



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**CAIO SÉRGIO OLIVEIRA XAVIER**

**AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM  
UTILIZANDO A LÓGICA FUZZY**

**ILHÉUS-BAHIA  
2015**

**CAIO SÉRGIO OLIVEIRA XAVIER**

**AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM  
UTILIZANDO A LÓGICA FUZZY**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira e co-orientação da Prof. Dra. Aída Carvalho Vita.

**ILHÉUS-BAHIA  
2015**

X3

Xavier, Caio Sérgio Oliveira.

Avaliação da aprendizagem em matemática:  
uma abordagem utilizando a lógica fuzzy / Caio  
Sérgio Oliveira Xavier. – Ilhéus, BA: UESC, 2015.  
162f. : il. ; anexos.

Orientador: Eduardo Silva Palmeira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Esta-  
dual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação  
em Educação Matemática.

Inclui referências e apêndice.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Avalia-  
ção. 3. Teoria dos conjuntos. 4. Conjuntos difusos.  
5. Triângulo. I. Título.

CDD 510.07

**CAIO SÉRGIO OLIVEIRA XAVIER**

**AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM  
UTILIZANDO A LÓGICA FUZZY**

Dissertação apresentada a banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Ilhéus, 13 de Agosto de 2015.

**BANCA EXAMINADORA**



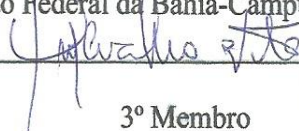
1º Membro

Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira (orientador)  
Universidade Estadual de Santa Cruz



2º Membro

Prof. Dr. Fábio Moraes Amaral  
Instituto Federal da Bahia-Campus Eunápolis.



3º Membro

Prof. Dr.ª Aída Carvalho Vitta (Co-Orientadora)  
Universidade Estadual de Santa Cruz

A DEUS, aos meus pais e minha família que sempre me apoiaram e forneceram o subsídio para buscar essa conquista profissional e pessoal.

## AGRADECIMENTOS

Chegou o momento que tanto esperei nesses últimos anos e como não poderia deixar de dedicar um espaço especial para agradecer a aqueles que vivenciaram ao meu lado esse período tão especial em minha vida.

A **Deus**, por me conceber assim pecador e mesmo assim não desistir de mim em nenhum momento. Obrigado pelo conforto, saúde, paz e força que suas palavras e ensinamentos passam para mim. Espero levar a aqueles que não conhecem a ti, as maravilhas que fizestes em minha vida.

Aos meus pais **Genário** e **Sueli** todo o amor do mundo. Obrigado por entender minhas necessidades e por todo o carinho, dedicação e apoio necessários nos momentos mais difíceis. Obrigado mãe pelos momentos em que estava enclausurado na minha “suíte” e a senhora se fez tão preocupada com minha alimentação, bem-estar.

Aos meus **amigos e familiares** por todo o carinho e atenção comigo. Nos momentos difíceis, estavam ali solidários com a minha causa, não deixando eu desistir do meu objetivo. Em especial, agradeço aos “**primeiros e eternos**” amigos que conheci no Ensino Básico e que levarei comigo para sempre. A família **EJC** por ter me proporcionado voltar ao caminho do Senhor, ganhando assim mais irmãos e irmãs em Cristo.

Ao meu orientador, professor Dr. **Eduardo Silva Palmeira** que acreditou na proposta da pesquisa e pela paciência e orientação para o desenvolvimento da pesquisa. A Co-orientadora professora Dr<sup>a</sup>. **Aída Carvalho Vita**, que aceitou entrar nessa investigação, dando contribuições pertinentes. A vocês dois, meu muito obrigado, a oportunidade de realizar esse estudo ao lado de vocês me fez crescer significativamente como pesquisador. Agradeço também a professora Dr<sup>a</sup> **Verônica Yumi Kataoka** pelas contribuições oferecidas no grupo de pesquisa, assim como, na reta final para a entrega da dissertação, colaborando para o desenvolvimento da pesquisa.

Ao professor Dr. **Fabíolo Moraes Amaral** por aceitar participar da minha banca e pelas importantes contribuições.

A **Universidade Estadual de Santa Cruz** pela oportunidade de cursar o referido curso de pós-graduação, pela infraestrutura disponível e pelos docentes que colaboraram para a minha formação.

A todo o **PPGEM**, de professores a funcionários, um programa que vi nascer e tenho a honra de fazer parte. Obrigado a todos pelos momentos de ensino e de puxão de orelha.

Aos meus **colegas de turma**, os quais vivenciaram todos os momentos de alegrias, angústias e dedicação durante o curso. Que turma foi essa!!! Primeira vez que vi me senti um “peixe fora d’água”, todavia, com o passar do tempo fui compreendendo e adquirindo um carinho por cada um de vocês. Não poderia deixar de salientar aqueles que mais aguentaram meus abusos e chatices: **Lemerton, Camila, Marcelo e Mateus**; obrigado por tudo!!

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (**FAPESB**) pela bolsa e pelo auxílio fornecido, possibilitando dedicar-me exclusivamente à realização dessa pesquisa.

Enfim, no final desse ciclo, só tenho a agradecer por cada lágrima e sorriso, entrei nesse mestrado uma pessoa inexperiente e saio sabendo que tive avanços, mas que a produção de conhecimentos é um processo contínuo e dinâmico, assim, os estudos não podem parar.

XAVIER, C.S.O. **Avaliação da Aprendizagem em Matemática: uma abordagem utilizando a Lógica Fuzzy**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015<sup>1</sup>. 162 f.

## RESUMO

O objetivo geral dessa investigação consistiu em desenvolver uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos; e os objetivos específicos foram: investigar os métodos de avaliação utilizados pelos professores no contexto escolar pesquisado e elaborar uma Sequência de Ensino envolvendo área de triângulos fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, visando avaliar o aspecto cognitivo. Sendo assim, essa pesquisa foi fundamentada na Teoria dos Conjuntos Fuzzy (TCF) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). A TCF permite a investigação de situações que envolvem a subjetividade e imprecisão, situação que ocorre na avaliação por meio de variáveis linguísticas. A TRRS trata-se de uma abordagem cognitiva, relacionada à obtenção de conhecimentos, que permite ao sujeito compreender um determinado conceito matemático, que pode ser representado utilizando alguns registros semióticos como a representação algébrica, representação gráfica e representação analítica. Dado os objetivos estabelecidos, optou-se por desenvolver a pesquisa em duas fases, a saber: diagnóstica e a construção da proposta. Na primeira fase, os sujeitos da pesquisa foram quatro professores de matemática e uma coordenadora pedagógica de uma unidade escolar do interior da Bahia cuja avaliação ocorria por meio de variáveis linguísticas. Para a coleta de dados foram realizadas entrevistas estruturadas e observação não participante da prática de um dos professores entrevistados. Os dados da entrevista foram coletados por meio de produções escritas. Os dados da observação não participante foram coletados utilizando um diário de bordo. Esses dados foram analisados qualitativamente e por meio desses resultados foi possível identificar a assiduidade, aquisição do conhecimento, comportamento, compromisso, a participação dos estudantes nas atividades propostas, como alguns dos critérios adotados pelos professores para avaliar o desempenho dos estudantes. Na segunda fase, estabeleceu-se uma proposta avaliativa estabelecida com base na TCF, utilizando o software Matlab para analisar o desempenho dos estudantes nos aspectos afetivos, cognitivos e psicomotor, testando sua aplicabilidade com a simulação de notas fictícias. Como sugestão para avaliação dos aspectos cognitivos, foi elaborada uma Sequência de Ensino (SE), sistematizada em cinco etapas, para levar os estudantes a deduzir a fórmula do cálculo da área de triângulos. Nessas atividades, privilegiou-se as diversas representações desse objeto matemático: representação natural, representação numérica, representação algébrica e representação figural de forma a levar o estudante a associar esses diferentes tipos de representação. De forma geral, percebeu-se como contribuição do uso da TCF, a possibilidade de construir uma proposta que permeie as diferentes concepções dos professores, pois a mesma pode se adequar aos critérios por eles adotados, além de contemplar aos diversos instrumentos utilizados para a avaliação discente e permitir a criação de regras condizentes com a realidade do ambiente de aprendizagem. Ao desenvolvermos uma sequência de ensino como uma maneira de avaliar os aspectos cognitivos, espera-se propiciar aos estudantes a oportunidade de compreender a dedução da fórmula da área de triângulos de maneira espontânea. Outro fator que ressaltamos está no uso de diferentes representações desse conceito matemático, permitindo ao estudante analisar e interpretar as

---

<sup>1</sup> Pesquisa sob a orientação do Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira e co-orientação da Prof<sup>ª</sup> Dra. Aída Carvalho Vita.



diversas representações, estimulando o desenvolvimento da reflexão e habilidades matemáticas. Por fim, tem-se como expectativa que essa investigação possa colaborar com a avaliação do desempenho como uma prática educativa que privilegie a diversos aspectos e que, por conseguinte, seja repensada e desmitificada como uma atividade apenas para “atribuir uma nota ou conceito” ao estudante.

**Palavras chave:** Avaliação. Triângulos. Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

## ABSTRACT

The overall main of this research was to develop a proposal based on Fuzzy Theory for evaluating the performance of students in activities involving the triangles area; and the specific objectives were to investigate the assessment methods used by teachers in the school environment searched and draw up a teaching sequence involving triangles area based on the Theory of Semiotics Representation Registers to evaluate the cognitive aspect. Therefore, this research was based on the Theory of Fuzzy Sets (TCF) and Theory of Semiotics Representation Registers (TRRS). TCF allows the investigation of cases involving the subjectivity and imprecision, situation that occurs in the evaluation by means of linguistic variables. TRR it is a cognitive approach related to obtaining knowledge, which allows the person to understand a particular mathematical concept, which can be represented using some semiotic records as the algebraic representation, graphical representation and analytical representation. Given the established objectives, it was decided to develop the research in two phases, namely: diagnostic and the proposal construction. In the first phase, the subjects were four math teachers and a pedagogical coordinator of a school unit from a small city of Bahia whose evaluation occurred by means of linguistic variables. For data collection were carried out structured interviews and non-participant observation of practice of one of the teachers interviewed. The interview data were collected through written productions. Data from non-participant observation were collected using a logbook. These data were analyzed qualitatively and through these results were identified the attendance, acquisition of knowledge, behavior, commitment, student participation in the proposed activities, as some of the criteria used by teachers to evaluate student performance. In the second phase, it was set up an evaluation proposal based on TCF, using the Matlab software to analyze student performance in the affective, cognitive and psychomotor, testing its applicability to the simulation of fictitious notes. As a suggestion for assessment of cognitive aspects, it was elaborated a Teaching Sequence (SE), systematized into five stages, to make students to deduce the formula for calculating the triangle area. In these activities, it was privileged the different representations of this mathematical object: natural representation, numerical representation, algebraic representation and figural representation in order to make the student to associate these different types of representation. Overall, it was realized as a contribution of the use of TCF, the possibility of building a proposal that permeate the different conceptions of the teachers, because it can fit the criteria they adopted, besides contemplating the different instruments used for student assessment and enable the creation of consistent rules to the reality of the learning environment. By developing a teaching sequence as a way to assess the cognitive aspects, it is expected to give students the opportunity to understand the derivation of the formula of triangles area spontaneously. Another fact that we stress out is the use of different representations of this mathematical concept, allowing the student to analyze and interpret the various representations, stimulating the development of thinking and math skills. Finally, we have as an expectation that this research can collaborate with the assessment of performance as an educational practice that privileges the various

---

<sup>2</sup> Research under the guidance of Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira and co-supervision of Prof<sup>a</sup> Dra. Aída Carvalho Vita.

aspects and therefore it is reconsidered and demystified as an activity only for "assign a grade or concept" to the student.

**Keywords:** Evaluation, Triangles, Theory of Fuzzy Sets, Theory of Semiotics Representation Registers.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b>	<b>Representação geral de uma função de pertinência .....</b>	<b>39</b>
<b>Figura 2:</b>	<b>Conjunto Fuzzy representando o conceito de temperatura alta .....</b>	<b>40</b>
<b>Figura 3:</b>	<b>Esquema Geral do Sistema Baseado em Regras Fuzzy.....</b>	<b>44</b>
<b>Figura 4 :</b>	<b>Crerios avaliativos dos professores pesquisados .....</b>	<b>88</b>
<b>Figura 5:</b>	<b>Esquema da proposta de avaliaçao .....</b>	<b>98</b>
<b>Figura 6:</b>	<b>Toolbox Fuzzy .....</b>	<b>123</b>
<b>Figura 7:</b>	<b>Proposta de avaliaçao do desempenho dos estudantes.....</b>	<b>125</b>
<b>Figura 8:</b>	<b>Gráfico das funçoes de pertinencia para as variaveis de entrada.....</b>	<b>128</b>
<b>Figura 9:</b>	<b>Conjunto de base de regras no Sistema Fuzzy.....</b>	<b>131</b>
<b>Figura 10:</b>	<b>Modelo de Inferencia de Mamdani. ....</b>	<b>133</b>
<b>Figura 11:</b>	<b>Mapeamento de entrada-saida do sistema de avaliaçao .....</b>	<b>133</b>

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1: Classificação dos diferentes registros no funcionamento matemático...</b>	<b>32</b>
<b>Quadro 2: Exemplo das situações de aprendizagem .....</b>	<b>36</b>
<b>Quadro 3: Correspondência entre a organização em ciclos e séries do contexto pesquisado.....</b>	<b>74</b>
<b>Quadro 4: Indicadores avaliativos utilizados na rede municipal investigada.....</b>	<b>76</b>
<b>Quadro 5: Concepção dos professores sobre a avaliação.....</b>	<b>86</b>
<b>Quadro 6: Funções de pertinência dos termos linguísticos.....</b>	<b>127</b>
<b>Quadro 7: Exemplos das bases de regras presentes na proposta de avaliação.....</b>	<b>130</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1:</b>	<b>Ilustração das operações entre Conjuntos Fuzzy.....</b>	<b>42</b>
<b>Tabela 2:</b>	<b>Perfil dos sujeitos da pesquisa.....</b>	<b>78</b>
<b>Tabela 3:</b>	<b>Correlação entre os indicadores avaliativos do município e a avaliação do professor.....</b>	<b>96</b>
<b>Tabela 4:</b>	<b>Simulação do desempenho de Joãozinho.....</b>	<b>132</b>
<b>Tabela 5:</b>	<b>Correlação entre os indicadores avaliativos do município e as variáveis utilizadas na proposta .....</b>	<b>134</b>
<b>Tabela 6:</b>	<b>Comparação entre o Índice Clássico e o Índice Fuzzy .....</b>	<b>136</b>
<b>Tabela 7:</b>	<b>Bases de Regras ativadas com as notas do estudante.....</b>	<b>137</b>

## LISTA DE SIGLAS

CAD	Ciclo da Adolescência
CAD III	Ciclo da Adolescência - Fase III
CEFET	Centro Federal de Educação Tecnológica
EBEM	Encontro Baiano de Educação Matemática
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FIFA	Fundação Internacional de Futebol
IFSP	Instituto Federal de São Paulo
IREM	Instituto de Pesquisa em Matemática
RJ	Rio de Janeiro
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
UEA	Universidade do Estado do Amazonas
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
UNFEB	Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos

TRI

Teoria de Resposta ao Item



## LISTA DE ABREVIATURAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
EAD	Educação a Distância
EF	Ensino Fundamental
GA	Geometria Analítica
MATLAB	Matrix Laboratory
SE	Sequência de Ensino
SBRF	Sistema Baseado em Regras Fuzzy
TRI	Teoria de Resposta ao Item
TCF	Teoria dos Conjuntos Fuzzy
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
CC	Conhecimento Cognitivo
PA	Participação em Atividades
AC	Assiduidade e Comportamento

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>20</b>
<b>I. REREFENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>31</b>
<b>1.1. Teoria dos Registros de Representação Semiótica .....</b>	<b>31</b>
1.1.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e os Conceitos de Geometria .....	35
<b>1.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy: estudo em torno das incertezas.....</b>	<b>37</b>
1.2.1 Conjuntos Fuzzy .....	38
1.2.2 Operações entre Conjuntos Fuzzy .....	41
1.2.3 Variáveis Linguísticas.....	43
1.2.4 Sistema Baseado em Regras Fuzzy .....	44
<b>II. REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>49</b>
<b>2.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o Processo de Ensino e Aprendizagem de Geometria .....</b>	<b>49</b>
<b>2.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy e a Avaliação do Desempenho dos Estudantes..</b>	<b>58</b>
<b>III.PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>72</b>
<b>3.1 Primeira Fase da Pesquisa .....</b>	<b>73</b>
3.1.1 O contexto de Investigação.....	73
3.1.2 Sujeitos da pesquisa .....	77
3.1.3 Instrumentos para a coleta de dados .....	78
3.1.4 Procedimentos para a coleta dos dados .....	80
3.1.5 Procedimentos de análise dos dados .....	81
<b>3.2 Segunda Fase da Pesquisa .....</b>	<b>82</b>
<b>IV. ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>85</b>
<b>4.1 Análise dos Resultados da Primeira Fase.....</b>	<b>85</b>
4.1.1 Entrevista Estruturada.....	85
4.1.2 Observação não Participante.....	94
<b>4.2. Análise dos Resultados da Segunda Fase.....</b>	<b>98</b>
4.2.1 Sequência de Ensino.....	99

4.2.2 Proposta de Avaliação baseada na Teoria Fuzzy.....	122
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>140</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>148</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>153</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>156</b>

## INTRODUÇÃO

O professor por meio de investigações oriundas de problemáticas envolvendo a sala de aula pode alterar o seu campo de trabalho e, conseqüentemente, colaborar para o processo educativo no país, trazendo em muitos casos, o estímulo desses profissionais a ingressarem em programas de Pós-Graduação, buscando agregar conhecimentos e novas perspectivas para a sua formação continuada. Nesse sentido, apresentamos nessa introdução a trajetória do autor associada a delimitação do contexto da pesquisa, fornecendo os elementos motivadores para a elaboração dessa dissertação. Ressalvamos que este trabalho está relacionado ao campo da Educação Matemática e aborda particularmente a elaboração de uma proposta para avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo a geometria plana, de maneira mais específica, o conceito de área de triângulos.

### **Trajetória Inicial**

A decisão da carreira profissional trata-se de um momento importante na vida de adolescentes e adultos. Dúvidas, medos e inseguranças são alguns dos sentimentos que estão inseridos nesse processo e que ocorreram durante a minha escolha por um dos cursos da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) que viria a ser minha futura profissão. Dentre os cursos oferecidos por essa instituição, fiz a escolha pela Licenciatura em Matemática.

Essa escolha justifica-se, pois, durante a vida escolar, minha relação com a disciplina foi antagonica. Nos primeiros anos do Ensino Fundamental (EF), possuía dificuldade em compreender os conceitos matemáticos abordados pela professora. Tais problemas foram evidenciados por meio de resultados “não satisfatórios” e, por conseguinte, notas “baixas”. Todavia, ao ingressar nos anos finais do EF essa situação se inverteu. Minha compreensão e desempenho em matemática melhorou, estimulando o meu interesse por essa disciplina.

Ao refletir sobre o período em que fui estudante da Educação Básica, observo como a avaliação tinha um grande peso, dado o interesse em obter os melhores desempenhos possíveis nessa disciplina, já que no princípio possuía uma relação de medo, e com o passar dos tempos tornou-se uma relação de paixão.

Com o ingresso imediato da Educação Básica para o Ensino Superior, apesar de serem níveis de ensino diferentes, percebi que as práticas avaliativas utilizadas pelos profissionais responsáveis pela minha formação docente, não divergiam das práticas adotadas pelos professores de matemática do Ensino Básico. O uso de lista de exercícios e provas como principais instrumentos para verificar a compreensão dos conhecimentos persistiam, desconsiderando outros fatores inerentes ao desempenho.

Trazendo essas práticas para a minha experiência como docente, analisando minhas ações, posso afirmar que tinha uma postura de habilitar os estudantes para responder “exercícios e provas”, sendo assim, desenvolvia um processo avaliativo pautado exclusivamente nos aspectos cognitivos. Para isso, aplicava uma lista de exercício, um teste (realizado em dupla) e uma atividade avaliativa (individual) como únicos instrumentos para analisar a compreensão dos conceitos por parte dos estudantes.

Entretanto, as leituras proporcionadas pelas disciplinas do campo da Educação Matemática, concentrada no final da graduação, levaram-me a refletir sobre minha postura enquanto docente e repensar minhas práticas. Com isso, a percepção que tinha para o ensino de matemática, baseada na exposição de conceitos de forma mecânica e aplicação de atividades para a avaliação do desempenho foi sendo desconstruída, me estimulando a ingressar na Pós-Graduação em Educação Matemática.

Ao terminar a graduação, fiz seleções para o mestrado em Educação Matemática, buscando aprimorar meus conhecimentos e enveredar pelo caminho da pesquisa que tanto agradou. Não obtendo êxito em nenhuma dessas seleções, tive a oportunidade de participar do processo seletivo e ingressar na Especialização em Ensino de Ciências e Matemática na UESC e no semestre seguinte, fui aprovado para o mestrado em Matemática Pura na Universidade Federal de Uberlândia (UFU),

Mesmo contra a vontade de meus pais, decidir aceitar o desafio: sair da residência de minha família, mudar de estado e mergulhar pelos caminhos da matemática pura. Ao assistir as duas primeiras semanas de aulas, cheguei à conclusão que havia feito uma escolha inadequada, concluindo assim que minhas inquietações e inspirações estavam atreladas mesmo ao campo da Educação Matemática. Dessa forma, retornei à minha cidade de origem no momento em que estavam abertas as inscrições para o mestrado em Educação Matemática da UESC.

Ao ser selecionado para o referido programa, no ato da matrícula fui informado quem seria o meu orientador, assim, ao nos encontramos na primeira orientação recebi o convite de investigar o campo da avaliação do desempenho em matemática com o olhar da *Teoria dos Conjuntos Fuzzy e sua lógica subjacente*. Apesar de inicialmente apresentar um receio para estudar uma teoria que não conhecia, vi a possibilidade de aprofundar-me no campo de estudo que marcou todo o meu processo de formação “a avaliação do desempenho dos estudantes”, dessa maneira, acabei aceitando esse convite.

Nesse intervalo, ainda permanecia cursando a especialização iniciada no período anterior ao mestrado. Logo, para o Trabalho de Conclusão de Curso buscamos nos Anais do Encontro Baiano de Educação Matemática (EBEM) e do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) investigar as pesquisas que abordassem a avaliação em matemática. Para a nossa surpresa, não localizamos estudos nessa temática no evento de porte regional e no evento nacional, entretanto, detectamos cinco pesquisas relacionadas a Universidades da Bahia voltadas para esse campo de investigação.

Os resultados obtidos através da pesquisa realizada na especialização, motivaram ainda mais para continuarmos no desenvolvimento da referida dissertação, dado o número reduzido de investigações nessa temática. Além disso, a participação da co-orientadora dessa pesquisa, trouxe um novo olhar para a organização desta proposta, concentrando nossa pesquisa para avaliação do desempenho dos estudantes em relação aos conceitos de geometria, especificamente o de triângulos.

Após expor os fatores que motivaram a realização desse estudo, nas etapas subsequentes, esse texto será inscrito na terceira pessoa do plural, pois trata-se de uma produção alcançada a partir da interação e cooperação com o orientador e co-orientadora vinculadas ao programa, que possibilitaram a produção desse material, cujo objetivo foi desenvolver uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos.

Antes de aprofundarmos na pesquisa visando alcançar o objetivo proposto acima, explicitaremos o contexto que justifica as opções que escolhemos para investigarmos.

## **Delimitando o Contexto da Pesquisa**

Considerando o processo educativo no Brasil no período anterior a década de 1990, a preocupação do Governo Federal concentrava-se na disponibilização de vagas para o Ensino Fundamental, visando fornecer uma maior inserção de crianças e adolescentes no ambiente escolar. Assim, foram estabelecidas ações como a criação e aumento no número de vagas nas unidades escolares, que permitiram um acréscimo significativo no total de estudantes da rede pública de ensino.

Com o desenvolvimento dessas ações, iniciou-se na década supracitada, as discussões referentes a qualidade do ensino público, por meio de pesquisadores e profissionais da Educação, objetivando consolidar a escola como um espaço representativo de ensino e aprendizagem. Sendo assim, a implementação das avaliações em larga escala, também conhecidas como avaliações externas, tornaram-se um destaque no campo educativo, dada a iniciativa dos órgãos internacionais, nacionais e regionais de avaliar a “qualidade” educacional, por meio de sistemas desenvolvidos pela união (para avaliação de forma nacional) e estados (para avaliação de forma regional).

Segundo Souza e Freitas (2009), a avaliação externa também é descrita como avaliação em larga escala, devido ao grande número de participantes, possuindo como padrão a aplicação de exames e questionários socioeconômicos nos vários municípios do país. Esses mecanismos avaliativos para Dantas (2009) foram influenciados pelo movimento internacional Educação para todos, associados as reformas do estado e cobrança da sociedade para o retorno do desenvolvimento dos serviços públicos. Assim, a proposta de avaliar a educação no país, surgiu como um mecanismo de transparência dos dados educacionais para a sociedade, ao analisar não só o estudante, mas todo o contexto escolar.

Dessa maneira, as avaliações têm objetivando investigar o processo de ensino e aprendizagem, assim como, o desempenho dos estudantes e suas possíveis dificuldades na aprendizagem, permitindo o estabelecimento de novas ações e procedimentos que colaborem para a melhoria da educação nas três esferas do ensino. Seus resultados são calculados e apresentados a partir de uma escala de proficiência, podendo ser representada como uma escada, tal que cada degrau aponte uma colocação, em que o degrau mais alto é o nível mais elevado e através deste irá definir o desempenho escolar. “sinteticamente, a proficiência

corresponde às ideias de competência, habilidade, capacidade e desempenho” (SOUSA; FREITAS, 2009, p. 97).

Uma característica comum a esses modelos de avaliações é a utilização da Teoria de Resposta ao Item (TRI) como forma de avaliar competências e habilidades do sujeito ao analisar cada item presente no teste. Klein (2009) descreve essa teoria como:

Um conjunto de modelos matemáticos onde a probabilidade de resposta a um item é modelada como função da proficiência (habilidade) do aluno (variável latente, não observável) e de parâmetros que expressam certas propriedades dos itens. Quanto maior a proficiência do aluno, maior a probabilidade de ele acertar o item. (KLEIN, 2009, p. 127)

Nessas avaliações, cada item tem a função de aferir um determinado conhecimento, independente do sujeito que está respondendo, com a proficiência não dependendo das questões que são apresentadas a ele. Para Moreira Junior (2010), essa teoria é de difícil compreensão para os leigos, além de ser matematicamente complexa, o que exige a utilização de recursos computacionais para a sua aplicação. Associando a essa percepção, acreditamos que está o fato dessa teoria exigir um refinamento de seus dados em métodos estatísticos avançados.

Dessa forma, esse método avaliativo proporciona enorme potencial para avaliações em larga escala, todavia, esses procedimentos para análise das respostas divergem do modelo de avaliação adotado pelos professores do nível básico, pois os mesmos em sua grande maioria fazem o uso de um mesmo instrumento para avaliar a compreensão do conceito dos estudantes; consideram o número de acertos nas questões presentes nas atividades avaliativas, enquanto na TRI, os resultados são fornecidos por meio dos graus de proficiência dados os itens.

Quanto a avaliação adotada pelo professor em sala de aula, a Lei de Diretrizes e Bases nº 9.394/96, recomenda no Artigo nº 24 (Inciso V, Alínea a) que a avaliação do desempenho do estudante deve ser contínua e cumulativa, prevalecendo os aspectos qualitativos sobre os quantitativos, assim como, os resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais, (BRASIL, 1998) descrevem a avaliação como um componente do processo de ensino e aprendizagem, considerando aspectos relativos ao desempenho dos estudantes, tais como: aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes.



Por meio dessas indicações, as unidades escolares têm a possibilidade de definir, através de seu contexto, o processo avaliativo em dois campos, a saber: qualitativo e/ou quantitativo. O primeiro campo é composto por um conjunto de pontos correspondentes a assiduidade, comportamento, auto avaliação, participação nas tarefas, dentre outros. O segundo campo, quantitativo, abrange os aspectos relativos a compreensão dos conceitos (cognitivo) e deste modo, caracteriza-se por testes, provas, listas de exercícios e trabalhos individuais e coletivos, cujo os resultados são armazenados pelos professores em diários de classe e ao final do período letivo, levados para o conselho de classe<sup>3</sup>.

Segundo Malvezzi (2010) a avaliação no campo qualitativo e quantitativo possui uma relação com os objetivos educacionais propostos pelo professor, pois, ao planejar e especificar os objetivos esperados, esse profissional busca organizar e verificar o processo de aprendizagem dos estudantes. Quanto a esses objetivos a serem alcançados após as ações educacionais, Benjamim S. Bloom em parceria com outros educadores adquiriram a tarefa de classificar as metas e objetivos educacionais, dada a intenção de elaborar um sistema de classificação dividido em três domínios: o cognitivo, o afetivo e o psicomotor (GALHARDI; AZEVEDO, 2013).

Sendo assim, para analisar o domínio cognitivo, estabeleceram a Taxonomia de Bloom. De acordo com Ferraz e Belhot (2010), dados esses domínios, o cognitivo é o mais utilizado, pois muitos educadores se concentram no mesmo para a elaboração de seus planejamentos educacionais, assim como, estratégias para a avaliação do desempenho.

De origem grega, (Táxis: classificação e Nomos: lei, ciência), Taxonomia significa sistema de classificação. Patrus et. al (2012, pg.763) a definem como: “Um sistema de classificação, que permite estruturar organismos pela hierarquia e pelas relações de evolução”. Nesse raciocínio, diversos autores ressaltam a possibilidade da taxonomia ser aplicada a objetivos dos processos de aprendizagem, como uma tentativa de classificar os níveis e formas de aquisição dos conhecimentos.

De acordo com esse mesmo autor, uma das consequências que decorrem das categorias da Taxonomia de Bloom está em possibilitar ao professor um guia para a elaboração de objetivos educacionais pretendidos, permitindo um diagnóstico da aprendizagem e seu

---

<sup>3</sup> Entendemos como conselho de classe a reunião realizada ao final do ano letivo para discutir a situação dos estudantes que não conseguiram a pontuação mínima para avançar ao ano seguinte.

planejamento subsidiando a execução das aulas e a avaliação dos estudantes. Além disso, essas categorias representam os resultados da aprendizagem, pois, cada uma dessas equivalem a aquisição de conteúdo produzido pelo sujeito.

