quadro, as dos 10 estudantes restantes.

É importante esclarecer que a análise das estratégias não se limita e identificar apenas uma por questão. De fato, foi possível identificar de zero a quatro estratégias utilizadas em uma única questão. Isto significa que apesar do ponto de vista de acerto e ou erro (ou branco) termos tido exatas 280 respostas para analisar (20 estudantes X 14 questões, tanto para o teste prévio quanto para o posterior), aqui, na análise das estratégias, a soma delas ultrapassará esse número, já que para cada resolução, apresentada pelo estudante, nós podemos identificar o uso de mais que uma estratégia.

Quadro 39 – Estratégias utilizadas pelos estudantes/por questão

		PPp	CRp	PRg	ARp	PSp	CSp	CSg	CRg	PSg	PRp	ARg	ASp	PPg	ASg
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q7	Q8	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16
A01	Pré	2 4	2 4	2 4	2 4	2 4	2 4	2 3 4	2 4	2 4	4 6 8	8	4 6 8	4 8	4 6 8
	Pos	4 6 8	4 6 8	5 8	5 8	5 8	3 4 6 7	5 8	4 6 7 8	2 4 5 8	4 6 8	0	4 6	8	4 6 8
A02	Pré	8	0	6	2	0	2	0	2	0	0	0	2	2	2
	Pos	8	0	2	2	6	2	2	8	2	2	0	2	8	2
A03	Pré	8	6	0	0	6	2	0	8	2	2	0	6	8	6
	Pos	8	6	6	0	6	2	2	8	2	2	0	6	8	6
A04	Pré	8	6	6	6	6	2	2	8	2	2	8	6	8	6
	Pos	8	6	6	0	6	2	2	8	2	2 6	8	6	8	8
A05	Pré	8	6	6	2	2	2	2	0	2	2	2	2	8	8
	Pos	8	2	2	2	2	2	2	2	2	2	8	2	8	2
A06	Pré	2	6	6	1	6	2	2	2	6	6	6	6	2	6
	Pos	8	5 7 8	2	8	2	2	2	5 8	5 8	5 8	0	5 8	5 8	5 8
A07	Pré	1	6	1	0	1	2	2	2	1	1	1	6	1	6
	Pos	1	6	1	2	5 8	2	1	2	1	1	1	1	1	1
A08	Pré	1	0	1	2	6	2	2	8	2	6 8	8	6 8	7	6 8
	Pos	6 7	6	6	2	6	2	1	2	1	6	8	6	8	6
A09	Pré	8	0	1	0	1	2	0	2	1	0	8	6	0	0
	Pos	8	0	1	1	2	2 3	2	2	2	2 7	0	2	8	2
A10	Pré	8	6	2	2	2	2	2	8	2	2	0	2	8	2
	Pos	4	6	6	4 8	5 8	6	6	8	2	6	2	6 8	8	2 6

Em relação aos testes: Pré=teste prévio; Pos=teste posterior. **Tipos de problemas combinatórios, conforme a ordem nos testes:** PPp=Parte-parte pequena; CRp=Combinação com repetição pequena; PRg=Permutação com repetição grande; ARp=Arranjo com repetição pequena; PSp=Permutação sem repetição pequena; CSp=Combinação sem repetição pequena; CSg=Combinação sem repetição grande; CRg=Combinação com repetição grande; PSg= Permutação sem repetição grande; PRp=Permutação com repetição pequena; Arg= Arranjo com repetição grande; ASp= Arranjo sem repetição pequena; PPg= Parte-parte grande;ASg= Arranjo sem repetição grande.

Legenda[16]

0	Branco	1	Só resposta	2	Operações c/ dados	3	Desenho	4	Árvore Possib.	5	Quadro/Diag.	6	Listagem	7	Princípio Aditivo	8	Princípio mult.	9	Fórmula

[16] As diferentes cores utilizadas nos números que identificam as estratégias foram usadas apenas para facilitar suas identificações, isto é, para diferenciar, rápido e visualmente, uma estratégia da outra. Da mesma forma, usamos esse conceito de cor para diferenciar os testes e os tipos de problemas.

Quadro 40 – Estratégias utilizadas pelos estudantes/por questão

		PPp	CRp	PRg	ARp	PSp	CSp	CSg	CRg	PSg	PRp	ARg	ASp	PPg	ASg
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q7	Q8	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16
A11	Pré	1	0	0	6	6	2	0	8	2	6	0	2	0	0
	Pós	8	2	6	6	6	7	1	2	6	6 8	0	6	8	6
A12	Pré	1	6	1	0	6	2	0	8	2	2	7	0	8	6
	Pós	8	2	1	2	2	2	2	2	2	2	0	6	8	6
A13	Pré	8	6	0	1	6	7	2	8	2	2	7	6	8	8
	Pós	1	2	2	1	8	2	8	1	1	1	2	6	8	1
A14	Pré	8	5 7	2	2	6 8	2	2	2	2	1	8	2	8	2
	Pós	8	2	2	2	2	2	2	8	2	7 8	8	2	8	8
A15	Pré	8	2	0	2	6	2	2	5 8	2	6	8	5 2	8	2
	Pós	5 8	6 9	9	9	5 8	9	9	9	9	9	9	9	5 7	9
A16	Pré	8	0	2	2	2	2	2	8	2	2	0	2	8	2
	Pós	8	2	2	2	5 6 8	2 6	2	2	6 2	6 2	0	2	8	6
A17	Pré	8	6	2	0	2	2	2	8	1	2	0	6	0	6
	Pós	8	6	0	2	6	2	2	1	0	0	0	0	8	1
A18	Pré	3 5 8	8	2	0	2	5 2 3	3 2	5 8	2	2	5 8	2	3 5 8	8
	Pós	3 5 8	5 8	2	2 5 8	5 8	5	5 8	5 8	6 8	9	5 8	5 8	8	5 8
A19	Pré	8	6	6	2	0	2	0	6	6	6	0	6	0	6
	Pos	8	0	6	6	0	6	6	6	6	6	0	6	8	0
A20	Pré	5	6	6	1	1	5	2	5 7	2	6	7 8	6	8	6
	Pos	8	6 5	5	5 3	0	5 3	5 3	8 7	2	5 3	5 3	6	8	5

Os quadros 39 e 40 apresentam o panorama das estratégias presentes nas resoluções dos 20 estudantes. Para melhor analisarmos a utilização que os estudantes fizeram dessas estratégias nos testes prévio e posterior, as Tabelas 1 e 2, a seguir, apresentam esse panorama de maneira mais sucinta e relativizada (em percentual), sendo que na tabela 1 esses percentuais retratam o uso geral das estratégias, considerando apenas o momento do teste (prévio e posterior), além de apresentar a variação de percentual[17] das estratégias de um teste para o outro, nas quais identificamos a variação de percentual positiva pela cor azul, e a variação de percentual negativa pela cor vermelho, destacando ainda em negrito os que apresentaram crescimento maior do que três pontos percentuais. Já na Tabela 1 continuamos considerando os testes, mas dentro de cada um será apresentado o percentual de usos das estratégias segundo o tipo de problema (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação).

Tabela 1 – Distribuição das estratégias utilizadas nos dois testes/porcentagem

Estratégia	Teste prévio[18]	Teste posterior[19]	Variação de percentual
E0	13,0	6,6	**- 6,4**
E1	6,7	6,6	- 0,1
E2	32,4	24,6	**- 7,8**
E3	1,6	2,3	+ 0,7
E4	4,1	2,9	- 1,2
E5	3,5	10,3	**+ 6,8**
E6	19,0	17,7	- 1,3
E7	2,2	2,6	+ 0,4
E8	17,5	23,1	**+ 5,6**
E9	0,0	3,4	**+ 3,4**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Antes de analisar os dados da Tabela 1, vamos destacar que, conforme apresentado em Pessoa (2009), as soluções podem conter estratégias menos formais, como tabelas, árvore de possibilidades e desenhos, ou estratégias mais formais como algoritmo multiplicativo,

[17] Estamos adotando que essa variação de percentual é a diferença entre o percentual de uso das estratégias no teste prévio pelo percentual no teste posterior.
[18] Para o teste prévio, encontramos 315 estratégias.
[19] Para o teste posterior, foram 350 estratégias.

princípio fundamental de contagem e fórmulas. Para a nossa pesquisa destacamos que estamos denominando como estratégias menos formais as seguintes: registra a operação com os dados da questão (E2), desenho (E3), árvore de possibilidades (E4), diagrama (E5), listagem de possibilidades (E6) e soma de parcelas (E7), e para as estratégias tidas como formais o princípio multiplicativo (E8) e a fórmula (E9).

A partir dos percentuais de uso das estratégias nos dois testes, notamos que houve uma queda na ausência de estratégia (E0), o que pode ser um sinal, positivo, de confiança dos estudantes para resolver as situações-problema.

Também nos chama atenção a variação de percentual negativo na utilização da estratégia E2, aquela em que os estudantes utilizam os dados da questão e efetuam um cálculo qualquer, sendo que a queda no uso dessa estratégia, que é o maior em relação às demais, a nosso ver, é positiva pelo fato de o estudante, no teste posterior, aparentemente organizar os dados presentes nas questões, buscando dar sentido ao seu uso.

A estratégia E5, referente ao uso de diagrama é a que mais apresenta crescimento (de 6,8 pontos percentuais), mesmo não sendo o aumento tão significativo, pois não chega nem a 10%; atribuímos esse resultado novamente ao ensino. Em relação ao resultado da nossa pesquisa para essa estratégia, temos que divergiu tanto do apresentado Pessoa (2009), em que essa estratégia aparece pouco em todos os níveis de ensino (Ensino Fundamental e Médio), quanto do apresentado por Lima, R. (2010), quando da pesquisa realizada com estudantes da Educação de Jovens e Adultos. Ao analisarmos o uso dessa estratégia, percebemos nos estudantes a busca da relação de um elemento pertencente a um conjunto com os elementos do outro conjunto.

O leve aumento das estratégias mais formais (E8 e E9), no teste posterior em relação ao prévio, parece ser um indicador da influência das aulas na aprendizagem desses estudantes. Pelo ponto de vista do uso das estratégias mais formais, o ensino não surtiu um efeito muito forte na aprendizagem dos estudantes. Temos que tal resultado pode estar atrelado ao fato, como apontou Vergnaud (2011), de uma aprendizagem a curto prazo, que depende muito das situações e maneira como o professor trabalha para o desenvolvimento de determinado conceito com os estudantes.

Por fim, queremos pontuar que as estratégias E1, E3, E4, E6, E7 (“não explicitaram a estratégia”, “desenho”, “árvore de possibilidades”, “listagem de possibilidades”, “adição de parcelas repetidas”, respectivamente), foram pouco utilizadas pelos estudantes e, praticamente, não apresentaram grandes alterações em seu uso de um teste para o outro. Das estratégias apresentadas, excluindo a E1, temos que as demais foram todas caracterizadas como menos formais. Tais estratégias, segundo Pessoa (2009), devem ser trabalhadas em sala de aula de forma a relacioná-las com as mais formais, para que se obtenha respostas corretas e completas.

Após termos apresentado e analisado as estratégias utilizadas pelos estudantes nos testes (prévio e posterior), olharemos para os dados apresentados na Tabela 2 para buscarmos mais informações sobre o comportamento desses estudantes.

Tabela 2 – Percentuais do tipo de estratégia utilizada por tipo de problema combinatório

ESTRATÉGIAS		PRODUTO CARTESIANO	PERMUTAÇÃO	ARRANJO	COMBINAÇÃO
E0	PRÉVIO	**9,8**	22,0	39,0	**29,3**
	POSTERIOR	**0,0**	21,7	60,9	**17,4**
E1	PRÉVIO	23,8	57,1	**19,0**	**0,0**
	POSTERIOR	13,0	34,9	**23,3**	**41,9**
E2	PRÉVIO	**3,9**	34,3	22,5	39,2
	POSTERIOR	**0,0**	34,9	23,3	41,9
E3	PRÉVIO	40,0	**0,0**	**0,0**	60,0
	POSTERIOR	22,2	**11,1**	**22,2**	44,4
E4	PRÉVIO	15,4	**30,8**	23,1	30,8
	POSTERIOR	20,0	**20,0**	30,0	30,0
E5	PRÉVIO	27,3	**0,0**	**18,2**	54,5
	POSTERIOR	11,1	**33,3**	**27,8**	27,8
E6	PRÉVIO	0,0	40,0	**40,0**	20,0
	POSTERIOR	3,2	38,7	**30,6**	27,4
E7	PRÉVIO	**14,3**	**0,0**	42,9	**42,9**
	POSTERIOR	**22,2**	**22,2**	0,0	**55,6**
E8	PRÉVIO	45,5	**5,5**	27,3	21,8
	POSTERIOR	42,0	**18,5**	21,0	18,5
E9	PRÉVIO	0,0	**0,0**	**0,0**	**0,0**
	POSTERIOR	0,0	**33,3**	**33,3**	**33,3**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Juntando as informações advindas da Tabela 1, e observando a Tabela 2, temos que o decréscimo apresentado na estratégia E0 (-6,4 pontos percentuais) foi motivado pelos percentuais dos tipos combinatórios produto cartesiano e combinação, ou seja, os estudantes passaram a responder mais as questões vinculadas a esses tipos de problemas, mesmo que a resposta esteja correta ou não.