Fazendo uma relação entre as categorias e os instrumentos de avaliação utilizados pelos professores. Malvezzi (2010) adverte para a necessidade desse instrumento não ser escolhido de forma aleatória, pois a depender da escolha, o instrumento não colaborará para medir a aprendizagem dos estudantes.

Dado os pontos apresentados, percebemos que o professor pode avaliar a aprendizagem dos estudantes, por meio da Taxonomia de Bloom, de forma a observar se os objetivos estabelecidos estão sendo alcançados. A aprendizagem associada a taxonomia, traz expectativas mais claras para o estudante sobre o que o professor deseja, enquanto ao professor, fornece um método para avaliar o estudante, diferenciando-os pelas suas necessidades e explanando o mesmo conceito em diferentes níveis de hierarquia. (GALHARDI; AZEVEDO, p. 238)

Contudo, a utilização da Taxonomia de Bloom nas ações avaliativas, de forma a planejar, organizar e controlar a aprendizagem, Felício, Caritá e Neto (2012) tem opiniões contraditórias ao desenvolver uma investigação com professores que utilizaram a Taxonomia de Bloom para definir os objetivos da aprendizagem, chegando à conclusão que a maioria dos professores possuem dificuldades em utilizá-la, justificando pelo pouco conhecimentos dessa proposta.

Para Buriasco e Soares (2012) o que se faz frequentemente nas escolas distancia-se de qualquer concepção de avaliação, ao verificar superficialmente o rendimento escolar dos estudantes apenas para conferir uma nota. Ainda relativo à prática dos professores, Hoffmann (2009), menciona o fato do professor avaliar centralizado na nota, como uma consequência de suas histórias de vida e das influências vivenciadas enquanto estudante, levando a resumir o processo avaliativo a um valor numérico ou conceito. Além disso, percebemos que não há nas unidades escolares um momento para os professores discutirem e trocarem informações relativas a avaliação do desempenho dos estudantes, levando-os a utilizarem critérios de avaliação condizentes com suas percepções

Quanto a isso, Luckesi (2011) explana que o processo pedagógico escolar está intrinsecamente relacionado com a pedagogia do exame, restringindo a preocupação por parte

dos pais, professores e dos próprios estudantes na aprovação ou reprovação, ao invés do processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, a avaliação do desempenho estudantil é realizada exclusivamente através da aplicação de prova e testes, o que torna o processo educativo excludente.

Com vista a uma melhor adequação do processo avaliativo escolar, acreditamos que é preciso reforçar a atenção para a escolha de um modelo de avaliação que se adeque aos conteúdos e aos estudantes a serem investigados, considerando suas habilidades e competências desenvolvidas durante todo o processo de ensino e aprendizagem. Assim, pesquisas como a de Ribeiro (2007) Rissoli (2007), Malvezzi (2010), Barrantes (2011), Merli (2012) trazem a proposta de acompanhar o desempenho dos estudantes por meio de ferramentas avaliativas elaboradas com base na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, proposta por Lofti Zadeh (1965) buscando auxiliar na observação de todo o processo de aprendizagem dos estudantes e no aproveitamento dos aspectos cognitivos, comportamentais e processuais, proporcionando conseqüentemente uma avaliação de forma ampla.

Para Tiago, Baroni e Fonseca (2014) o grande diferencial de um sistema Fuzzy para denotar o desempenho dos estudantes está na possibilidade de classificá-los considerando o uso de diversos indicadores, os quais os professores de disciplinas específicas tenham acesso. Além disso, mencionam a oportunidade de agrupar diversos tipos de atividades e não apenas as avaliações tradicionais (provas).

Relativo a avaliação dos estudantes, restringindo nosso olhar para os aspectos cognitivos, especificamente para a Geometria, Cardoso (2012) descreve que os resultados das avaliações em larga escala, associada a matrizes de referência utilizadas, comprovam que os estudantes possuem dificuldades em resolver problemas que envolvem conceitos geométricos. Para Almouloud (2003) uma dessas dificuldades está no fato dos conceitos de Geometria requererem a coordenação de diferentes registros de representação, o que pode ser um empecilho para a interpretação do problema a ser resolvido e, conseqüentemente, para sua resolução.

Dessa maneira, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval (1995) proporciona uma possibilidade para discutir essas dificuldades e auxiliar na aprendizagem dos conceitos matemáticos através da utilização de registros distintos, por exemplo, registro gráfico, analítico e figural. Segundo esse autor, ao tratar-se

dos objetos matemáticos, acessamos aos registros desses objetos e não propriamente ao conceito matemático.

Essas reflexões sobre as dificuldades da escolha de um processo avaliativo adequado e sobre a deficiência na aprendizagem de Geometria, associados à observação de estudos como o de Ribeiro (2007) e Merli (2012) nos sinalizam para a importância da elaboração de uma proposta de avaliação do desempenho do estudante. Mondlane e Correa (2006) apud Kanaane e Ortigoso (2001) associam a avaliação do desempenho a uma ação subjetiva e personalizada, por capturar e entender as atitudes, comportamentos, a aplicação das aprendizagens, a criatividade e a ativação do potencial cognitivo e emocional.

Partindo disso, compreendemos a avaliação do desempenho como um processo de coletar, analisar e sintetizar as competências e habilidades dos estudantes, buscando atingir os objetivos previamente estabelecidos. Para isso, acreditamos que devem ser ponderadas as condutas cognitivas, afetivas e psicomotoras para a produção de uma análise dos conhecimentos que possam ter sido efetivamente aprendido por esses sujeitos.

Nesse contexto, acreditamos que a Teoria dos Conjuntos Fuzzy<sup>4</sup> possibilita a elaboração de uma proposta de avaliação baseada em variáveis linguísticas, permitindo acompanhar e analisar o desempenho dos estudantes nos aspectos supracitados. Dentre esses, acreditamos que para avaliar o cognitivo envolvendo conceitos geométricos, no tocante, aqueles inerentes a área de triângulos, a utilização de uma sequência de ensino com a utilização de materiais manipulativos fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica<sup>5</sup> poderá auxiliar ao professor a observar a compreensão do estudante frente a esse objeto matemático.

Diante desses aspectos, propomos realizar um estudo que resultasse em colaborações para o processo de ensino e aprendizagem em geometria, associado a um processo avaliativo. Dada a grande variedade de conceitos geométricos, delimitamo-nos no conceito de área de triângulos, concordando com Vighi (2003) que uma das primeiras formas apresentadas as crianças é o triângulo.

---

<sup>4</sup> Durante a dissertação ao mencionarmos a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, adotaremos o uso do termo “ Teoria Fuzzy”.

<sup>5</sup> Durante a dissertação ao mencionarmos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, adotaremos o uso do termo “ Teoria dos Registros de Representação”.

Nessa mesma linha de Raciocínio, Silva (2012) afirma que os conteúdos relacionados a triângulos acompanham o ensino de Matemática desde os anos iniciais até o Ensino Médio. Além disso, a investigação desse conceito é possível com o uso de materiais manipulativos, nos quais autores como Pais (2011), Souza (2011) mencionam que a utilização desse recurso pode auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos; estimulando as diversas representações desse objeto.

Ponderando os pontos ressaltados até aqui, definimos como questões de pesquisa:

**Quais são as contribuições de uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos? Quais são as contribuições de uma sequência de ensino envolvendo área de triângulos, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação, para avaliação do aspecto cognitivo?**

Para responder aos questionamentos propostos, reafirmamos o objetivo geral da pesquisa, qual seja:

**Desenvolver uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos.**

**Objetivo Específicos:**

**Investigar os métodos de avaliação utilizados pelos professores no contexto escolar pesquisado.**

**Elaborar uma Sequência de Ensino envolvendo área de triângulos fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica visando avaliar o aspecto cognitivo.**

Trata-se de uma pesquisa de cunho científico e dentro de uma temática inovadora no que tange a Educação Matemática por correlacionar a Teoria Fuzzy e os Registros de Representação. Além disso, o conhecimento aqui gerado poderá servir de base para futuros estudos na área de avaliação da aprendizagem, diante da escassez de material específico nesse escopo, justificando assim a relevância científica da mesma.

Após apresentarmos as motivações e o contexto que conduziram o desenvolvimento dessa investigação, descrevemos a seguir a estrutura da dissertação.

## **Estrutura da Dissertação**

Estruturamos essa dissertação em quatro capítulos. No entanto, contamos também com os espaços destinados a Introdução, Considerações Finais, Referências, Anexos e Apêndices.

No Capítulo I apresentamos as teorias que forneceram os subsídios para a realização desse estudo, especificamente, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) proposta por Duval (1995) e a Teoria dos Conjuntos Fuzzy (TCF) elaborada por Zadeh (1965).

O Capítulo II consiste na revisão de literatura, na qual são apresentadas pesquisas que envolvem a temática que investigamos. Nesse aspecto, esse capítulo encontra-se dividido em duas seções. Na primeira seção, abordamos as investigações referentes aos Registros de Representação e a avaliação do desempenho dos estudantes. Na segunda seção, são relatadas as pesquisas que envolvem o Fuzzy e os conceitos de Geometria

No Capítulo III explicitamos o processo metodológico que adotamos, relatando, o tipo da pesquisa, o contexto escolar, sujeitos da pesquisa, instrumentos para a coleta de dados, procedimentos de coleta e a análise de dados.

O Capítulo IV referente a análise dos dados dividimos em três seções, nas quais apresentamos os resultados encontrados na primeira fase da pesquisa, referente a entrevista com os professores e observação não participante; na segunda seção, expomos a sequência de ensino elaborada que envolve o conceito de área de triângulos e por fim, descrevemos a proposta de avaliação do desempenho dos estudantes e a análise a priori da mesma.

## CAPÍTULO I REFERENCIAL TEÓRICO

Apresentamos nesse capítulo os referenciais teóricos no qual coletamos fundamentos para atingir o nosso objetivo geral que consistiu em desenvolver uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos. Assim, utilizamos a Teoria dos Conjuntos Fuzzy para a elaboração da proposta de avaliação envolvendo os domínios afetivos, psicomotor e cognitivo. Em relação a avaliação do aspecto cognitivo, adotamos os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a elaboração de uma sequência de ensino com o uso de materiais manipulativos. Nesse interim, as duas teorias interligadas permitiram o desenvolvimento desse estudo.

Dessa maneira, dividimos o conteúdo desse capítulo em duas seções, na primeira, apresentamos a Teoria dos Registros das Representações Semióticas de forma ampla. Na segunda seção, abordamos os conceitos referentes a Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

### 1.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) surgiu no ano de 1995 a partir dos estudos referentes a Psicologia Cognitiva desenvolvidos por Raymond Duval, no Instituto de Pesquisa em Matemática (IREM) localizado na cidade de Estrasburgo na França. Segundo Freitas e Rezende (2013), após a sua exposição, a TRRS tem sido divulgada em diversos países, colaborando para o crescimento nos números de pesquisas que nessa teoria se fundamentam.

Para Duval (2012) as representações semióticas são “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (DUVAL, 2012, p.269). Dessa forma, uma figura geométrica (como o triângulo), um gráfico de uma função quadrática, a fórmula algébrica são exemplos de representações cujo os sistemas semióticos são diferentes.

Esse mesmo autor afirma que não temos acesso aos objetos matemáticos, e sim, as representações semióticas desses objetos. Nesse sentido, ele justifica a importância das representações por duas razões: a primeira, corresponde ao fato que para a realização de uma operação matemática, somos dependentes do sistema de numeração que utilizamos. A segunda razão está no número de representações semióticas utilizadas na matemática, informando que para uma tarefa matemática, podem ser adotados diferentes tipos de registros, sistematizadas no quadro abaixo:

Quadro 1: Classificação dos diferentes registros no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
<b>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS:</b> Os tratamentos não são algoritmizáveis	<b>Língua natural Associações verbais (conceituais)</b> Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> <li>• argumentação a partir de observações, de crenças,...</li> <li>• dedução válida a partir de definição ou de teoremas.</li> </ul>	<b>Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3)</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• apreensão operatória e não somente perspectiva;</li> <li>• construção com instrumentos.</li> </ul>
<b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS:</b> Os tratamentos são principalmente algoritmos	<b>Sistema de escritas</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• numéricas(binária, decimal, fracionária,...);</li> <li>• algébricas;</li> <li>• simbólicas( língua formal)</li> </ul> Cálculo	<b>Gráficos cartesianos</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• mudanças de sistemas de coordenadas;</li> <li>• interpolação, extrapolação.</li> </ul>

Fonte: (DUVAL, 2003, p.14).

Observando os dados acima, podemos visualizar que os registros matemáticos são divididos em quatro representações com características próprias a serem adotadas no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Além disso, concordamos com o próprio autor, ao mencionar que “a originalidade de uma atividade matemática está em mobilizar ao mesmo tempo, pelo menos dois registros de representação, ou transformação dos registros de representação a todo o instante”. (DUVAL, 2003, p.14).

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação semiótica, ele deve permitir três tipos de atividades cognitivas denominadas por *formação*, *tratamento* e *conversão*, ao analisarmos uma atividade matemática com o olhar voltado para a aprendizagem do estudante. Nesse aspecto, a *formação* consiste na seleção de características



do objeto matemático e nas regras de formação que são inerentes ao registro cognitivo, por exemplo, o desenho de uma figura geométrica (triângulo) e expressão algébrica de uma fórmula.

O *tratamento* trata-se de uma transformação ou mudança interna que ocorre no mesmo registro. Duval (2003) afirma ser o tipo de transformação que chama maior atenção, por corresponder a procedimentos de justificativa, por exemplo, completar uma figura geométrica segundo os critérios de simetria.

Já a *conversão* de uma representação é caracterizada pela mudança no sistema semiótico, mantendo a referência ao mesmo objeto. Por exemplo, a conversão de uma representação algébrica de uma função do segundo grau para a representação gráfica. Além disso, temos como exemplo de conversão:

A **ilustração** é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A **tradução** é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A **descrição** é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística. (DUVAL, 2012, p. 272).

Para essas conversões, esse autor sinaliza que é preciso ter a coordenação entre os registros e que o sujeito precisa reconhecer o mesmo objeto matemático através de suas representações. Do ponto de vista matemático, o mesmo autor menciona que a conversão não tem papel de justificação ou prova em procedimentos matemáticos, de forma a auxiliar na opção do registro que colabora para a realização da atividade. Todavia, na visão cognitiva, a conversão adquire um papel importante, por conduzir o sujeito a compreensão do conceito matemático.

Sendo assim, entendemos que duas observações precisam ser consideradas ao analisar a aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos do ponto de vista cognitivo, em nossa pesquisa especificamente, nas atividades envolvendo triângulos.

A primeira observação seria não considerarmos a conversão como uma simples operação de codificação. Essa visão é superficial do ponto de vista da aprendizagem dos conceitos, pois a regra de codificação permite apenas uma leitura pontual do objeto e não uma compreensão global. Para a conversão de registros é necessário articular as variáveis cognitivas relativas a cada registro, fato esse que não ocorre ao codificar os registros.

A segunda observação deve ser direcionada aos dois tipos de fenômenos presentes na realização de uma conversão, são eles: as variações de congruência e não congruência; a heterogeneidade no sentido de conversão. Dessa maneira, para analisar a atividade de conversão no primeiro fenômeno, basta apenas comparar os registros de entrada com o registro de saída. Nas palavras do teórico diríamos:

Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação- diz se então que há congruência -, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não congruência. (DUVAL, 2003, p.19).

Para esse autor, nem sempre a conversão ocorre quando se inverte os registros de partida e chegada, além de afirmar que essa inversão pode influenciar diretamente no desempenho dos estudantes. Como justificativa para tal afirmação, menciona uma pesquisa que evidenciou uma maior taxa de acertos ao fazer essa inversão. Contudo, salienta que um sentido de conversão é privilegiado, por acreditarem que ao treinar a conversão em um sentido, resultaria no treinamento do outro sentido.

Para o estudante compreender de forma significativa um conceito matemático, é importante que ele observe e identifique a diferença entre os objetos e suas representações. Dessa forma, é fundamental reconhecer as diversas representações de um mesmo objeto matemático, ou seja, coordenar os registros de representação, já que as compreensões dos conceitos dessa disciplina estão ligadas a pelo menos dois registros de representação diferentes.

Entretanto, Duval salienta que diversas observações levaram a conclusão de que o fracasso ou bloqueio dos estudantes aumentam, toda vez que a conversão ou mobilização de dois registros é necessária, além de ressaltar que “a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro”. (DUVAL, 2003, p.21).

Sendo assim, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica pode colaborar no processo de ensino e aprendizagem de matemática, no sentido em que “uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática” (DUVAL, 2003, p.31).

Acordando com essa visão de Duval, acreditamos que para uma aprendizagem satisfatória dos conceitos de geometria é fundamental que os estudantes compreendam o objeto geométrico a partir de seus diversos registros. Assim, voltamos o nosso olhar para a abordagem da TRRS em atividades de Geometria, buscando maiores subsídios para a

organização das nossas atividades. Como forma de avaliar as condições de aquisição do conhecimento pelos estudantes, é sugerido uma proposta de avaliação centrado nas condições cognitivas de compreensão dos objetos matemáticos, com a colaboração da diversidade dos registros de representações.

### 1.1.1 A Teoria dos Registros de Representações Semióticas e os Conceitos de Geometria

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem como um dos objetivos para o ensino de Matemática o estudo dos conceitos geométricos, de forma que o estudante identifique as características das figuras geométricas, represente-as e explore as suas características, dentre outras ações. A importância desse ramo da matemática é ressaltada por Almouloud (2003) ao apontar que várias pesquisas sinalizam a geometria como um dos problemas do processo de ensino e aprendizagem, quando tratada do ponto de vista da TRRS.

Para Duval (1995) apud Almouloud (2003), a geometria como um processo cognitivo envolve três formas:

*Visualização* para a exploração heurística de uma situação complexa;  
*Construção* de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;  
*raciocínio*, que é o processo que conduz para a prova e a explicação;  
 (DUVAL, 1995 apud ALMOULOU, 2003, p. 126).

Essas três formas para Duval (1995) apud Almouloud (2003) estão interligadas e são necessárias cognitivamente para que o estudante tenha uma proficiência em geometria, todavia, os métodos para a resolução de problemas em geometria dão lugar a diversas interpretações, ou melhor a quatro maneiras de apreensões:

1. *sequencial*: é solicitada nas tarefas em que requer a construção das figuras geométricas ou nas tarefas de descreve-las com o objetivo de reproduzir uma figura.
2. *perceptiva*: é a interpretação das formas geométricas das figuras numa situação.
3. *discursiva*: corresponde a interpretar os elementos da figura geométrica, que privilegia a articulação entre os enunciados, considerando as propriedades do objeto matemático.
4. *operatória*: está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem. (DUVAL, 1995 apud ALMOULOU, 2003, p. 127).

Almouloud (2003) sinaliza que grande parte dos problemas relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de geometria estão voltadas para a dificuldade em coordenar os diferentes registros de representação (a escrita algébrica, as figuras geométricas, e o discurso na língua materna); a dificuldade dos estudantes em interpretar de maneira correta um problema e produzir uma explicação para a resolução da mesma, além disso, sinaliza que as figuras geométricas nem sempre colaboram para a visualização das propriedades ou das relações esperadas na situação- problema.

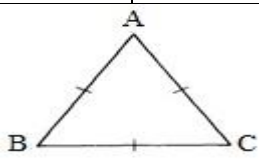
Nesse viés, o referido autor propõe situações de aprendizagem que trazem quatro aspectos no sentido de auxiliar na apreensão e aquisição de habilidades em geometria. Dentre esses, ressaltaremos dois aspectos que trazem a correlação entre a referida teoria e os conceitos geométricos:

1) O processo de aquisição dos conhecimentos em geometria apoiado na construção geométrica (conversão entre registros, do discursivo ao figural), atividades para a resolução de problemas; atividades em que o estudante necessite redigir; observação de provas associadas a tomadas de decisão e entendimento e redação da solução dos problemas.

2) As tarefas de geometria a serem exigidas no Ensino Fundamental, fazem apelo aos registros de representação semiótica (registros algébricos, figural e discursivo) coordenados entre si.

Como forma de exemplificar uma dessas situações de aprendizagem, apresentamos a proposição *Um triângulo equilátero tem seus lados congruentes*, que fornecida na forma condicional, corresponde a: “Se um triângulo é equilátero, então seus lados são congruentes.”

Quadro 2: Exemplo das situações de aprendizagem

	Hipóteses	Conclusão
<b>Registro Natural</b>	ABC é um triângulo equilátero	Todos os lados do triângulo são congruentes
<b>Registro Algébrico</b>	ABC é um triângulo equilátero	$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{AC}$
<b>Registro Figural</b>		

Fonte: Acervo Pessoal.

Segundo Almouloud (2003) o desenvolvimento de situações como a citada acima, constata a importância de identificar as ferramentas, tais como, estabelecer as definições para os objetos matemáticos envolvidos, o reconhecimento das hipóteses e a conclusão das propriedades, associadas também, a habilidades do sujeito de articular essas ferramentas de forma adequada.

Nesse sentido, esse autor conclui que as atividades envolvendo geometria enfatizam os três registros de representação semiótica e a coordenação entre os mesmos (registro discursivo, registro figural e a escrita algébrica), de forma que as conversões e coordenações desses registros colaboram para a apreensão dos conceitos geométricos.

Após apresentamos alguns conceitos presentes na TRRS e sua relação com os conceitos de Geometria, discutiremos a seguir os fundamentos que encontramos na Teoria Fuzzy para estruturar nossa pesquisa.

## **1.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy: estudo em torno das incertezas**

Apresentamos nesta seção os conceitos da teoria Fuzzy utilizados como ferramenta para modelar matematicamente o processo de avaliação do desempenho dos estudantes neste estudo.

Segundo Corcoll-Spina (2010) o termo Fuzzy é de origem inglesa e significa incerto, vago, impreciso, difuso ou nebuloso e informa também que a teoria associada a ele permite dar um tratamento matemático a informações carregadas de termos subjetivos. Essa teoria foi introduzida por Lotfi Asker Zadeh no ano de 1965, com o objetivo de capturar informações vagas, descritas em linguagem natural, e convertê-las em valores discretos.

Por esse fato, Marro et.al (2010), afirmam que a aplicação dessa teoria possibilita a modelagem computacional de situações que envolvem o raciocínio humano. Compartilhando dessa visão, (MALVEZI, 2010, p.36) descreve que “a teoria Fuzzy oferece as bases para o raciocínio aproximado que dispõe de conceitos imprecisos como ferramenta para modelar o conhecimento”, permitindo a elaboração de modelos matemáticos coerentes e mais adequados com a realidade. Já Rissoli (2007) cita o apoio matemático que essa teoria fornece para tratar as informações imprecisas.

### 1.2.1 Conjuntos Fuzzy

Na teoria clássica de conjuntos<sup>6</sup>, dado um conjunto qualquer não vazio, a relação entre um elemento e seu conjunto é representada por duas situações exclusivas: ou o elemento pertence ou não pertence. De acordo com Rissoli (2007), sempre há uma função mapeando quais elementos estão ou não no conjunto, denominando-a de função característica, definida por:

*Definição 1:* Seja  $U$  um conjunto e  $A$  um subconjunto de  $U$ . A função característica de  $A$  é dada por:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Assim, temos que  $f_A$  é uma função característica, cujo domínio é  $U$  e a imagem está contida no conjunto  $\{0,1\}$ , de forma que,  $f_A(x) = 1$  indica que  $x$  é elemento de  $A$ , enquanto  $f_A(x) = 0$  indica que  $x$  não é elemento de  $A$ . Essas relações descrevem completamente o conjunto  $A$ , pois indica quais elementos do conjunto universo  $U$  são elementos também de  $A$ . Por exemplo, consideremos o conjunto dos Números Naturais ( $\mathbb{N}$ ), sabemos que  $5 \in \mathbb{N}$  e  $1/2 \notin \mathbb{N}$ .

Todavia, existem casos em que um elemento do conjunto não está bem definido em relação ao seu grau de pertinência. Suponhamos que exista um conjunto dos números naturais que são muito grandes, representados por:

$$C = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ é muito grande}\}$$

Dessa forma, como garantir que os números 5 e 23 pertencem ao conjunto  $C$ ? A resposta dessa questão é incerta, pois não possuímos uma noção de quão grande deverá ser o número para pertencer ao conjunto  $C$ . Logo, o que é possível fazer é associar graus de pertinência relativo aos números 5 e 23 seguindo a proposta do conjunto. Nesta situação, podemos dizer que o número 5 tem um grau de pertinência de 0,3 e o número 23 tem grau de pertinência de 0,7 dentro da escala delimitada no intervalo que vai de 0 a 1.

A partir dessa mobilização, podemos caracterizar conjuntos no qual a fronteira não está definida por uma função de pertinência. Como exemplo que remete a essa situação, temos hipoteticamente o conjunto dos estudantes excelentes. Não há uma pertinência que defina

---

<sup>6</sup> Também denominada de conjuntos *crisp*.

quais são os elementos desse conjunto, pois, o que é um estudante ser excelente? Qual deve ser o rendimento para o estudante ser considerado excelente? O que poderá vir a ser um estudante excelente para um professor, pode não ser para um outro.

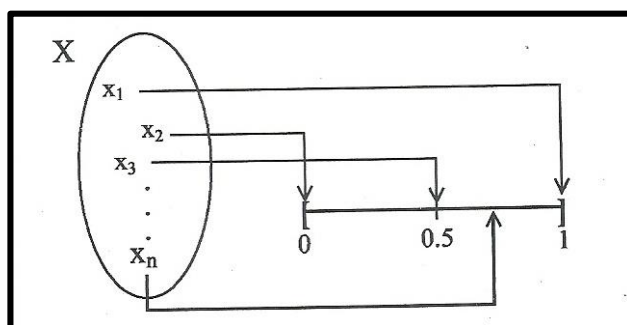
Para a investigações de casos como esses, que se estruturou e definiu o conceito de função de pertinência como:

*Definição 2:* Seja  $U$  um conjunto (clássico), um subconjunto Fuzzy  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função

$$\varphi_F: U \rightarrow [0,1]$$

Essa função é chamada de função pertinência do subconjunto Fuzzy  $F$ , sendo análoga à função característica da teoria dos conjuntos clássicos, definida anteriormente. Sendo assim, a função pertinência  $\varphi_F$  associa a cada elemento do conjunto a um valor no intervalo  $[0,1]$  equivalente ao grau de pertinência desse elemento ao conjunto definido, evidenciando o nível de compatibilidade do elemento ao conceito a ser representado pelo conjunto. Podemos visualizar essa representação na figura a seguir:

Figura 1: Representação geral de uma função de pertinência



Fonte: Nicoletti e Camargo (2009, p.25).

Visualizando a figura, notamos que no conjunto Fuzzy, podemos representar os termos do conjunto em um intervalo e não apenas os extremos. Segundo Faria et. al (2008) esse fator torna os conjuntos Fuzzy interessante para expressar numericamente valores de variáveis imprecisas, tais como, bom, ótimo, ruim e excelente, dentro de um intervalo.

Também podemos perceber que os elementos  $x_3$  e  $x_n$  do conjunto possuem um grau de pertinência delimitado no intervalo fechado entre 0 e 1. Já os elementos  $x_2$  e  $x_1$  têm  $\varphi_F = 0$  e  $\varphi_F = 1$ , indicando, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de  $x$  ao

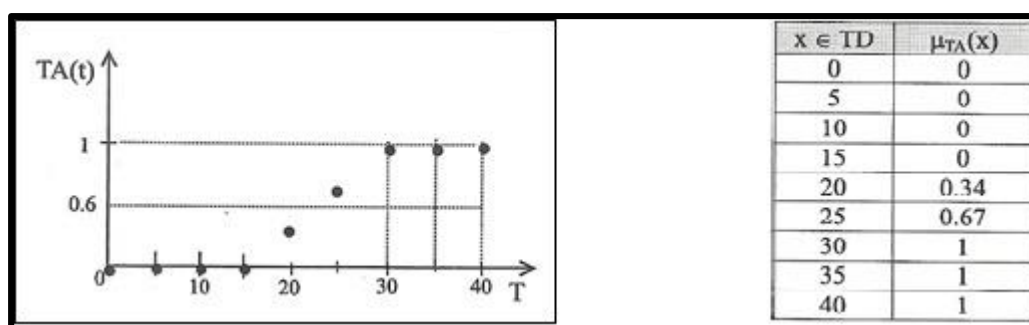
conjunto Fuzzy Esses dois casos evidenciam que os elementos cujo grau de pertinência está nas extremidades do intervalo, levam ao caso da relação de pertinência no conjunto clássico.

De acordo com Barros e Bassanezi (2006, p.14) “a definição de conjunto Fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contradomínio da função característica, que é o conjunto  $\{0,1\}$  para o intervalo  $[0,1]$ ”. Por isso, o conjunto clássico trata-se de um caso particular de um conjunto Fuzzy. Como exemplo de conjuntos Fuzzy, temos o conjunto dos números naturais ímpares, definido da seguinte forma:

$$I = \{x \in \mathbb{N}^* / x \text{ é ímpar}\}.$$

O conjunto I tem função característica  $\varphi_I(n) = 1$ , se n é ímpar e  $\varphi_I(n) = 0$  se n é par. Logo, o conjunto dos números ímpares é um caso particular do conjunto Fuzzy, pois sua função pertinência está limitada no intervalo  $[0,1]$ . Esse exemplo, trata-se de um caso particular, pois é possível descrever todos os elementos do conjunto I a partir da função característica já que todo número natural é par ou ímpar. Entretanto, há outros conjuntos em que a fronteira não é tão precisa, como o exemplo a seguir, no qual Nicoletti e Camargo (2009) propõem um exemplo referente ao conceito de temperatura alta, em uma região cuja a temperatura varia no intervalo  $T = [0,40]$ .

Figura 2: Conjunto Fuzzy representando o conceito de temperatura alta



Fonte: Nicoletti e Camargo (2009. p.27).

Tratando-se da variável temperatura alta, quando a temperatura estiver no intervalo de  $0^{\circ}\text{C}$  a  $20^{\circ}\text{C}$ , o grau de pertinência será de 0. No intervalo de  $20^{\circ}\text{C}$  a  $30^{\circ}\text{C}$ , o grau de pertinência será intermediário e temperaturas acima de  $30^{\circ}\text{C}$  eram consideradas altas e têm o grau de pertinência em relação ao conceito temperatura alta de 1. Vale salientar, que os graus de pertinência desse exemplo, foram delimitados pelas concepções de temperatura alta expressa pelos autores.



Para escolher a função mais adequada ao problema a ser modelado, Marro et.al (2010) sugere a consulta a especialistas da área, para a elaboração de uma função de pertinência condizente com as variáveis. Trazendo essa afirmação para o nosso contexto, com vistas a modelar o processo de avaliação do desempenho dos estudantes, é preciso compreender os critérios utilizados pelos professores para avaliar os estudantes, de forma, a instituir uma função com o mínimo de disparidade com o contexto real.

Logo, é importante compreendermos como são desenvolvidas as operações envolvendo os conjuntos Fuzzy. Nesse aspecto, discorreremos sobre tais operações na subseção a seguir:

### 1.2.2 Operações entre Conjuntos Fuzzy

Da mesma forma, que na teoria dos conjuntos clássicos, há o desenvolvimento de operações entre os conjuntos (união, intersecção, igualdade, complementar, entre outras operações), essas mesmas operações podem ser estendidas para os conjuntos Fuzzy.

*Definição (união):* A união entre dois conjuntos Fuzzy A e B é o subconjunto de U cuja a função de pertinência é dada por  $\mu_{(A \cup B)}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ ,  $x \in U$ . Ou seja, dados dois conjuntos Fuzzy e seus respectivos graus de pertinência, a união desses dois conjuntos será dado pelo maior grau de pertinência.

Exemplificando essa propriedade, suponhamos que os critérios assiduidade e desenvolvimento de atividades foram consideradas para a avaliação dos estudantes sendo as variáveis (*regular, bom e excelente*) para a avaliação da assiduidade e as variáveis (*baixo, razoável e alto*) para as atividades desenvolvidas. Se o aluno, quanto a assiduidade, é considerado *bom*, com o grau de pertinência de 0,6 e o desenvolvimento das atividades é caracterizada como *alto* com o valor de 0,8, então na união desses conjuntos, o desempenho dos estudantes nessas características tem o grau de pertinência igual a 0,8.

*Definição (intersecção):* A intersecção entre dois conjuntos Fuzzy A e B é o subconjunto de U cuja a função de pertinência é dada por:  $\mu_{(A \cap B)}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ ,  $x \in U$ . Sendo assim, dados dois conjuntos Fuzzy e seus respectivos graus de pertinência, a função de pertinência da intersecção entre eles será dada pelo menor grau entre os dois conjuntos.

Por exemplo, assumamos a mesma situação do exemplo anterior, na qual os critérios assiduidade e desenvolvimento de atividades foram consideradas para a avaliação, sendo as variáveis (*regular, bom e excelente*) para a avaliação da assiduidade e as variáveis (*baixo, razoável e alto*) para o desenvolvimento das atividades. Se o estudante, quanto a assiduidade, é considerado *bom*, com o grau de pertinência de 0,6 e o desenvolvimento das atividades é caracterizada como *alto* com o valor de 0,8, então a intersecção entre os conjuntos tem o grau de pertinência igual a 0,6.

*Definição (Complementar de um conjunto Fuzzy):* Dado um conjunto Fuzzy A, o complementar padrão de A, denotado por  $\bar{A}$ , terá a função de pertinência dada por:

$$\bar{A}(x) = 1 - A(x), \forall x \in U$$

Enquanto  $A(x)$  representa o grau de pertinência que o elemento  $x$  pertence ao conjunto A,  $\bar{A}(x)$  concebe o grau que o elemento  $x$  não pertence a A. Temos como exemplo, a variável comportamento para a avaliação do desempenho dos estudantes, cujas variáveis são: *regular, bom e excelente*. Seja A o conjunto formado pelos estudantes a serem avaliados. Se o aluno  $x$  tem um grau de pertinência de 0,5 *bom*, então, o complementar desse conjunto será de 0,5.

*Definição (igualdade):* Os conjuntos Fuzzy A e B serão iguais se as suas funções de pertinência são coincidentes, isto é,  $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$ .

Para melhor explicitar a compreensão das operações entre conjuntos Fuzzy, apresentaremos a seguir, um exemplo proposto por Barros e Bassanezi (2006, p.27) relativa as operações de intersecção, união e complementar entre os conjuntos de pacientes de uma clínica com febre e mialgia. Foram utilizados os graus de pertinência de cinco pacientes apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Ilustração das operações entre Conjuntos Fuzzy

Paciente	Febre: A	Mialgia: B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A^7$	$A \cap A^7$	$A \cup A^7$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,3	0,7
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,4	0,6
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	0,0	1,0

Fonte: ( BARROS; BASSANEZI , 2006, p.27).

<sup>7</sup> O termo  $A^7$  corresponde aos pacientes que não tiveram febre.

As colunas apresentadas na tabela, exceto a primeira, expõem os graus de pertinência dos pacientes, no qual, podemos observar que há pacientes com os dois estados, febre e mialgia. Além disso, percebemos diretamente a aplicação das operações dos conjuntos Fuzzy. O uso dessas operações, podem estar atreladas a situações em que o uso de variáveis linguísticas está inserida, como nos exemplos relativos a avaliação do desempenho estudantil, citados anteriormente. Partindo disso, descreveremos como essas variáveis podem ser investigadas a partir desse referencial teórico.

### 1.2.3 Variáveis Linguísticas

Um dos conceitos associados a teoria dos conjuntos Fuzzy é o de variável linguística que segundo Silva (2011) tratam-se de variáveis que possibilitam a descrição de informações disponibilizadas de forma qualitativa, cujos possíveis valores são adjetivos e podem ser representadas por meio de conjuntos Fuzzy. Um dos casos que podem ser investigados pela TCF, está ligado ao uso de variáveis linguísticas na avaliação do desempenho, cujos resultados dos estudantes são expostos por meio de conceitos como: ruim, bom, ótimo e excelente.

Gonçalves (2007) cita que a função essencial das variáveis linguísticas é fornecer um modo sistemático de caracterizar fenômenos que possuem um grau de complexidade ou são mal definidos; por carregarem implicitamente uma imprecisão ou incerteza. Essas variáveis podem ser descritas por meio de conjuntos Fuzzy e representados por funções de pertinência. Assim, a reprodução formal dessas variáveis nos conjuntos Fuzzy, de acordo com esse autor é dada por uma quintupla  $(N, T(N), X, G, M)$ , sendo  $N$ , o nome da variável,  $T(N)$  o conjunto de termos linguísticos que podem representar  $N$ ;  $X$  o conjunto universo;  $G$  é a regra sintática para gerar os valores de  $N$  como composição de termos de  $T(N)$ ;  $M$  é a regra semântica para associação de cada valor com o referente significado.

Uma situação que remete ao uso de variáveis linguísticas, por exemplo “o desempenho do aluno João na prova final” que a variável ( $N$ ) assume valores *insuficiente*, *regular*, *bom* e *ótimo* ( $T(N)$ ). O conjunto universo ( $X$ ) consiste na nota determinada comumente no intervalo  $[0,10]$ ,  $G$  por tratar da composição entre a variável e os termos que representam a variável, seria “o desempenho de João na prova final foi bom”. E por fim, a variável  $M$  que consiste na associação do valor acima a um conjunto Fuzzy, cuja função de pertinência lhe dará o seu significado, determinando nesse caso, o grau de pertinência do desempenho “bom” de João na prova final.

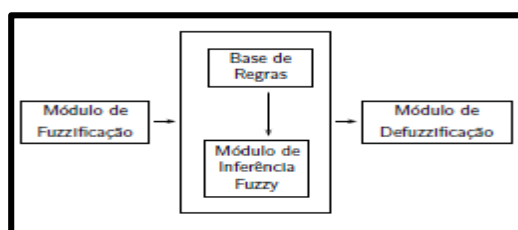
### 1.2.4 Sistema Baseado em Regras Fuzzy

O ser humano enquanto construtor de pensamentos, sentimentos e emoções, traz em suas ações; critérios e parâmetros que influenciam nas decisões a serem tomadas cotidianamente. De acordo com Barros e Bassanezi (2006, p. 113), “cada indivíduo funciona como uma “caixa preta” recebe informações que são interpretadas segundo seus parâmetros e então decide qual atitude tomar”. Partindo disso, o sujeito planeja e executa tarefas, seguindo uma sequência de conjunto de regras estabelecidas por si próprio.

A intenção da elaboração de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) está na construção de um sistema que simule as ações e decisões humanas de caráter mais formal (CORCOLL- SPINA,2010, p.70). Para Barros e Bassanezi (2006), uma das estratégias de simular as estratégias humanas para a tomada de decisão é dada pelos *controladores Fuzzy*, considerado como um caso peculiar de um SBRF, utilizado nesse estudo para a elaboração do sistema de inferência para a avaliação do desempenho no Ensino Fundamental.

Um controlador Fuzzy, está estruturado em quatro módulos: fuzzificação, a base de regras, o método de inferência e o defuzzificador. Esses módulos estão intrinsecamente ligados, como mostra o esquema da Figura 3.

Figura 3: Esquema Geral do *Sistema Baseado em Regras Fuzzy*



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p.119).

A seguir, detalharemos o papel de cada módulo para o desenvolvimento do Sistema Baseado em Regras Fuzzy.

#### *Módulo de Fuzzificação*

Nesse módulo, as variáveis de entrada, previamente escolhidas, são modeladas em conjuntos Fuzzy, definindo seus respectivos domínios, ou seja, os graus de pertinência em que cada entrada pertence ao conjunto. Por exemplo, para modelar as variáveis de entradas relativas a avaliação nas seguintes variáveis: insuficiente, regular, bom e excelente é

necessário o estabelecer a função e o intervalo correspondente a cada um desses termos. Dessa forma, a presença de um especialista no fenômeno a ser modelado é importante, para determinar a função de pertinência condizente com a proposta em questão.

Faria et al (2008) para avaliar os estudantes relativo ao conteúdo, utilizou a variável resposta, com os conjuntos Fuzzy para essa variável formado pelos termos *errada*, *mais ou menos correta* e *correta*. Assim, foram definidas funções de pertinência para esses termos, com base na função gaussiana, sendo:

$$\text{Errada: } F(\text{Resposta}) = e^{[-2\pi(\text{Resposta})^2]}$$

$$\text{Mais ou menos correta: } F(\text{resposta}) = e^{[-2\pi(\text{Resposta}-0.5)^2]}$$

$$\text{Correta: } F(\text{resposta}) = e^{[-2\pi(\text{Resposta}-1)^2]}$$

Esse exemplo, demonstra como são estabelecidas a relação entre as variáveis do problema analisado com as funções de pertinência, buscando uma matematização desses termos.

#### *Módulo de Base de Regras*

Segundo Barros e Bassanezi (2006) esse módulo compõe o núcleo do controlador Fuzzy, sendo composto por proposições Fuzzy descritas linguisticamente.

$$\text{Se } x_1 \text{ é } A_1 \text{ e } x_2 \text{ é } A_2 \text{ e } \dots \dots \dots x_n \text{ é } A_n$$

$$\text{Então } u_1 \text{ é } B_1 \text{ e } u_2 \text{ é } B_2 \text{ e } \dots \dots \dots u_m \text{ é } B_m.$$

Nesse caso,  $A_1$  e  $B_1$  são as representações de conjuntos Fuzzy que condiz aos termos linguísticos tanto das variáveis de entrada como das variáveis de saída. A criação da base de regras é proposta por meio das proposições relacionadas através dos operadores lógicos, *se* e *então*, descritas com base nas informações do especialista. Podemos citar como exemplo do módulo de base de regras, especificamente na avaliação dos estudantes: “*Se o aluno é assíduo, realiza as atividades e tem um bom rendimento na prova então o aluno é bom*”; “*Se o aluno é assíduo, realiza pouco as atividades e tem um bom rendimento na prova então o aluno é regular*”.

Segundo Silva (2011) é nessa etapa do controlador Fuzzy que as variáveis e suas classificações são catalogadas e posteriormente modeladas por funções de pertinência que

pertencem a conjuntos Fuzzy. Logo, as proposições necessitam ser harmônicas com as informações coletadas, no que tange o uso de variáveis linguísticas na problemática envolvida. Essas descrições serão utilizadas no modelo de inferência, etapa exposta a seguir.

### *Modulo de Inferência Fuzzy*

O terceiro módulo, correspondente à inferência, é processo no qual se trata matematicamente cada proposição Fuzzy, por meio das técnicas da lógica subjacente. Nessa fase, são definidas quais as t-normas e t-conormas, assim como, as implicações Fuzzy que serão usadas para obter a relação Fuzzy (relação entre dois conjuntos Fuzzy) que modela a base de regras a partir dos dados de entrada considerados.

A t-norma e t-conorma são operações semelhantes a operação de união e intersecção de dois conjuntos Fuzzy, definidas por uma operação binária  $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  que associa a um par ordenado de graus de pertinência a um grau de pertinência, satisfazendo as propriedades: elemento neutro, comutativa, associativa e monotonicidade.

Barros e Bassanezi (2006) citam a importância desse módulo, pois ele que fornecerá a resposta final do processo a ser adotada pelo controlador Fuzzy, a depender de cada variável de entrada no conjunto. Pode-se gerar diferentes sistemas de inferência, mas, em geral, os mais utilizados e conhecidos na literatura, são: *o método de Mamdani e o Modelo de Takagi-Sugeno-Kang (TSK)*.

Teoricamente falando, o método de Mamdani, propõe uma relação binária  $\mu$  entre  $x$  e  $u$ , que considera o mínimo das regras Fuzzy ativadas da base e em seguida, toma o maior valor possível. Dentre esses sistemas de inferência, utilizamos em nossa pesquisa o *método de Mamdani*, pela característica dos dados e por apresentar bons resultados para situações como a investigada nessa dissertação.

Segundo Barros e Bassanezi (2006, p.121) esse método é baseado na regra de composição de inferência máximo-mínimo, conforme o procedimento:

- *Em cada regra  $R_j$ , da base de regras Fuzzy, a condicional “se  $x$  é  $A_j$  então  $u$  é  $B_j$ ” é modelada pela aplicação  $\wedge$  (mínimo);*
- *Adota-se a t-norma  $\wedge$  (mínimo) para o conectivo lógico “e”;*
- *Para o conectivo lógico “ou” adota-se a t-conorma  $\vee$  (máximo) que conecta as regras Fuzzy da base de regras.*

Formalmente, a relação Fuzzy  $\mu$  é o subconjunto Fuzzy de  $X \times U$  com a função de pertinência dada por:

$$\varphi_{\mu}(x, u) = \max_{1 \leq j \leq r} (\varphi_{R_j}(x, u)) = \max_{1 \leq j \leq r} [\varphi_{A_j}(x) \wedge \varphi_{B_j}(u)]$$

Onde  $r$  é o número de regras que compõem a base de regras e,  $A_j$  e  $B_j$  são subconjuntos Fuzzy da regra  $j$ . Cada um dos valores  $\varphi_{A_j}(x)$  e  $\varphi_{B_j}(u)$  são interpretados como os graus com que  $x$  e  $u$  estão nos subconjuntos Fuzzy  $A_j$  e  $B_j$ , respectivamente, de maneira que  $\mu$  nada mais é que a união dos produtos cartesianos Fuzzy entre os antecedentes e os consequentes de cada regra.

Um exemplo que ilustra esse método de inferência é proposto por Souza e Mesquita (2010), trazendo um caso particular em que o conjunto Fuzzy de entrada  $A$  é um conjunto crisp e cuja função de pertinência se concentra em um ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Dessa forma, tem-se que:

$$\varphi_A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) = (x_0, y_0) \\ 0 & \text{se } (x, y) \neq (x_0, y_0) \end{cases}$$

Ou seja,  $A = A_1 \times A_2$ , no qual :

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{se } x \neq x_0 \end{cases}$$

e

$$\varphi_{A_2}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = y_0 \\ 0 & \text{se } y \neq y_0 \end{cases}$$

Nesse exemplo, podemos observar que a saída do controlador Fuzzy, dada pelo método de inferência de Mamdani, é um subconjunto Fuzzy, mesmo que o conjunto  $A$  seja crisp. Logo, para obtermos um resultado real é preciso fazer uma defuzzificação do subconjunto Fuzzy de saída para se obter um valor crisp que o represente. A seguir, apresentamos o módulo correspondente a defuzzificação.

#### *Módulo de Defuzzificação*

A quarta e última etapa do controlador Fuzzy consiste no processo de defuzzificação, que possibilita representar um conjunto Fuzzy por um número real (valor crisp). Ao desenvolvermos os três primeiros módulos do controlador Fuzzy, obteremos uma variável de

saída que será um conjunto Fuzzy, mesmo que a entrada seja um número real. Com isso, caso desejemos uma resposta real, devemos aplicar algum processo de defuzzificação. Em geral, se utiliza o método do centro de gravidade, centro dos máximos ou a média dos máximos para a realização desse módulo.

Nessa pesquisa, por desejarmos a elaboração de um sistema cujas entradas são reais e a saída Fuzzy, o modelo a ser desenvolvido não passará pelo modelo de defuzzificação. Essa opção foi tomada considerando um processo avaliativo representado por variáveis linguísticas e não traduzidas por um valor discreto, situação que ocorreria se essa etapa do sistema fosse aplicada.

Para Malvezzi (2010) a principal característica do controlador Fuzzy para a avaliação de decisões é que o uso das informações e experiência dos especialistas pode ser incorporada diretamente ao controlador para a geração de saídas adaptadas e moldadas as necessidades que buscam ser solucionadas. Tratando-se da investigação sobre as variáveis linguísticas adotadas para a avaliação, acreditamos que o estabelecimento desse sistema de inferência pode ser associado ao processo avaliativo conduzido pelo professor.

Após apresentarmos os referenciais que fundamentaram nossa pesquisa, abordamos no próximo capítulo os estudos que discutem essas teorias, associando-as a avaliação e ao campo geométrico.



## Capítulo II REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, narramos algumas investigações organizadas em duas seções: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o processo de ensino e aprendizagem do conceito de geometria e a aplicação dos conceitos da teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes. A elaboração desse capítulo, surgiu de nosso interesse em verificar nessas pesquisas, quais os resultados encontrados e as considerações dos autores sobre essas temáticas.

Segundo Gil (2007) para o pesquisador garantir que sua pesquisa é relevante, há a necessidade de fazer um levantamento bibliográfico na área, identificando quais problemas já foram analisados, quais ainda requerem estudos e quais possuem respostas contraditórias. Nesse sentido, essas leituras permitiram compreendermos se os objetivos e procedimentos metodológicos delimitados nessa dissertação estavam de acordo e os pontos que necessitavam de maior atenção. Partindo disso, apresentamos uma síntese de tais investigações.

### 2.1 Teoria de Registros de Representação Semiótica e o Processo de Ensino e Aprendizagem de Geometria

Apresentamos nessa seção, os estudos envolvendo a Teoria de Registros de Representação Semiótica e o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos geométricos, dado o nosso interesse em correlacionar a teoria supracitada com o campo da geometria, na intenção de analisar o desempenho cognitivo dos estudantes a partir das diversas representações desses objetos matemáticos.

#### *Pesquisa de Paola Vighi (2003)*

Vighi (2003) no artigo *The Triangle As a Mathematical Object* faz um relato dos resultados de atividades desenvolvidas com crianças da escola primária (entre 7 a 11 anos), com o objetivo de observar as concepções das mesmas em relação ao conceito de triângulo. Segundo a autora, os estudantes da educação infantil são apresentados as classificações de polígonos denominados de acordo com o número de lados, dentre eles, o triângulo,

apresentando as classificações relativas aos lados ou ângulos. Todavia, ressalta que não foi feita uma verificação para acompanhar se os estudantes aprenderam esse conceito.

Nesse sentido, essa autora descreve que o uso de diversos registros de representação semiótica pode ser útil para auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos. Para isso, cita Duval (1993) que menciona:

A coordenação de muitos registros de representação semiótica parece fundamental para a aprendizagem conceitual de objetos: não devemos confundir o objeto com suas representações e que deve ser reconhecida em cada uma das possíveis representações. (DUVAL, 1993 apud VIGHI, 2003, p.2)

Partindo disso, para observar como a palavra triângulo era evocada na mente dos estudantes, quatro atividades foram desenvolvidas, as duas primeiras traziam a representação figural, a terceira atividade abordava as figuras geométricas na linguagem natural, enquanto a quarta evocava a compreensão dos estudantes sobre quais representações figurais eram triângulos. A partir dessas atividades, foi aplicada uma atividade envolvendo a classificação dos objetos.

Detalhando, na primeira atividade, individualmente, os estudantes deveriam desenhar três triângulos diferentes e explicar as escolhas e as diferenças entre os desenhos. Na segunda atividade, uma folha com a palavra triângulo escrito no meio foi entregue aos estudantes, com o intuito que representassem o que essa palavra sugeria para eles. A terceira atividade solicitava uma explicação do que é um triângulo e, por fim, a quarta atividade, utilizando das representações figurais feitas pelos estudantes nas atividades anteriores, convidava aos sujeitos da pesquisa a discernir sobre quais representações correspondiam ou não a triângulos.

Ao analisar tais atividades, Vighi (2003) conclui que os estudantes utilizaram como recurso a linguagem natural e analogias para definir um triângulo, sendo que alguns não utilizaram as classificações “corretas” no sentido euclidiano, afirmando que as crianças observaram essa figura geométrica pelo aspecto topológico. Além disso, esta autora sugere a replicação dessa pesquisa com estudantes mais velhos ou adultos.

Essa investigação contribuiu para a nossa pesquisa, por trazer uma análise referente a compreensão dos estudantes em relação ao conceito de triângulos e observar, apesar de não ser o foco, as maneiras como os estudantes fazem a relação entre a representação figural e a linguagem natural. Acreditamos que a verificação do conceito de triângulo é importante em

estudantes que estão nos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF), por ser o período em que ocorre o primeiro contato com esse objeto matemático no ambiente escolar, assim como, nos anos finais dessa etapa escolar.

*Pesquisa de Ivone Catarina Freitas Buratto (2006)*

Na dissertação denominada *Representação Semiótica no Ensino de Geometria: Uma Alternativa Metodológica na Formação de Professores*, Buratto (2006) traz como objetivo a elaboração de uma proposta de atividades didáticas baseadas nas questões dos registros de representação, como alternativa metodológica para a formação inicial dos professores em relação aos conceitos geométricos, assim como, a aquisição de metodologias para a prática pedagógica. Para tal, mais especificamente, construiu as atividades envolvendo o conceito de áreas de figuras geométricas planas e as analisou a luz da TRRS.

Os sujeitos participantes da pesquisa, foram os estudantes do 5º semestre da Licenciatura em Matemática de uma universidade privada. A pesquisa foi realizada nas seguintes etapas: realização do estudo bibliográfico, fundamentado na TRRS; aplicação do questionário com os sujeitos da pesquisa, para identificar como esses sujeitos tratavam os conceitos de cálculo de áreas de figuras planas; desenvolvimento de propostas de atividades envolvendo os registros semiótica em geometria e por fim, avaliação do processo como um todo.

Como resultado desse processo, Buratto (2006) salienta que não há um documento que oficialize as competências que devem ser propiciadas ao professor em sua formação. Além disso, ressalta a dificuldade em dominar a fundamentação teórica, associada as deficiências do conteúdo (geometria), citando assim que para se construir o conhecimento geométrico é necessário a compreensão “a utilização de registros de representação e importância da figura geométrica durante o desenvolvimento da resolução” (BURATTO, 2006, p.123), permitindo a reflexão dos conceitos, e as habilidades e competências Matemáticas.

Essa investigação colaborou de maneira significativa para o desenvolvimento de nossa pesquisa, pelo fato de trazer uma proposta de ensino e aprendizagem dos conceitos de figuras planas (por exemplo, o triângulo nosso objeto de estudo), associadas a teoria proposta por Duval (1995), concluindo que o ensino desses conceitos nessa temática pode garantir um bom aprendizado dos estudantes.

*Pesquisa de Silvana Holanda da Silva e Marcília das Chagas Barreto (2011)*

Nessa investigação, cujo título é *Conhecimento de Professores Polivalentes em Geometria: A Contribuição da Teoria dos Registros de Representação Semiótica*, as autoras tiveram como objetivo analisar as contribuições da utilização dos diferentes registros de representações semióticas (numérica, figural, discursivas, concreta) na elaboração dos conceitos geométricos por professores polivalentes.

Para analisar essas contribuições a teoria da engenharia didática proposta por Artigue (1988) é justificada pelo fato de possibilitar a análise das relações entre o professor e o objeto matemático em questão, voltadas para o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Assim, a coleta de dados foi realizada em quatro fases: Análise prévia (análise dos conceitos elementares de geometria plana); concepção e análise a priori (construção de uma sequência didática); experimentação (aplicação da sequência didática) e análise a posteriori (análise dos dados coletados).

A pesquisa foi realizada em uma escola da rede municipal, contando com a participação de seis professoras que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental em que foi possível entender as concepções das mesmas acerca dos conceitos geométricos e identificar as lacunas na aquisição desse conhecimento.

Como resultado dessa investigação, as autoras trazem à tona problemas referentes à política de formação continuada dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, não havendo uma estratégia para suprir às necessidades dos docentes em relação aos conceitos geométricos. Evidenciou-se também as lacunas relativas a esses conceitos inerentes ao currículo escolar, dado o fato de observar o pouco entendimento sobre as propostas de ensino em geometria.

Na análise do livro didático adotado na unidade escolar, as autoras salientam um quantitativo significativo de conceitos geométricos, o que trouxe um contrassenso com a prática docente, levando as pesquisadoras a supor que os conteúdos geométricos presentes no livro didático são suprimidos do processo de ensino dos estudantes. Focando nas diferentes representações das figuras geométricas, sinalizam a ênfase em utilizar apenas o registro numérico sugerindo o desenvolvimento de novas pesquisas para aprofundar a análise nesse sentido.

A pesquisa aqui mencionada, apesar de trazer a investigação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tornou-se uma contribuição para a nossa pesquisa, por sinalizar as lacunas cognitivas dos professores em relação aos conceitos geométricos, assim como, a centralidade em um único registro para o ensino desses conceitos. Dado o nosso interesse em articular os diversos registros de representação para o ensino dos conceitos de triângulos, essa investigação colabora para a nossa reflexão acerca da prática docente, assim como, da prática avaliativa.

*Pesquisa de Gabriela Teixeira Kluppel (2012)*

Na dissertação intitulada *Reflexões Sobre o Ensino da Geometria em Livros Didáticos à Luz da Teoria de Representações Semióticas Segundo Raymond Duval*, Kluppel (2012) apresenta uma análise dos livros didáticos de Matemática, concentrando-se nos conteúdos de geometria. Partindo desses conceitos, o objetivo principal foi explicitar as especificidades da TRRS em relação a esses conceitos e diagnosticar como estão abordadas essas relações nos livros didáticos analisados.

A escolha desse referencial teórico para Kluppel (2012) ocorreu pelo fato dessa teoria permitir investigar como ocorre o pensamento cognitivo dos estudantes na aprendizagem em Matemática, fator considerado pela autora como importante para melhorar a qualidade do ensino de Matemática, especificamente de geometria.

Para coletar os dados, foram considerados os livros didáticos do Ensino Fundamental II (6º ano ao 9º ano) adotados no período de 2002 a 2009. Após a escolha dos livros, elencou-se os conteúdos referentes à geometria, subdividindo em três dimensões. Dentre essas, os conteúdos agrupados na segunda dimensão tornou-se os instrumentos de análise. Relacionando os conceitos com a TRRS, a autora define as categorias: tratamentos figurais e tratamentos discursivos; unidades de base constituintes dos registros; articulação entre registro discursivo e figural; modificação e apreensão operatória das modificações das figuras: mereológicas<sup>8</sup> ou óticas; resolução de exercícios.

Os resultados obtidos pela autora, indica a existência de lacunas nos conteúdos apresentados pelos livros didáticos investigadas em relação aos conceitos de geometria e os

---

<sup>8</sup> As modificações mereológicas estão ligadas à reconfiguração das figuras e as modificações óticas estão atreladas à perspectiva, (DUVAL, 2004 apud KLUPPEL, 2012, p.51).

aspectos da teoria desenvolvida por Duval, relativo a interação entre o tratamento dos registros discursivos e figurais, a articulação entre os registros, faltam tarefas que levem o estudante a argumentar sobre suas respostas. Nesse sentido, são apresentadas como exemplos tarefas relativas a classificação e cálculo de medidas de triângulos em que não há a observação da linguagem empregada pelo sujeito para a apreensão da figura, o que permitiria evidenciar as restrições do mesmo em relação as figuras geométricas.

Considerando que o livro pode oferecer ao professor uma orientação de como os conceitos podem ser abordados em sala de aula, essa pesquisa contribui com a investigação, por diagnosticar a existência de dificuldades para o processo de ensino e aprendizagem de geometria, além de ressaltar a importância da Teoria das Representações Semióticas para a efetiva compreensão dos objetos geométricos, caso em que a figura geométrica triângulo se encaixa. Esses resultados são motivadores na nossa pesquisa, nos direcionando para investigar a relação entre o conceito de triângulos à luz da TRRS.

*Pesquisa de Joseide Justin Dallemole e Claudia Lisete Oliveira Groenwald (2012)*

Apresentando a pesquisa de doutorado em andamento, Dallemole e Groenwald (2012) no artigo *O Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica* trazem o objetivo de investigar sobre o conteúdo de Geometria Analítica (GA) no Ensino Médio, associadas a possibilidade de estabelecer uma proposta metodológica para esses conceitos, articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995). Essa correlação foi estabelecida, pois as autoras acreditam que:

O conteúdo de Geometria Analítica por si só contém uma diversidade de registros semióticos que devem ser explorados em seu processo de ensino e aprendizagem e considera-se a teoria dos Registros de Representação Semiótica como uma possibilidade para o educador desenvolver situações de ensino e aprendizagem que enfatize a diversidade de registros de representação que possui a Geometria Analítica e a articulação entre eles, para que o aluno compreenda e realize os diferentes processos cognitivos requeridos por este conteúdo matemático. (DALLEMOLE; GROENWALD, 2012, p.2)

A partir desse cenário, as autoras justificam a importância de investigar essa temática no Ensino Médio, de forma que venha colaborar com o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos geométricos em questão. Dessa forma, a pesquisa contou com a participação de professores e estudantes, enquanto sujeitos da pesquisa.

Como procedimentos metodológicos, adotaram as seguintes etapas: Estudo do referencial teórico e levantamento bibliográfico de aplicações em geometria; seleção das escolas públicas a serem investigadas; análise documental das propostas curriculares das escolas pesquisadas, assim como, análise dos documentos oficiais : PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e proposta curricular do Estado do Rio Grande do Sul); entrevista com os professores de Matemática; análise das questões de Geometria Analítica presentes no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio); investigação nos livros didáticos nacionais para o Ensino Médio, aprovados pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) em 2012; implementação de um ambiente de investigação no qual está imersa uma sequência didática relativa aos conceitos de GA; e por fim, aplicação da sequência com um grupo de estudantes e análise dos dados.