Em relação à estratégia E2 (registra uma operação com os dados do enunciado ou criado pelo estudante), a sua queda de um teste para o outro é justificada pela interferência dos problemas de produto cartesiano, e que pode estar associado às aulas de Análise

Combinatória, já que o primeiro assunto abordado, nas aulas do professor regente da turma, foi o princípio fundamental de contagem, a partir desse princípio os estudantes conseguem fazer associação de maneira mais direta. Desse modo, os estudantes tenderam a coletar os dados e interpretá-los de maneira a cheguem à resposta correta, já que muitos estudantes que no teste prévio utilizaram a estratégia E2, envolvendo a operação de multiplicação, passaram a utilizá-la de maneira a encontrar a resposta correta, se enquadrando na utilização da estratégia E8. A estratégia (E2) foi mais utilizada nas questões de combinação, mas o seu uso não levou o aluno ao acerto.

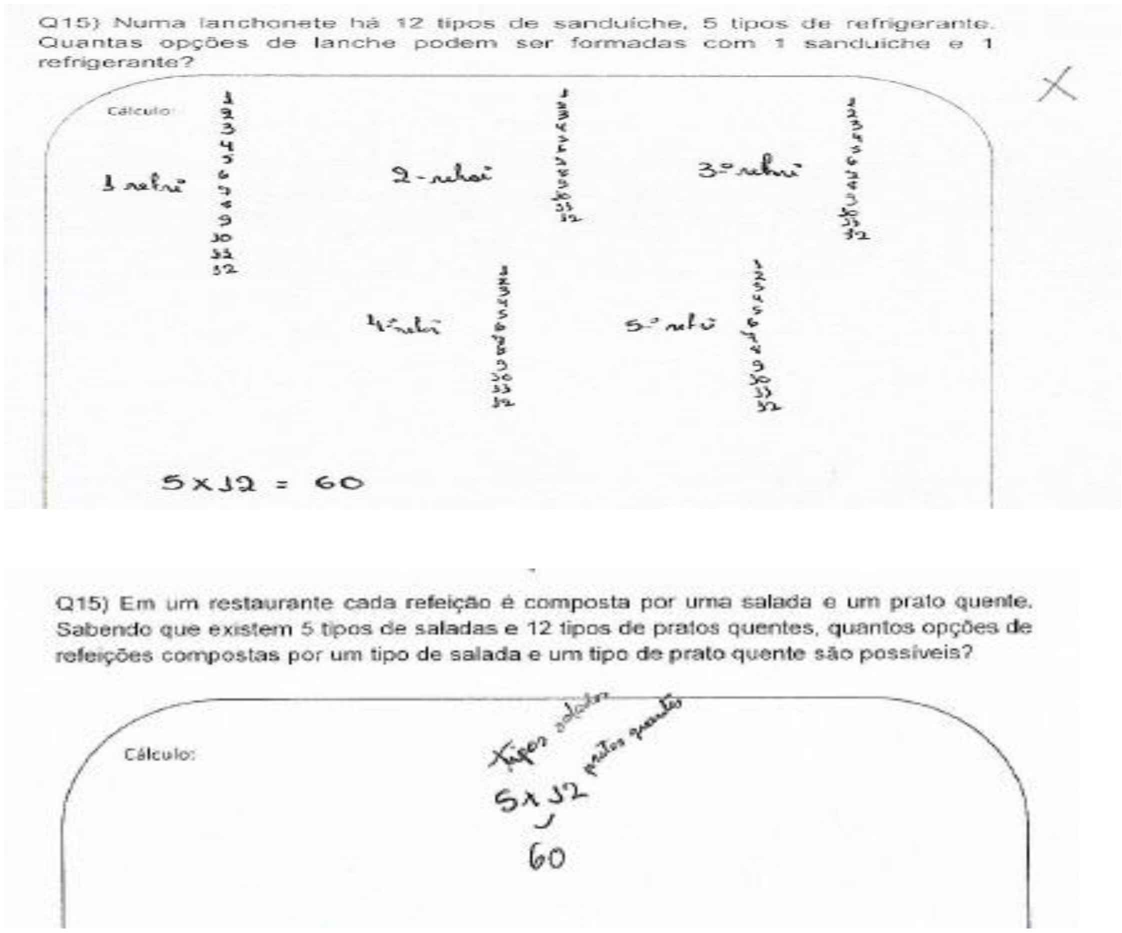
Na estratégia diagrama (E5), a mais utilizada, temos o seu resultado associado aos tipos de problemas combinatórios de permutação e arranjo. Recordando que no desempenho por tipo combinatório (conforme Gráfico 2), ao excluir o produto cartesiano, o arranjo e a permutação são os tipos combinatórios que apresentam o melhor desempenho, mas tal resultado não está atrelado ao uso dessa estratégia.

Pessoa (2009) diz que esse tipo de estratégia "deveria ser mais incentivada e explorada, pois [ela], assim como o desenho, a árvore de possibilidades, pode ser um bom referente para o aluno na organização do seu pensamento para resolver problemas" (PESSOA, 2009, p.201). Nesse incentivo, o professor tem um papel importante, pois ele deve considerar o uso de diversas estratégias, de modo que através dessa diversidade seja possível identificar o entendimento dos estudantes em relação aos problemas e seus respectivos invariantes, para que, desse modo, ele possibilite o desenvolvimento do conceito estudado.

A estratégia princípio multiplicativo (E8) apresentou um incremento de uso do teste prévio para o posterior apenas nas situações-problema que envolveram a permutação. A partir do resultado – relacionado com o apresentado na Tabela 2, a respeito dessa estratégia (foi uma das que teve crescimento) – , podemos afirmar, com um grau confortável de certeza, que o ensino desse tipo de problema teve efeito positivo na aprendizagem dos estudantes. Este resultado diverge dos encontrados por Pessoa (2009) ao apresentar a permutação como um dos mais difíceis tipos combinatórios, juntamente com a combinação, mesmo resultado encontrado por Moreira (2014).

Observando os problemas de produto cartesiano (Q1, Q6, Q9 e Q15), tanto no teste prévio quanto no posterior, tivemos o maior percentual na estratégia E8. Este resultado já era esperado, pois para a resolução dos problemas de produto cartesiano, como apresenta Pessoa (2009), dados dois ou mais conjuntos, eles serão arrumados para formar um novo conjunto e, para isso, utiliza-se do princípio multiplicativo. É uma estratégia natural, embora não seja a única! A Figura 20, a seguir, ilustra o uso dessa estratégia (E8) na resolução da questão 1, tanto no teste prévio, quanto no posterior, respectivamente.

Figura 20 – Uso do princípio multiplicativo (E8) na resolução da questão 1
(teste prévio e posterior)



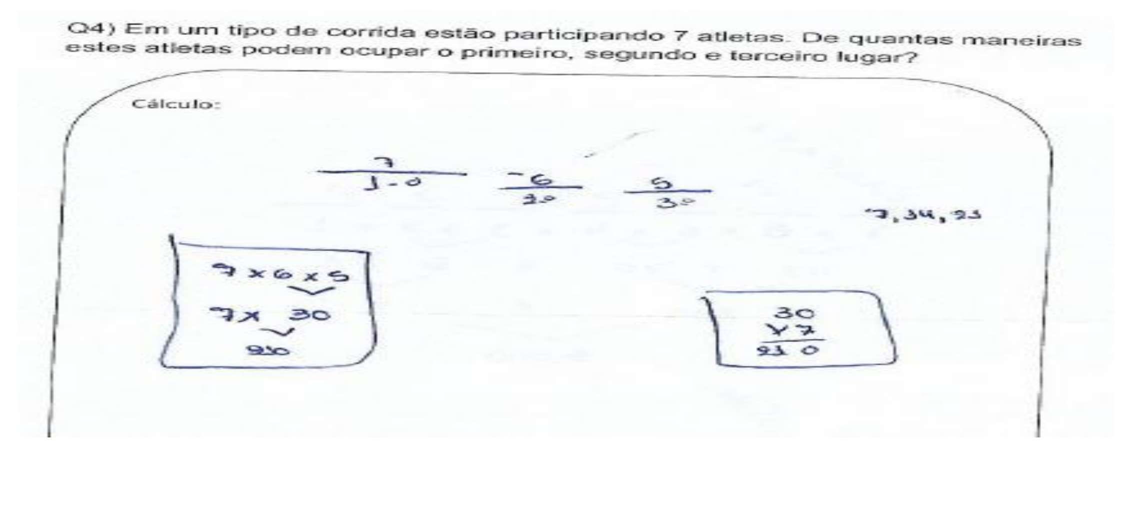
Fonte: Recorte do protocolo do estudante A01 na resolução da Q15.

Observando os protocolos, percebemos um avanço no uso da estratégia E8, de um teste para o outro. No teste prévio, o estudante iniciou fazendo a árvore de possibilidades, por ter sido viável, esgota todas as possibilidades, e ao final faz o uso do princípio multiplicativo corretamente. Notamos que esse estudante percebeu a regularidade e sistematização para esse tipo de problema. Quando observamos o teste posterior, percebemos que o aluno faz uso da maneira mais formal, ou seja, utiliza somente o princípio multiplicativo. A partir do protocolo apresentado na Figura 20, vimos que as estratégias utilizadas pelo estudante A01, foram justamente as consideradas por nós, no momento da análise prévia.

Se considerarmos que os estudantes já tinham visto no decorrer do Ensino Fundamental o produto cartesiano, de maneira sistemática, esse avanço acontece nesse curto prazo de aprendizagem, como cita Vergnaud (2011), pelo fato de as situações serem propostas considerando competências já adquiridas ou adquiridas parcialmente.

Em relação ainda ao uso da estratégia E8, vamos associá-la a outro tipo combinatório que não seja o produto cartesiano, já que esse tipo está atrelado diretamente ao uso dessa estratégia. Na Figura 21, a seguir, essa estratégia é utilizada pelo estudante para resolver questões de arranjo.

Figura 21 – Recorte protocolo do estudante A01 na Q4/ teste posterior.

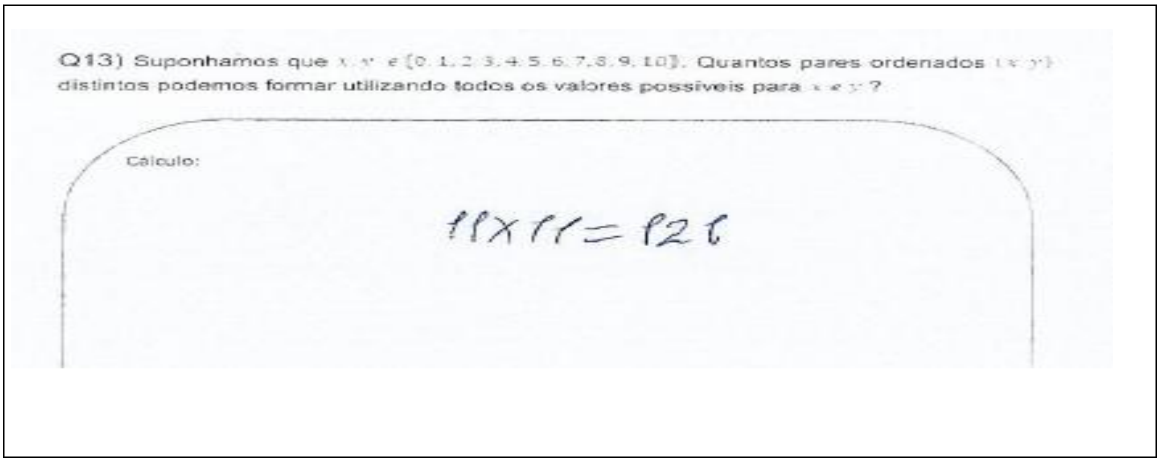


Fonte: Recorte do protocolo do estudante A01 na Q4, teste posterior.

O estudante A01 faz o uso do princípio multiplicativo, indicando que interpretou e organizou os dados conforme o contexto do problema. Ao indicar os três primeiros lugares, ele escreve que para o primeiro lugar, existiriam sete opções, para o segundo lugar, seis e para o terceiro cinco. Na verdade, esse estudante se destaca em relação aos demais. Analisando os protocolos dele, percebemos que há uma tendência no uso do princípio multiplicativo, árvore de possibilidades e listagem. A busca da regularidade e a sistematização estão presentes nas suas soluções, mesmo naquelas em que o resultado está errado.

Segundo Piaget e Inhelder (1951), esse estudante estaria no terceiro estágio, ou seja, além da descoberta da lei, compreende o motivo dessa lei de forma a extrapolar todos os arranjos possíveis. Cabe ainda ressaltar que essa estratégia foi utilizada por um estudante para uma questão de arranjo com repetição, que apresentamos como mais difícil, por conter distratores e solicitar conceitos para além do que abordamos na nossa pesquisa. Tal caso será apresentado na Figura 22.

Figura 22 – Recorte protocolo do estudante A14 na resolução da Q13/ teste prévio



Fonte: Recorte do protocolo do estudante A14.

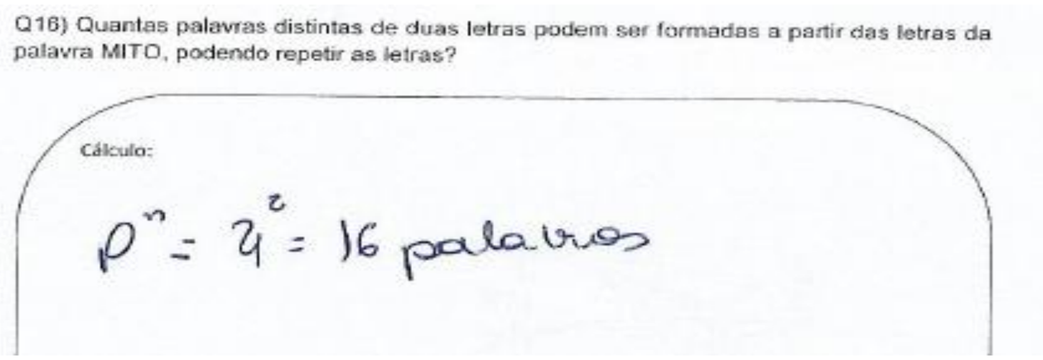
Como podemos observar, o estudante A14, na Figura 22, no teste prévio faz o uso do princípio multiplicativo adequadamente. Queremos chamar a atenção sobre essa questão – assim como fizemos na análise do teste prévio – trata-se de um problema de arranjo com repetição e ordem de grandeza grande, em que é esperado dos estudantes que se lembrem do conceito de par ordenado. Além disso, essa questão possui um distrator, confirmamos isso no momento da correção dos protocolos, o qual está relacionado com o fato de o conjunto possuir 11 e não 10 elementos (pois começa com o 0 e termina com o 10, isso fez com que muitos estudantes utilizassem o último número para expressar a quantidade de elementos do conjunto). E ainda, ao questionarmos sobre os pares ordenados serem diferentes, alguns estudantes entenderam que os algarismos que estivessem na abscissa não poderiam estar na ordenada, excluindo, assim, os pares ordenados com o mesmo algarismo, fazendo com que o resultado desse errado.

Para essa questão, o único estudante que acertou foi o A14 e que aparentemente compreendeu os invariantes (Vergnaud, 1996) do arranjo com repetição, ou seja, levou em consideração que de um conjunto maior são escolhidos elementos, repetidos ou não, e que a ordem e a escolha dos elementos geram novas possibilidades. Mas, como podemos perceber, o aluno faz o uso da estratégia e acerta; entretanto, não podemos confirmar se ele compreendeu os invariantes pertinentes a esse conceito, pois não o entrevistamos; nessa questão, 8 dos 20 estudantes erraram por conta dos distratores, apontados anteriormente.

No caso dessa questão, a compreensão ficou comprometida pelo fato do contexto matemático apresentado, percebemos que a questão envolvendo produto cartesiano acabou sendo um elemento dificultador, que contribuiu para os prováveis equívocos.

No que se refere às estratégias que apresentaram variações de percentuais mais elevadas, temos a estratégia fórmula (E9). O uso da fórmula[20] aparece somente no teste posterior, e encontra-se dividido entre os tipos combinatórios arranjo, permutação e combinação, o que era de se esperar, já que os estudantes ainda não tinham visto o conteúdo formalmente no momento da aplicação do teste prévio. Em relação ao uso dessa estratégia, na pesquisa de Pessoa (2009), assim como na nossa, os percentuais foram baixos. Já na pesquisa de Moreira (2014), que teve como informantes professores do Ensino Médio, enquanto estudantes de um curso de pós-graduação, essa estratégia se apresentou como a segunda mais utilizada.

Figura 23 – Recorte protocolo do estudante A15 na resolução da Q16/teste posterior



Fonte: Recorte do protocolo do estudante A15 na resolução da Q16.

Com relação ao uso da estratégia E9 temos o estudante A15 (Figura 23), que faz o uso da fórmula, sendo somente o único a usar essa estratégia para as questões de arranjo. A utilização da E9 por esse estudante pode ser uma tentativa bem sucedida de vincular o que foi visto em sala de aula, com as questões apresentadas no teste.

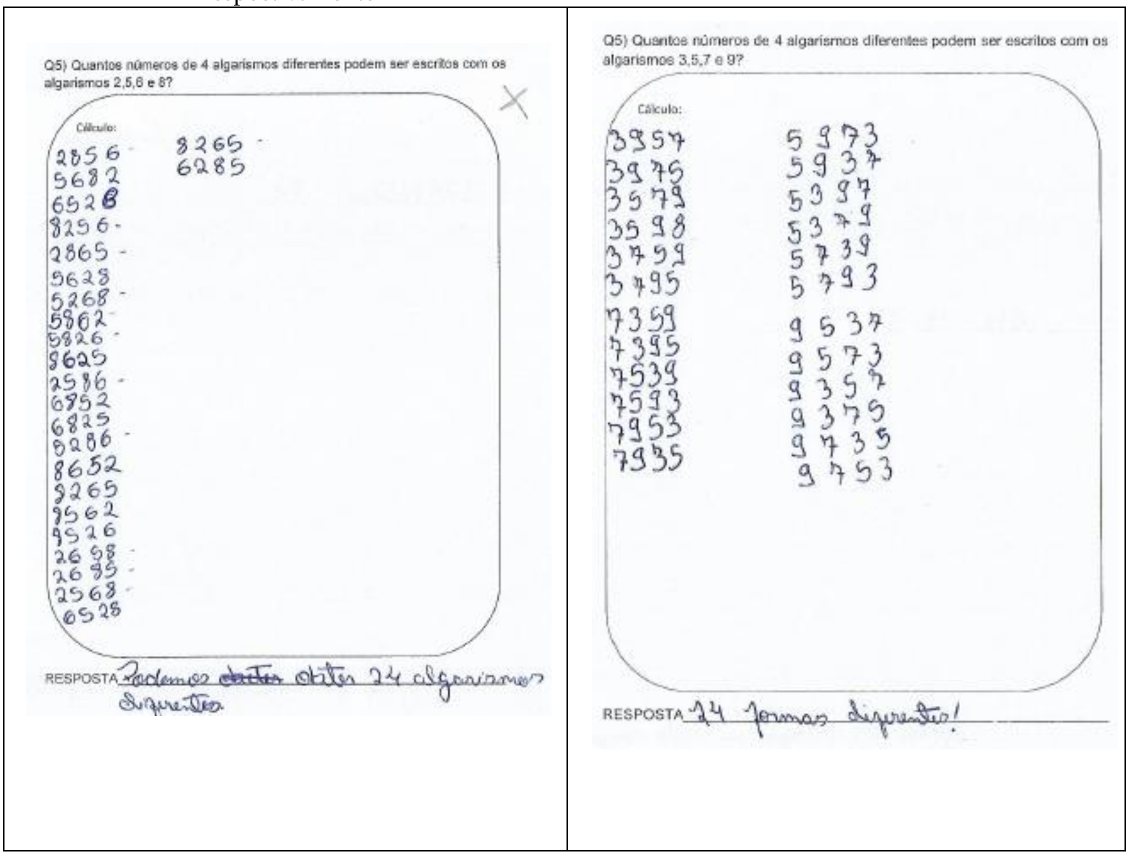
Destacamos que esse estudante foi o único que usou essa estratégia para a maioria das questões no teste posterior. Não podemos afirmar que o uso da fórmula nessa questão foi feito de maneira compreensível pelo estudante, pois ao analisarmos o Quadro 39, percebemos que o mesmo utiliza a fórmula para as demais questões de arranjo, e ao observarmos os protocolos percebemos que ele não acerta. E ainda, quando acerta, o faz com a questão em que consideramos mais fácil por possuir ordem de grandeza pequena, mesmo com a presença da variável repetição. Ou seja, esse estudante não leva essa suposta compreensão para os demais casos de arranjo.

[20] Não estamos considerando o princípio multiplicativo como uma fórmula para o caso do produto cartesiano.

Por fim, com relação às estratégias E1, E3, E4, E6, E7 ("não explicitou a estratégia", "desenho", "árvore de possibilidades", "listagem de possibilidades", "adição de parcelas repetidas", respectivamente), que foram pouco utilizadas pelos estudantes. Temos que, diferente do que é apresentado em Pessoa (2009), que a listagem e a árvore de possibilidades estão entre as estratégias com o maior percentual, no nosso estudo isso não acontece. Por mais que o uso delas esteja atrelado aos acertos, esses acertos são baixos; com relação à estratégia desenho, mostra-se ineficaz, caso seja utilizada sem o uso de outras estratégias.

Temos ainda que os acertos das questões envolvendo permutação estão vinculados com o uso da E6. Esse resultado corrobora com a pesquisa de Lima, R. (2010), como podemos perceber na Figura 24 a seguir.

Figura 24– Recorte protocolo do estudante A04 na resolução da Q5/ teste prévio e posterior, respectivamente



Fonte: Recorte do protocolo do estudante A04 na resolução da Q5.

No caso do teste prévio, era previsto que o estudante usasse a listagem de possibilidades, pois pela variável ordem de grandeza ser pequena, isso seria mais viável. Observando a listagem feita pelo estudante, percebemos que ele não faz uma sistematização para a listagem, tal comportamento contribuiu para que ele acertasse ao acaso, pois na listagem há números repetidos. Analisando este estudante com base nas ideias de Piaget e Inhelder (1951), no teste prévio, ele se encontra no estágio II, não percebem a tendência de um sistema, além de apresentar dificuldade nesse tipo combinatório por se tratar de mudança de ordem.

O estudante A04 também acertou a Q5 no teste posterior, utilizando a mesma estratégia. Evidenciamos como ponto positivo o uso da listagem no teste posterior, pois essa aconteceu de maneira sistemática e adequada, de modo que não possui nenhum número repetido. Percebemos nesse estudante o avanço quanto ao aprimoramento no uso dessa estratégia, mas ressaltamos que ele não percebeu a regularidade de forma, por exemplo, ao utilizar estratégias mais formais, como o princípio multiplicativo ou a fórmula.

Analisando a estratégia (E6), utilizada pelo estudante A04, temos que no teste posterior esse estudante avança do estágio II para o III. Segundo Piaget e Inhelder (1951) em relação às permutações, nesse estágio é descoberto o sistema. O estudante não percebe a regularidade que lhe permita uma provável generalização, mas já é capaz de sistematizar sua listagem de modo a não repetir elementos (como fez no teste prévio).

Percebemos, ainda, que a estratégia E6 foi utilizada também nas questões de arranjo, questões estas retratadas na Figura 25.

Figura 25 – Recorte protocolo dos estudantes A04/A01 na resolução da Q16/ teste prévio

A04

A01

Fonte: Recorte do protocolo do estudante A04/A01 na resolução da Q16.

Assim, percebemos na resolução do A04 que ao iniciar a listagem, o estudante não a elabora sistematicamente, mas à medida que vai continuando a listagem, vai organizando as prováveis palavras. Já o estudante A01 apresenta a listagem como resultado de uma árvore de possibilidades e ainda faz o uso do princípio multiplicativo.