Apesar dessa investigação se encontrar em fase de desenvolvimento e por esse motivo não apresentar os resultados dessa investigação, acreditamos que essa proposta de pesquisa colabora para a discussão entre os diversos registros de representação no processo de ensino e aprendizagem de geometria analítica. Nessa visão, acreditamos que essa investigação também pode ocorrer relativo a geometria plana, especificamente, no conceito de triângulo, nosso objeto matemático que instituímos para desenvolver nosso estudo.

#### *Pesquisa de Franciele Catelan Cardoso (2012)*

Na pesquisa denominada *O Ensino da Geometria e os Registros de Representação Sob um Enfoque Epistemológico*, Cardoso (2012) surgiu das leituras, discussões e reflexões realizadas em uma disciplina do mestrado em Educação. Nesse aspecto, essa investigação discutiu alguns indicadores que podem interferir no ensino e aprendizagem de geometria e buscou entender os obstáculos envolvidos nesse processo, sob o enfoque da teoria de Raymond Duval.

Ao fazer uma análise dos dados estatísticos encontrados nas avaliações em larga escala, tanto nacionais quanto internacionais, a autora sinaliza a dificuldade que os estudantes encontram para a resolução de problemas matemáticos que envolvem a mobilização dos conceitos geométricos, ressaltando que esses problemas podem estar atrelados a compreensão em Matemática, no sentido de dominar os diversos registros de representação do objeto matemático.

Após apresentar a discussão relativa a trajetória da geometria no currículo escolar, além da relação entre Registro de Representação Semiótica e o ensino da Geometria, são levantados alguns apontamentos ditos importantes para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem de geometria. Dessa maneira, sinaliza-se a relevância de se trabalhar a partir das várias representações do objeto matemático, ressaltando também a importância da coordenação entre os diversos registros de representação para que haja uma aprendizagem significativa.

Esses pontos ressaltados pela autora, são interessantes a serem observados no processo cognitivo dos conceitos geométricos, o que estimula no desenvolvimento de nossa pesquisa a fim de entender o processo de ensino e aprendizagem desse campo matemático e visualizar as potencialidades de avaliar ao desempenho do estudante a luz da teoria proposta por Duval.

*Pesquisa de Amanda Barbosa da Silva (2013)*

No artigo *Um Estudo da Representação de Triângulos em Livros Didáticos da Alfabetização Matemática*, Silva (2013) apresenta o objetivo de identificar as representações de triângulos e as conversões dos registros relacionadas a essa figura geométrica, localizadas em duas coleções de livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º, 2º e 3º anos), totalizando seis livros dentre as coleções da PNLD de 2013.

Esses livros destinados a alfabetização Matemática foram analisados observando todas as representações com foco em triângulos, descritas por meio de categorias (a posição dos lados do triângulo em relação à margem inferior da folha; a variedade de triângulos quanto ao comprimento dos lados; a variedade de triângulos quanto à medida dos ângulos; atividades de conversão de registros).

Como resultado dessa análise, indicou-se que nas duas coleções há preponderância das representações em relação aos lados dos triângulos (equilátero e isósceles) e quanto a medida dos ângulos (retos ou acutângulos) e por fim, a posição dos lados em relação às margens, a maioria das representações estão no lado paralelo a margem inferior e com o vértice acima desse lado. Dessa maneira, verificou-se que não há muita variedade nas representações de triângulos, assim como, na conversão de registros, o que pode intervir para uma alfabetização Matemática limitada no sentido na representação e conversão entre registros.



Essa investigação colabora no contexto de nosso estudo, por trazer o conceito matemático triângulo que interessamo-nos em analisar, associada a uma das nossas vertentes teóricas. Assim, os resultados evidenciam a necessidade de realizar um processo de ensino e aprendizagem que tenha um foco diversificado nos diversos registros e principalmente sem deixar de valorizar a conversão dos registros, já que os livros didáticos adotados para os anos iniciais do Ensino fundamental não abordam de forma significativa tal ação.

*Pesquisa de Raimundo Luna Neres (2015)*

No artigo intitulado *Trabalhando Registros de Representação Semiótica em Atividades de Matemática no Ensino Fundamental*, Neres (2015) apresenta os resultados de uma experiência realizada com 30 estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental relativo ao desenvolvimento de atividades com os números naturais e racionais baseadas na TRRS. Dessa forma, a pesquisa teve como objetivo investigar como os estudantes trabalham na aplicação da conversão e tratamento dos registros de representação e como os estudantes tratam ou não o fenômeno da heterogeneidade na conversão dos registros.

Como procedimentos metodológicos, foram aplicados três tipos de atividades, a primeira serviu como um instrumento diagnóstico para diagnosticar o nível de compreensão e conhecimentos matemáticos dos estudantes. A segunda, trazia questões que envolviam a conversão e tratamento entre registros, da linguagem natural para a numérica e gráfica. O terceiro tipo envolvia atividades com semelhança da primeira atividade, todavia, com dados diferentes.

Ao analisar os dados, Neres (2015) afirma que os estudantes ainda possuem dificuldades em trabalhar com a representação gráfica, entendem o enunciado do problema, mas possuem dificuldades em fazer a conversão do objeto que desejava representar. Outro ponto, está no fato de não compreender os conceitos e domínios das diferentes formas de raciocínio e não conseguirem visualizar de forma clara a mudança na representação de registro.

Apesar dessa pesquisa não fazer uso dos conhecimentos de figuras geométricas associadas a teoria proposta por Duval, acreditamos que a mesma coopera com a nossa investigação, por trazer uma pesquisa envolvendo a estudantes do ensino fundamental ao

campo de investigação do nosso interesse, articulando a conversão e tratamento dos registros nas atividades aplicadas, fato que buscamos com a elaboração da sequência de ensino.

### *Reflexão Geral*

Ao refletimos sobre essas investigações apresentadas, observamos a importância da relação entre os registros de representação semiótica e o processo de ensino e aprendizagem de geometria, visualizando as dificuldades existentes nesse processo. Além disso, observamos que estas pesquisas trazem de alguma forma a necessidade de considerarmos que as diversas representações colaboram para a apreensão dos conceitos geométricos, como foi descrito por Duval (2002).

Por fim, reafirmamos a necessidade de ponderar as diversas representações, bem como o tratamento e conversão entre os registros na proposta de sequência de ensino para a avaliação do desempenho cognitivo dos estudantes em atividades com triângulos.

## **2.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy e a Avaliação do Desempenho dos Estudantes**

A elaboração de métodos, sistemas e ambientes virtuais para acompanhar o desempenho cognitivo do estudante, têm sido o foco de diversas pesquisas que propõem a correlação entre a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e sua lógica subjacente com o campo da avaliação. Nesse sentido, encontramos na literatura, investigações com foco na construção de sistemas avaliativos com base nessa teoria, que justificam e complementam a nossa proposta de pesquisa. Por isso, apresentamos alguns desses estudos que trazem a interrelação entre esses campos.

*Pesquisa de Kelle Costa, Maria da Penha Harb, Silvana Brito, Elói Favero (2006)*

Costa et.al (2006) no estudo intitulado *Acompanhamento do estudante em ambientes de aprendizagem utilizando Lógica Fuzzy* propõem o uso da Lógica Fuzzy para a composição de uma nota global dos estudantes que são acompanhados por meio de ambientes virtuais de aprendizagem (educação a distância). Os autores justificam que o uso dessa teoria na composição de uma nota global permite uma avaliação mais flexível e justa, pois opera com variáveis linguísticas.

Sendo assim, para atribuir uma nota ao estudante com a aplicação do sistema Fuzzy, foram adotados os seguintes critérios e variáveis linguísticas como dados de entrada: grau de complexidade da atividade (fácil, médio e difícil), tempo dedicado para a resolução (normal, bom e ótimo) e percentual de acerto (pouco, médio e muito), atrelados ao desempenho do estudante ao longo de todo o período, visando uma média do desempenho relativo a cada atividade desenvolvida no ambiente virtual. Os dados de saída, que corresponde ao desempenho do estudante, estavam associados as variáveis (insuficiente, baixo, médio e bom).

Após estabelecer o sistema, como forma de testá-lo, foram utilizadas amostras de vinte estudantes do curso de ciências da computação da Universidade Federal do Pará (UFPA), nos quais eram disponibilizadas quatro atividades diariamente. Cada atividade, possuía um grau de dificuldade e um tempo previsto para a sua resolução. Sendo assim, ao analisar tais dados, “foi possível obter informações para o acompanhamento da turma, do estudante e avaliação da condução da disciplina e/ou conteúdo proposto, através de gráficos gerados dinamicamente” (COSTA et. al, 2006, p.47).

Ao final dessa investigação, os autores concluem que há benefícios em aplicar a Lógica Fuzzy na avaliação do desempenho, pois pode dar ao professor a chance de observar de forma global a atuação dos estudantes e principalmente o fato de possibilitar um feedback rápido. Além disso, salientam a simplicidade desses sistemas e o reduzido custo computacional que permitem ao professor acompanhar a turmas com um alto número de pessoas.

Esse estudo colabora com a nossa pesquisa, na medida em que compreendemos que o professor pode fazer uso dessa teoria para observar o desempenho do aluno durante todo o processo e não apenas em momentos pré definidos. Outro fator que nos chamou a atenção é que a associação entre os sistemas Fuzzy e sistemas de avaliação, permitem ao professor observar tanto globalmente, como individualmente, o processo de ensino e aprendizagem.

*Pesquisa de Hui-Yu Wang e Shyi-Ming Chen (2006c).*

No estudo *New Methods for Evaluating Students' Answerscripts Using Vague Values* são apresentados dois métodos para avaliar as respostas escritas dos estudantes, utilizando de valores vagos, na qual os conceitos são atribuídos a cada questão. Para tal, mencionam que “Os métodos propostos podem avaliar os estudantes de uma forma mais flexível e de maneira mais inteligente” (WANG; CHEN, 2006, p.1).

Nesse método de avaliação, foram estabelecidos pelos autores, uma classificação tanto para o avaliador, como para a avaliação dos registros dos estudantes. No caso das variáveis relacionadas aos avaliadores, são representados os valores no intervalo entre zero e um, determinando o índice de otimismo do avaliador relativo a avaliação escrita. Se o índice for maior do que zero e menor que 0,5, o avaliador é caracterizado como *pessimista*; se o índice estiver igual a 0,5 considerar-se o avaliador *normal*; e se o índice estiver entre 0,5 e 1, 0 o avaliador é descrito como um avaliador *otimista*.

Já para a avaliação da escrita dos estudantes, foram categorizadas onze variáveis que são usadas para avaliar o desempenho do estudante relativo a questões de um teste ou exame, correspondente a onze níveis de satisfação, de forma a mapear essas variáveis de satisfação em função dos intervalos relativos a cada valor desses parâmetros. Logo, os níveis de satisfação estão classificados em: *Extremamente mal, muito muito mal, muito mal, mais ou menos mal, razoável, mais ou menos bom, bom, muito bom, muito muito bom, extremamente bom*.

Para a avaliação das respostas dos estudantes, é necessário o estabelecimento de critérios a serem balizados pelo professor, como no exemplo do próprio artigo em que propõe para essa ação, os seguintes critérios: *precisão da informação, cobertura adequada, concisão e expressão clara*; cada um com o seu referido peso. Como conclusão, os autores citam que o uso do método proposto permite avaliar ao estudante de maneira mais flexível.

Esse artigo nos chama a atenção, devido ao fato de trazer o uso de termos vagos para a avaliar as respostas das atividades escritas dos estudantes, apesar de não aporta-se na Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Há também o uso de variáveis para descrever o otimismo do professor, apesar de não informar diretamente quais os critérios que foram utilizados para a criação das escalas de avaliação, tanto para os dois casos. Isso nos remete ao fato, de que cada professor possui características e particularidades no momento de avaliar e que podem ser diferentes para cada estudante, apesar de ser, em muitos casos, o mesmo instrumento de avaliação, fator que nos chama a atenção para a nossa pesquisa.

*Pesquisa de Ana Paula de Medeiros Ribeiro (2007)*

Ribeiro (2007) traz em sua dissertação “*A Avaliação da Aprendizagem: Aplicação de um Modelo Fuzzy Para se Obter Notas Mais Justas na Disciplina de Língua Portuguesa*”, o

objetivo de compreender a visão das professoras do Ensino Fundamental de uma determinada escola do município de Fortaleza em relação a avaliação da aprendizagem e identificar as dificuldades encontradas pelas mesmas ao longo desse processo.

Todavia, a pesquisa não ficou limitada a esses dois objetivos, o terceiro objetivo consistiu na elaboração de um aplicativo com base na Lógica Fuzzy, para auxiliar as professoras durante a avaliação dos estudantes, com a justificativa que "a Lógica Fuzzy se aplica coerentemente nessa situação, uma vez que tem o poder de manipular dados qualitativos que, para efeito deste estudo, são os conceitos, e convertê-los em quantitativos, ou seja, as notas numéricas" (RIBEIRO, 2007, p.9).

Para a elaboração desse modelo, os dados foram coletados por meio de entrevistas, questionários com os professores e direção escolar e observação não participante da prática docente, que ao serem interpretadas pela pesquisadora, permitiram o estabelecimento do modelo. Após ser desenvolvida, a versão preliminar do modelo (denominado como AVALI@NDO) foi testada por meio de uma comparação entre as notas atribuídas pelas professoras aos estudantes durante o processo avaliativo e os conceitos e notas geradas através do sistema de inferência Fuzzy.

Nessa perspectiva, Ribeiro (2007) descreve que os resultados do sistema ofereceram um grau de confiabilidade de 93 %, afirmando que a utilização da Lógica Fuzzy no sistema de avaliação pode auxiliar ao professor avaliar seus estudantes com o uso de instrumentos qualitativos distintos e atribuir conceitos aos diversos indicadores de desempenho de uma determinada variável.

Esse estudo traz pontos importantes para a nossa investigação ao propor futuras investigações que visem a elaboração de um sistema de inferência, com um alto grau de competência para avaliar o desempenho do estudante da Educação Básica. Outro ponto interessante está na possibilidade de auxiliar ao professor para a avaliação mais padronizada com resultados mais precisos.

*Pesquisa de Waldo Costa, José Fernandes e Marina Brochado (2007)*

No artigo "Proposta do Uso de Confiabilidade Por Meio da Lógica Fuzzy no Processo de Avaliação dos Alunos do Curso de Engenharia de Produção do CEFET-RJ" Costa, Fernandes e Brochado (2007) apoiam o uso da Lógica Fuzzy na elaboração de um sistema de

avaliação para os estudantes de engenharia de produção, com base em critérios utilizados pelo professor para acompanhar o desempenho dos estudantes: a assiduidade, o grau de empenho na matéria e as notas das avaliações. Segundo os autores:

As técnicas tradicionais de análise de sistemas não são bem adaptadas para lidar com sistemas humanos porque elas falham em se adequar com a realidade, da indefinição do pensamento e do comportamento humano. Assim, para lidar com tais sistemas de uma forma realista, necessitamos de abordagens que não coloquem acima de tudo o formalismo matemático preciso, rigoroso, e que empreguem, em vez disso, uma estrutura metodológica que seja tolerante com as imprecisões e verdades parciais. (COSTA; FERNANDES; BROCHADO, 2007, p.1)

Essa afirmação é justificada ao afirmarem que o processo avaliativo é uma ação mais humana, envolvendo imprecisão e subjetividade, logo, trazem o uso da ferramenta Fuzzy disponibilizado no MATLAB 6.1<sup>9</sup>. Dados os critérios para a avaliação, foram elaboradas as variáveis linguísticas correspondentes a cada critério, dessa maneira, assiduidade (pouco assíduo, assíduo e muito assíduo), empenho (pouco empenho, empenhado e muito empenho) e notas (ruins, boas e excelentes). O dado de saída no sistema, representando ao resultado da avaliação, foram representados por: péssimo aluno, aluno regular, bom aluno e excelente aluno. Tanto os dados de entrada, como os dados de saída, foram agrupados em intervalos que variam de [0,100].

Apesar de não ter sido aplicado um protótipo do sistema desenvolvido pelos autores, os mesmos concluem que a avaliação dos estudantes de Engenharia de Produção com o uso da Lógica Fuzzy oferece a vantagem de ser um sistema simples e com baixo custo computacional, sendo um sistema mais humano e condizente com a realidade dos futuros engenheiros.

A colaboração dessa investigação para nosso estudo está no fato de auxiliar na compreensão das etapas relativas ao desenvolvimento do sistema de inferência Fuzzy com fins avaliativos, além de transparecer que é possível elaborar esse sistema utilizando de critérios subjetivos, como por exemplo, a assiduidade, levando esses diversos pontos para obter a média final.

---

<sup>9</sup> O MATLAB trata-se de um software interativo voltado para o Cálculo Numérico, integrando a análise numérica, cálculo de matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos.

*Pesquisa de Marcelo Faria, Gabriel Malva, Fabiano Dorça, Robson Lopes, Márcia Fernandes e Carlos Lopes (2008)*

O artigo proposto por Faria et. al (2008), com o título “*Um Sistema de Avaliação em EAD Baseado em Lógica Fuzzy*” sugere um sistema de avaliação do desempenho dos estudantes dado o contexto da educação a distância enquanto modalidade de ensino, buscando propor um sistema no qual o professor avalie continuamente durante o processo de ensino e aprendizagem. Para estabelecer o modelo avaliativo com base na Lógica Fuzzy, duas características avaliativas foram observadas: a compreensão do conteúdo e o comportamento do estudante.

A descrição da avaliação no primeiro aspecto, levou em consideração o tempo para a progressão do conteúdo, para a resolução de uma questão, assim como, o percentual de acerto. Nesse aspecto, as variáveis de entrada para o estabelecimento do sistema, foram as respostas e tempo de resposta de cada questão. Já para o segundo aspecto, tomou-se como base, o período em que o sujeito permaneceu no tópico do curso, a movimentação da barra de rolagem, além da participação nos chats e fóruns.

O resultado da união entre essas variáveis, equivale ao desempenho do estudante, expresso pelos juízos de valor, especificamente, *baixo, regular, médio, bom e excelente* que posteriormente transformou-se em valores numéricos equivalente a média final. Após a simulação de uma situação para elucidar melhor o desenvolvimento da proposta, Faria et al (2008) concluem que devido ao uso da Lógica Fuzzy há a possibilidade de uma maior flexibilização do sistema, além de citar o sistema como uma ferramenta eficiente e abrangente.

Nesse artigo, visualizamos uma proposta de avaliação que traz contribuições para a nossa dissertação, por considerar tanto os aspectos dos estudantes relativo ao conteúdo, assim como, os aspectos comportamentais, possibilitando monitorar todo o processo do estudante, sendo um recurso que apesar de ter sido proposto para o ambiente virtual, também se adequa para avaliar o desempenho de forma presencial.

*Pesquisa de Mahmud Othman, Ku Huhana Ku-Mahanud, Azuraliza Abu Bakar ( 2008)*

O artigo produzido por Othman, Ku-Mahanud e Abu Bakar (2008), cujo título é “*Fuzzy Evaluation Method Using Fuzzy Rule Approach In Multicriteria Analysis*” discute a combinação de métodos quantitativos usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy para analisar a

qualidade do ensino, de forma a classificá-lo em diversos cursos. Segundo os autores, “A utilização do modelo é apropriado para a avaliação de situações que envolvem subjetividade e informações imprecisas” (OTHMAN; KU-MAHANUD; ABU BAKAR, 2008, p.95).

Os conjuntos adotados para diagnosticar a qualidade do ensino, escrita a partir de seis fatores e quatorze critérios, relativos ao *conteúdo* (um dos critérios, precisão dos conceitos básicos), *maneira de ensinar* (estimular a imaginação e o desenvolvimento da capacidade dos estudantes) e *relação entre professor e aluno* (atitude cordial e atenciosa para com os estudantes e um bom senso de responsabilidade). A partir desse modelo, são calculados os valores respectivos a cada critério, que ao serem agrupados correspondem ao grau de qualidade do ensino, descritos como: A (excelente), B (muito bom), C (bom), D (satisfatório) e E (insatisfatório).

Para obter os resultados desse modelo, considerou-se a qualidade de ensino de cinco docentes, que ministram aulas em cinco cursos. Para obter as médias relativas a cada critério, foram entrevistados trinta e cinco estudantes de uma classe que observaram a qualidade do ensino do professor durante as aulas. Ao analisar os dados coletados e compara-los com os resultados dos modelos obtidos a partir de modelos de Biswas (1995) e Chu (1990), os autores ressaltam que o método proposto é comparável ao método de Chu e apresenta um melhor desempenho do que o método de Biswas.

Dessa maneira, concluiu-se que o modelo proposto pode ser utilizado como uma alternativa para a resolução de problemas que envolvem incerteza, além de afirmarem que a sua principal contribuição foi a criação de um sistema com base na Lógica Fuzzy que consiste em conjunto de regras na forma de IF (antecedente) ENTÃO (Conclusão).

A leitura e compreensão desse artigo, auxiliou no desenvolvimento de nossa pesquisa pois traz explicitamente um processo de avaliação do desempenho do professor com base numa variedade de critérios, ressaltando que a correlação entre os critérios é primordial para a descrição do conceito. Sendo assim, trazemos esse artigo para evidenciar que há a possibilidade de correlacionar a diversos fatores e critérios, tais como, (cognitivo, afetivo e psicomotor) para o estabelecimento de uma proposta para avaliar o desempenho do estudante, no mesmo aspecto adotado nesse artigo para a avaliação do ensino.



*Pesquisa de Beatriz Wilges, Gustavo Mateus, Silvia Nassar e Rogério Bastos (2010)*

Com o objetivo de implementar um modelo para a descrição do perfil da aprendizagem dos discentes que cursam a disciplina de Estatística, realizada na modalidade semipresencial, Wilges et. al (2010), no artigo denominado “*Avaliação da Aprendizagem Por Meio de Lógica de Fuzzy Validado por uma Árvore de Decisão ID3*” estabelecem por meio da Lógica Fuzzy um sistema que analisa a compreensão dos conceitos estatísticos, considerando os rendimentos relativos aos aspectos práticos e técnicos no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

Assim, sugerem a aplicação de um plano de ação tomando como base a Lógica Fuzzy, determinando se o estudante poderá mudar do módulo tutorial para o módulo avançado, módulos esses que integram a proposta da disciplina no ambiente online. Para isso, foram considerados como variáveis de entrada para o sistema, os níveis de aprendizagem do estudante, descritos em: *regular, bom e excelente*. Como maneira de simular a aplicação do sistema, foram adotadas as informações de 57 estudantes matriculados na disciplina estatística no primeiro semestre de 2010.

Ao inserir tais dados no protótipo em questão, foram extraídas notas, representadas por meio dos conceitos A, B e C, correspondendo quantitativamente aos intervalos: desempenho menor do que 0,6, conceito C (*regular*); entre 0,61 e 0,79, conceito B (*bom*); entre 0,8 e 1,0, conceito A (*excelente*). Dessa maneira, Wilges et. al (2010) concluíram que a Lógica Fuzzy permite flexibilizar o processo de ensino e aprendizagem, ao permitir um acompanhamento mais adequado das atividades práticas e teóricas, assim como, analisar o perfil do estudante.

Nesse contexto, encontramos semelhanças com a nossa intenção de estabelecer uma proposta para avaliar o desempenho dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, pelo fato dessa proposta através da TCF diagnosticar se o estudante possuirá um escore suficiente para a mudança de módulo ou se precisará manter-se no mesmo. Logo, acreditamos na ideia que a proposta da avaliação do desempenho por meio dessa teoria, permitirá ao professor observar o desempenho dos estudantes de maneira ampla.

*Pesquisa de William Roberto Malvezzi (2010)*

Trazendo a discussão sobre a avaliação da aprendizagem mediado por recursos tecnológicos, Malvezzi (2010) em sua dissertação “*Uma Ferramenta Baseada em Teoria Fuzzy Para o Acompanhamento de Alunos Aplicado ao Modelo de Educação Presencial Mediado por Tecnologia*” traz como principal objetivo, elaborar uma ferramenta para acompanhar a avaliação da aprendizagem dos estudantes dos cursos presenciais mediado por tecnologia, da Universidade do Estado do Amazonas (UEA).

Devido à realização das disciplinas nessa modalidade de ensino, serem ministradas por aulas via satélite, com a interação entre estudantes e professores através do AVA, foram considerados como os parâmetros para a elaboração do sistema, os dados relativos ao desempenho dos estudantes nos testes parciais e prova final, assim como, as interações no AVA no que diz respeito aos chats, fóruns e tarefas no ambiente virtual.

Pelo fato das disciplinas nesses cursos de formação superior, serem realizadas no período de três semanas, objetivou-se com a elaboração do sistema, fornecer ao professor uma ferramenta que permitisse através do uso de técnicas da Lógica Fuzzy, observar o desenvolvimento discente, possibilitando identificar as possíveis dificuldades no processo de aprendizagem.

Dessa maneira, durante a criação do sistema foram considerados como dados de entradas o desempenho no AVA, notas nos testes e prova final; representadas pelas variáveis linguísticas *insuficiente, bom e muito bom*. As variáveis de saída, consistiram na representação do juízo de valor com o uso das variáveis *insuficiente, regular, bom, muito bom*. Logo, dadas as quatro variáveis de entrada, houve uma única variável de saída que reproduzia o nível de aprendizagem do estudante, convertida na sequência em valores numéricos com o uso do método de defuzzificação.

Da mesma forma que o artigo apresentado anteriormente, o desenvolvimento desse sistema foi simulado com argumentos equivalentes a uma situação real, auxiliando na visualização dos possíveis resultados que podem ser alcançados com a utilização da Lógica Fuzzy enquanto ferramenta no processo avaliativo. Sendo assim, Malvezzi (2010) faz uma comparação entre os resultados fornecidos por meio das médias aritméticas e médias Fuzzy.

Logo, ao analisar os resultados conclui que a utilização da Teoria dos Conjuntos Fuzzy pode colaborar para estabelecer moldes para a saída do resultado da aprendizagem dos estudantes, de acordo com as necessidades apresentadas no modelo de ensino presencial mediado pela tecnologia, sendo uma solução simples para a interpretação de dados que envolvem imprecisão e vagueza.

A maneira como o sistema propõe o acompanhamento do discente, semana após semana, permite ao professor observar como está o nível de aprendizagem do estudante quanto aos conceitos apresentados na disciplina em que leciona, além de fornecer no âmbito geral, o desempenho da turma. Além disso, como uma das sugestões de trabalhos futuros, temos: “O desenvolvimento de uma ferramenta baseada na Teoria Fuzzy onde fossem categorizados os níveis taxonômicos de Bloom demonstrando uma organização hierarquizada dos objetivos educacionais e quando eles são alcançados” (MALVEZZI, 2010, p. 104).

Essa sugestão descrita por Malvezzi (2010) vem ao encontro da nossa pesquisa, já que o autor reconhece a necessidade de trabalhos nesse enfoque para o ensino presencial mediado. Nesse sentido, decidimos concentrar nossa investigação para a elaboração de uma proposta com base na Teoria dos Conjuntos Fuzzy para o ensino presencial, acreditando na correlação entre a Taxonomia de Bloom e Teoria dos Conjuntos Fuzzy para avaliar o desempenho do estudante, particularmente, os conceitos de geometria.

*Pesquisa de Catharina De Oliveira Corcoll – Spina (2010)*

Na tese intitulada “*Lógica Fuzzy: Reflexões que Contribuem para a Questão da Subjetividade na Construção do Conhecimento Matemático*”, Corcoll-Spina (2010) traz como principal objetivo a discussão sobre o uso dessa lógica na solução de problemas reais, buscando também compreender o valor e papel dessa teoria para o campo da Educação Matemática. Para a coleta de dados, a autora utiliza como sujeitos da investigação os estudantes do Curso de Licenciatura das Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos (UNFEB), em uma disciplina que prevê o estudo da Teoria dos conjuntos e dos Fundamentos da Lógica Clássica, disciplina essa comum aos cursos de Licenciatura em Química, Matemática e Física.

A investigação ocorreu nas seguintes etapas: Inicialmente foi aplicado um questionário composto por oito questões, para estimular o uso de variáveis subjetivas na solução das

tarefas, como podemos observar na tarefa a seguir que integrou o questionário “*O excesso de Velocidade é causa de multa. Numa rodovia onde o limite de velocidade é 120 Km/h, o que seria uma velocidade baixa, média, alta e altíssima? Justifique sua resposta*”. (CORCOLL-SPINA, 2010, p.112).

Na etapa seguinte, um minicurso foi desenvolvido cujo o foco central foi a resolução dos problemas apresentados nos questionários com base na Matemática clássica e na Matemática Fuzzy, além disso, discutiu-se os conceitos dessa teoria. Por fim, aplicou-se outro questionário para verificar o uso por parte dos estudantes das ferramentas da Teoria Fuzzy em problemas, tal como, “*Usando a subjetividade própria do fenômeno “avaliação” defina um critério de aprovação rígido e um flexível*”.

Os resultados coletados através dessas etapas levaram a pesquisador a concluir que os estudantes de licenciatura possuem pouca experiência com o raciocínio não clássico, no sentido dos problemas em que eram solicitadas as soluções a partir da Lógica Fuzzy eram pontos de dificuldades desses futuros professores, sugerindo a imersão dessa teoria como suporte metodológico da Educação Matemática.

Essa pesquisa possui uma relevância para o campo da Educação Matemática e particularmente para o desenvolvimento da nossa investigação, já que em seu estudo, Corcoll-Spina (2010) evidencia que os conhecimentos desse campo da Matemática não estão presentes na formação de futuros professores e conseqüentemente não estarão em suas práticas docentes, especificamente, nas práticas avaliativas. Logo, a elaboração de um sistema com base na Lógica Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes poderá ser uma ferramenta que auxilie ao professor nessa ação.

#### *Pesquisa de Andreza Carla Barrantes (2011)*

Para tornar-se Licenciada em Matemática pelo IFSP (Instituto Federal de São Paulo Barrantes (2011) desenvolveu o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “*Sistema de Inferência Fuzzy Aplicado na Avaliação Discente*”, no qual apresenta uma proposta de avaliação do desempenho dos estudantes de cursos presenciais, baseado na Teoria dos Conjuntos Fuzzy e na lógica de mesmo nome.

Os dados de entrada utilizados para a construção da proposta foram as notas das avaliações escritas, representadas pelas seguintes variáveis (insuficiente, regular, bom, muito

bom e excelente), das atividades em classe (insuficiente, satisfatório e excelente) e das atividades extraclasse (insuficiente, satisfatório e excelente). A correlação entre essas variáveis por meio da proposta, resultaram nos seguintes dados de saída, correspondentes ao conceito final: insuficiente, regular, bom, muito bom e excelente.

A partir dessas informações, a base de dados foi escolhida, de forma aleatória para contemplar ao maior número de situações avaliativas possíveis, tais como, “Se avaliação escrita é insuficiente e atividade em classe é insuficiente e atividade extraclasse é insuficiente então conceito final é insuficiente” ou “Se avaliação escrita é regular e atividade em classe é não insuficiente e atividade extraclasse é insuficiente então conceito final é regular”. (BARRANTES, 2011, p.13-14)

Para testar ao protótipo, utilizou-se o software Matlab, ao desenvolver um algoritmo que elabora um sistema com base em imprecisões, permitindo o uso de variáveis linguísticas. Assim, foram simulados os resultados de uma turma com quarenta estudantes, considerando os critérios citados anteriormente, realizando o cálculo da nota final de duas maneiras: o cálculo da média e o cálculo com base no sistema Fuzzy. Ao fazer a comparação entre as notas, a autora cita a distinção entre os resultados obtidos no modelo clássico e no modelo Fuzzy e cita que: “o modelo *Fuzzy* obtém uma classificação mais realista e completa, uma vez que observa a contribuição de todos as notas em conjunto, não levando em consideração se ele fez apenas uma ou outra etapa” (BARRANTES, 2011, p.19)

Dessa forma, Barrantes (2011) conclui que a avaliação da aprendizagem da maneira que está sendo feita não vem surtindo os resultados esperados, pois, as provas e cálculo matemático utilizado para obter as notas finais são insuficientes para avaliar o aprendizado do aluno, afirmando que a proposta de avaliação utilizando a Lógica Fuzzy melhora os resultados nas situações simuladas e tem uma grande flexibilidade.

Esse estudo colabora para as pesquisas atuais, especificamente para a nossa dissertação, pois explicita a diferenciação entre o resultado da avaliação por meio da média aritmética e com o uso da Lógica Fuzzy, ressaltando o fato da avaliação com base em Fuzzy considerar os diversos tipos de atividades, como por exemplo, as atividades em sala de aula, o comportamento dos estudantes, acompanhando o processo como um todo.

*Pesquisa de Renato Francisco Merli (2012)*

Na dissertação intitulada como “*Modelos Clássico e Fuzzy na Educação Matemática: Um Olhar Sobre o uso da Linguagem*”, Merli (2012) traz a intenção de articular o uso da Matemática clássica e da Matemática Fuzzy em atividades de modelagem Matemática, visando as aproximações entre essas vertentes da Matemática. Dessa forma, foram analisadas seis atividades de modelagem Matemática, sendo um desses, o modelo de avaliação por conceitos.

Assim, foram criados critérios para a emissão dos conceitos relativos ao desempenho dos estudantes, sendo esses: insuficiente (atende a menos de 70 % dos critérios estabelecidos), Suficiente (atende a 70 % dos critérios, mas com um certo esforço), Bom (80 %, atende a todos os critérios, mas não chega a surpreender) e excelente (90% ou mais, atende a todos os critérios, extrapolando o que foi solicitado). Para representar os resultados fictícios da avaliação organizados pelo autor, utilizou-se as quatro etapas do controlador Fuzzy, (fuzzificação, base de regras, modelo de inferência e defuzzificação), que foram explicitadas nessa pesquisa no capítulo da fundamentação teórica.

Como resultado dessa atividade especificamente, observamos que tanto pelos métodos da Matemática Clássica, como pela Matemática Fuzzy, o resultado da avaliação por conceitos foi o mesmo, apesar, do modo como os resultados foram obtidos nas duas abordagens forem diferentes. Todavia, ressaltam nas considerações finais que as diferentes formas de linguagem, influenciam no modo de ver a solução para as situações problemas. Além disso, advertem que nem todos os fatores tiveram como ser investigados e analisados, deixando o caminho aberto para novas pesquisas.

*Reflexão Geral*

Articulando as informações obtidas nessas leituras, acreditamos que o uso da TCF para a avaliação do desempenho surge como ferramenta potencial para diminuir ou suavizar as discrepâncias no ajustamento das notas, visto que essa lógica permite fazer uma interpretação adequada de variáveis que contenham imprecisão, falta de informação e dualidades, apesar das variedades de objetivos e recursos metodológicos apresentadas nessas pesquisas.

Por fim, após refletir sobre esses estudos descritos nas duas subseções, acreditamos que a conjunção entre essas duas temáticas poderá colaborar com as discussões e investigações

desenvolvidas no campo da Educação Matemática, contribuindo para a prática docente em avaliar o desempenho não apenas por meio do aspecto cognitivo, e sim, ponderando outros fatores que estão imersos no processo de ensino e aprendizagem.

No próximo Capítulo, explicitamos os procedimentos metodológicos que empregamos para atender o objetivo elencado para esta dissertação, qual seja, desenvolver uma proposta para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades com triângulos.

## Capítulo III

# PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresentamos nesse capítulo, os procedimentos metodológicos que permitiram o desenvolvimento dessa investigação e nesse sentido expomos a definição do tipo de pesquisa, o ambiente de investigação, os sujeitos envolvidos e as etapas e métodos realizados para a coleta e análise dos dados. Iniciamos a esta exposição retomando a nossa questão de pesquisa, qual seja:

**Quais são as contribuições de uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos? Quais são as contribuições de uma sequência de ensino envolvendo área de triângulos, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação, para avaliação do aspecto cognitivo?**

Para responder ao questionamento proposto, reafirmamos como nosso objetivo geral:

**Desenvolver uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos.**

Refletindo sobre a questão de pesquisa estabelecida, associada aos objetivos traçados, optamos por uma abordagem qualitativa como uma maneira de estabelecer uma proposta para a avaliação do desempenho dos estudantes. Para essa caracterização, tomamos como referência Bogdan e Biklen (1994), que descrevem uma pesquisa nessa abordagem como uma prática em que a coleta de dados ocorre em um ambiente natural, sendo o pesquisador o principal instrumento para essa coleta. Segundo estes pesquisadores, nesse enfoque, a aquisição dos resultados está centrada na observação do processo por inteiro, ao invés do produto final, além disso, os dados coletados podem ser basicamente descritivos.

Dentro dessa abordagem, desenvolvemos este estudo em duas fases, a saber: na primeira, buscamos ter acesso ao contexto investigativo, assim como, aos sujeitos da pesquisa, visando conhecer na prática as ações e procedimentos adotados para a avaliação do desempenho dos estudantes. Com a análise dos dados coletados na primeira fase, associado à



compreensão dos estudos teóricos, tivemos subsídios suficientes para a realização da segunda fase da pesquisa.

A segunda fase consistiu na elaboração de uma proposta de avaliação baseada na Teoria Fuzzy, considerando os aspectos cognitivo, afetivo e psicomotor; além da simulação dessa proposta com a utilização de dados fictícios. As escolhas desses aspectos foram baseadas na Taxonomia de Bloom. Sendo assim, o aspecto cognitivo está relacionado à aprendizagem de um conhecimento. O aspecto afetivo está atrelado a sentimentos e posturas, o qual incluem o comportamento, a atitude, responsabilidade e valores. Já o aspecto psicomotor relaciona-se com as habilidades físicas do sujeito (reflexão, percepção, comunicação não verbal).

Para avaliar os aspectos cognitivos, desenvolvemos uma sequência de ensino fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica adotando como objeto matemático o conceito da área de triângulos; realizando também uma análise a priori da mesma.

Dada a nossa opção por uma pesquisa com abordagem qualitativa, concordamos mais uma vez com Bogdan e Biklen (1994) ao afirmar que em pesquisas com essas características, o pesquisador ao frequentar o ambiente de investigação poderá compreender melhor seu objeto de estudo. Diante desse pressuposto, organizamos as etapas metodológicas que permitiram responder à questão de pesquisa supracitada em duas fases.

### **3.1 Primeira Fase da Pesquisa**

Nessa seção, apresentamos os procedimentos metodológicos que utilizamos na primeira fase da pesquisa. Partindo disso, apresentamos o ambiente que possibilitou coletar as informações nessa etapa.

#### 3.1.1 O contexto de Investigação

Para o processo de coleta de dados utilizados nessa fase, escolhemos uma escola da rede pública municipal do Sul da Bahia. O argumento que justifica tal escolha, está atrelado a organização do sistema de ensino na rede municipal ser em ciclos, de forma que os resultados dos desempenhos dos estudantes são fornecidos por meio de variáveis linguísticas, por exemplo, regular, bom e ótimo.

Dentre todas as unidades escolares que compõe a rede municipal, desenvolvemos a investigação em uma única escola, apoiados nos seguintes critérios: escola que possuía a oferta dos anos finais do Ensino Fundamental e pela acessibilidade geográfica do pesquisador principal.

A adesão do município ao sistema de ensino em ciclos no ano de 2003 surgiu como uma tentativa de reduzir o alto índice de estudantes com distorção idade e série, objetivando também diminuir os índices de repetência e analfabetismo no Ensino Fundamental. Segundo Barreto e Sousa (2005) o sistema de ensino em ciclo:

Compreendem alternativas de organização do ensino básico, que ultrapassam a duração das séries anuais como referência temporal para o ensino e a aprendizagem, e estão associados à intenção de assegurar à totalidade dos alunos a permanência na escola e um ensino de qualidade. (BARRETO; SOUSA, 2005, p.660)

Ponderando sobre a afirmativa desses autores, consideremos que esse sistema de ensino está estabelecido em períodos plurianuais, ressignificando a organização escolar por ser um processo educativo não fragmentado ao final do período anual letivo. Diante dessa proposta de ensino em ciclos, a rede municipal adotou um regime de progressão continuada, que consiste em aprovar os estudantes automaticamente entre as fases dos ciclos, descrevendo o desempenho dos estudantes de forma qualitativa por meio de indicadores comuns a cada fase do ciclo.

Relativo à possível “não reprovação”, Barreto e Souza (2005), explanam que nos ciclos escolares a “retenção” dos estudantes ocorre no final de cada ciclo aos que não têm a frequência mínima obrigatória. Trazendo para a realidade do contexto aqui apresentado, o Ensino Fundamental nessa escola está subdividido em três ciclos, a saber:

Quadro 3: Correspondência entre a organização em ciclos e séries do contexto pesquisado

Ciclos	Série	Faixa etária
<b>Ciclo da Infância (CIN),</b>	1º, 2º e 3º ano do Ensino Fundamental	5 anos e meio/ 6 a 8/9 anos
<b>Ciclo da Pré Adolescência (CPA)</b>	4º, 5º e 6º ano do Ensino Fundamental	9 anos a 11/12 anos
<b>Ciclo da Adolescência (CAD)</b>	7º, 8º e 9º ano do Ensino Fundamental	12 a 14/15 anos

Fonte: Acervo Pessoal.

Os dados apresentados trazem a correspondência entre a modalidade de ensino em ciclos e série, estabelecida pela Secretaria Municipal de Educação. Podemos observar que as fases dos ciclos possibilitam que as turmas sejam formadas por estudantes na mesma faixa etária, de forma a considerar as habilidades e conhecimentos específicos a cada estágio do ciclo.

Nesse contexto, optamos por centralizar nossa atenção para o Ciclo da Adolescência (CAD) fase III, correspondente ao 9º ano do Ensino Fundamental, ao concordar com Vighi (2003) e Silva (2011) que o objeto matemático adotado nessa pesquisa é acompanhado durante todo o Ensino Fundamental. Partindo disso, associado ao fato da rede municipal de ensino atender apenas ao Ensino Fundamental, acreditamos que o estudante ao chegar ao 9º ano, possivelmente, construiu competências e habilidades referentes ao conceito de área de triângulos.

#### *Processo avaliativo no contexto pesquisado*

O processo avaliativo adotado por essa escola escolhida, segue o processo estabelecido pelo Regimento Municipal da Educação. O modelo de avaliação sugerido pela secretaria da Educação traz algumas considerações a serem observadas no contexto da sala de aula: a) as atividades cotidianas; b) a participação dos estudantes nas atividades escolares; c) o compromisso com a proposta educativa; d) o interesse, a assiduidade e pontualidade; e) os avanços e dificuldades nas atividades implementadas; f) a mediação no processo de formação, aprendizagem e desenvolvimento.

Nesses parâmetros, observamos a presença de aspectos qualitativos e quantitativos na avaliação do desempenho dos estudantes nessa unidade escolar. Em relação a avaliação do processo da aquisição de conhecimentos, fomos apresentados a uma avaliação por trimestres e conduzidas por três modalidades avaliativas: a *avaliação formativa*, *avaliação progressiva* e *avaliação especializada*.

A *avaliação formativa*, consiste na investigação contínua do processo de aprendizagem dos estudantes, com o intuito de fornecer ao professor detalhes das situações de aprendizagem. Essa continuidade permite ao docente modificar, recriar ou ampliar suas práticas, buscando levar os estudantes ao alcance dos objetivos programados. Esses resultados

são representados por meio das variáveis linguísticas *Sim*, *Não*, *Ainda não* e *Não avaliado* que serão melhores discutidas na primeira seção do capítulo IV.

Os resultados desse acompanhamento estão disponibilizados por meios de dois registros, o informal e formal. O registro informal consiste nas anotações pessoais feitas pelo professor, pontuando os aspectos que lhe são importantes, tais como, o diagnóstico dos estudantes e o planejamento das aulas. O registro formal, refere-se aos portfólios dos estudantes e professores, assim como, o diário de classe, que providenciam as anotações utilizadas pelas unidades escolares, tais como, a frequência, o desempenho da turma.

Esses resultados são expressos em relatórios descritivos e individuais, no qual o professor faz o uso de variáveis linguísticas para representar o desempenho dos estudantes em cada trimestre, ponderando os aspectos cognitivos e afetivos. Todas essas avaliações realizadas durante o período letivo, são sistematizadas em uma avaliação final, descrita como, *avaliação progressiva*, em que são feitas análises globais sobre o desenvolvimento da aprendizagem, destacando por meio dos indicadores os avanços e dificuldades.

No caso de matemática, podemos visualizar no Quadro 4, sete indicadores que norteiam o processo avaliativo no contexto escolar que investigamos:

Quadro 4: Indicadores avaliativos utilizados na rede municipal investigada

<b>Indicador Global</b>	<b>Compreende a natureza como um todo dinâmico, sendo o ser humano parte integrante e agente de transformações e reconhece os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo a sua volta?</b>
<b>1º indicador</b>	Interpreta e produz escritas numéricas de acordo com as regras e símbolos do Sistema de Numeração Decimal?
<b>2º indicador</b>	Distingue em contexto variados figuras geométricas, descrevendo suas características?
<b>3º indicador</b>	Reconhece e utiliza instrumentos de medida e grandezas em situações problemas relacionadas ao cotidiano, fazendo uso de terminologia própria?
<b>4º indicador</b>	Identifica a(s) operação(s) adequada(s) para resolver uma dada situação-problema (adição, subtração, multiplicação e divisão)?
<b>5º indicador</b>	Resolve e cria situações-problema envolvendo as quatro operações de números reais utilizando estratégias pessoais ou técnicas convencionais?
<b>6º indicador</b>	Organiza e interpreta dados em tabelas e/ou gráficos?
<b>7º indicador</b>	Identifica e conceitua representações matemática?

Fonte: Secretaria de educação da rede municipal investigada.

Dentre os indicadores supracitados, voltamos o nosso olhar para os indicadores 02 e 07 respectivamente. O primeiro situa a análise do desempenho do estudante em relação a

figuras geométricas, enquanto o segundo remete de forma implícita as diferentes representações de objetos matemáticos. Ambos estão associados com a nossa investigação relativa à conversão entre registros no ensino de conceitos geométricos, sinalizando a importância da mesma para o processo avaliativo nesse ambiente escolar.

De maneira geral, o professor ao final de cada ano letivo avalia o desempenho dos estudantes por meio desses indicadores. Esses conceitos são lançados no diário eletrônico, criado pela Secretária Municipal de Educação, conforme a imagem (Anexo A).

Apesar dos estudantes serem avaliados nesses critérios, o único ponto que impossibilita o avanço de um ciclo para o outro está no número de frequência, equivalente ao mínimo de 75% de presença. Todavia, se o estudante ao final da etapa, não alcançar o desenvolvimento desejado, o mesmo será promovido a próximo fase do ciclo, mas, deverá passar por um acompanhamento didático, realizando atividades que visam reduzir a defasagem na aprendizagem dos estudantes.

Essa ação é descrita como *Avaliação Especializada*, na qual, o estudante recebe um atendimento individualizado no turno oposto em que estuda ou no próprio turno, sendo acompanhado pela equipe pedagógica para a compreensão dos conceitos necessários ao ciclo anterior.

Como podemos perceber, a avaliação no contexto pesquisado, ocorre pautada em três modalidades, existindo indicadores que servem de referência para o professor avaliar o desempenho dos estudantes, representados por conceitos que trazem uma subjetividade ao processo. Assim, buscando compreender como esse processo ocorre na prática, elegemos os professores enquanto sujeitos da pesquisa na primeira fase.

### 3.1.2 Sujeitos da pesquisa

Os sujeitos dessa fase pesquisa foram quatro professores e uma coordenadora pedagógica responsável pela área de matemática. A escolha desses participantes atendeu às condições necessárias para a sua participação: estar lotado na rede municipal de ensino, particularmente na unidade escolar caracterizada como ambiente de investigação e possuir o interesse em integrar a pesquisa. Sendo assim, apresentamos na Tabela 2, o perfil dos participantes da pesquisa. Para preservar a identidade, optamos por estabelecer nomes fictícios.

Tabela 2: Perfil dos sujeitos da pesquisa

<b>Nomes</b>	<b>Formação</b>	<b>Tempo de atuação na educação municipal</b>
<b>Sabrina</b>	Lic. em Matemática	24 anos
<b>Davi</b>	Pedagogo e Lic. em Matemática	16 anos
<b>Isabel</b>	Pedagoga	12 anos e meio
<b>Carla</b>	Economista	12 anos
<b>Joana</b>	Lic. em Matemática	9 anos

Fonte: Dados da pesquisa.

Dentre os participantes apresentados nessa tabela, notamos que três são formados em Licenciatura em Matemática, um em Ciências Econômicas<sup>10</sup>, já a coordenadora possui formação em Pedagogia. Outro ponto que chama a atenção é o fato dos professores possuírem um período significativo atuando na educação municipal.

Esse fato é importante, pois a partir desse tempo de atuação, temos que os quatro professores atuaram tanto na rede municipal, tanto na modalidade de ensino em série (atualmente em anos), quanto no sistema de ensino em ciclos. Nesse sentido, acreditamos que esses profissionais vivenciaram possivelmente a implantação e as mudanças realizadas na proposta educativa do município, resultando nas políticas e ações atuais.

### 3.1.3 Instrumentos para a coleta de dados

Para a coleta dos dados que permitiram a realização da primeira fase desta pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos: entrevista estruturada e observação não participante, associados a leitura dos documentos oficiais<sup>11</sup>. Descrevemos a seguir a proposta de cada um desses instrumentos.

#### *Entrevista estruturada*

Gil (2008) define entrevista como uma técnica na qual o investigador encontra-se em frente ao investigado e lhe formula perguntas, com o intuito de obter dados que interessam a sua investigação. Trazendo essa técnica para o campo das pesquisas educativas, Ludke e André (1986) afirmam que ao tratar-se de pesquisas sobre o ensino, a escola e seus problemas,

<sup>10</sup> Não adentramos na discussão desse fato, por não ser a intenção dessa pesquisa.

<sup>11</sup> Regimento que coordena a proposta de ensino do município investigado; o projeto político pedagógico da escola investigada e as orientações para o processo de ensino e aprendizagem no Ciclo da Adolescência. Como não tivemos o intuito de analisá-los, não os apresentamos aqui como instrumentos para a produção de dados.

dentre eles, a avaliação; ao entrevistar professores, diretores, até mesmo pai de estudantes, não estamos propondo uma problemática desconhecida, pelo contrário, são assuntos nos quais os familiares conseguirão discorrer com facilidade.

Dessa forma, optamos por entrevistar os professores, com o objetivo de compreender quais as percepções sobre a avaliação, quais os critérios adotados pelos professores para essa ação, suas opiniões sobre o processo avaliativo nos ciclos. Dentre os diferentes tipos de entrevistas, realizamos uma entrevista estruturada. Sobre isso, Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 120-121) pontua que o uso desse instrumento pressupõe a questões precisas, formuladas previamente e organizadas sobre uma determinada ordem, das quais o entrevistador não pode se desviar.

Sendo assim, realizamos uma entrevista com treze questões (conforme o Apêndice C), todavia, para o desenvolvimento dessa investigação, utilizamos apenas as informações coletadas em dez questões, que subdividimos em três grupos, dado os objetivos de cada uma. O primeiro grupo, composto pela identificação inicial e a questão 1 tendo como objetivo identificar a formação desses profissionais e o período em que atuam ou lecionam na educação municipal (já apresentado no item 3.1.2). No segundo grupo, a questão 2 teve como objetivo identificar a concepção de avaliação dos professores entrevistados.

O terceiro grupo formado por oito questões (3,5,6,7,8,9,10,12) possuíam o objetivo de investigar sobre as práticas avaliativas, indagando-os sobre os critérios e instrumentos de avaliação adotados, assim como, sobre atribuição e divulgação dos resultados obtidos.

#### *Observação não participante*

O uso desse instrumento para a coleta de dados é descrito por Ludke e André (1986), como principal método de investigação que associado a outras técnicas de coleta permite ao pesquisador ter um contato estreito com o fenômeno pesquisado, representando-o como uma vantagem desse instrumento. Dessa forma, o objetivo desse instrumento foi visualizar na prática as ações utilizadas pelo professor para avaliar aos estudantes.

Para nortear as observações, estabelecemos um roteiro composto por sete tópicos (Apêndice D) dentre os quais, buscamos identificar os critérios que o professor utiliza para a avaliação dos estudantes (tópicos 1 e 3), como o processo de avaliação ocorre (tópicos 2, 6 e 7), as possíveis dificuldades enfrentadas pelo professor nesse processo (tópicos 4 e 5). Além

de possibilitar estabelecer uma correlação entre os dados coletados na entrevista estruturada, com a prática docente em sua sala de aula.

Visando não interferir diretamente<sup>12</sup> no processo de ensino e aprendizagem, realizamos uma observação não participante, descrita por Marconi e Lakatos (2003) como um processo no qual o investigador entre em contato com a comunidade ou grupo estudado, mas não se integra a ela, presenciando os fatos sem participar dele. Para pontuar as observações feitas, adotamos um diário de campo, no qual registramos as informações que emergiram no ambiente investigado e posteriormente foram utilizadas para a análise dos dados.

Com a escolha desses instrumentos, abordaremos na próxima subseção, os procedimentos necessários para a coleta dos dados.

#### 3.1.4 Procedimentos para a coleta dos dados

Para ter acesso as informações necessárias para o desenvolvimento da primeira fase da pesquisa, inicialmente, visitamos a unidade escolar exposta na seção 3.1.2, a fim de explicitarmos a diretora a temática do estudo e solicitar a autorização para a realização da coleta de dados nessa unidade de ensino. Após a conversa com a direção, fomos autorizados a desenvolver a pesquisa, através da assinatura na carta de anuência (Apêndice A). Na sequência, entramos em contato com os sujeitos da pesquisa, descritos na seção 3.1.2, dentre os quais, contamos com a participação de quatro professores de matemática e uma coordenadora pedagógica.

A realização da entrevista estruturada ocorreu de forma individualizada na sala destinada ao planejamento das atividades a serem realizadas no trimestre, no horário disponibilizado pela unidade escolar para a reunião de todos os professores da área de matemática, visando discutir e refletir as propostas pedagógicas para o ensino dessa disciplina. Prezamos em realizar a entrevista na própria unidade escolar e no dia escolhido para o planejamento das atividades, para evitar possíveis desconfortos para o professor, em relação à disponibilidade de tempo. A participação desses professores ocorreu de forma voluntária, com a possibilidade de interrompe-la a qualquer momento.

---

<sup>12</sup> Não interferir diretamente, pois acreditamos que a simples presença do pesquisador no ambiente já possibilita uma alteração no contexto observado.



Iniciamos esclarecendo novamente as informações gerais em relação à pesquisa, tais como, o objetivo da pesquisa, a metodologia aplicada. Após explicitarmos a proposta, um professor optou em não participar, alegando estar inserido recentemente na rede municipal de educação e não compreender totalmente a avaliação no sistema de ensino em ciclos, dessa forma, contamos com a participação dos professores citados na Tabela 2.

Em seguida fornecemos aos participantes o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B). Após a leitura do termo, duas cópias foram assinadas, permanecendo uma em mãos do próprio professor e outra cópia encontra-se arquivadas pelos investigadores desse estudo.

Na sequência as entrevistas foram feitas e finalizadas. Isto posto, iniciamos os procedimentos para a realização da observação não participante. Dada a nossa atenção para o Ciclo da Adolescência - Fase III (CAD III), correspondente, ao 9º ano do Ensino Fundamental II, tínhamos o interesse nas duas turmas dessa fase cujo docente, naquela ocasião ensinava somente nessa unidade escolar, nos turnos matutino e noturno.

Dessa forma, conversamos com o próprio professor sobre a possibilidade de acompanhar as suas aulas em uma das turmas do CAD III, visto que possuíamos o interesse de visualizar na prática como ocorre o processo avaliativo, sem interferirmos em sua prática. Com o retorno positivo desse professor, dentre as duas turmas do CAD III, optamos por observar a turma 9M21, na qual as aulas de matemática ocorriam na terça-feira, quarta-feira e sexta-feira.

Visando acompanhar o último trimestre, as observações ocorreram durante o mês de setembro a dezembro, no total de 13 encontros para a observação. O número reduzido de encontros nesse período se deu pelos seguintes fatores: feriados prolongados e paralisação da rede de ensino, que impossibilitaram um acompanhamento maior do processo de ensino e aprendizagem e conseqüentemente do processo avaliativo.

### 3.1.5 Procedimentos de análise dos dados

“Analisar os dados qualitativos significa "trabalhar" todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.45). Assim, dadas as informações coletadas na primeira fase da pesquisa, realizamos uma análise qualitativa das respostas obtidas na entrevista com os professores e coordenadora pedagógica, além das informações

que coletamos durante a observação da prática docente. Ao analisar os dados da primeira fase buscamos identificar quais os critérios que perpassam a prática docente ao avaliar, assim como, as dificuldades encontradas nessa ação.

Esses dados analisados na primeira fase, foram importantes para o desenvolvimento da segunda fase da pesquisa, no sentido de estabelecer uma proposta avaliativa que fosse ao encontro das práticas reais dos professores, além da criação de uma sequência de ensino como alternativa diferente da prova para a avaliação do conceito da área de triângulos. Após essa análise, realizamos a segunda fase da pesquisa apresentada na seção a seguir.

### **3.2 Segunda Fase da Pesquisa**

Dada a análise dos dados coletados na primeira fase da pesquisa, preocupamo-nos nessa fase em estabelecer uma proposta de avaliação e a sequência de ensino, levando em consideração os referenciais teóricos que dão embasamento a essa investigação (Teoria Fuzzy e Teoria dos Registros de Representação, respectivamente). Dessa maneira, apresentamos nessa seção, os procedimentos metodológicos que utilizamos na segunda fase da pesquisa, dado o nosso objetivo em estabelecer uma proposta de avaliação do desempenho dos estudantes.

Ao analisar os dados coletados na primeira fase da pesquisa, observamos que a avaliação no contexto escolar investigado está pautada nos aspectos cognitivos, afetivos e psicomotor. Além disso, conseguimos compreender as variáveis linguísticas que são adotados pelo município que investigamos na primeira fase. Assim, para a elaboração dessa proposta com os pressupostos da Teoria Fuzzy, elaboramos um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF), utilizando como recurso tecnológico o software Matlab R2013a (abreviatura de Matrix Laboratory).

Esse software foi desenvolvido no ano de 1970 por Cleve B. Moler, voltado para os conceitos matemáticos de matrizes, álgebra linear e análise numérica. Segundo Alves, Marra e Nerrys (2007), esse programa tem o intuito de desenvolver e implementar algoritmos numéricos e simbólicos que oferecem ao usuário um ambiente interativo de programação para o estudo e pesquisa em diversas áreas das ciências exatas.

Além disso, esses autores mencionam o fato do Matlab contemplar a uma família de aplicações específicas, denominadas de Toolbox (caixas de ferramentas), com o objetivo de resolver a problemas de áreas determinadas, tais como: processamento de sinais, simulação dinâmica de sistemas, cálculo simbólico, Lógica Fuzzy, entre outras áreas. Dessa forma, para a elaboração da referida proposta, utilizamos o Toolbox Fuzzy, pois são disponibilizados arquivos e funções que estão associadas a essa teoria. Segundo Arruda et. al (2008) , esse Toolbox consiste de uma interface gráfica e conjuntos de algoritmos e funções relativas a essa teoria.

Considerando que o Sistema Baseado em Regras Fuzzy está organizado em quatro módulos, iniciamos o primeiro módulo com a escolha das variáveis de entrada e da variável de saída no sistema. Para cada variável, foram associados os termos linguísticos citados pelos professores na entrevista realizada na fase anterior, além disso, ponderamos também o quadro comparativo estabelecido pelo professor ao qual observamos para a avaliação dos estudantes. Nesse aspecto, escolhemos as funções de pertinência correspondentes as variáveis de entrada e saída, definindo os intervalos em que cada termo linguístico pertence ao conjunto.

No segundo módulo, estabelecemos as bases de regras condizentes com a situação investigada, tal como, *“se João teve um rendimento bom na prova, desenvolveu as atividades e possui um bom comportamento então o desempenho de João é bom”*. Após a organização dessas informações, iniciamos o terceiro módulo no qual foram tratadas matematicamente as informações coletadas por meio das operações com conjuntos Fuzzy, fornecendo um resultado final em termos linguísticos. No quarto e último módulo, realizamos um processo que possibilita representarmos os resultados encontrados no módulo anterior por meio de um número real.

Para simular as possíveis situações na avaliação do desempenho dos estudantes no contexto escolar investigado, estabelecemos o desempenho fictício de vinte estudantes elaborando notas nos três critérios que estão atrelados a proposta de avaliação. Nessas notas, procuramos abranger o máximo de possibilidades que podem ocorrer na realidade dos professores no momento dessa ação.

Com essas notas, realizamos o cálculo das médias utilizando o modelo clássico (média aritmética) e o modelo Fuzzy, resultando em notas quantitativas. Para convertermos esses rendimentos em variáveis linguísticas (notas qualitativas), nas notas clássicas utilizamos as

correlações estabelecidas pelo professor ao qual observamos a prática. Já para as notas obtidas pelo Sistema Fuzzy, a correlação foi realizada por meio das bases de regras que estabelecemos na proposta de avaliação. Com essas informações, comparamos esses resultados visando ter um olhar ampliado para ambos os casos, de forma a visualizar as suas contribuições.