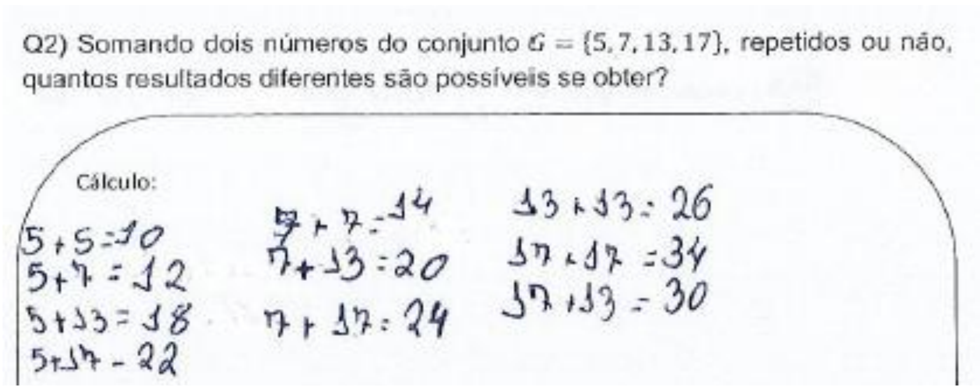
Analisando os dois estudantes (A04 e A01), à luz de Piaget e Inhelder (1951), temos que o estudante A04, em relação à operação de arranjo, encontra-se no estágio II, pois apresentou impressões de regularidades, sem perceber a tendência a um sistema. Com o estudante A01, além de perceber a tendência a um sistema, faz uso de mais de uma estratégia (princípio multiplicativo) buscando a generalização.

Se partirmos do pressuposto de que essas soluções foram apresentadas no teste prévio, se acaso esses estudantes tivessem intervenções – tendo como referência os três pilares considerados fundamentais para a aprendizagem da Combinatória: invariantes de cada tipo de problema combinatório, a sistematização da listagem e a generalização, citados em Pessoa e Santos (2012) –, eles poderiam apresentar melhores resultados no teste posterior?

Ainda sobre o uso dessa estratégia E6, ela aparece, também, nas questões de combinação com repetição de ordem de grandeza pequena (no teste posterior), como podemos observar nas Figuras 26 e 27.

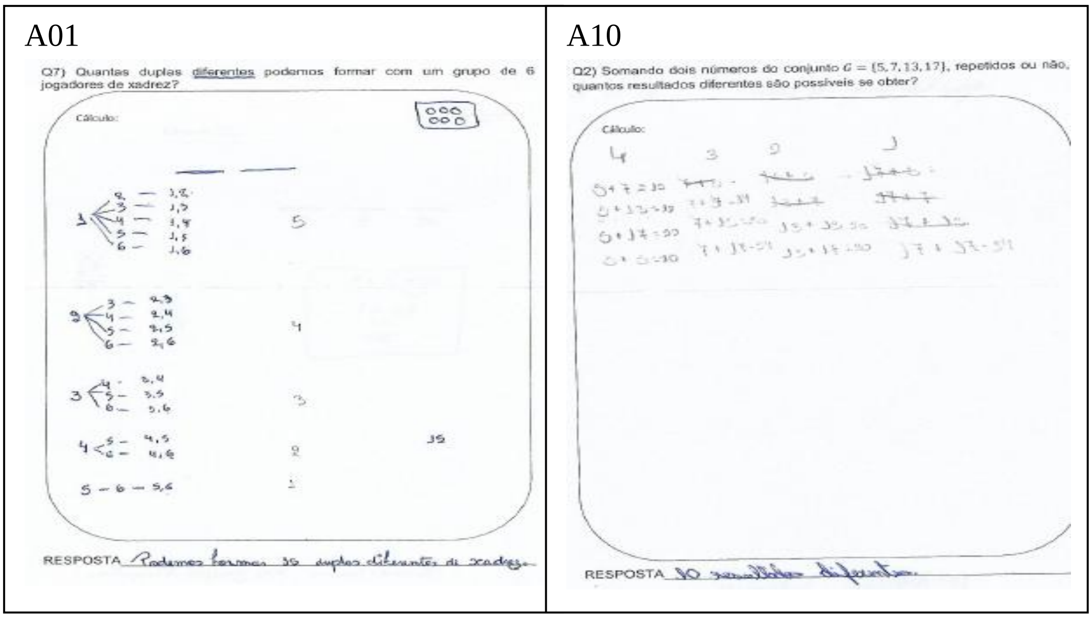
Figura 26 – Recorte do protocolo do estudante A04 na resolução da Q2/teste posterior

A04



Fonte: Recorte do protocolo do estudante A04.

Figura 27 – Recorte do protocolo dos estudantes A01/ A10 na resolução da Q2/ teste posterior



Fonte: Recorte do protocolo dos estudantes A01/ A10.

Nas questões de combinação com repetição pequena, na Q2, tanto o estudante A04 quanto o A10 fazem uso da listagem de possibilidades, ambos percebem que a mudança na ordem não gera novas possibilidades. Mas, ao observamos a listagem do estudante A04, percebemos que ele a faz de maneira sistemática excluindo as somas que se repetem. Assim, em relação às operações de combinação, segundo Piaget e Inhelder (1951), o estudante A04 está no estágio III, pois o sistema foi realizado de maneira completa, em que o sujeito percebeu as características pertinentes às combinações. O que Piaget e Inhelder (1951) denominam de características pertinentes, na Teoria dos Campos Conceituais está associado aos invariantes "que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar situações" (VERGNAUD, 1996, p.166).

Como podemos perceber na resposta do estudante A01 para a questão de arranjo sem repetição com ordem de grandeza pequena (Q7), além do uso da listagem, faz também a utilização da estratégia árvore de possibilidades. Assim como o A04, esse estudante elabora a árvore de possibilidades excluindo as duplas repetidas e, ao final, soma os resultados encontrados em cada árvore. Desta maneira, encontra-se no mesmo estágio (III), porém mudando o tipo de problema combinatório.

Após as análises do desempenho e das estratégias utilizadas pelos estudantes em suas resoluções nos testes prévio e posterior, acreditamos ter informações suficientes para responder nossa questão de pesquisa, o que será feito no próximo capítulo com a apresentação das nossas considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O nosso estudo teve por objetivo analisar o desempenho e as estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio, antes e depois de eles terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória. Para atingir tal objetivo, desenvolvemos o nosso estudo com estudantes de uma escola pública situada em uma cidade do sul da Bahia, onde aplicamos dois testes, um prévio e outro posterior às aulas sobre Análise Combinatória ministrada pelo professor regente da turma.

Tendo em vista o nosso objetivo, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: Quais são o desempenho e as estratégias desenvolvidas pelos estudantes do 2º ano do ensino médio, antes e depois de eles terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória?

Para atingirmos o nosso objetivo e termos dados suficientes para responder à questão de pesquisa proposta, traçamos a realização de um estudo cujo caminho descreveremos a seguir.

- **Relembrando o caminho trilhado**

Iniciamos a nossa dissertação apresentando a motivação para o desenvolvimento do estudo, seguido do objetivo e da consequente questão de pesquisa. Na sequência, construímos o Capítulo 1, que versou sobre a Análise Combinatória e as pesquisas que adotaram como objeto esse conteúdo. Para tanto, trouxemos um relato da Análise Combinatória, a partir do contexto histórico.

No capítulo 2 descrevemos o quadro teórico utilizado para subsidiar a construção metodológica do estudo e, ainda, oferecer suporte para a análise de dados. Assim, utilizamos as ideias contidas na Teoria dos Campos Conceituais (1996, 2009, 2011), para fundamentar a formação de conceitos, e os principais resultados dos estudos de Piaget e Inhelder (1951) a fim de entender melhor a ideia que as crianças e adolescentes têm sobre o acaso.

No capítulo 3 descrevemos os procedimentos metodológicos, que se configurou num estudo descritivo, consistindo na aplicação de um instrumento diagnóstico, contendo 14 questões, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola pública situada em uma cidade do sul da Bahia. Esse instrumento foi aplicado em dois momentos: um antes das aulas sobre Análise Combinatória, ministradas pelo professor regente da turma, e outro depois que os estudantes tiveram as referidas aulas. É importante esclarecer que cada momento (aplicação do teste) utilizou dois encontros com os estudantes, cada um deles dedicado à aplicação de 7 questões.

O próximo capítulo foi direcionado para a análise dos dados, isto é, a análise das respostas que os estudantes deram às questões dos testes. Dividimos esta análise entre os livros didáticos utilizados pelo professor, a quantitativa, voltada para o desempenho dos estudantes, e a qualitativa, voltada para a identificação das estratégias utilizadas pelos estudantes. Nas duas análises fizemos a comparação entre os testes aplicados antes e depois das aulas ministradas pelo professor regente.

Devido à grande importância da análise de dados na resposta à nossa questão de pesquisa, a seguir faremos uma síntese dos principais resultados nela encontrados.

- **Síntese dos resultados analisados**

Iniciamos a nossa síntese apresentando o desempenho dos estudantes nos testes, em seguida, sintetizamos os resultados das estratégias utilizadas por esses estudantes nesses instrumentos e, por fim, apresentaremos a síntese dos níveis de raciocínio combinatório desses estudantes nos dois testes (prévio e posterior).

No que concerne **ao desempenho** dos estudantes:

O <u>primeiro resultado</u> informa que houve um pequeno crescimento no percentual de acerto dos estudantes de um teste para o outro. De fato, enquanto no teste prévio o desempenho geral de sucesso foi de 14,29%, no teste posterior foi de 19,64%.

O <u>segundo resultado</u> diz respeito ao desempenho dos estudantes nos dois testes, considerando o tipo combinatório presente na questão. Percebemos que o produto cartesiano foi de longe o que teve melhor desempenho, já no teste prévio. E mais, foi também o que teve maior crescimento de um teste para o outro (aumento de 15 pontos percentuais). Tal resultado já era esperado, pois a literatura já apontava isso (PESSOA, 2009; PESSOA E BORBA, 2009; MOREIRA, 2014, entre outros). De fato, esse tipo combinatório é o único que é estudado sistematicamente no Ensino Fundamental.

Ressaltamos que também houve crescimento nos outros tipos combinatórios de um teste para o outro, porém pouco expressivo, pois nenhum deles atinge 12% de acerto. Vale a pena pontuar que os problemas de arranjo ficaram em 2º lugar, do ponto de vista de acertos dos estudantes no teste prévio (11,3%), o que é um indicativo que tais tipos de problemas combinatórios necessitam da compreensão sobre quais elementos dos conjuntos dados podem ser escolhidos e organizados. O seu ensino formal, porém, não contribuiu para que os estudantes avançassem na competência de resolver este tipo de problema.

Já no que diz respeito aos problemas de permutação, que os estudantes tiveram muito pouco sucesso em resolvê-los no teste prévio (3,8% de acerto), eles mostraram um certo avanço após seu ensino formal (10%).

O terceiro resultado traz informação sobre a variável "ordem de grandeza". Foi constatado que o melhor desempenho dos estudantes aconteceu nas questões em que a ordem de grandeza dos problemas era pequena; esta tendência está presente tanto no teste prévio quanto no posterior. Em outras palavras, a variável "ordem de grandeza" mostrou-se influente tanto no teste posterior quanto no prévio. Uma possibilidade para tal ocorrência pode ser o efeito do ensino.

O quarto resultado tratou da variável "repetição". Esta variável nos surpreendeu pelo fato de nas questões em que ela estava presente, o desempenho dos estudantes foi melhor. Em outras palavras, mesmo no teste prévio os problemas com repetição têm maior percentual de acerto do que os problemas sem repetição, e essa tendência fica mais acentuada no teste prévio.

O quinto resultado voltou-se para a relação entre os tipos combinatórios e as variáveis "repetição" e "ordem de grandeza". Identificamos que os problemas de combinação associados à variável ordem de grandeza (números grandes), influenciaram negativamente os resultados, pois os percentuais de sucesso dos estudantes em problemas que tinham essas duas variáveis presentes foram nulos e isso aconteceu tanto no teste prévio quanto no posterior.

Salientamos que nos problemas de permutação e de combinação, essa influência negativa centrou-se sobremaneira no teste prévio.

Por fim, no que concerne aos problemas envolvendo o arranjo com repetição e com ordem de grandeza pequena, o desempenho dos estudantes apresenta um decréscimo do teste prévio para o posterior.

No que concerne **às estratégias** utilizadas pelos estudantes, evidenciamos os seguintes resultados:

Como primeiro resultado, relatamos que foi possível identificar nove estratégias, sendo elas: E1="não explicitou estratégia", E2="registra uma operação com os dados do enunciado ou criado pelo estudante", E3="desenho", E4="árvore de possibilidades", E5= "quadro/diagrama", E6="listagem de possibilidades", E7="adição adequada de parcelas repetidas", E8="princípio multiplicativo", e E9="fórmula" no decorrer dos dois testes. Ressaltamos que para a análise foi considerada a estratégia que denominamos por E0, a que associamos às questões em branco ou que os estudantes não sabiam responder. Dividimos essas estratégias pela formalização dos procedimentos, além dos aspectos concisos em relação ao seu uso. Assim, das estratégias E2 até a E7 foram consideradas como menos formais, e as E8 e E9 as mais formais.