Como salientamos anteriormente, a avaliação do desempenho no contexto escolar investigado está pautada em três aspectos, dentre eles, o cognitivo. Dessa maneira, para a avaliação desse aspecto, além de propor uma prática que não se limite a aplicação de provas e testes, instituímos uma sequência de ensino relacionada a dedução do conceito da área de triângulos, privilegiando a conversão e tratamento entre os registros de representação dos objetos matemáticos.

Dividimos essa sequência em cinco etapas, propondo o uso de materiais manipulativos, particularmente da malha quadriculada, de forma que o professor acompanhe todo o processo de aprendizagem do estudante.

De maneira geral, essas etapas trazem uma mesma estrutura metodológica, composta por quatro momentos, nos quais, o estudante terá a princípio um período de observação e análise de uma situação levantada pelo professor. Após essa observação, há um momento de discussão coletiva, permeada por questões norteadoras; na sequência, são apresentados exercícios versando sobre o que foi discutido na etapa. Por fim, no quarto momento, o professor rememora as respostas encontradas pelos estudantes, sistematizando as informações discutidas na etapa.

Na primeira etapa, abordamos os primeiros métodos utilizados na história para a medição de terrenos. Na segunda, são discutidas as técnicas atuais para a medição de superfícies. A terceira etapa, traz o uso da malha quadriculada para calcular a área de figuras. A quarta etapa remete ao cálculo da área do quadrado e do retângulo, enquanto a quinta e última corresponde ao conceito da área de triângulos. Ao final de cada etapa, fizemos uma análise a priori, destacando as possíveis soluções e procedimentos que poderão fazer parte da ação dos estudantes durante o desenvolvimento da sequência.

Como nessa dissertação, não levaremos a campo os procedimentos descritos na segunda fase, não explicitaremos nesse estudo os sujeitos das pesquisas, nem os procedimentos para a coleta e análise dos dados. Com os procedimentos metodológicos discutidos, apresentamos a seguir o Capítulo IV dessa dissertação.

## CAPÍTULO IV

### ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesse capítulo apresentamos a análise dos resultados com base nos dados coletados. Conforme mencionado no capítulo anterior, essa pesquisa foi dividida metodologicamente em duas fases, nesse sentido, dividimos as análises em duas seções. Na primeira trazemos os resultados encontrados na primeira fase, correspondentes a entrevista estruturada e observação não participante.

Com base nas informações coletadas e analisadas, estabelecemos na segunda seção uma proposta de avaliação com base na Teoria Fuzzy para descrever o desempenho dos estudantes. Dentre os aspectos considerados nessa proposta, expomos a sequência de ensino, elaborada com base na Teoria dos Registros de Representação, visando avaliar o aspecto cognitivo do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo o conceito da área de triângulos.

#### **4.1 Análise dos Resultados da Primeira Fase**

Apresentamos nessa seção, a análise qualitativa dos dados coletados por meio da entrevista estruturada e da observação não participante realizada com professores de uma unidade escolar do interior da Bahia.

##### 4.1.1 Entrevista Estruturada

Ao aplicarmos a entrevista estruturada com os professores, buscamos ter o relato de suas práticas com o foco na avaliação do desempenho dos estudantes, a fim de compreendermos como ocorre esse processo nessa unidade escolar. Para tal, elaboramos treze questões (Apêndice C) que nos permitiram estabelecer com maior precisão os parâmetros para a elaboração da nossa proposta de avaliação.

Essas questões foram agrupadas em três grupos. Nas questões do primeiro grupo, buscamos construir o perfil dos sujeitos dessa pesquisa (os dados foram apresentados na seção 3.1.2). A questão do segundo grupo remete a concepção dos professores sobre a ação de

avaliar e, por fim, nas questões que integram o terceiro grupo tivemos o interesse em compreender as práticas avaliativas desses profissionais.

Apesar da quantidade supracitada de questões, nessa investigação não consideramos a sua totalidade, pois ao olhar com maior atenção para dez dessas questões, conseguimos identificar as informações necessárias para entender o processo avaliativo no contexto investigado, as quais detalharemos a seguir.

A questão “ Em sua concepção, o que é avaliação da aprendizagem? ” integra ao segundo grupo de questões, todavia, essa foi a única na qual tivemos o objetivo de visualizar a concepção desses profissionais relativas a avaliação da aprendizagem dos estudantes. As descrições dessas concepções podem ser visualizadas no quadro 5:

Quadro 5: Concepção dos professores sobre a avaliação

<b>Sujeito</b>	<b>Concepção sobre avaliação</b>
Davi	A avaliação da aprendizagem é uma tarefa didática necessária e permanente no trabalho de educador, ela deve acompanhar todos os passos do processo de ensino e aprendizagem. É através dela que vão sendo comparados os resultados obtidos no decorrer do trabalho conjunto do docente e dos discentes, conforme os objetivos propostos, a fim de verificar progressos, dificuldades e orientar o trabalho para as correções necessárias.
Joana	É constatar através de atividades e participações ativas nas aulas, o resultado alcançado de acordo com os objetivos estabelecidos.
Isabel	É uma prática contínua e dinâmica que possibilita a compreensão do significado dos resultados imediatos e durante todo o processo de ensino e aprendizagem, ou seja, desde o diagnóstico e execução.
Carla	É o processo através do qual podemos mensurar o que é ensinado do aluno.
Sabrina	Avaliação eu penso que é um processo, é um processo, ela é contínua e a gente está avaliando todos os dias. Para mim é a parte mais difícil é a parte de avaliar, por que é um trabalho muito individual, a gente avaliar aluno por aluno é muito difícil, requer tempo, mas sabemos que é um processo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando esses discursos e identificando os aspectos abordados, verificamos que apesar de trazerem respostas distintas, a avaliação é vista como um resultado do processo realizado durante todo o período letivo, analisando se os objetivos preestabelecidos foram

alcançados. Davi salienta como ponto importante a avaliação permite analisar os discentes e favorece também o professor repensar suas práticas.

Observando a concepção de avaliação fornecida por Carla podemos inferir que a avaliação do desempenho dos estudantes no olhar dessa professora está centralizada no aspecto cognitivo, pelo fato de mencionar essa ação como uma forma de mensurar a aprendizagem dos estudantes. Também destacamos a fala de Sabrina relativo a avaliação ser uma ação particular de cada professor. Essa particularidade inserida nesse processo, traz uma subjetividade, pois, cada professor possui uma quantidade de estudantes a avaliar, assim como, os critérios inerentes a cada avaliação. Tais características permitiram que adotássemos a Teoria Fuzzy para a investigação dessa ação docente.

As questões do terceiro grupo, conforme mencionamos anteriormente, abordaram as práticas avaliativas adotados pelos professores. Para identificar melhor como elas são desenvolvidas, optamos por elaborar questões com o mesmo enfoque, visando analisar se os professores entrevistados acrescentariam mais informações e manteriam uma coerência entre as respostas dadas. Sendo assim, seguintes questões “Quais tipos de avaliação da aprendizagem estão inseridos em sua prática?” e “Existe um modelo de avaliação que auxilie em sua prática?” estavam imbricadas.

Analisando as respostas fornecidas nessas questões, podemos concluir que as práticas avaliativas, de maneira geral, estão pautadas em uma ação de forma contínua e processual, ponderando a fatores como: participações orais, a escrita; trabalho em grupo; seminários e projetos; as atividades de classe e extraclasse. Todavia, observamos que cada profissional adota um modelo próprio de avaliar. Por exemplo, a professora Sabrina afirma explicitamente que o principal tipo de avaliação que utiliza é quantitativo, pautada na aplicação de atividades avaliativas.

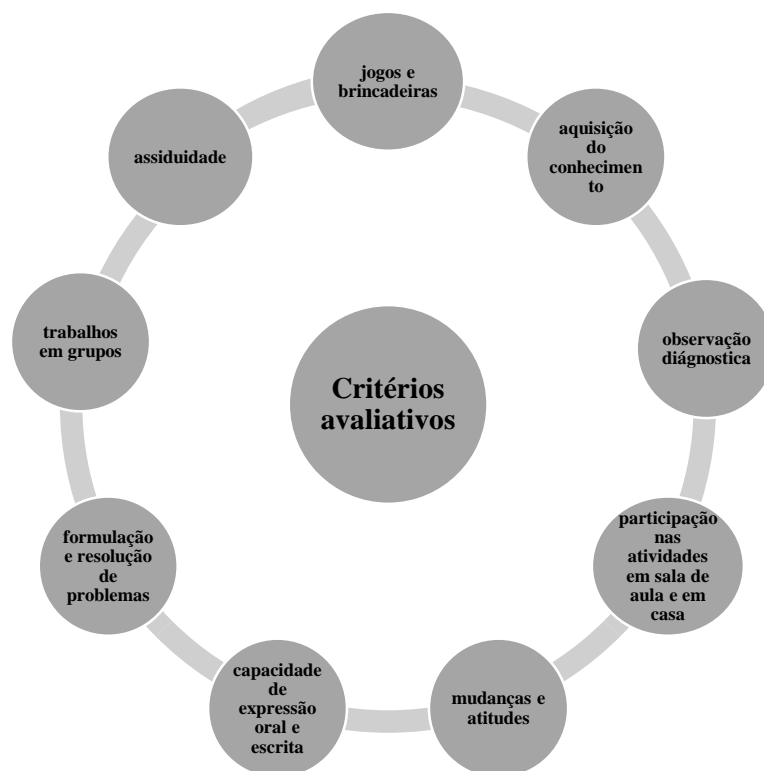
Quanto ao fato de não haver critérios pré-definidos de avaliação, a comissão responsável por analisar a proposta do Ciclo da Adolescência ressalta a falta de critérios. Dessa maneira é indicado como sugestão, a necessidade de estabelecer critérios avaliativos relacionados ao aspecto cognitivo, ponderando os conhecimentos necessários para a progressão dos estudantes. Além disso, citamos a importância de estabelecer critérios que envolvam os aspectos qualitativos.

A presença desses aspectos, assim como, a avaliação do desempenho ser uma ação contínua e processual é uma sugestão da Lei de Diretrizes e Bases (nº 9.394/96) que recomenda no quinto inciso um processo no qual prevaleça os aspectos qualitativos em relação ao quantitativo, sugerindo também que os resultados sejam fornecidos a partir da observação de todo o período e não apenas nos momentos de aplicação de provas.

Dado o nosso interesse em identificar os instrumentos e critérios adotados pelos professores para avaliarem aos estudantes e compreender como esses resultados são relatados, elaboramos três questões, a saber: “Quais critérios são utilizados em sua prática docente para a avaliação da aprendizagem dos estudantes? ”, “O uso de provas e testes faz parte de sua metodologia de avaliação? e “Como são atribuídas as notas ou conceitos aos estudantes? Como essas avaliações são relatadas? Há um programa específico para essa ação?”

Correlacionando as respostas que obtemos, podemos observar que ao tratar-se de uma ação individual dos docentes, existe uma gama de critérios avaliativos que são ponderados pelos entrevistados. Apresentamos na Figura 4, os critérios que estão presentes nas falas que coletamos.

Figura 4: Critérios avaliativos dos professores pesquisados



Fonte: Dados da pesquisa.



Há presença de critérios qualitativos e quantitativos inseridos nessas falas, todavia, preponderam-se os aspectos relacionados ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Ressaltamos o fato de aspectos relacionados a avaliação do desempenho apresentar características de um sistema de classificação dividido em três domínios que vão ao encontro da Taxonomia de Bloom: o cognitivo, o afetivo e o psicomotor.

No domínio cognitivo, estão os critérios relacionados a memorização e desenvolvimento de capacidades e habilidades intelectuais, especificamente, quando os professores mencionam a aquisição dos conhecimentos, trabalhos em grupos, formulação e resolução de problemas. No domínio afetivo, são consideradas as áreas emocionais e afetivas do estudante, relacionando-as a seus sentimentos e posturas, no qual observamos os seguintes pontos: o comportamento (mudanças e atitudes), a responsabilidade (participação nas atividades em sala de aula e em casa), a assiduidade.

Por fim, consideramos no domínio psicomotor os critérios que estão associados as habilidades motoras do sujeito, e pontuamos os seguintes critérios: capacidade oral e escrita, observação diagnóstica, jogos e brincadeiras. A caracterização desses critérios em três domínios, baseados na Taxonomia de Bloom, torna-se importante para a criação da proposta de avaliação que trazemos na segunda seção desse capítulo.

Entretanto, os professores caem em contradição ao mencionar na questão 8 que fazem uso de provas e testes para avaliar o desempenho dos estudantes. Pontuamos essa afirmação, considerando que na questão anterior esses instrumentos não foram mencionados em nenhum momento. A princípio, acreditávamos que o uso desses instrumentos se restringia aos professores que lecionam Matemática, contudo, ao entrevistar a coordenadora pedagógica, percebemos que essa prática é comum também em outras disciplinas.

Sendo assim, tivemos acesso a organização da aplicação de testes e provas nessa unidade escolar. Dado o fato que a organização do período letivo ocorre em trimestres, há uma semana específica para que todas as disciplinas possam usar esse momento para a aplicação das atividades “avaliativas” que se constituem como um componente do processo avaliativo. Essas avaliações, segundo Isabel e Davi, apesar de serem realizadas em uma semana inteira, não podem ser mencionadas como uma “semana de provas”, por ir na contramão da proposta do município, o que levam a não utilizar tais rótulos.

Tal fato também nos chamou a atenção, por caracterizar-se como uma contradição, já que essa ação vai de encontro com a proposta educativa do município no qual essa unidade escolar está localizada. Vale salientar que a discussão sobre o uso desses dois instrumentos foi proposta na análise da proposta curricular do Ciclo da Adolescência ao ser mencionado como uma dificuldade a ausência de avaliações escritas, a serem realizadas periodicamente pelos estudantes, indicando esse ponto a ser revisado na proposta da educação do município.

Identificado os critérios/instrumentos adotados pelos professores para avaliar o desempenho dos estudantes, nos preocupamos em compreender como são atribuídos os resultados dessas avaliações, assim como, a maneira como esses resultados são relatados. Analisando as informações obtidas com a questão 9 “ Como são atribuídas as notas ou conceitos aos estudantes? Como essas avaliações são relatadas? Há um programa específico para essa ação?” Identificamos que os conceitos atribuídos ao desempenho dos estudantes utilizam as variáveis: *Sim*, *Não*, *Ainda não* e *Não Avaliado*.

Particularizando a utilização dessas variáveis para a avaliação do desempenho do estudante em matemática, baseado nos indicadores apresentados no Quadro 4 (Capítulo III) , os professores avaliam se os estudantes alcançaram durante o período letivo as habilidades mencionadas. Temos como um dos indicadores, “*Identifica e conceitua representações matemática?*”, nesse caso, o professor pode indicar com a variável *sim*, quando o estudante consegue realizar essa ação de forma clara; *não*, se o estudante não consegue realizar essa ação, apresentando dificuldades; *ainda não*, se ainda não alcançou o que é proposto no indicador, e por fim, *não avaliado*, quando o desempenho do estudante com base nesse indicador ainda não foi observado pelo professor.

Esses resultados são inseridos no diário eletrônico utilizados pelos professores para a divulgação dos desempenhos dos estudantes a Secretaria de Educação do município investigado. Importante ressaltar, que no período em que realizamos a entrevista com os professores, essa secretaria estava implantando um novo programa para o armazenamento dos resultados avaliativos que entrou em vigor em meados de 2014. Por trata-se de um momento transitório, identificamos nas falas dos professores um teor de dualidade, pois foram citados tanto o programa em vigor, como o antigo programa.

Além disso, observamos nas falas dos professores que não há critérios estabelecidos para que os professores avaliem os estudantes com essas variáveis, dessa maneira, a

subjetividade compõe o processo avaliativo, já que a interpretação do professor é que dirá se o estudante conseguiu obter ao que foi proposto no indicador.

Quanto aos indicadores, ao observar a análise da proposta da educação municipal feita pelos docentes, identificamos que para esses profissionais, os indicadores que deveriam nortear o processo avaliativo, não indicam de imediato o que o professor deve alcançar, deixando um espaço para interpretações distorcidas.

Outro ponto que analisamos está no uso das variáveis linguísticas na avaliação dos estudantes. Essas variáveis trazem uma imprecisão nesse processo, pois são atribuídas por meio da interpretação do avaliador diante dos instrumentos de avaliação considerados, o que pode causar distorções ou até mesmo divergências nesses conceitos.

Segundo Perrenoud (2004), a falta de referenciais curriculares para o sistema de ensino em ciclos, levanta uma incerteza no que tange o desenvolvimento de atividades pedagógicas, induzindo a tomada de decisões de forma desarticulada em cada unidade escolar ou cada grupo de professores, mencionando a necessidade de formular parâmetros para a avaliação do estudante.

Dados esses aspectos qualitativos que compõe a avaliação da aprendizagem nos ciclos, associados à necessidade ressaltada por Perrenoud (2007) e aos problemas relatados na análise da educação municipal; ambos relativos à estruturação de parâmetros para ponderar a aprendizagem dos estudantes, acreditamos que o uso da Teoria Fuzzy possibilita a criação de modelos que envolvem variáveis qualitativas.

Ao perguntarmos na questão 5 “A avaliação da aprendizagem em matemática na modalidade de ensino em ciclos apresenta dificuldades? Quais? ”, na questão 10 “Como você vê a participação dos pais em relação a avaliação de seus filhos (as)?” e na questão 12 “Quais mudanças no processo avaliativo, você enquanto professor acredita ser necessário para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem em matemática?” Tivemos o intuito de obter a opinião dos professores sobre o processo avaliativo no sistema de ensino em ciclos, modalidade adotada pela rede municipal do contexto investigado. Assim, buscamos identificar as possíveis dificuldades em avaliar na disciplina de matemática, além de interrogar sobre a participação dos pais e/ou responsáveis em relação ao acompanhamento do desempenho dos estudantes.

Dessa maneira, é ponto comum entre os professores afirmarem que existem dificuldades para avaliar os estudantes em matemática no sistema de ensino em ciclos, pontuando o caso de não ser atribuída uma nota ao estudante. São ressaltados também, a avaliação por variáveis linguísticas; o fato de não haver reprovação dos estudantes nos ciclos, diferentemente da educação em séries; a falta de instrumentos diagnósticos para possibilitar intervenções e permitir um trabalho diversificado, contemplando todos os níveis de aprendizagem presentes em sala de aula; a falta de domínio dos conhecimentos matemáticos necessários que os estudantes não adquiriram nos anos iniciais do Ensino Fundamental colaboram para essa dificuldade.

Podemos observar alguns desses pontos, na fala dos professores Joana, Carla e Sabrina que transcrevemos na íntegra:

Joana: “Sim. Pelo fato de não existir uma nota a ser cobrada, sentimos dificuldades em avaliar, pois a presença dele (estudante) garante seu seguimento”

Carla: “Sim. Como não existe “nota”, é muito difícil encontrar mecanismos para fazer o aluno compreender a necessidade de estudar pelo prazer de aprender”

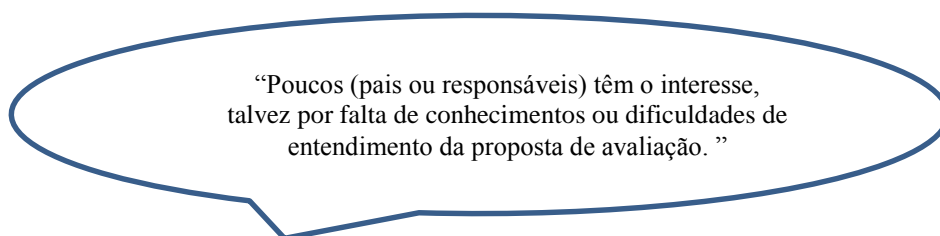
Sabrina: “Sim, não são feitas avaliações do quantitativo e eu sinto que os alunos ficam meio que a vontade, bem a vontade, pois não tem prova, [...] a frequência já basta, se ele frequentar ele já está passado, já é aprovado automaticamente e eu acredito que isso é um empecilho. Muitos (estudantes), não sabem disso, mas a grande maioria principalmente das séries finais já sabem disso [...]”.

Fonte: Dados da pesquisa.

As opiniões de Joana, Carla e Sabrina, assim como, dos outros entrevistados, vão ao encontro com as questões discutidas no ano de 2012 pela Secretaria de Educação do município que ao realizar uma análise do processo de avaliação nesse contexto curricular, apontam como dificuldade o fato de não possuir nenhum mecanismo que os estudantes vejam se estão

precisando estudar, como mencionou Joana durante a entrevista “mesmo sem estudar ele sabe que estará aprovado”. Assim, nos deparamos com um dos pontos que retomam a importância em investigar a avaliação do desempenho em matemática nesse sistema de ensino.

Outra dificuldade que pode estar atrelada aos pontos descritos pelos professores é relativa a participação dos pais ou responsáveis no acompanhamento do desempenho dos estudantes. De maneira geral, os professores comentam sobre as dificuldades dos pais se envolverem nas tarefas propostas no ambiente escolar, como podemos exemplificar com a fala da professora Isabel:



Fonte: Dados da pesquisa.

Esse distanciamento citado, também é visto como uma das dificuldades encontradas na análise da proposta do CAD, ao mencionar a falta de compreensão dos pais e estudantes sobre o processo de avaliação. Confirmando essa dificuldade, Isabel afirma que o fato dos pais não compreenderem como ocorre a avaliação no município, não os estimulam a acompanharem o desenvolvimento dos seus filhos.

O Professor Davi, também salienta que os fatores sociais, políticos e econômicos também interferem, pois, apesar dessa unidade escolar está localizada em um bairro de classe média, os estudantes são de outras localidades, nas quais os pais e (ou) responsáveis possuem baixa escolaridade e precisam trabalhar o dia inteiro para o sustento da casa, impossibilitando-os de acompanhá-los na escola.

Dada as dificuldades ressaltadas, os professores citaram os principais pontos a serem mudados no processo avaliativo em matemática, de forma a melhorar tanto o ensino como a aprendizagem dessa disciplina. Dentre as falas coletadas, apontamos alguns pontos, tais como: Reflexão da prática docente; mudanças das práticas dos professores; trabalhar a interdisciplinaridade; trazer o ensino de matemática para o contexto dos estudantes; utilizar de diversos instrumentos para recolher as informações relativas aos desempenhos dos

estudantes; ser um processo contínuo. Observamos a seguir, um trecho da resposta dada pelo professor Davi:

“A avaliação da disciplina de matemática não pode ser simplesmente considerada como constatação, aferição, tampouco aprovação ou reprovação, ela implica a compreensão da trajetória do aluno em seu processo de aprendizagem (que é sempre uma construção), recomendando seus avanços e paradas como partes integrantes de um processo. Em outras palavras, a avaliação em matemática deve ser contínua, dar-se dia após dia, sem que se perceba, ou seja, a avaliação antecede, acompanha e sucede o trabalho pedagógico.”

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa concepção, verificamos que para Davi, avaliar não se restringe a aferir e mensurar o desempenho dos estudantes em momentos específicos. Avaliar remete a trajetória durante todo o processo de ensino e aprendizagem, sendo um processo contínuo, que deve ser realizado durante todo o período letivo.

Avaliando de forma global as respostas fornecidas nessa entrevista, ponderamos a necessidade do estabelecimento de uma proposta de avaliação, dado que observamos na fala a falta de critérios bem definidos. Para a avaliação salientamos que tivemos acesso aos instrumentos avaliativos adotados e como esses resultados são registrados. No próximo item apresentamos as informações coletadas durante o período de observação.

#### 4.1.2 Observação não participante

Como dito o nosso objetivo ao adotar a observação como um instrumento para a coleta de dados foi estabelecer uma comparação entre as informações obtidas na entrevista (parte teórica) com a prática dos professores, visualizando a metodologia adotada pelo professor em sala de aula para avaliar o desempenho dos estudantes. Com esse interesse, realizamos a observação durante o terceiro trimestre, nas aulas de um dos professores de matemática que participaram da entrevista.

A escolha das aulas do referido professor ocorreu pelo fato do mesmo lecionar no Ciclo da Adolescência fase III, o que corresponde ao equivalente ao 9º ano do Ensino Fundamental, além da disponibilidade de fornecer informações para melhor compreensão desse processo

avaliativo. A turma observada, possuía o total de 27 estudantes, com as aulas de matemática ocorrendo nos dias de terça, quarta e sexta.

Dado o nosso propósito, optamos por observar a prática avaliativa durante um trimestre, considerando que um período de tempo maior colaboraria para entender a essa ação docente. Nesse sentido, observamos as aulas durante três meses e meio (setembro a meados de dezembro), no qual interferimos o mínimo possível no processo de ensino de aprendizagem e até durante as aulas posicionávamos no final da sala de aula, evitando dialogar com os estudantes e com o professor.

Através dessa observação foi possível verificar que o professor avaliava os estudantes diariamente, convidando-os para conferir se as atividades propostas foram realizadas, quem estava cumprindo-as, ressaltando também a importância do quesito comportamento, de forma a solicitar, quando necessário, o deslocamento do estudante para a sala da direção escolar devido ao mau comportamento.

A assiduidade foi outro ponto na avaliação do professor, que rotineiramente, destacava o fato da entrada na sala de aula ocorrer até quinze minutos depois de sua chegada, destacando além disso, o índice de faltas principalmente na sexta-feira, dia em que a frequência dos estudantes reduzia consideravelmente.

As participações nas aulas também eram pontuadas. Durante a explicação dos conceitos, o professor levantava algumas discussões, estimulando os estudantes a responderem através da representação oral. Já no momento de correção das atividades, os estudantes eram convidados para ir a lousa explicar suas resoluções para os outros colegas de classe.

De maneira geral, as aulas ocorriam da seguinte maneira: o professor inicialmente fazia a exposição dos conceitos, fazendo o uso de exemplos. Na sequência, eram propostas atividades, muitas vezes do próprio livro didático, em que os estudantes se reuniam em duplas para resolvê-las.

Entretanto, os estudantes demonstravam certa desmotivação para cumprir as tarefas propostas, chegando a passar até duas aulas para o término das mesmas. Além disso, haviam estudantes que copiavam as respostas dos colegas para entregar a atividade ao professor, além

de haver casos em que eram aguardados o momento do professor fazer a correção, para que alguns estudantes a copiassem em seu caderno.

Um ponto que também chamou a nossa atenção, foi o questionamento dos estudantes em relação as “provas” feitas, apresentado o desejo em saber qual o resultado dessas atividades, interrogando-o “professor, quanto tirei na prova ?”. Nessa fala, observamos que apesar dessa modalidade de ensino não ter um processo avaliativo que consiste em uma nota quantitativa, os estudantes permanecem com essa visão.

Quanto a associação entre os aspectos qualitativos e quantitativos, o professor ao qual observamos, criou uma correlação entre as variáveis *sim*, *não*, *ainda não*, com os conceitos *bom*, *regular*, *ótimo* e *ruim*. Além dessas associações, faz uma conversão entre esses conceitos e valores discretos (Tabela 3)

Tabela 3: Correlação entre os indicadores avaliativos do município e a avaliação do professor

<b>Indicadores utilizados pelo município</b>	<b>Variáveis adotadas pelo professor</b>	<b>Valor discreto</b>
<b>Sim</b>	Ótimo	7-10
<b>Sim</b>	Bom	5-7
<b>Sim</b>	Regular	4-6
<b>Não</b>	Ruim	0-4
<b>Ainda não</b>	Não avaliado	Não tem rendimento

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação ao aspecto cognitivo, percebemos uma grande deficiência dos estudantes em compreenderem os conceitos discutidos em sala de aula, apresentado em alguns casos, dificuldades inerentes aos primeiros anos do Ensino Fundamental (por exemplo, as quatro operações fundamentais da aritmética), levando o professor em parceria com a coordenação pedagógica a elaborar propostas visando reduzir tais dificuldades. Dessa forma, foram propostas atividades, como bingo matemático, para estimulá-los a revisar essas operações.

Preponderou-se também a dificuldade de conversão entre os registros, assim como, em interpretar as questões que abordam situações contextualizadas. Nesse sentido, enquanto



observadores, salientamos os percalços do professor para dar prosseguimento ao conteúdo programático, devido ao fato que em todo o trimestre, foram abordados apenas os conceitos relacionados a equação do segundo grau, e por fim, inserido a noção básica de função.

A aplicação da atividade avaliativa, ocorreu na penúltima semana de aula, composta por oito questões. Durante a realização da mesma, percebemos a dificuldade dos estudantes para entender a proposta das questões, assim como, para respondê-las. Dada essas dificuldades, o professor autorizou a consulta ao caderno para auxiliar na resolução.

Todavia, quando os estudantes entregaram a atividade, mesmo com a possibilidade de consultar o caderno, muitos deixaram a prova em branco ou resolveram de forma equivocada. Essa situação, levou o docente na última semana de aula propor algumas situações problemas como forma de complementar o resultado da avaliação. Além de fazer essa ação, o professor ressaltou que grande parte dos estudantes avançariam para o Ensino Médio.

Em relação os registros de representação propostos pelo professor na atividade avaliativa, a qual tivemos oportunidade de analisar, observamos que o professor trouxe apenas o *tratamento* dos registros nas questões estabelecidas, não estimulando o estudante a fazer conversões entre os registros. Outro ponto que observamos foi a dificuldade demonstrada pelos estudantes na conversão dos registros, por exemplo, do registro natural para o registro algébrico.

Tais dificuldades foram pontadas por Duval (2002) e Almouloud (2003) em suas obras o que nos estimulou a desenvolver nossa sequência de ensino, propondo situações envolvendo conversões e transformações entre os registros (conceitos definidos na seção 1.1) para avaliar o domínio cognitivo dos estudantes no que tange a compreensão dos conceitos de área de triângulos.

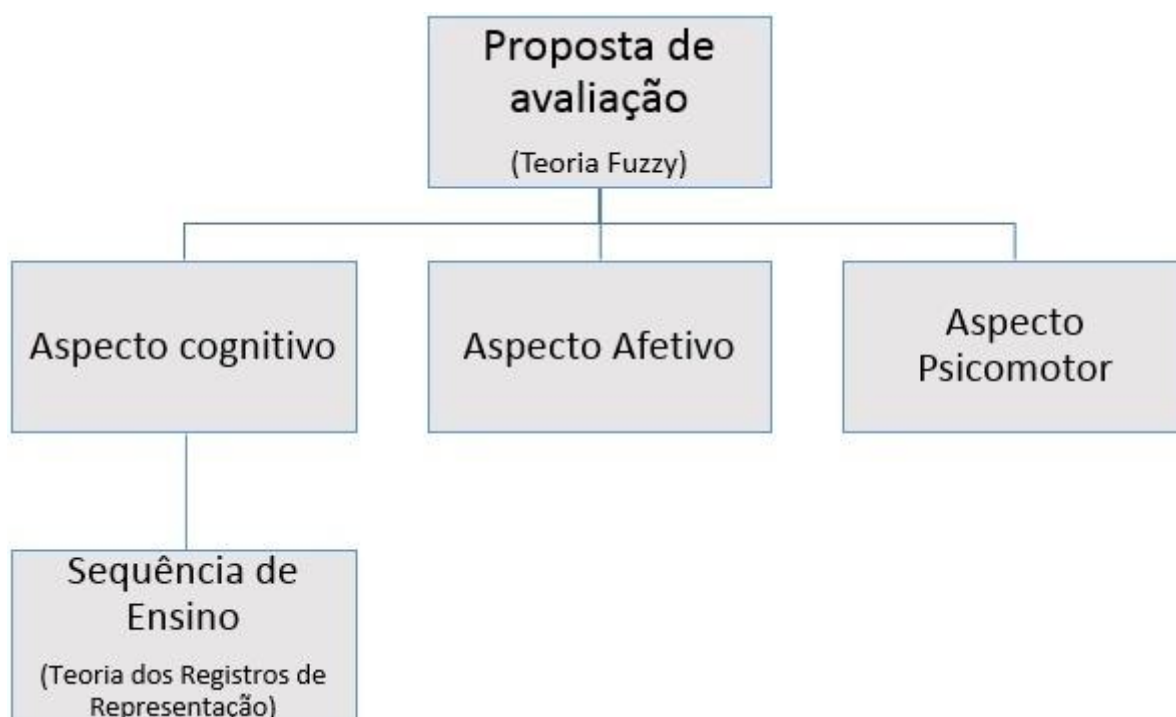
Comparando as informações que coletamos através da entrevista com a observação da prática docente sobre o avaliar, podemos afirmar a coerência entre as falas desse professor e sua ação em sala de aula. Observamos que ao avaliar o desempenho dos estudantes são envolvidos aspectos cognitivos, afetivos e psicomotor. Também registramos as dificuldades dos estudantes para compreender a forma como os resultados avaliativos são fornecidos. Este fato foi mencionado pelos professores na entrevista, ao informarem que os pais e responsáveis não compreendem como ocorre a avaliação no sistema de ensino em ciclos no contexto investigado.

A nossa inserção enquanto pesquisadores no contexto escolar investigado, permitiu visualizarmos os critérios adotados que foram fundamentais para alcançar um dos nossos objetivos específicos. Além disso, coletamos as informações que subsidiaram o desenvolvimento de uma proposta de avaliação coerente com esse ambiente escolar, assim como, a elaboração de uma sequência de ensino relacionada ao conceito de área de triângulos para avaliar o desempenho dos estudantes quanto ao aspecto cognitivo. Essas produções foram sistematizadas na segunda fase dessa análise que apresentamos a seguir.

#### 4.2 Análise dos Resultados da Segunda Fase

A articulação dos dados coletados com a realização das entrevistas e da observação não participante permitiram estabelecermos uma proposta de avaliação fundamentada na Teoria Fuzzy para acompanhar o desempenho dos estudantes quanto aos aspectos cognitivos, afetivos e psicomotor conforme o esquema da Figura 5. Vale lembrar que para avaliar o desempenho cognitivo dos estudantes, propomos uma sequência de ensino pautada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, privilegiando a conversão entre os registros.

Figura 5: Esquema da Proposta de Avaliação



Fonte: Dados da Pesquisa.

Sendo assim, expomos a seguir a sequência de ensino desenvolvida em cinco etapas, na qual buscamos incentivar o estudante a construir o conceito de área de triângulos. Apresentamos uma análise a priori das atividades da sequência destacando as possíveis soluções que esperamos que sejam dadas e por fim, apresentamos a proposta de avaliação para analisar o desempenho dos estudantes.

#### 4.2.1 Sequência de Ensino

O conceito de área entre os blocos de conteúdos integra o conceito de área integral o bloco de conteúdo grandezas e medidas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – PCNEF (BRASIL, 1997, 1998), como um conteúdo a ser ensinado a partir do segundo ciclo (4º e 5º anos) do ensino fundamental, sugerindo o cálculo da área de figuras representadas em malhas quadriculadas, além da comparação da área de duas figuras sem o uso de fórmulas.

Além disso, este documento oficial reforça a necessidade de utilização de procedimentos que favoreçam a compreensão dos conhecimentos envolvidos, como a obtenção da medida da área por meio da composição e decomposição de figuras cuja área os estudantes já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações (BRASIL, 1998). Também são propostos para o ensino a utilização de situações práticas e unidades de medidas não convencionais, tais como, palitos de fósforo, o palmo da mão e outros objetos.

Para Pessoa (2010) essas experiências vividas no segundo ciclo são resgatadas durante o terceiro ciclo (6º e 7º ano), dando ênfase a formalização do conceito de área e a introdução progressiva de fórmulas. Relativo a essa formalização, Santos e Jucá (2014) pontuam que o ensino de área de figuras planas, comumente, é realizado com o professor repassando as fórmulas, seguido de exemplos e exercícios resolvidos de forma mecânica pelos estudantes, sem compreendê-las.

Leite e Levandoski (2009) também concorda com essa afirmação, ao descrever que a metodologia utilizada para o ensino de matemática está pautada na exposição verbal ou demonstração dos conceitos, tornando o processo de aprendizagem mecânico e receptivo. Todavia, Pais (2001) menciona que o ensino de geometria está atrelado a duas posturas: uma que consiste em expor os conceitos geométricos de maneira abstrata, acessíveis por meio de

axiomas e outra visão, na qual os conceitos são abordados apenas com a manipulação de objetos materiais e de desenhos.

Com relação ao uso de materiais manipuláveis<sup>13</sup> para o ensino de matemática, Pais (2001, p.2) ressalta o fato desse recurso não adquirir a ação de “empirismo desprovido de significado” relacionado à crença do professor que apenas pela manipulação dos materiais, o estudante aprendesse ao conceito matemático. Como forma de justificar tal concepção, o autor afirma que o princípio do estudante “aprender fazendo”, inerente na utilização dessa tendência, foi compreendido em alguns casos, como uma forma exclusiva de manipular os objetos sem estabelecer uma relação entre a experiência vivida e a reflexão desse momento.

Já Souza (2011) cita que a utilização de materiais manipuláveis nas aulas de matemática pode preencher as lacunas dos estudantes na compreensão do ensino de matemática e permitir ao professor observar a participação deles nas atividades.

Dadas essas duas posturas relativas ao processo de ensino dos conceitos geométricos, com o uso de materiais manipulativos ou exposição abstrata dos conceitos matemáticos, acreditamos que seja importante a elaboração de uma sequência de ensino (SE) que perpassa não apenas pela utilização dessas práticas de formas disjuntas, mas pela vinculação entre elas como forma de auxiliar os estudantes na formalização dos conceitos de área de triângulos. Além disso, ressaltamos que a SE deve ser pensada de forma a possibilitar que o estudante socialize o conhecimento com os colegas de classe, reflita e construa o conhecimento do objeto matemático durante o processo, diferentemente, do conceito ser exposto de maneira formalizada pelo professor.

Dessa forma, trazemos nessa seção a elaboração de uma SE envolvendo o conceito de área triângulos, partindo de situações que estimulem ao estudante a formação desse conhecimento. Como definição de SE, fazemos o uso das palavras de Santana (2010, p.113) descrevendo como “ conjunto de situações elaboradas e dispostas de maneira que sejam abordados conceitos previamente selecionados para serem trabalhados”.

Na elaboração dessa SE consideramos a Teoria da TRRS bem como os dados coletados na entrevista com os professores, que pontuamos na seção 4.1, os critérios adotados pelos

---

<sup>13</sup> Para Barroso e Franco (2012) Materiais Manipuláveis remete à tudo que pode ser manipulado pelo sujeito e faz parte dos materiais que compõem um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM).

mesmos para avaliar o desempenho dos estudantes, destacando os domínios cognitivos e afetivos. Vale lembrar que acreditando que o uso de diferentes representações para o ensino de um objeto matemático colabora para a possível compreensão e apreensão dos conhecimentos do conceito sem a necessidade de sua memorização.

Dentre os conceitos inerentes a noção de triângulos, optamos nessa sequência em desenvolver atividades que levem os estudantes a deduzir a fórmula do cálculo da área de triângulos, privilegiando as diversas representações desse objeto (representação natural, representação numérica, representação algébrica e representação figural) de forma a levar o estudante a associar os diferentes tipos de representação, compreender as similaridades e diferenças entre cada registro.

Acreditamos que a exposição da noção da área de triângulos, com esse enfoque possibilitará aos estudantes momento de investigação, observação e argumentação, além de auxiliá-los na capacidade de conjecturar e generalizar os conceitos. Assim, como dito organizamos a SE em cinco etapas: na primeira etapa focalizando o contexto histórico; na segunda etapa a observação de uma situação do contexto atual, a terceira e quarta etapa propondo o uso de malhas quadriculadas, para enfim, na quinta etapa formalizar por meio do algoritmo, a fórmula para o cálculo da área de triângulos.

Salientamos que para a dedução da fórmula da área de triângulos, consideramos que seja importante que o estudante compreenda o conceito de área de retângulo e particularmente do quadrado. Nesse sentido, estruturamos a sequência de ensino abordando o conceito de área de superfícies na primeira e segunda etapa de forma intuitiva (técnica da corda e ladrilhamento), na terceira etapa abordamos o cálculo de área de figuras planas; na quarta etapa focalizamos no conceito de área de retângulos e quadrados; na quinta etapa a formalização do conceito de área de triângulos.

Sugerimos que a aplicação dessas atividades, no contexto da sala de aula, seja feita etapa a etapa, com momentos de discussões coletivas visando uma maior integração entre os estudantes. Dessa maneira, organizamos cada etapa em quatro momentos, a saber: Leitura/observação individual da situação motivadora; discussão coletiva entre os estudantes; resolução de exercícios utilizando as técnicas apresentadas, solicitado que os estudantes justifiquem por escrito e oralmente, as motivações que levaram a suas respostas; retomada das soluções e discussão por parte do professor (socialização dos conceitos).

Estimamos que cada etapa demandará um tempo de 2 horas/aula, exceto a quarta etapa que dada a nossa intenção de comparar os processos de medição utilizados nas etapas anteriores, requer um tempo maior para o seu desenvolvimento. Portanto será necessário para a realização da mesma 4 horas/aula.

Partindo disso, descrevemos a seguir as etapas dessa sequência, explicitando a organização que pode ser adotada pelo professor para a introdução do conceito de área de triângulos. Nesse interim, também apresentamos uma análise a priori dessas atividades propostas, evidenciando os possíveis caminhos que acreditamos que os estudantes poderão utilizar para o desenvolvimento das mesmas.

### ***Primeira Etapa: Contextualização Histórica***

O objetivo dessa etapa consiste em associar os seguintes registros de representação semiótica: discursivo, algébrico e figural. Neste sentido, apresentamos o contexto histórico das primeiras técnicas utilizadas para as medições de terrenos, propondo ao estudante vivenciar situações que os permitam compreender como eram feitas essas medições.

*Primeiro momento:* inicialmente os estudantes devem realizar a leitura individualizada do texto adaptado de Moisés e Lima (2010). (Anexo B)

*Segundo momento:* Discussão coletiva do texto, na qual o professor pode propor as seguintes questões norteadoras: Qual a importância do desenvolvimento dessa técnica para a medição de terrenos? Quais instrumentos eram utilizados nesse processo? Qual solução foi tomada para as regiões em que a unidade de medida do Faraó não determinava a medida completa do terreno?

Utilizando esses questionamentos, o professor poderá organizar a discussão coletiva do texto, ponderando a técnica adotada para determinar a medida de superfícies no Egito Antigo.

*Terceiro momento:* Solicitar que os estudantes realizem o exercício prático, considerando as duas imagens a seguir, respondendo aos seguintes questionamentos:

- a) Para você o que é medir?

b) Dada as imagens abaixo, imagine-se como um “estirador de cordas” que precisará tomar as medidas desses dois terrenos triangulares. Como você realizaria esse processo? Quais as medidas laterais desses terrenos?



*Quarto momento:* Nesse momento, o professor retomará as respostas dadas pelos estudantes, sistematizando as informações relacionadas ao cálculo da medida de terrenos. Concluindo que o processo de medição foi adotado a partir de unidades pré-definidas, tal como a corda que era utilizada na antiguidade como forma de medir terrenos.

#### *Análise a priori*

Dado o contexto sugerido na primeira etapa, esperamos que os estudantes compreendam o processo de medição de terrenos com o uso de cordas como unidade de medida. No primeiro momento ao realizar a leitura individualizada do texto, que o estudante observe como o processo de medição ocorria historicamente e no segundo momento que ele possa expor a sua compreensão a partir das respostas às questões, mais especificamente, na questão “*Qual a importância do desenvolvimento dessa técnica para a medição de terrenos?*” Que o estudante possa perceber que a adoção dessa técnica permitiu a padronização das medidas, evitando possíveis confusões.

Na questão “*Quais instrumentos eram utilizados nesse processo?*” Acreditamos que os estudantes possam mencionar a corda como o instrumento utilizado, sendo esta a unidade do Faraó. Na questão “*Qual solução foi tomada para as regiões em que a unidade de medida do Faraó não determinava a medida completa do terreno?*” Esperamos que os estudantes relatem o fato de subdividir a unidade do Faraó até equivaler a sobra do terreno.

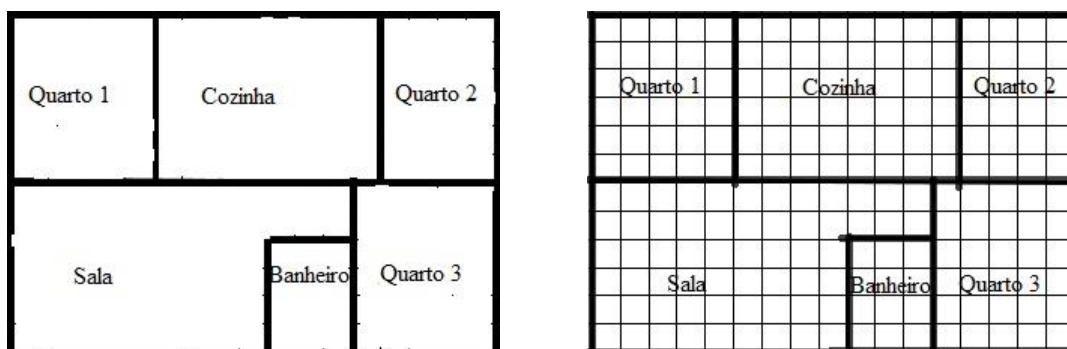
No terceiro momento, destacamos na segunda questão dois tipos de conversões entre os registros de representação, uma vez que esperamos que os estudantes realizem a conversão

do registro figural para o registro materno e do registro figural para o registro numérico. Como estratégia para a resolução da segunda questão, o estudante poderá contar o número de nós, tomando assim a medida dos terrenos. Em ambas imagens, temos 12 “nós” como unidade de medida, apesar de serem superfícies de dimensões distintas, esse fato já pode ser discutido pelo professor no intuito de informar a possibilidade de superfícies terem a mesma área, apesar das dimensões serem diferentes.

### *Segunda Etapa: Medidas de Terrenos nos dias atuais*

Essa etapa tem por objetivo, observar a conversão entre os seguintes registros de representação: registro figural, registro discursivo e registro numérico. Para tal observação, propomos a análise de uma situação envolvendo a área de terrenos, utilizando como recurso a planta de um apartamento, considerando as técnicas utilizadas para esse cálculo.

*Primeiro momento:* Solicitar que os estudantes façam a leitura (observação) das imagens da planta de uma casa.

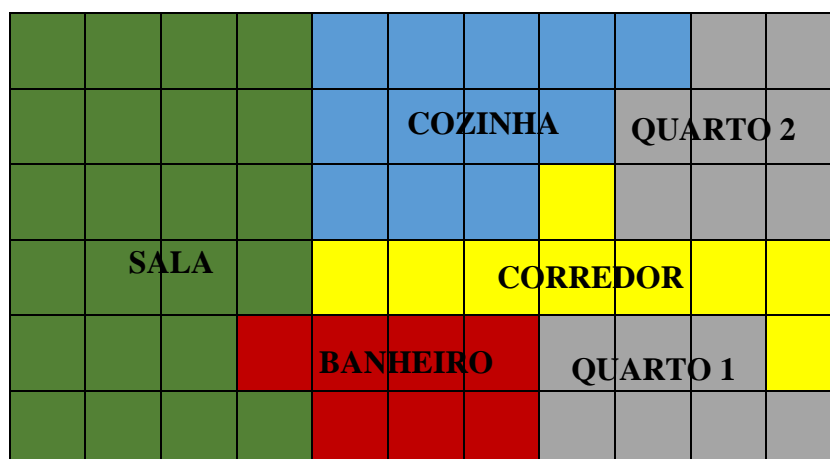


*Segundo momento:* Após o período de observação, o professor poderá conduzir a discussão coletiva, mediado por questões norteadoras, tais como: O que você faria para medir a área dessas duas plantas? Qual dessas plantas você teria mais facilidade para medir? Por que? Considerando o processo de medição de terrenos utilizado pelos estiradores de corda utilizado na antiguidade, seria possível medir esse apartamento? Quais as possíveis dificuldades encontradas ao utilizar essa técnica?

*Terceiro momento:* Apresentamos o seguinte exercício prático:



- 1) Observando a área desse apartamento, considerando cada quadradinho como uma unidade de medida de área, determine:



- Qual a área do Banheiro? Qual a área da cozinha?
- Comparando as áreas dos quartos, quais as conclusões você pode tirar?
- Qual dos cômodos têm a mesma área do corredor?
- Dentre as regiões desse apartamento, qual delas possui a maior área? E qual possui a menor área? Justifique.
- Qual é a área total desse apartamento?

*Quarto momento:* O professor retoma as questões propostas no momento anterior, explicitando as suas resoluções. Além disso, poderá mencionar as técnicas para a medição de terrenos, dentre as quais, a técnica de dividir o terreno em unidades quadriculadas.

#### *Análise a priori*

Nessa etapa, abordamos o uso da técnica do ladrilhamento para determinar a medida de uma superfície, assim, propomos a observação das imagens no primeiro momento, ponderando as semelhanças e diferenças entre essas representações para a discussão coletiva no segundo momento.

Essa discussão é norteadada por quatro questionamentos, a saber: “*O que você faria para medir a área dessas duas plantas? Qual dessas plantas você teria mais facilidade para medir? Por que?*” Ela objetiva compreender que procedimentos seriam adotados pelos estudantes e observar como os mesmos determina-se a área de uma superfície. Para o primeiro questionamento, poderão ser descritas, por exemplo, as seguintes soluções: o uso da técnica da corda, o ladrilhamento da superfície, além disso, os estudantes possivelmente mencionem

aos instrumentos de medição, tais como, régua, trena; a depender do contexto em que a sequência for aplicada.

Nas duas últimas perguntas “*Considerando o processo de medição de terrenos utilizado pelos estiradores de corda utilizado na antiguidade, seria possível medir esse apartamento? Qual a possível dificuldade que você poderia ter utilizando essa técnica?*” Buscamos apresentar com a análise dessas questões que ao passar do tempo, as técnicas de medição foram sendo aprimoradas para melhor atender as novas situações e os novos instrumentos. Assim, acreditamos que os estudantes mencionem a possibilidade de utilizar a técnica das cordas, contudo, que descrevam a dificuldade em utilizá-la para regiões muito grandes e a depender da intencionalidade, como o caso de estabelecer a área de um apartamento a partir de sua planta.

Com as questões sugeridas no terceiro momento, almejamos que o estudante realize a conversão entre o registro figural e o registro numérico, ao determinar a área dos cômodos, assim como, a área total do apartamento. Além disso, esperamos que ele faça a conversão do registro figural para o registro discursivo (linguagem materna) ao justificar as suas respostas.

Considerando cada quadradinho de lado 1 cm como uma unidade de medida, acreditamos que o estudante contará a quantidade de quadradinhos para determinar a área de cada espaço em questão. Por meio dessa técnica, temos que a área do banheiro é de 7 quadradinhos e a área da cozinha 12 quadradinhos. Na letra *b*, ao encontrar a área dos quartos, temos que o quarto 2 (8 quadradinhos) tem a área maior do que o quarto 1 (7 quadradinhos).

Para comparar as medidas solicitadas na letra *c*, o estudante precisará encontrar as medidas de todos os cômodos do apartamento. Ao realizar esse processo, observando as medidas encontradas, podemos ver que o banheiro e o quarto 1 possuem as mesmas medidas. Em relação a questão da letra *d* o estudante, apenas pela representação visual poderá descrever a sala como a região com a maior área do apartamento, todavia, consideramos a possibilidade da contagem dos quadradinhos para determinar essa resposta.

No caso da determinação da região de menor área, apenas a visualização poderá não colaborar para uma resposta precisa, assim a técnica da contagem dos quadradinhos seria uma opção. Dentre as regiões do apartamento, temos que a área do banheiro e do quarto 1, além de possuírem as mesmas medidas, caracterizam-se como as menores áreas do apartamento.

Com o intuito de determinar a área total do apartamento (letra  $e$ ), o estudante poderá utilizar as seguintes técnicas: determinar a área de cada cômodo e ao final realizar a soma dessas áreas; contar o total de quadradinhos que correspondem a área total do apartamento; dependendo do nível de abstração do estudante, o mesmo poderá contar o número de quadradinhos do comprimento e da largura do apartamento e multiplica-los, obtendo o resultado de 66 quadradinhos.

As duas primeiras etapas da sequência de ensino privilegiam a aplicação dos conceitos matemáticos em situações do cotidiano. Todavia, na terceira etapa, trabalhamos a matemática de forma abstrata, conforme descreveremos a seguir.

### ***Terceira Etapa: Malhas Quadriculadas no conceito de Área***

O objetivo dessa etapa consiste em trabalhar com dois tipos de conversão: figural-discursiva que recorre ao registro figural para determinar a área das figuras e discursiva-figural que consiste em estabelecer as figuras através da linguagem materna. Dado o nosso interesse em abordar o conceito de área, considerando um quadradinho como unidade de área, nessa etapa estabelecemos o uso da malha quadriculada como um material manipulável.

*Primeiro momento:* Solicitar aos estudantes que façam uma leitura das figuras a seguir:

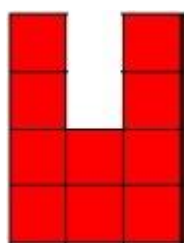


Figura 01

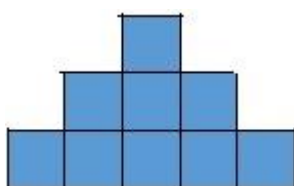


Figura 02

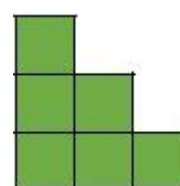


Figura 03

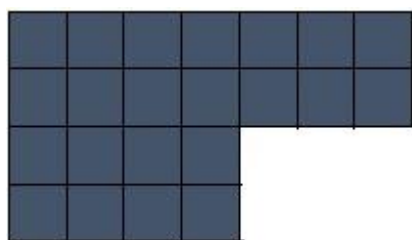


Figura 04

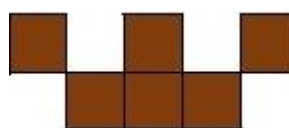


Figura 05



Figura 06

*Segundo momento:* Para nortear a discussão coletiva após a observação das figuras, sugerimos os seguintes questionamentos: Quantos quadradinhos compõem as figuras? As áreas dessas figuras dependem de suas formas e da quantidade de quadradinhos? Algumas figuras possuem a mesma quantidade de quadradinhos?

*Terceiro momento:* Solicitar aos estudantes que respondam a seguinte questão utilizando a técnica discutida nessa etapa.

- 1) Represente na malha quadriculada, considerando que cada quadradinho vale 1 unidade de área:
  - a) Uma figura cuja a área seja de 11 unidades.
  - b) Uma figura cuja a área seja de 14 unidades.
  - c) Uma figura cuja a área seja de 18 unidades e que tenha um dos lados com 9 unidades

*Quarto momento:* Ao resolver essa atividade, acreditamos que os estudantes apresentarão uma vasta quantidade de figuras com as medidas supracitadas. Assim, o professor poderá mencionar que há a possibilidade de figuras diferentes terem a mesma área, favorecendo a compreensão do conceito de área enquanto uma grandeza.

#### *Análise a priori*

Nessa etapa, abordamos o conceito de área de figuras planas, convergindo para a abstração desse conceito. Neste sentido iniciamos o primeiro momento com a exposição de figuras que podem não fazer parte da realidade dos estudantes. Após a observação das figuras, estabelecemos três questões para nortear a discussão “Quantos quadradinhos compõem figuras? As áreas dessas figuras dependem de suas formas e da quantidade de quadradinhos? Algumas figuras possuem a mesma quantidade de quadradinhos? ”

Para encontrar a solução do primeiro questionamento, duas técnicas são possíveis: o estudante poderá contar a quantidade de quadradinhos ou descrever apenas pela visualização dessas figuras. Nessas técnicas, o estudante estará fazendo a conversão entre o registro figural e o registro numérico, no qual esperamos que encontrem os seguintes resultados: figura 01- 10 quadradinhos; figura 02- 9 quadradinhos; figura 03- 6 quadradinhos; figura 04- 06 quadradinhos; figura 06- 5 quadradinhos.

Por meio desses resultados, temos como expectativa que os estudantes concluam até o segundo questionamento que as áreas dessas figuras são dadas pela quantidade de quadrados que a integram. Para responder a terceira questão, o estudante pode observar os resultados

encontrados na primeira questão, de forma a concluir que as figuras 03 e 06 mesmo com formatos diferentes possuem a mesma área.

No terceiro momento, privilegiamos a conversão entre a linguagem materna e o registro figural, solicitando que os estudantes representem a figuras planas com as áreas pré-estabelecidas, considerando a quadrinhos de 1 cm como unidade de medida. Com esses aspectos, distintas representações podem ser produzidas, por exemplo:

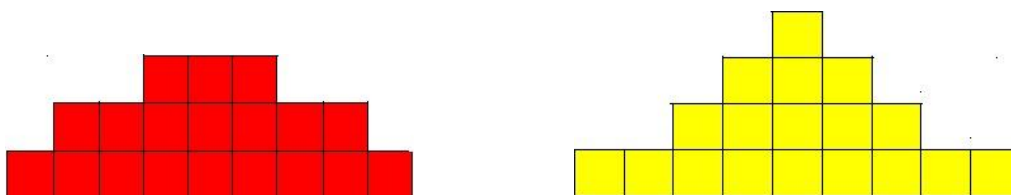
- Figuras planas com área de 11 unidades:



- Figuras planas com área de 14 unidades:



- Figuras planas com área de 18 unidades, com um dos lados de 9 unidades:



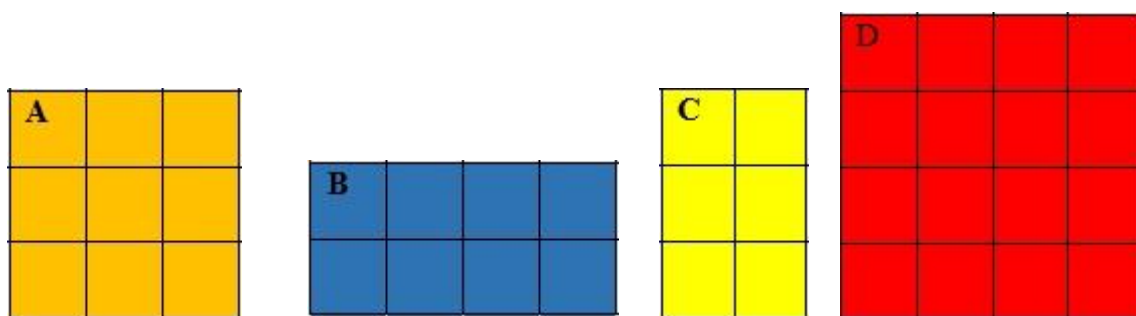
De forma geral, espera-se com essa etapa que os estudantes compreendam a área de uma figura plana na malha quadriculada como a soma das unidades encontradas.

#### ***Quarta Etapa: Cálculo de área do quadrado e retângulo (malha quadriculada)***

Ao desenvolver essa etapa, temos o objetivo de destacar a dois tipos de conversões: figural-discursiva, ao estudante recorrer a linguagem materna para descrever a área das figuras e figural-numérico que consiste em estabelecer numericamente a área dessas figuras. Visamos

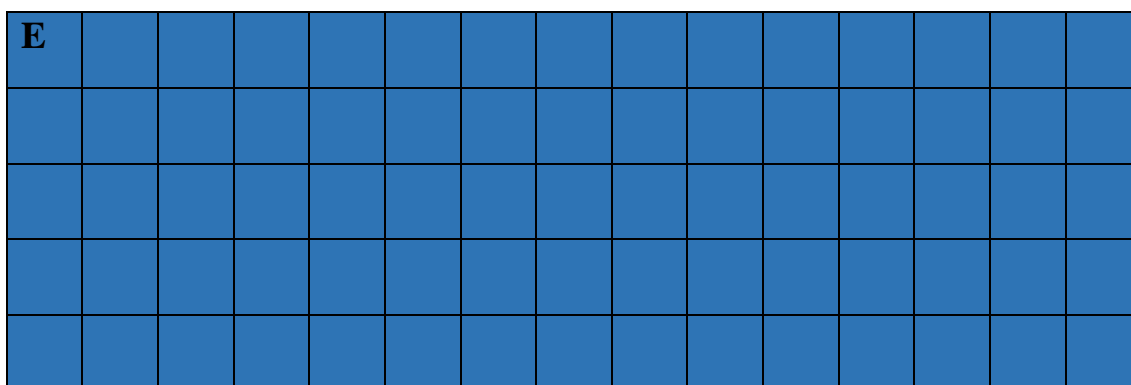
que essas representações sejam observadas, ao estabelecermos a proposta de dedução da fórmula para o cálculo da área de quadrados e retângulos, partindo da análise dessas figuras representadas na malha quadriculada.

*Primeiro momento:* Solicitar que os estudantes façam a leitura das imagens a seguir:



*Segundo momento:* Após o momento de observação dessas figuras, o professor deve conduzir a discussão para a formalização da área do quadrado e do retângulo. Para tal, o professor poderá inicialmente remeter a situação da etapa anterior, na qual observou-se que as áreas das representações figurais expostas foram equivalentes a quantidade de quadradinhos.

Sendo assim, para nortear a discussão, sugerimos alguns questionamentos, tais como: Quais as figuras planas representadas? Contando os quadradinhos, podemos determinar a área total dessa figura? Caso afirmativo, qual a área dessas figuras? Para formalizar o conceito de área, o professor pode motivar aos estudantes com os seguintes questionamentos: E se tivermos figuras com um grande número de quadradinhos como a figura E ?