Como segundo resultado, tivemos a estratégia que chamamos de E0 e que apresentou variação de percentual negativa. Enquanto que no teste prévio o percentual foi de 13,0%, no teste posterior foi o de 6,6 %. Essa é uma boa mudança de atitude, pois os estudantes passam a resolver as questões depois da aula. Analisando a tabela 2 percebemos que essa queda acontece por causa do produto cartesiano e da combinação.

A estratégia que apresentou maior decréscimo foi a E2, aquela em que registra uma operação com os dados do enunciado ou criado pelo estudante. Esse terceiro resultado é interessante, pois a queda no percentual (de 32,4 % para 24,6 %) nesse tipo de estratégia implica em alguma contribuição do ensino, porque a partir das aulas os estudantes pararam de fazer contas, sem sentido, com os dados da questão. Para essa estratégia, temos que o decréscimo se deve ao produto cartesiano, que sai de 3,9 no teste prévio e é anulado no teste posterior. Tal resultado pode estar associado ao uso da estratégia princípio multiplicativo (para esse tipo combinatório) já que após as aulas os estudantes foram relembrados em relação ao uso dessa estratégia para as questões que envolvem o produto cartesiano.

O quarto resultado diz respeito ao aumento no uso da estratégia quadro/diagrama (E5). O percentual do teste prévio para o posterior quase triplica (de 3,5% para 10,3%). Tal estratégia nem sempre leva ao acerto, mas é uma boa estratégia, pois os estudantes ao usá-la evidenciam estar pensando em relacionar as possibilidades. Os tipos de problemas combinatórios responsáveis pelo aumento no uso dessa estratégia, do teste prévio para o posterior, foram a permutação e o arranjo (bem mais a permutação), pois saiu de um percentual nulo para 33,3.

O quinto resultado que mereceu destaque foi o relativo ao uso do princípio multiplicativo (E8), que teve aumento de 5,6 pontos percentuais (de 17,5 % para 23,1 %). Esse aumento, quando relacionamos com a tabela 2, aconteceu somente nos problemas de permutação.

O sexto resultado está relacionado com o uso da estratégia fórmula (E9). No teste prévio o percentual foi nulo, mas o crescimento foi pífio no teste posterior. Tal resultado acontece por causa das aulas e, consequentemente, pela tentativa dos estudantes em utilizar o que foi visto em sala de aula. Esse aumento no uso dessa estratégia se dá de maneira igualitária para os tipos combinatórios permutação, arranjo e combinação.

O sétimo resultado está vinculado ao uso da estratégia adição adequada de parcelas repetidas (E7), que na tabela 1 apresenta uma variação de percentual de apenas 0,4. Mas, ao observamos a tabela 2 (percentuais de estratégias utilizadas por tipo de problema combinatório), percebemos que este resultado é camuflado pela anulação no uso dessa estratégia para os tipos de problemas de arranjo, em contrapartida ao crescimento no uso dessa estratégia para os problemas de produto cartesiano, permutação e combinação.

- **Respondendo à questão de pesquisa**

Responderemos a nossa questão de pesquisa que está descrita desta maneira:

Quais são o desempenho e as estratégias desenvolvidas pelos estudantes do 2º ano do ensino médio, antes e depois de terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória?

Analisando inicialmente o desempenho nos testes, temos que o crescimento além de ter sido pouco, não chega a 30% dos estudantes participantes da pesquisa. Assim, concluímos que o ensino não interferiu na aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória. No desempenho por tipo combinatório o que se destaca é o produto cartesiano, seguido do arranjo, permutação e, por fim, combinação, isso nos dois testes. No que diz respeito aos problemas de permutação, foram os que mais apresentaram avanço após o ensino formal.

Com relação às variáveis abordadas na pesquisa, no que se refere à variável “ordem de grandeza”, a que mais se destaca é a “ordem de grandeza” pequena, seguindo essa tendência tanto no teste prévio quanto no posterior. Já para a variável “repetição”, temos que as questões que apresentam o melhor desempenho são aquelas em que essa variável se faz presente. Temos como hipótese o fato das disposições das questões durante a aplicação dos testes, além da associação dessa variável a de ordem de grandeza pequena.

Ao associarmos os tipos combinatórios e as variáveis “repetição” e “ordem de grandeza”, os problemas de arranjo com repetição foram os únicos que apresentaram melhor desempenho no teste prévio do que no posterior. Vimos ainda que quando associamos as variáveis repetição, com ordem de grandeza grande, aos problemas de permutação e combinação, os percentuais se apresentam nulos em ambos os testes. Ao analisarmos o produto cartesiano, não consideramos a variável repetição.

Embasadas na análise do desempenho dos estudantes nos testes prévio e posterior, podemos afirmar que o crescimento apresentado no teste prévio para o posterior foi pouco e assim não interferiu para a aprendizagem de Análise Combinatória. Vale salientar que, pelo tamanho da nossa amostra, não queremos extrapolar esse resultado, pois existem fatores que interferem nesse resultado e que não analisamos nesta pesquisa. Desse modo, deixamos evidenciada a necessidade de investigar sobre quais outros fatores podem interferir no processo de aprendizagem da Análise Combinatória. Assim, temos que esta pesquisa abriu caminho para a realização de estudos mais amplos sobre como desenvolver a utilização de estratégias mais formais a partir das estratégias menos formais apresentadas pelos estudantes.

Com relação às estratégias, os estudantes informantes da nossa pesquisa fizeram o uso de nove, sendo que as mais utilizadas, tanto no teste prévio quanto no posterior, foram justamente as seguintes: registro de operação criado pelos estudantes a partir dos enunciados princípio multiplicativo e listagem de possibilidades.

No que se refere à primeira estratégia, ela está relacionada às menos formais e não levou os estudantes, em nossa pesquisa, ao acerto. A variação de percentual negativa do teste prévio para o posterior é vista como importante, pois isso significa que os estudantes, aparentemente, se esforçaram para responder a questão corretamente, podendo ter buscado auxílio de outras estratégias.

Quanto ao uso das estratégias princípio multiplicativo, observamos que o seu alto percentual está vinculado às questões de produto cartesiano, embora o seu uso seja visto também nos demais tipos combinatórios.

Quanto à estratégia listagem de possibilidades, observamos que foi a estratégia que mais levou o estudante ao acerto. Nas questões que possuíam a "variável ordem de grandeza" (com números pequenos), notamos que os estudantes buscaram a sistematização visando esgotar todas as possibilidades, tanto no teste prévio quanto no posterior.

Notamos também, que houve avanço, de um teste para o outro, no que refere à sistematização da listagem. Ou seja, os estudantes que apresentaram, no teste prévio, uma listagem sem sistematização e sem noção de ter esgotado todas as possibilidades, melhoram o uso dessa estratégia no teste posterior, apresentando uma listagem sistemática e ciente de ter esgotado as possibilidades existentes.

Após respondermos a nossa questão de pesquisa, vamos sugerir alguns estudos que poderão ser realizados no seguimento da nossa pesquisa. As sugestões serão apresentadas a seguir.

- **Sugestões de novas pesquisas**

A nossa pesquisa teve por objetivo pesquisar as estratégias desenvolvidas pelos estudantes do 2º ano do Ensino Médio, antes e depois de terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória. Pesquisando os trabalhos existentes, vimos que existe um aumento progressivo em pesquisas feitas com o conteúdo de Análise Combinatória e associamos esse aumento à produção do grupo GERAÇÃO. A fim de contribuirmos para pesquisas nessa área, apresentaremos algumas sugestões de pesquisas que poderão ser feitas no seguimento da nossa.

A primeira sugestão seria uma investigação com duas turmas de 2º ano e nessas turmas fosse aplicado um teste prévio e, a partir das estratégias utilizadas pelos estudantes, fosse elaborada uma intervenção baseada na explicitação dos invariantes dos problemas combinatórios e variáveis abordadas no teste, com base nas estratégias utilizadas pelos estudantes no teste prévio, e depois fosse aplicado um teste posterior.

A segunda sugestão seria analisar as contribuições do uso do livro didático pelo professor nas estratégias utilizadas pelos estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Além de pesquisas voltadas para a aprendizagem, achamos pertinente sugerir estudos voltados para a formação do professor.

A terceira sugestão seria pesquisas sobre a formação inicial do professor, no que diz respeito à disciplina de Análise Combinatória, pensando na elaboração de uma sequência de ensino a ser aplicada por esses estudantes.

A quarta sugestão seria analisar as possíveis contribuições de uma formação continuada, em relação ao conteúdo de Análise Combinatória, nas estratégias utilizadas pelos professores participantes dessa formação. Podendo ainda analisar as contribuições sobre a prática docente a partir dessa formação.

REFERÊNCIAS:

ASSIS,A. M. R.B.; PESSOA, C. A. S. Discutindo combinatória em um processo de formação continuada com professores dos anos iniciais. **Rev. bras. Estud. pedagog**. (online), Brasília, v. 96, n. 244, set./dez. 2015, p. 666-682. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php? > Acesso em: 25 de setembro de 2016.

BATANERO, M.C.; GODINO,J.D.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatório**. Espanha: síntesis, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 21 Jun. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 21 Jun. 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio) -Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 21 jun., 2016.

BRASIL. Resolução CEB nº 3, de 26 de junho de 1998. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação**. Disponível em: < http://www.seduc.ro.gov.br/portal/legislacao/RESCNE003_1998.pdf>. Acesso em: 21 Jun. 2016.

DURO, M. L. **Análise Combinatória e construção de possibilidades**: o raciocínio formal no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. 106f. Porto Alegre: UFRS, 2012.

FARIAS,C.A. Prefácio. In: MENDES, I.A. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

GITIRANA, V. [et all]. **Repensando multiplicação e divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais.** 1ed. São Paulo: PROEM, 2014.

IEZZI, G. [et. al.] **Matemática**: ciência e aplicações. vol.2. 7ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LIMA, I. B. **O ensino de Combinatória no segundo ano do ensino médio**. 2015. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação) Recife: UFPE, 2015.

LIMA, R.C.G. **O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos**: do início da escolarização até o ensino médio. 2010,151f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco - UFPE. Recife, 2010.

MIGUEL, M. I.; MAGINA, S. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório.In: **II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2003, Santos/ SP. Anais do II SIPEM, 2003, p.

MOREIRA, F.M. B. **Os conhecimentos acerca dos conceitos de análise combinatória de professores que ensinam matemática**: um estudo diagnóstico. 2015. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual de Santa Cruz-UESC, 2014.

MORGADO, A.C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed., Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MORO, M.L.F. SOARES, M.T.C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educ. Mat. Pesqui**., São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 99-124, 2006.

MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C.; FILHO,J. A. C. Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano. **Zetetike**, v.18, n.33, p.211-241, jan/jun. Campinas: Unicamp, 2010.

OLIVEIRA, T. SANTANA, E. **O raciocínio combinatório revelado ao longo da Educação Básica**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. v.8(3), p 189-213, 2015.

MOREIRA, F.M. B. **Os conhecimentos acerca dos conceitos de análise combinatória de professores que ensinam matemática**: um estudo diagnóstico. 2015. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual de Santa Cruz-UESC, 2015.

PESSOA, C.A.S.; BORBA, R. E.S.R Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série**. Zetetike**, v.17, n.31. Campinas: Unicamp, 2009.

_______. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Revista de Estudos Internacionais e de Fronteira da UFPE**, v.1, n.1, 2010. Recife: UFPE, 2010, p. 1-22.

_______. **Problemas combinatórios: estratégias e respostas de alunos da Educação Básica.** In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), 5, 2012,

_______. Estudos em raciocínio combinatório**.** In: SOUZA, RUTE ELIZABETE DE. BORBA, ROSA. (Org.). **Processo de Ensino e aprendizagem em Educação Matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2013.

PESSOA, C. A. S., SANTOS, L. T. B.; SILVA, M. C. Colar ou escrever? Alunos do 5º ano do ensino fundamental discutindo combinatória a partir da resolução de problemas com material manipulativo ou com lápis e papel. In: XXI Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste, 2013, Recife/ PE. **Anais do XXI EPENN**. 2013, p. 1-20.

PESSOA, C. A.S. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 2009. 267f. Tese (Doutorado em Educação) Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE. Recife, 2009.

PESSOA,C. A. S., SANTOS,L.T.B. A influencia do contexto e do tipo de problema na compreensão de problemas combinatórios por alunos do 5º ano do ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista**. n. 43, Nov.2014, p.1-25.

PIAGET, J. INHELDER, B. **A origem do acaso na criança.** Rio de Janeiro: Record Cultural, 1951.

PIRES, R.F., **O uso da Modelação Matemática na construção do Conceito de Função**. 2009, 167f...Dissertação (Mestrado em...) Pontífice Universidade Católica de São Paulo,São Paulo, 2009.

SANTOS, J. P. O., MELLO, M.P. E MURARI, I.T.C. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SCHLIEMANN, A. L. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez. ed.16, 2011. p.107-122.

SCHLIEMANN, A. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: Carraher, T. N.; Carraher, D. W. & Schiliemann, A. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo : Cortez, 1988.

.
SILVA, M.C. **A combinatória**: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do ensino fundamental. 2016, 113f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

SILVA, P. E. L. da. **Problemas combinatórios condicionais: um olhar para o livro didático do Ensino Médio**.2015, 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) . Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

STOCCO, S. K.; DINIZ, M. I.. **Matemática ensino médio 2**. São Paulo: Saraiva, 2013.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didática da Matemática**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGNAUD,G. **O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática.** Educar em Revista. n.Especial 1/2011,p.15-27, Curitiba: Editora UFPR, 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questões contidas no teste piloto

Q1) Claúdia tem 3 blusas, 4 calças e 2 chapéus. Quantos *looks* diferentes ela pode formar, usando uma peça de cada? **(Produto cartesiano, parte-parte, pequeno)**

Q2) Quantos resultados diferentes são possíveis se obter somando dois números (repetidos ou não) do conjunto $G = \{3, 5, 11, 23\}$? **(Combinação com repetição pequeno)**

Q3) Foram selecionadas para uma entrevista 5 pessoas (André, Mateus, Joana, Carla e Bruna) que chegaram ao mesmo tempo à entrevista. De quantas maneiras, distintas, elas podem formar uma fila enquanto aguardam a sua vez? **(Permutação sem repetição grande).**

Q4) A diretoria de um clube é composta por 7 membros que podem ocupar o cargo de presidente, vice-presidente ou secretário. De quantas maneiras podemos formar, com esses membros, chapas que contenham presidente, vice-presidente e secretário? **(Arranjo sem repetição grande)**

Q5) Quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 2,5,6 e 8? **(Permutação sem repetição pequeno)**

Q7) Quantas sequências diferentes, de 4 símbolos, podemos formar com os símbolos abaixo?

△ △ □ ○ **(Permutação com repetição pequeno)**

Q8) Quantas comissões diferentes, de 3 pessoas, podem ser formadas a partir de um grupo com 10 pessoas? **(Combinação sem repetição grande)**

Q10) Um menino encontra-se em uma sorveteria que oferece 8 opções de sabores (chocolate, coco, tapioca, morango, cajá, maracujá, goiaba, manga). De quantas maneiras diferentes ele pode escolher um sorvete com três bolas, sabendo que ele pode repetir sabores, e que a ordem não importa? **(Combinação com repetição grande)**

Q11) Saussas é o nome de uma aldeia francesa. Quantos são os anagramas da palavra SAUSSAS?(Anagrama de uma palavra **é uma nova “arrumação” das letras dessa palavra.)** **(**Permutação com repetição grande**)**

Q12) Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 6 tenistas? **(Combinação sem repetição pequeno)**

Q13)Suponhamos que $x, y \ \epsilon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quantos pares ordenados, (x, y) distintos, podemos formar utilizando todos os valores possíveis para $x \ e \ y$? **(Arranjo com repetição grande)**

Q14) Quantas palavras de 3 letras, distintas, com ou sem significado, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR? **(Arranjo sem repetição pequeno)**

Q15) Numa lanchonete há 6 tipos de sanduíche, 5 tipos de refrigerante, 4 sabores de sorvete. Quantas opções de lanche podem ser formadas com 1 sanduiche, 1 refrigerante e 1 sorvete? **(Produto cartesiano, parte- parte, grande)**

Q16) Quantas palavras, distintas, de duas letras podem ser formadas a partir da palavra PANO, podendo repetir as letras? **(Arranjo com repetição pequeno)**

APÊNDICE B – Instrumentos diagnósticos do pré-teste e do pós-teste do estudo

Teste 1

Q1) Claúdia tem 3 blusas, 4 calças. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar, usando uma calça e uma blusa?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q2) Somando dois números do conjunto $G = \{3, 5, 11, 23\}$, repetidos ou não, quantos resultados diferentes são possíveis se obter?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q3) Saussas é o nome de uma aldeia francesa. Quantos são os anagramas da palavra SAUSSAS?(Anagrama de uma palavra **é uma nova "arrumação" das letras dessa palavra**)

Cálculo:

RESPOSTA____

Q4) A diretoria de um clube é composta por 7 membros que podem ocupar o cargo de presidente, vice-presidente ou secretário. De quantas maneiras podemos formar, com esses membros, chapas que contenham presidente, vice-presidente e secretário?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q5) Quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 2,5,6 e 8?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q7) Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 6 tenistas?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q8) Quantas comissões diferentes, de 3 pessoas, podem ser formadas a partir de um grupo com 10 pessoas?

Cálculo:

RESPOSTA____

Teste 2

Q10) Um menino encontra-se em uma sorveteria que oferece 8 opções de sabores (chocolate, uva, tapioca, morango, abacaxi, banana, goiaba, pitanga). De quantas maneiras diferentes ele pode escolher um sorvete com duas bolas, sabendo que ele pode repetir sabores. e que a ordem não importa?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q11) Foram selecionadas para uma entrevista 5 pessoas (André, Mateus, Joana, Carla e Bruna) que chegaram ao mesmo tempo à entrevista. De quantas maneiras, diferentes, elas podem formar uma fila enquanto aguardam a sua vez?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q12) Quantas sequências diferentes, de 4 símbolos, podemos formar com os símbolos abaixo?

△ △ □ ○

Cálculo:

RESPOSTA____

Q13) Suponhamos que $x, y \ \epsilon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quantos pares ordenados (x, y), distintos, podemos formar utilizando todos os valores possíveis para $x \ e \ y$?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q14) Quantas palavras de 3 letras, distintas, com ou sem significado, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q15) Numa lanchonete há 12 tipos de sanduíche, 5 tipos de refrigerante. Quantas opções de lanche podem ser formadas com 1 sanduiche e 1 refrigerante?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q16) Quantas palavras, distintas, de duas letras podem ser formadas a partir da palavra PANO, podendo repetir as letras?

Cálculo:

RESPOSTA____

Teste 3

Q1) Andreia tem 3 maiôs e 4 cangas. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar, usando um maiô e uma canga?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q2) Somando dois números do conjunto $G = \{5,7,13,17\}$, repetidos ou não, quantos resultados diferentes são possíveis se obter?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q3) Carrara é uma província na região da Toscana, na Itália. Quantos são os anagramas da palavra CARRARA?(Anagrama de uma palavra **é uma nova “arrumação” das letras dessa palavra**).

Cálculo:

RESPOSTA____

Q4) Em um tipo de corrida estão participando 7 atletas. De quantas maneiras estes atletas podem ocupar o primeiro, segundo e terceiro lugar?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q5) Quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 3, 5, 7 e 9?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q7) Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 6 jogadores de xadrez?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q8) Dos 10 alunos do 2º ano que gostam de xadrez, a professora Clébia pode escolher 3 para participarem de um campeonato. Quantos grupos diferentes ela pode formar?

Cálculo:

RESPOSTA____

Teste 4

Q10) Uma criança tem 8 opções de brincadeiras (carrinho, peão, boneca, bola, X-box, bicicleta, gude, dominó). De quantas maneiras diferentes ela pode escolher duas, sabendo que ele pode repetir brincadeiras e que a ordem não importa?

Cálculo:

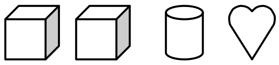
RESPOSTA____

Q11) Foram sorteadas para ganhar um lanche 5 pessoas (André, Mateus, Joana, Carla e Bruna) que chegaram ao mesmo tempo à lancheria. De quantas maneiras diferentes, elas podem formar uma fila enquanto aguardam a sua vez?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q12) Quantas sequências, diferentes, de 4 objetos, podemos formar com os objetos abaixo?



Cálculo:

RESPOSTA____

Q13) Suponhamos que $x, y \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Quantos pares ordenados (x, y), distintos, podemos formar utilizando todos os valores possíveis para x e y ?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q14) Quantas palavras de 3 letras, distintas, com ou sem significado, podem ser formadas com as letras da palavra GATO?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q15) Em um restaurante cada refeição é composta por uma salada e um prato quente. Sabendo que existem 5 tipos de saladas e 12 tipos de pratos quentes, quantos opções de refeições são compostas por um tipo de salada e um tipo de prato quente?

Cálculo:

RESPOSTA____

Q16) Quantas palavras, distintas, de duas letras podem ser formadas a partir da palavra MITO, podendo repetir as letras?

Cálculo:

RESPOSTA____

APÊNDICE C – Termo de consentimento livre e esclarecido para o responsável

Como pesquisadora, eu, Taianá Silva Pinheiro, aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, cuja orientadora é Profª. Dra. Sandra Magina, venho por meio deste, pedir a autorização para que seu/sua filho (a), estudante do 2º ano A, do Ensino Médio do Colégio Estadual Doutor Cleriston Andrade, participe como voluntário(a) da nossa pesquisa "**As estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio, antes e depois de ter estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória**". Esta tem por objetivo analisar as estratégias desenvolvidas por estudantes de uma turma do 2º ano do Ensino Médio, para identificar como se dá o raciocínio combinatório desses alunos. Com esta pesquisa pretendemos colaborar com uma forma mais agradável e efetiva de se ensinar Análise Combinatória. Para isso, elaboramos 2 testes contendo 16 questões envolvendo as operações combinatórias. Convidamos seu filho (a) para responder estes testes em dois momentos:15 dias antes de o professor iniciar o assunto de análise combinatória e 15 dias depois da última aula desse assunto. Este segundo teste terá as mesmas questões que o primeiro, sendo invertida somente a ordem em que as perguntas se encontram. Garantimos que estes testes não valerão como nota escolar. Todas essas atividades acontecerão dentro do horário normal de aula e contará com a presença do professor Robson Santos Conceição. O testes feitos por seu filho (a) serão analisados como dados da pesquisa. Esses dados ficarão guardados sigilosamente por mim e serão destruídos após 5 anos. Informamos que não haverá qualquer custo para nenhum dos estudantes participantes da pesquisa, nem remuneração, mas caso venha a ocorrer algum custo, por conta da pesquisa, esses serão ressarcidos. Garantimos, ainda, o direito à indenização, em caso de danos decorrentes da pesquisa. Quanto aos riscos que seu/sua filho (a) poderia sentir esses seriam: (a) o desconforto pela minha presença em sua sala de aula, o qual será minimizado pela presença do professor, (b) o constrangimento perante os colegas pelo eventual erro em uma ou mais questões do teste, o que debelaremos pela garantia do sigilo absoluto do desempenho dos estudantes e (c) o cansaço diante da quantidade de questões, que será reduzido com a aplicação do mesmo em duas aulas continuas, além de que, em conversa com o professor, o mesmo informou que já é costume trabalhar com essa quantidade de questões. Com relação aos benefícios, seu/sua filho(a) poderá adquirir mais conhecimentos matemáticos, sendo que estes não serão utilizados como avaliação escolar, ou seja, mesmo que seu/sua filho(a) erre na realização das atividades, isso não acarretará em uma nota insuficiente na escola. Além disso, os conceitos relativos à análise combinatória estão presentes no ano escolar em que ele se encontra e tais conceitos são utilizados no cotidiano do seu/sua filho (a). Desse modo, a pesquisa irá contribuir para a sua formação e também na solução de problemas diários. É importante informar que o anonimato de seu/sua filho (a) será preservado e que, a qualquer momento, ele poderá pedir mais esclarecimentos sobre esse projeto nos contatos indicados abaixo. Caso seu/sua filho (a) queira desistir, basta me avisar e este termo lhe será devolvido, e todas as informações e materiais coletados serão destruídos. Como responsável por este estudo, comprometo-me arcar com qualquer prejuízo de ordem física ou moral decorrente desta pesquisa. Para quaisquer esclarecimentos e/ou dúvidas, entrar em contato comigo, Taianá Pinheiro (cel: (73) 9100-1800) ou com a Profa. Dra.Sandra Magina (tel: (73) 3680-5136). Informo que o presente documento tem duas vias (uma para o(a) Senhor(a) e outra para o pesquisador).

____________________ ________________________

Taianá Silva Pinheiro Sandra Maria Pinto Magina Pesquisadora
responsável Professora Orientadora de Taianá Silva Pinheiro

Eu,____, responsável pelo (a) estudante ______________________________________, compreendi os objetivos e os procedimentos da pesquisa "**As estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio, antes e depois de ter estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória**" e assino este termo de consentimento, pois estou ciente de que meu/minha filho (a), estudante dessa escola, participará, em sala de aula e no horário normal da escola, de atividades de matemática propostas pelo pesquisador em parceria com o professor de matemática, da turma, com o objetivo de ajudá-lo(a) na apropriação de conceitos matemáticos.

____

Assinatura ou impressão datiloscópica do responsável pelo(a) estudante

Havendo impressão datiloscópica, seguem assinaturas das testemunhas

________________________________ ____

Nome:
Testemunha 1

Nome:
Testemunha 2

____________________, ___ de ____________ de 2015

APÊNDICE D – Termo de assentimento livre e esclarecido para o estudante participante

Como pesquisadora, eu, Taianá Silva Pinheiro, aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, cuja orientadora é Profª. Dra. Sandra Magina, venho por meio deste, pedir a sua autorização, estudante do 2º ano A, do Ensino Médio do Colégio Estadual Doutor Cleriston Andrade, participe como voluntário (a) da nossa pesquisa "**As estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio, antes e depois de ter estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória**". Esta tem por objetivo analisar as estratégias desenvolvidas por estudantes de uma turma do 2º ano do Ensino Médio, para identificar como se dá o raciocínio combinatório desses alunos. Com esta pesquisa pretendemos colaborar com uma forma mais agradável e efetiva de se ensinar Análise Combinatória. Para isso, elaboramos 2 testes contendo 16 questões envolvendo as operações combinatórias. Convidamos você para responder estes testes em dois momentos: 15 dias antes de o professor iniciar o assunto de análise combinatória e 15 dias depois da última aula desse assunto. Este segundo teste terá as mesmas questões que o primeiro, sendo invertida somente a ordem em que as perguntas se encontram. Garantimos que estes testes não valerão como nota escolar. Todas essas atividades acontecerão dentro do horário normal de aula e contará com a presença do professor Robson Santos Conceição. Os testes feitos por você serão analisados como dados da pesquisa. Esses dados ficarão guardados sigilosamente por mim e serão destruídos após 5 anos. Informamos que não haverá qualquer custo para nenhum dos estudantes participantes da pesquisa, nem remuneração, mas caso venha a ocorrer algum custo por conta da pesquisa, esses serão ressarcidos. Garantimos, ainda, o direito a indenização, em caso de danos decorrentes da pesquisa. Quanto aos riscos que você poderia sentir, esses seriam: (a) o desconforto pela minha presença em sua sala de aula, o qual será minimizado pela presença do professor, (b) o constrangimento perante os colegas pelo eventual erro em uma ou mais questões do teste, o que debelaremos pela garantia do sigilo absoluto do desempenho dos estudantes e (c) o cansaço diante da quantidade de questões, que será reduzido com a aplicação do mesmo em duas aulas continuas, além de que, em conversa com o professor, o mesmo informou que já é costume trabalhar com essa quantidade de questões. Com relação aos benefícios, você poderá adquirir mais conhecimentos matemáticos, sendo que estes não serão utilizados como avaliação escolar, ou seja, mesmo que você erre na realização das atividades, isso não acarretará em uma nota insuficiente na escola. Além disso, os conceitos relativos à análise combinatória estão presentes no ano escolar em que você se encontra e tais conceitos são utilizados no seu cotidiano. Desse modo, a pesquisa irá contribuir para a sua formação e também na solução de problemas diários. É importante informar que o seu anonimato será preservado e que, a qualquer momento, poderá pedir mais esclarecimentos sobre esse projeto nos contatos indicados abaixo. Caso queira desistir, basta me avisar e este termo lhe será devolvido, e todas as informações e materiais coletados serão destruídos. Como responsável por este estudo, comprometo-me arcar com qualquer prejuízo de ordem física ou moral decorrente desta pesquisa. Para quaisquer esclarecimentos e/ou dúvidas, entrar em contato comigo, Taianá Pinheiro (cel: (73) 9100-1800) ou com a Profa. Dra.Sandra Magina (tel: (73) 3680-5136). Informo que o presente documento tem duas vias (uma para o(a) Senhor(a) e outra para o pesquisador).

_____________________ _____________________________

Taianá Silva Pinheiro Sandra Maria Pinto Magina Pesquisadora
responsável Professora Orientadora de Taianá Silva Pinheiro

Eu,____, aluno(a) da turma do 2º ano A, compreendi os objetivos e os procedimentos da pesquisa "**As estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio, antes e depois de ter estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória**" e assino este termo de assentimento, pois estou ciente de que eu, estudante dessa escola, participarei, em sala de aula e no horário normal da escola, de atividades de matemática propostas pela pesquisadora em parceria com o professor de matemática, da turma, com o objetivo de me ajudar na apropriação de conceitos matemáticos.

____
Assinatura do estudante

_________________, ___ de ___________ de 2015

APÊNDICE E – Material elaborado para as aulas dos tipos combinatórios com repetição

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

De modo geral, se temos *n* elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1($a_1$representa, por exemplo, uma letra), n_2 são iguais a a_2($a_2$representa outra letra), n_3 são iguais a a_3,..., n_r são iguais a a_r, o número de permutações possíveis é dado por:

$$P_n^{(n_1,n_2,\dots,n_r)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$$

EXEMPLO

Vamos encontrar o número de anagramas formados a partir de:

a) SAMBA b) EDIFÍCIO c) PPASSARELA

a) São 5 letras ao todo, e a letra A é a única que aparece repetida 2 vezes.

Temos, então: $P_5^{(1,1,1,2)} = \frac{5!}{1!1!1!2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$

b) São 8 letras ao todo, e a letra *I* é a única que aparece repetida 3 vezes. (Desconsidere o acento gráfico)

Temos, portanto, $P_8^{(1,1,1,1,1,3)} = \frac{8!}{1!1!1!1!1!3!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = 6720$

c) São 9 letras ao todo. A letra *S* aparece 2 vezes, a letra *A* aparece 3 vezes, e as restantes aparecem uma única vez.

Temos, portanto, $P_9^{(1,1,1,1,2,3)} = \frac{9!}{1!1!1!1!2!3!} = \frac{9.8.7.6.5.4.3!}{2!3!} = 9.8.7.6.2 = 6048$

ARRANJO COM REPETIÇÃO

Seja $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ um conjunto com m elementos. Indicamos por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de m elementos tomados p a p. Cada arranjo com repetição é uma sequência de p elementos, na qual cada elemento pertence a M. Assim, o número de arranjos será:

$$(AR)_{m,p} = m^p$$

EXEMPLO

Seja $M = \{A, B, C, D\}$. Neste caso o número de elementos do conjunto é $m = 4$. Os arranjos com repetição desses 4 elementos tomados 2 a 2 (neste caso $p = 2$) formam 16 pares e encontramos elementos repetidos em alguns desses pares, pois os elementos podem se repetir:

{AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD}

$(AR)_{4,2} = 4^2 = 16$

<u>COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO</u>

Considere um conjunto de m elementos distintos. Escolha p elementos desse conjunto podendo repetir os elementos. O resultado é chamado uma combinação com repetição de m elementos tomados p a p. Denotamos o número destas combinações por $C_r\ (m,p)$. Aqui o número p poderá ser maior do que o número m de elementos.

EXEMPLO

Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $p = 3$. Os conjuntos $\{a, a, b\}$, $\{b, b, b\}$ e $\{c, c, c\}$ são exemplos de combinações com repetição destes 5 elementos escolhidos 3 a 3. O conjunto $\{b, a, a\}$ é o mesmo que $\{a, a, b\}$ e por isso não deve ser contabilizado.

Todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo até p vezes.

Fórmula: $C_r(m, p) = C(m + p - 1, p)$

Cálculo para o exemplo:

$C_r(5,3) = C(5 + 3 - 1,3) = C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7.6.5.4!}{3.2.4!} = 35$

Os conjuntos são:

$\{a, a, a\}$, $\{a, a, b\}$, $\{a, a, c\}$, $\{a, a, d\}$, $\{a, a, e\}$, $\{a, b, b\}$, $\{a, b, c\}$,

$\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, c\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$,$\{a, d, d\}$, $\{a, d, e\}$,

$\{a, e, e\}$ $\{b, b, b\}$, $\{b, b, c\}$, $\{b, b, d\}$, $\{b, b, e\}$, $\{b, c, c\}$, $\{b, c, d\}$,

$$\{b,c,e\}, \{b,d,d\}, \{b,d,e\}, \{b,e,e\}, \{c,c,c\}, \{c,c,d\}, \{c,c,e\},$$

$$\{c,d,d\}, \{c,d,e\}, \{c,e,e\}, \{d,d,d\}, \{d,d,e\}, \{d,e,e\}, \{e,e,e\}$$

Observe que todos os conjuntos aparecem ordenados, mas não é necessário que assim seja; neste caso é apenas uma questão de sistematização.

EXERCÍCIOS

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

1º) Permutando os algarismos 3, 2, 3, 4, 4 e 5, quantos números de 6 algarismos podemos formar?

2º) Uma moeda é lançada 5 vezes . De quantos modos distintos podem ser obtidas 2 caras e 3 coroas?

3º) Calcule o número de anagramas obtidas a partir de ARARA?

4º)Uma equipe de futebol disputou 8 jogos em um torneio: venceu 4, perdeu 2 e empatou 2. De quantos modos distintos pode ter ocorrido a sequência de resultados?

ARRANJO COM REPETIÇÃO

1º) Quantos números com 4 algarismos podemos formar com os algarismos : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 ?

2º) Quantas palavras com 3 letras podemos formar com as 26 letras do nosso alfabeto?

3º) Quantas palavras,compostas por 3 letras, podemos formar com as letras do nome T,A,D, E, U ?

4º) Uma bandeira retangular foi dividida em três retângulos menores, tendo como opção, para pintar a bandeira, as seguintes cores: lilás, amarelo, vermelho, preto, de quantos modos a bandeira pode ser pintada, sabendo que os retângulos menores podem ter a mesma cor?

COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

1º) Determinar o número de combinações com 4 elementos tomados com repetição de 7 livros.

2º) Determinar o número de combinações, com repetição, de 4 objetos tomados 2 a 2.

3º) Nos correios vendem-se 5 tipos de postais. De quantas maneiras diferentes é possível comprar 7 postais?

ANEXOS

ANEXO A – Caderno do aluno

23 09 2015

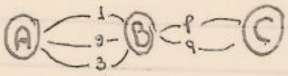
Quarta-feira, 23 Setembro

Análise combinatória - contagem

→ Princípio Fundamental da Contagem - P.F.C ou princípio multiplicativo

Problema Motivador

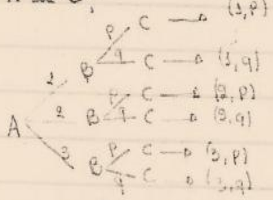
3 cidades ligadas estradas



3 · 2 = 6

De quantas formas diferentes podemos ir de:

a) A até C?



6 possibilidades para ir de A até C.

b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C e depois voltar para A?

A → B   B → C   C → B   B → A

$\underbrace{3 \cdot 2}_{6} \cdot \underbrace{2 \cdot 3}_{6}$

$\underbrace{6 \cdot 6}_{36}$

c) De quantas formas podemos ir de A até C e depois voltar para A, sem repetir estradas?

A → B   B → C   C → B   B → A

$\underbrace{3 \cdot 2}_{6} \cdot \underbrace{1 \cdot 2}_{2}$

$\underbrace{6 \cdot 2}_{12}$

Def.: Se há x modos de tomar uma decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é o produto $\boxed{x \cdot y}$

Ex.: Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, pode-se formar quantos números ...

a) De 4 algarismos?

$\cancel{0}$ não pode

$\underline{7} \cdot \underline{8} \cdot \underline{8} \cdot \underline{8} = 3584$ → 0 à 7

$\underbrace{7 \cdot 8}_{56} \cdot \underbrace{8 \cdot 8}_{64}$

$56 \cdot 64 = 3584$

b) De 4 algarismos distintos?

$\cancel{0}$ → 0 à 7

$\underline{7} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5}$

$49 \cdot 30$

1470

c) Ímpares de 3 algarismos distintos?

$\cancel{0}$ 1,3,5,7

$\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{4} = 144$ 0 à 7

$36 \cdot 4$

144

d) Pares de 4 algarismos?

$\cancel{0}$ 0,2,4,6

$\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} = 720$ 0 à 7

$36 \cdot 20$

720

Problema: No lançamento simultâneo de 5 moedas, em que pode sair cara ou coroa em cada uma, quantos e quais são os resultados possíveis?

CCCCC	CCCKK	CCKCK	CKKKC	CKKCK	KCCKC
CCCCK	CCKKC	KCCCK	CCKKK	CKKKK	KKKKK
CCCKC	CKKCC	KCKCK	CKCKK	KCKKK	
CCKCC	KKCCC	KKKCC	KKCCK	KKCKK	
CKCCC	KCKCC	KKCKC	KKKCC	KKKCK	
KCCCC	KCCKC	[illegible]	KCCKK	KKKKC	

30 09 2015

Quarta-feira Setembro

Problema 2: Com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 6, quantos números de:

a) 3 algarismos podemos formar?

$\underline{\cancel{0}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad} = 100$

$4 \cdot 5 \cdot 5$

$4 \cdot 25$

100

b) 3 algarismos distintos podemos formar?

$\underline{\cancel{0}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad} = 48$

$4 \cdot 4 \cdot 3$

$16 \cdot 3$

48

Quarta-feira, 30 de Setembro

Permutação Simples

- Permutação simples de n elementos distintos é todo agrupamento ordenado formado por esses n elementos.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots$$

ou

$$P = n! \quad (\text{! sign. fatorial})$$

Nos exemplos que resolvemos sobre quantidade de algarismos distintos, trata-se de Permutação

Ex.: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$P_3 \; 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Calcule

$P6 + P3 =$

$P6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

$P3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$P6 + P3 = 720 + 6 = 726$

Arranjo simples

- É todo agrupamento ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Assim:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

01 do 2015

Quinta-feira Outubro

Ex.: $A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4.3.\cancel{2}.\cancel{1}}{\cancel{2}.\cancel{1}!} = 360$

$A_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = \frac{8.7.6.5.4.3.\cancel{2}.\cancel{1}!}{\cancel{2}.\cancel{1}!} = 20.160$

$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3.2.\cancel{1}!}{\cancel{1}!} = 6$

Ex.: Com relação aos anagramas da palavra [illegible], qual é o número:

a) total deles?

$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1! = 720$ anagramas

b) dos que começam e terminam com [illegible]?

$3.P_5 = 3.(5.4.3.2.1!) = 3.120 = 360$

c) dos que mantêm as letras E, S, A juntas e nessa ordem? [illegible]

$A_3 , 3 . P_4$

$\frac{3!}{(3-3)!} . 4!$ $\frac{3!}{1!} = 4.3.2.1!$ [illegible] $= 144$

Quinta-feira, 1 de Outubro

Problemas e Exercícios

Página 105

1) 28

0-0	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5	6-6
0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	
0-2	1-3	2-4	3-5	4-6		
0-3	1-4	2-5	3-6			
0-4	1-5	2-6				
0-5	1-6					
0-6						

3- 6 lados de cada

São possíveis 11 somas.

4- 2,3,4,5,6,7 e 8

São possíveis 7 somas.

5- 2,3,4,5,6,7,8,9 e 10

São possíveis 9 somas.

b) 2,4,6,8,10,12 e 14

São possíveis 7 somas.

c) 2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17 e 18

São possíveis 16 somas.

Quinta-feira, [illegible] de Outubro

Combinações

São agrupamentos em que não se considera a ordem dos elementos, isto é, mudanças na ordem dos elementos não alteram o agrupamento.

Ex.: Um pintor, por exemplo, as misturas de duas cores primárias, azul e vermelho, a ordem da mistura não altera na cor final.

Vermelho e Azul   Azul e Vermelho

Misturas Iguais

Def.: Dados os m elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$ chama-se combinação simples de p elementos de I todo subconjunto de I formado por p elementos com $\{m, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leq m$.

$$C_{m,p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

Continuação de Problemas e Exercícios

d) [illegible] dado [illegible]

[illegible] 3 [illegible] 1.

[illegible]

6- 424 e 2442.

b) 90 [illegible] palíndromo. $10 \times 9 = 90$

c) [illegible] $5 \times 9 = [illegible]$

d) Não, porque deve ser igual [illegible]

7- 360

b) [illegible]

8- CALO e LOAO

P [illegible]

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

d) 18

9- 1

ANEXO B – Diário de classe

GOVERNO DO ESTADO DA BAHIA
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DA BAHIA

[redacted]

Código da UEE: [redacted]

Periodo Letivo: 2015
Tipo de Ensino: ENSINO REGULAR — Modalidade: MÉDIO — Submodalidade: MÉDIO
Série 2ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO — Turma: 2ª A-M — Turno: MATUTINO

Disciplina: MATEMÁTICA	Professor: [redacted]
Unidade: III UNIDADE,	Aulas Previstas: 34 — Aulas Dadas:

Nº Aula	Data	ASSUNTO	ASSINATURA
1	05/08	Início III Unidade	[illegible]
2	05/08	Determinantes	[illegible]
3	06/08	Exercícios complementares	[illegible]
4	12/08	Construção dos trabalhos	[illegible]
5	12/08	Construção dos trabalhos	[illegible]
6	13/08	Determinantes de matrizes 2x2 e 3x3	[illegible]
7	19/08	Atividade avaliativa	[illegible]
8	19/08	Atividade avaliativa	[illegible]
9	20/08	Regra de Sarrus (história)	[illegible]
10	26/08	Cofator de uma matriz	[illegible]
11	26/08	Teorema de Laplace	[illegible]
12	02/09	Apresentação	[illegible]
13	02/09	Apresentação	[illegible]
14	03/09	Apresentação	[illegible]
15	09/09	Avaliação. Revisão	[illegible]
16	09/09	Avaliação	[illegible]
17	16/09	Simplificação do cálculo de determinantes	[illegible]
18	16/09	Exercícios	[illegible]
19	17/09	Teorema de Jacobi e Regra de Chió	[illegible]
20	23/09	Análise Combinatória: Contagem. PFC	[illegible]
21	23/09	Fatorial de um número natural	[illegible]
22	24/09	Permutações	[illegible]
23	30/09	Arranjo simples	[illegible]
24	30/09	Combinação simples	[illegible]
25	01/10	Exercícios	[illegible]
26	07/10	Arranjo com repetição	[illegible]
27	07/10	Permutação com repetição	[illegible]
28	08/10	Combinações com repetições	[illegible]
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			

ASSINATURA DO VICE-DIRETOR

/ / DATA

[redacted]
ASSINATURA DO PROFESSOR

ANEXO C – Carta de anuência

Cidade, (dia) de (mês) de (ano)

Ao:
Comitê de Ética em Pesquisa com seres humanos
Universidade Estadual de Santa Cruz
Senhor(a) Coordenador(a) do CEP-UESC

Eu, (**diretor da escola**), responsável pelo (**nome da instituição**), conheço o Protocolo de Pesquisa intitulado (**título do projeto**) desenvolvido pela pesquisadora (**nome do autor**), e concordo com sua realização após a apresentação do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido devidamente preenchido e assinado pelas partes.
O início desta pesquisa neste Serviço só poderá ocorrer a partir da apresentação da carta de aprovação do Sistema CEP/CONEP.

Atenciosamente,

____

(**Assinatura do diretor da escola**)

ANEXO D – Autorização do professor

Cidade, (dia) de (mês) de (ano)

Ao:
Comitê de Ética em Pesquisa com seres humanos
Universidade Estadual de Santa Cruz
Senhor(a) Coordenador(a) do CEP-UESC

Eu, (**nome do professor**), professor de matemática da turma de (**ano escolar**),do Ensino Médio no (**nome da escola**), conheço o Protocolo de Pesquisa intitulado (**nome do projeto**) desenvolvido pela pesquisadora (**nome do autor**), a qual me entregou seu projeto de pesquisa na íntegra e o discutiu comigo, esclarecendo todas as minhas dúvidas. Assim sendo, eu concordo com sua realização após a pesquisadora ter apresentado o projeto tanto aos estudantes do 2º ano quanto aos seus responsáveis, obtendo desses últimos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido devidamente preenchido e assinado pelas partes.
O início desta pesquisa neste Serviço só poderá ocorrer a partir da apresentação da carta de aprovação do Sistema CEP/CONEP.

Atenciosamente,

____

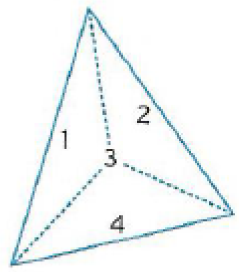
(**assinatura do professor**)

ANEXO E – Exercícios do livro didático

EXERCÍCIOS

Página 108

1. Quantas peças tem um jogo de dominó? Quais são elas?
2. No lançamento simultâneo de 5 moedas, no qual pode sair cara ou coroa em cada uma, quantos e quais são os resultados possíveis?
3. Em jogo com 2 dados comuns, quais e quantas são as somas possíveis de todos os números que poderão sair na face superior quando os 2 dados forem lançados?
4. Imagine o mesmo jogo do exercício anterior, agora com 2 dados em forma de tetraedros regulares com faces numeradas de 1 a 4. Quantas e quais são as somas possíveis?



5. Quais e quantas seriam as somas se:
   a) Jogássemos um dado convencional com um tetraédrico?
   b) Jogássemos 2 dados tetraédricos numerados com os 4 primeiros números ímpares?
   c) Jogássemos 3 dados para este problema.
6. *Palíndromo* é um número que tanto da esquerda para a direita, como da direita para a esquerda, tem a mesma leitura. Como 121, 13531, 122221.
   a) Dê um exemplo de números palíndromos de 3 e de 4 algarismos.
   b) Quantos números palíndromos de 3 algarismos há em nosso sistema de numeração?
   c) Com os algarismos 1,3,5,7 e 9, quantos palíndromos de 4 algarismos conseguimos formar?
   d) É possível que um número palíndromo tenha todos os seus algarismos diferentes? Por quê?
7. a) De quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem se acomodar em uma perua que leva 4 passageiros atrás e 2 na frente?

   b) Nessa mesma perua, de quantas maneiras diferentes as 6 pessoas poderão se sentar na parte de trás se uma delas insiste em dirigir?
8. Usando todas as letras de uma palavra, podemos formar *anagramas* com elas. Os anagramas foram muito utilizados no passado como códigos de mensagens secretas e hoje ainda são usados como códigos de computadores e em jogos.

a) CAOL é um dos anagramas da palavra COLA. Dê outros dois anagramas para essa palavra, sendo que um deles não precisa ser uma palavra compreensível
b) Quantos anagramas podemos obter a partir da palavra COLA?
c) Quantos anagramas da palavra COLA começam com C?
d) Quantos anagramas da palavra COLA não começam com L?

9. Alguns truques com palavras também envolvem a Matemática. Veja: De quantas maneiras distintas podemos obter a palavra AMO partindo sempre do A e indo para a direita e/ou para baixo?

A	M	O
M	O	
O		

10. Usando a regra do exercício 9, determine de quantas maneiras diferentes podemos obter a palavra AMORA.

A	M	O	R	A
M	O	R	A	
O	R	A		
R	A			
A				

<u>Página 111</u>

13. Um salão de festas tem 8 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair dele uma única vez?
14. Com as letras do alfabeto e os algarismo do sistema decimal, quantas placas podem ser fabricadas com 3 letras seguidas de 4 algarismos, sabendo que não podem ser feitas placas com 4 algarismos zero?
15. As placas dos automóveis eram formadas por 2 letras e 4 algarismos, sendo ao menos um deles diferente de zero. Hoje, no entanto, as placas são formadas por 3 letras e 4 algarismos, que não podem ser todos iguais a zero. Em quanto foi possível aumentar a frota de automóveis com a mudança das placas?
16. Considere estes meios de transporte utilizados para o deslocamento entre as cidades.
    - A e B: ônibus, trem e avião.
    - B e C: ônibus e trem.
    - C e D: ônibus, trem, avião e navio.

    Calcule o número de modos de fazer o percurso:

a) A-B-C-D
b) A-B-A
c) A-B-C-D-C
d) B-C-D-C

17. Em um colégio, existem 2 rampas do andar térreo para o 1º andar, 4 escadas do 1º para o 2º andar e 3 escadas do 2º para o 3º andar. Calcule o número de trajetos possíveis para um aluno se deslocar:
    a) Do andar térreo para o 2º andar.
    b) Do 2º andar para o 3º e, a seguir, para o térreo.
18. Com os algarismos 3, 4 e 5 calcule a quantidade de números que podemos formar com:
    a) 2 algarismos
    b) 2 algarismos distintos

<u>Página 116</u>

28. Calcule o valor de :

a) 8!

b) 9!

c) 4!+5

d) $(3!)^2 - 5.5!$

29. Simplifique

a) $\frac{10!}{9!}$ b) $\frac{12!}{13!}$ c) $\frac{6 \cdot 7!}{6! \cdot 5}$ d) $\frac{30!}{27!3!}$

30. Efetue

a) $\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}$ b) $\frac{10!+9!}{9!-8!}$

b)

37. Simplifique

a) $\frac{A_{n,3}}{A_{n-1,2}}$ b) $\frac{A_{2n,2}}{A_{2n+1,2}}$

38. Resolva as equações

a) $A_{n,2} = 56$ b) $A_{n,3} = 8 \cdot A_{n,2}$