A contagem de quadradinhos seria a única forma de determinar a área dessa figura? Há uma outra maneira de encontrar a área dessa figura? E se considerarmos a medida dos lados desse retângulo? Quais são essas medidas? E se multiplicarmos a quantidade de quadradinhos

do comprimento dessa figura pela quantidade de quadradinhos da largura? Por meio dessas intervenções, o professor pode conduzir o processo de forma que os estudantes percebam que a área dessa folha pode ser dada pela contagem da quantidade de quadradinhos presentes nessa representação, assim como, pela multiplicação entre a base e a altura. Nesse caso especificamente, temos 15 ■ como comprimento e 5 ■ como largura . Logo, a área dessa figura será dada por:

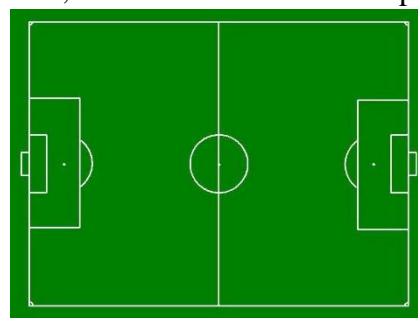
$$\text{Área do retângulo: } 15 \text{ ■} \times 5 \text{ ■} = 75 \text{ ■}$$

Por esse cálculo, temos que o retângulo em questão é formado por 75 quadradinhos. Considerando que cada quadradinho de 1 cm corresponde a uma unidade de área, temos que a área desse retângulo é de 75 ■. Outra técnica que também pode ser utilizada pelos estudantes é somar o total de quadradinhos de cada linha, com o total de linhas inseridas nessa figura. Dessa forma, observando o retângulo acima, temos que cada linha é composta por 15 quadradinhos, sendo esse retângulo composto por 5 linhas, temos que:

$$\text{Área do retângulo: } 15 \text{ ■} + 15 \text{ ■} + 15 \text{ ■} + 15 \text{ ■} + 15 \text{ ■} = 75 \text{ ■}$$

Salientamos que em ambas as respostas, observando pela nossa fundamentação teórica, estamos realizando um tratamento dos registros.

O professor poderá lançar mão também do seguinte questionamento “*Todavia, se precisássemos determinar a área de regiões com grandes medidas, com um campo de futebol?*” dialogando com os estudantes que segundo a FIFA<sup>14</sup>, as dimensões de um campo de futebol são de 120 metros de comprimento e 90 metros de largura, logo, considerando quadradinhos de 1 cm, ou até mesmo de 1 m, a contagem do quadradinhos requereria um tempo maior, além de ser uma técnica que necessitaria de um alto grau de atenção para não se perder durante a contagem. Assim, para situações como a descrita acima, o professor pode reforçar o uso da técnica da multiplicação das medidas, no caso de um campo de futebol nos padrões FIFA, a área desse campo é dada por:  $120 \text{ m} \times 90 \text{ m} = 10.800 \text{ metros}$



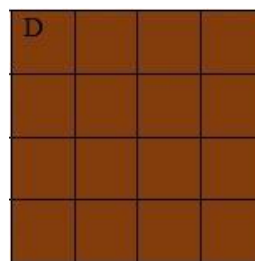
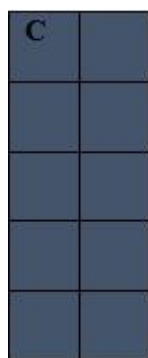
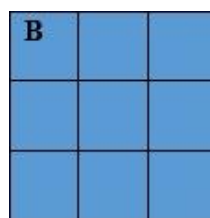
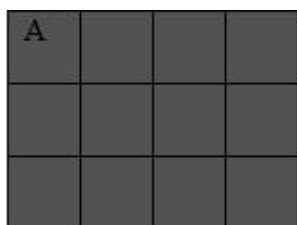
<sup>14</sup> Fundação Internacional de Futebol.

quadrados. Estimando essa área em relação a quadradinhos, nessa área seriam possíveis colocar 10.800 ■ .

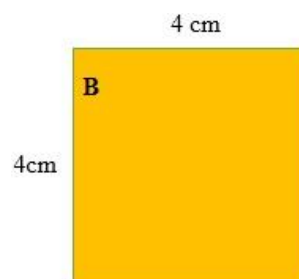
O professor pode discutir ainda que nas situações envolvendo quadrados que possuem lados com o mesmo processo de multiplicação dessas medidas pode ser utilizado para área.

*Terceiro momento:* Para esse momento, solicitar aos estudantes a resolução dos seguintes exercícios utilizando tanto a técnica do ladrilhamento, como a técnica da multiplicação das medidas do retângulo ou do quadrado.

- 1) Considere as figuras abaixo, sendo cada quadradinho uma unidade de área, determine a medida dessas superfícies e suas respectivas áreas:



- 2) Dadas as medidas das figuras planas, determine as suas respectivas áreas:







- 3) Medir a sala de aula (formar grupo de 5 pessoas) e determinar a sua área utilizando as seguintes técnicas: corda, ladrilhamento e multiplicação das medidas.

*Quarto momento:* Realizada as atividades, o professor ao fazer a correção, deve formalizar a definição para o cálculo da área de retângulos e quadrados. Para a discussão da terceira questão, sugerimos como questão norteadora: “ *Quais as dificuldades encontradas para calcular a área utilizando essas técnicas? Qual delas favoreceu ao processo de medir a sala de aula? Quais os valores que vocês encontraram para essa área? Qual dessas técnicas você recomendaria para calcular a área de um terreno?* ”.

*Análise a priori*

Nessa etapa, focalizamos o cálculo da área de retângulos e quadrados, dado o nosso interesse em formalizar o conceito da área de triângulos a partir do uso dessas. Além disso, propomos uma comparação entre as técnicas utilizadas para medir a uma superfície. Assim, propomos inicialmente que os estudantes fizessem a observação de quatro figuras planas, sendo dois retângulos e dois quadrados. No período após essa observação, foram sugeridas três questões “*Quais as figuras planas representadas? Contando os quadradinhos, podemos determinar a área total dessa figura? Caso afirmativo, qual a área dessas figuras?* ”. Com essas questões, visamos observar se os estudantes identificassem essas representações como quadrados e retângulos e que a cada quadradinho seria uma unidade de área e podemos representar a área dessas figuras.

Almeja-se que os estudantes descrevam as figuras A e D são representações de quadrados, enquanto as figuras B e C são representações de retângulos. Em relação ao segundo questionamento, correlacionando com a etapa anterior, acreditamos que os estudantes poderão afirmar que por meio da contagem dos quadradinhos pode ser determinado a área dos quadrados e dos retângulos. Nesse sentido, ao considerarmos os quadradinhos como unidade de área, temos que: figura A tem área igual a 6 quadradinhos; figura B tem área igual a 10

quadrados; a figura C tem área igual a 6 quadrados e a figura D tem área igual a 16 quadrados.

Além dessa questão, também é preciso indagar aos estudantes *“E se tivermos figuras com um grande número de quadrados como essa? A contagem de quadrados seria a única forma de determinar a área dessa figura? Há uma outra maneira de encontrar a área dessa figura? E se considerarmos a medida dos lados desse retângulo? Quais são essas medidas? E se multiplicarmos a quantidade de quadrados do comprimento dessa figura pela quantidade de quadrados da largura?”*

Acreditamos que essas questões podem colaborar na formalização do cálculo da área de retângulos e quadrados, já que foram apresentadas duas situações, trazendo a problemática para a utilização da técnica do ladrilhamento (quadrados) para determinar a área de regiões de longa extensão. Como o caso figura E, na qual há uma quantidade significativa de quadrados, todavia, para determinar a área desse retângulo, a técnica de contagem de cada unidade de área é possível.

Entretanto, em regiões como a exemplificada pelo campo do futebol, contar os quadrados tornasse bastante trabalhosa e cansativa, sendo mais fácil verificar que a área do retângulo é equivalente a multiplicação das medidas da base e da altura dessa figura plana, enquanto a área do quadrado correspondente ao produto dos lados, ou o quadrado do lado.

Nas questões propostas no terceiro momento, é necessário que o estudante faça a conversão entre os registros figurais e os registros numéricos. A primeira questão, dado os quadrados como unidade de área, para determinar as medidas das superfícies, os estudantes podem utilizar: contar a quantidade de quadrados, sendo o total correspondente a sua área ou usar a técnica da multiplicação das medidas para determinar a área.

Dessa forma temos que a figura A é composta por 12 quadrados, ou podemos descrevê-la como um retângulo com a medida da base igual a 4 e a altura igual a 3, logo, multiplicando essas medidas, também chegamos a 12 como o valor da área da figura A. Adotando essas duas técnicas para determinar as medidas das figuras B, C e D, respectivamente, vemos que a figura B tem área igual a 9 quadrados, a figura C tem área igual a 10 quadrados e a figura D tem área igual a 16 quadrados.

A questão 2 traz um enfoque diferente, pois, as representações figurais dos quadrados e retângulos não foram desenvolvidas em uma malha quadriculada, impossibilitando o princípio, que o estudante possa considerar os quadrados como unidades de medidas. Além disso, são dadas as medidas correspondentes a base e altura de cada figura plana, nesse interim, almejamos que os estudantes determinem a área adotando a multiplicação dessas medidas.

Salientamos que apesar dessa técnica ser a mais acessível ao estudante, para a resolução dessa questão, o estudante também poderá desenhar quadrados de 1 cm e realizar a contagem. Entretanto, o uso dessa técnica pode influenciar nos resultados a serem encontrados, dada a possibilidade de desenhar de maneira incorreta.

Sendo assim, temos que a área da figura A será dada pela multiplicação da medida da base (7 cm) e altura (2 cm), logo, a área resultante é igual a  $14 \text{ cm}^2$ . Na figura B, a área será igual a  $16 \text{ cm}^2$ ; na figura C, uma área  $12 \text{ cm}^2$  e a figura com a área de  $9 \text{ cm}^2$ .

Na terceira questão da atividade, o estudante deverá utilizar as técnicas da corda, da ladrilhagem e da multiplicação das medidas, discutidas nas etapas anteriores, para fazer uma comparação entre essas técnicas. Para a técnica da corda, o tamanho da unidade de medida deve ser um pedaço de corda de 30 cm. Todavia, essa medida pode ser pré-estabelecida pelo professor, pois é importante evitar as distorções entre os tamanhos utilizados pelos estudantes nessa ação.

Para a utilização da técnica do ladrilhamento, caso o piso da sala seja quadriculado, o professor deverá utilizar essa informação para determinar as medidas da sala e conseqüentemente a sua área, todavia, salientamos que o professor deverá observar se os quadrados possuem as mesmas medidas. Caso o piso da sala não seja quadriculado, o professor deverá conduzir os estudantes para a construção de um metro quadrado com o jornal, utilizando de jornal, tesoura, trena e fita. Definido o metro quadrado como unidade de medida, o professor deverá indicar que os estudantes observem quantos desse metro quadrado do jornal cabem no espaço investigado, determinando suas medidas e a sua área.

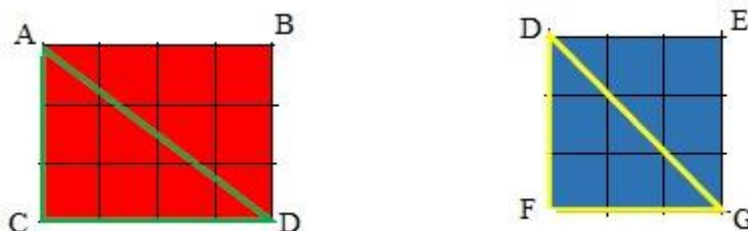
Na técnica da multiplicação das medidas do comprimento e da largura, os estudantes necessitarão do uso de fita métrica, para a tomada das medidas. Visando fazer uma comparação entre as técnicas, os estudantes precisam anotar em uma folha de papel em branco as medidas encontradas.

Realizadas essas três técnicas, o professor deverá conduzir uma discussão em sala de aula, ponderando os aspectos positivos e negativos de cada técnica, estimulando os estudantes a exporem as dificuldades encontradas, assim como, sua opinião quanto a técnica mais recomendada para o cálculo da área de superfícies.

### ***Quinta Etapa: conceito da área de triângulo***

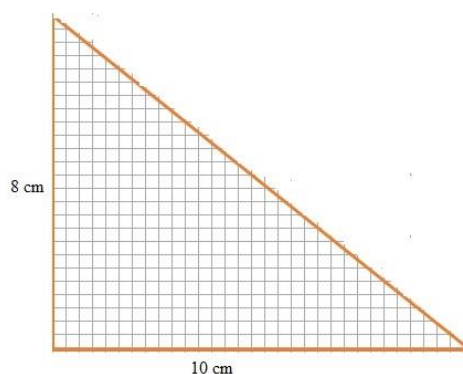
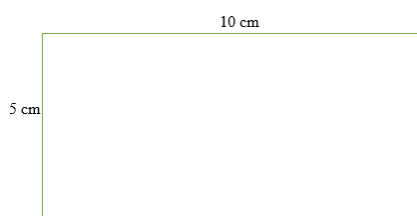
O objetivo dessa última etapa está na conversão entre os registros figural-discursivo, figural-numérico e figural-algébrico, visando a formalização da área de triângulos, a partir das áreas de retângulos e quadrados. Para explicitar a fórmula para o cálculo da área de triângulos, vamos utilizar as informações obtidas na etapa anterior, além disso, fazemos o uso dessas figuras representadas na malha quadriculada. Dessa maneira, o professor terá a opção de conduzir essa etapa com os seguintes momentos:

*Primeiro momento:* Solicitar aos estudantes que façam a leitura das imagens a seguir:



*Segundo momento:* O professor deve promover uma discussão coletiva entre os estudantes, podendo lançar mão dos seguintes questionamentos: como podemos determinar a área desses triângulos? Existe alguma relação entre o número de quadradinhos que compõem o retângulo e o quadrado com a área do triângulo?

O professor pode apresentar também situações em que os retângulos ou quadrados sejam representados no registro figural sem os quadradinhos como unidades de área, ou até se houver a situações em que o triângulo tenha os quadradinhos como unidade de área, como pode ser observado a seguir:

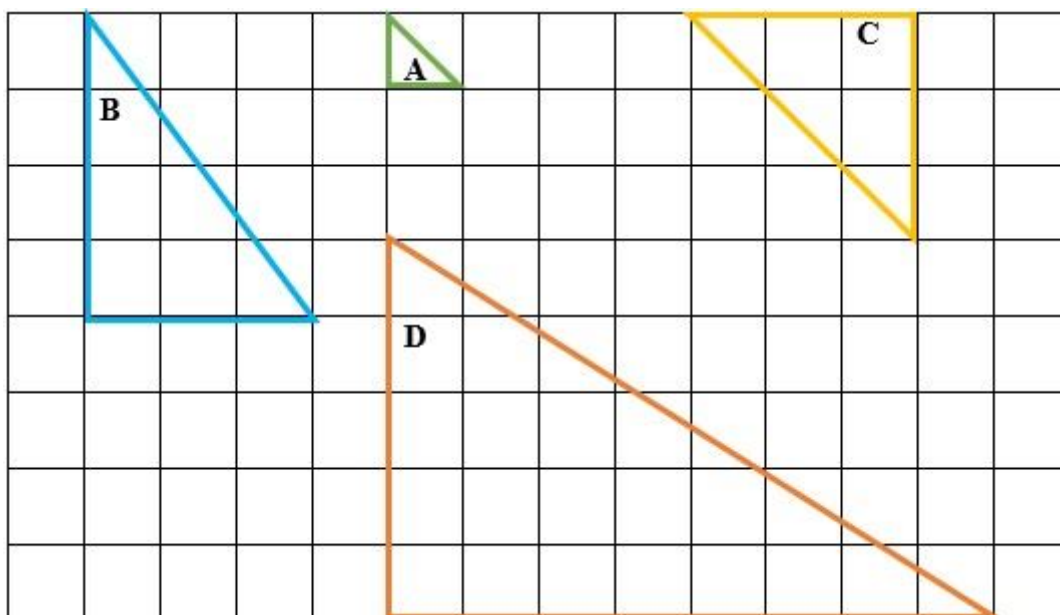


Com essas figuras, o professor pode questionar : Como podemos determinar a área dos triângulos a partir dessas representações? e explicar que nesses casos, o uso da técnica da contagem dos quadradinhos pode tomar dos estudantes um tempo maior para determinar a área dos triângulos. Em seguida, deverá discutir que na primeira representação, temos as medidas do retângulo (base: 10 cm e altura: 5 cm) e dos triângulos (base 10 cm e altura: 8 cm); de forma que associando a observação, os resultados encontrados no primeiro momento e na etapa anterior, temos que a área do retângulo é dada pelo produto da medida da base com a medida da altura. Na segunda representação figural, apesar do triângulo ser exposto na malha quadriculada, existe a possibilidade do estudante contar os quadradinhos, contudo, como são apresentadas as medidas da base e da altura, o sujeito poderá deduzir a área dessa figura plana partindo da área do retângulo.

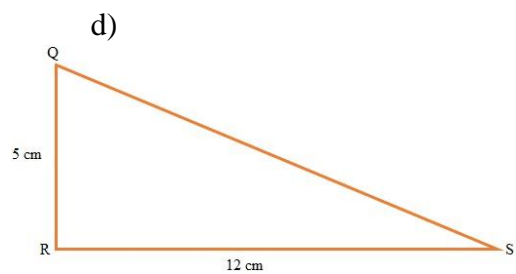
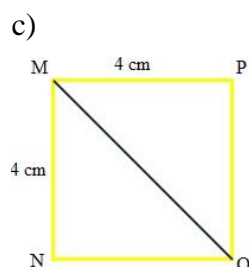
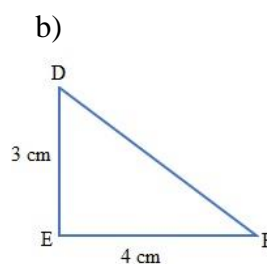
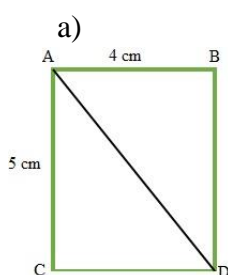
Essas duas situações permitem ao professor explicitar a fórmula para calcular a área de triângulos. Visando observar a compreensão dos estudantes, no próximo momento, o professor poderá apresentar questões que os levem a utilizar tanto a maneira genérica como a fórmula algébrica para determinar as áreas dos triângulos.

*Terceiro momento:* Para o desenvolvimento desse momento, requerer que os estudantes resolvam aos seguintes questionamentos.

1) Determine a área de cada triângulo, considerando um quadradinho como unidade de área:



2) Qual a área dos triângulos a seguir?



*Quarto momento:* Nesse momento, o professor ao corrigir as questões resolvidas no momento anterior, poderá definir a fórmula para o cálculo da área de triângulos, alcançando o objetivo estabelecido para essa sequência de ensino.

### *Análise a priori*

Abordamos nessa etapa o conceito de área de triângulos, partindo da área de retângulos e quadrados, dado o nosso interesse em formalizar a esse conceito. Dessa forma, sugerimos no primeiro momento que os estudantes observassem a um retângulo e um quadrado, nos quais haviam triângulos inscritos nessas duas figuras planas. Como forma de nortear essa observação, foram elaboradas as seguintes questões “*como podemos determinar a área desses triângulos? Existe alguma relação entre o número de quadradinhos que compõem o retângulo e o quadrado com a área do triângulo?*”

Na resolução dessas questões, espera-se que os estudantes na conversão entre os registros (figural para o discursivo) observem que a região ocupada pelo triângulo compreende a metade da área e que no caso do retângulo ABCD, este é constituído por 12 quadradinhos completos, logo, a área dos triângulos ACD e ABD são de seis quadradinhos.

Em relação a área dos triângulos DFG e DEG tomando como parâmetro a área do quadrado DEFG, temos que o quadrado é composto por nove quadradinhos de unidade de área, com essas características, os triângulos possuem quatro quadradinhos completos e a metade de um quadradinho que correspondem a suas áreas.

Almejando formalizar ao conceito de triângulos, são propostas duas representações figurais, um retângulo com as medidas da base a altura iguais a 5 cm e 10 cm, respectivamente e um triângulo representado na malha quadriculada com medidas de 10 cm de base e 8 cm de altura. Como dito, a intenção com essas representações é que para encontrar a área das mesmas, o estudante use a conversão de registros, passando do registro figural ao registro algébrico. Para a passagem ao registro algébrico, os estudantes precisam compreender que a fórmula para o cálculo da área de triângulos advém da relação entre a fórmula para a área do retângulo ou do quadrado.

Nesse sentido, ao considerarmos as medidas fornecidas na primeira representação, temos que a área do retângulo será dada,  $A = 10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 50 \text{ cm}^2$ . Considerando que esse retângulo pode ser subdividido em dois triângulos, Já na segunda representação, ponderando que a área do triângulo é equivalente à metade da área do retângulo, esperamos que os estudantes alcancem ao seguinte resultado:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \text{Área do retângulo} \longrightarrow \text{Área do triângulo} = \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

Na segunda representação figural, apesar do triângulo ser exposto na malha quadriculada, existe a possibilidade do estudante contar os quadradinhos, contudo, como são apresentadas as medidas da base e da altura, além disso, ponderando que a área do triângulo pode ser dada por :  $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$  , remetendo ao seguinte *tratamento* entre os registros, almejamos que os estudantes forneçam o seguinte resultado:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{10 \times 8}{2} = 40 \text{ cm}^2$$

No terceiro momento, são apresentadas duas questões que privilegiam a conversão entre o registro figural e o registro numérico (primeira questão) e do registro figural para o registro algébrico (segunda questão). Na primeira questão, foram apresentados quatro triângulos na malha quadriculada e solicitado que os estudantes determinem a área dessas figuras.

Essas questões colaboram para formalizar o cálculo da área de retângulos e quadrados, já que foram apresentadas duas situações, que permitem utilizar a estratégia da contagem dos quadradinhos para determinar a área ou considerar esses triângulos como metade da área de um retângulo ou quadrado, encontrando as suas medidas, multiplicando e dividindo por 2.

No caso da figura A, dado o fato de que cada quadradinho corresponde a 1 unidade de área, o triângulo representado tem a área definida por  $\frac{1}{2}$  quadradinho. A figura B é composta por 3 quadradinhos completos e tem a sua diagonal traçada em 6 quadradinhos, que juntos compõe 3 quadradinhos, juntando a esses valores a área desse triângulo é de 6 quadradinhos.

O triângulo C é formado por 3 quadradinhos completos e possui 3 quadradinhos cortados pela diagonal, que juntos são equivalentes a 1 quadradinho e meio. Assim, totalizam a quatro quadradinhos completos e meio quadradinho, como a área dessa figura. Já o triângulo D é composto por 15 quadradinhos completos e por partes de 8 quadradinhos que foram cortados pelo segmento da diagonal dos triângulos, compondo a 5 quadradinhos completos, completando o total de 20 quadradinhos.

A segunda questão também aborda a questão da área de triângulos, todavia, privilegia que o estudante faça o uso da fórmula algébrica em sua solução. Na alternativa *a*, traçando a



diagonal do retângulo ABCD, temos os triângulos ACB e ABCD, no qual a sua área será a metade da área do retângulo. Dessa maneira, temos que :

$$\text{Área do retângulo: base x altura : } 4 \text{ cm x } 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \text{ Área do retângulo , logo, } \text{Área do triângulo} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

A alternativa *b* traz um triângulo com 4 cm de base e 3 cm de altura. Adotando como estratégia a aplicação da fórmula para o cálculo de área de triângulos, chegamos ao seguinte resultado:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

Um quadrado MNOP com lados de 4 cm é a representação figural da alternativa *c*. Observando o segmento de reta que traça a sua diagonal, o dividindo em dois triângulos MNO e MOP. Assim, ao calcular a área do quadrado temos:

$$\text{Área do quadrado : lado x lado : } 4 \text{ cm x } 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \text{ Área do quadrado , logo, } \text{Área do triângulo} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

A quarta e última alternativa apresenta a representação figural de um triângulo de 12 cm de base e 5 cm de altura. Acreditamos que os estudantes utilizarão a fórmula algébrica para determinar a área dessa figura plana. Nesse contexto:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{12 \times 5}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

### ***Reflexão Geral***

Estruturamos essa sequência em cinco etapas, com o intuito que o conceito relativo ao cálculo da área de triângulos, seja construído progressivamente pelo estudante e não apenas apresentado pelo professor. Em todas as etapas, privilegiamos a conversão entre os registros, ao concordar com Duval (1995) que o desenvolvimento de uma atividade matemática será original ao mobilizar do estudante a conversão entre no mínimo dois registros de representação ou até mesmo o tratamento dos registros. Além disso, temos a concepção que para o estudante compreender de maneira efetiva um conteúdo matemático, é preciso que ele identifique e tenha a noção das distintas formas de se representar um objeto matemático.

Em relação a avaliação do desempenho, o desenvolvimento dessa sequência poderá auxiliar ao professor a avaliação do desempenho cognitivo (compreensão do conceito), a participação dos estudantes durante o processo de ensino e aprendizagem, a assiduidade e comportamento. Salientamos que nessa pesquisa nos restringimos a elaboração das etapas e análise a priori da mesma. Por isso, essa sequência antes de ser aplicada poderá passar por alterações visando possibilitar a coleta de um maior número de informações para ser analisado.

Além disso, reforçamos mais uma vez que essa sequência integra a proposta de avaliação do desempenho quanto ao aspecto cognitivo. Dessa maneira, apresentamos a seguir, a referida proposta, explicitando os passos que utilizamos para a sua elaboração, expondo também a simulação que desenvolvemos para testar a sua usabilidade em possíveis situações do contexto escolar investigado.

#### 4.2.2 Proposta de Avaliação baseada na Teoria Fuzzy.

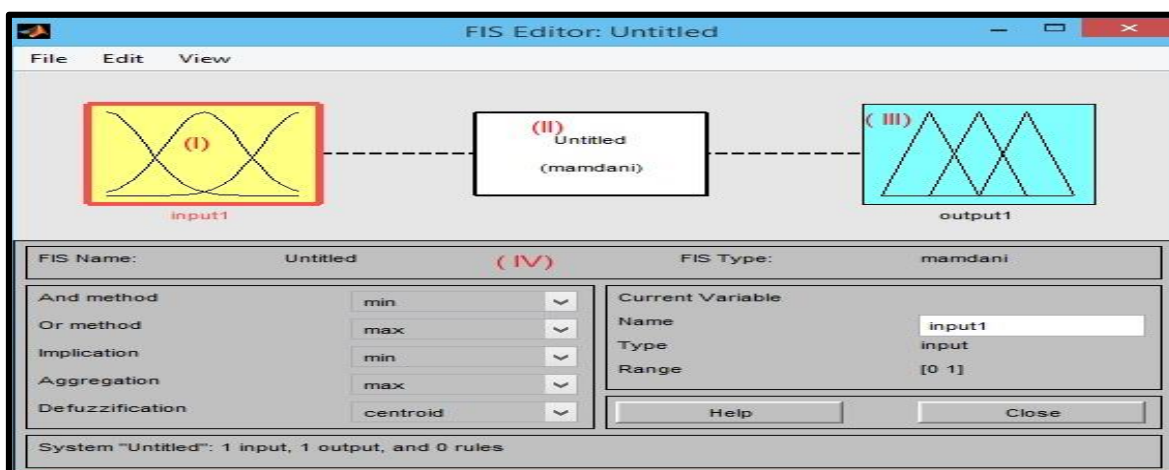
Ao analisarmos os dados coletados na primeira fase da pesquisa, observamos a subjetividade presente nos processos avaliativos do contexto pesquisado, já que cada professor possui uma concepção em relação as variáveis que representam o desempenho dos estudantes. De acordo com o estudo do referencial teórico associada as informações coletadas, desenvolvemos essa etapa com o intuito de atender a nossa questão de pesquisa, dada a possibilidade de utilizar a Teoria dos Conjuntos Fuzzy para suavizar as discrepâncias no processo avaliativo.

Dessa forma, norteados pela Lógica Fuzzy, elaboramos uma proposta para a avaliação do desempenho dos estudantes, baseando nos estudos que sugerem métodos e ferramentas para acompanhar o desempenho dos estudantes considerando essa lógica, tal como, Faria et al (2008); Malvezzi (2010); Wilges et. al (2010), os quais estabelecem um sistema avaliativo para cursos de ensino à distância. Correlacionando a fundamentação adotada com os estudos já desenvolvidos, abordamos nessa seção a proposta Fuzzy aqui estabelecida.

Observando as investigações que discorreram sobre a elaboração de Sistemas Fuzzy, identificamos o uso do software Matlab, especificamente do *Toolbox Fuzzy* (Figura 6) que oferece uma ferramenta computacional para a análise e processamento de dados por meio de

modelos de inferência. Assim, adotamos esse recurso para o desenvolvimento da nossa proposta de avaliação.

Figura 6: Toolbox Fuzzy



Fonte: Matlab R2013a.

Observando essa interface, temos de forma resumida a estrutura de um sistema dessa natureza. A esquerda (I) são inseridas as variáveis de entrada do sistema, ao meio (II) é apresentado o modelo empregado para o processo de inferência; a direita (III) são alocadas as variáveis de saída do sistema; já no campo inferior (IV) estão os campos para a definição de cada um dos operadores a serem usados, além do método de defuzzificação.

Conforme vimos no capítulo I, para a elaboração de um sistema baseado na Teoria Fuzzy, são necessárias quatro etapas: *fuzzificação*, *elaboração da base de regras*, *aplicação do sistema de inferência* e a *defuzzificação*.

A seguir, explicitamos como cada etapa foi desenvolvida em nossa investigação, fazendo a correlação com as informações obtidas na primeira fase da pesquisa.

#### *Primeira Etapa: Fuzzificação*

Essa etapa é responsável pela transformação dos dados de entrada CRISP (no nosso caso, as notas numéricas de 0 a 10) em variáveis (conjuntos) Fuzzy de entrada e saída do sistema através das funções de pertinência, considerando o conhecimento prévio do problema e de acordo com as informações coletados com a realização da entrevista e da observação não participante.

Durante o período que estivemos inseridos no ambiente da pesquisa, notamos que os parâmetros utilizados para fazer a avaliação dos estudantes no sistema de ciclos são bastante vagos e sem critérios específicos. Percebe-se de súbito que há uma dificuldade muito grande, por parte dos professores, em estabelecer uma maneira de avaliar o desenvolvimento cognitivo de seu aluno utilizando os conceitos praticados na escola (como vimos anteriormente, os conceitos são Sim, Não, Ainda Não e Não Avaliado).

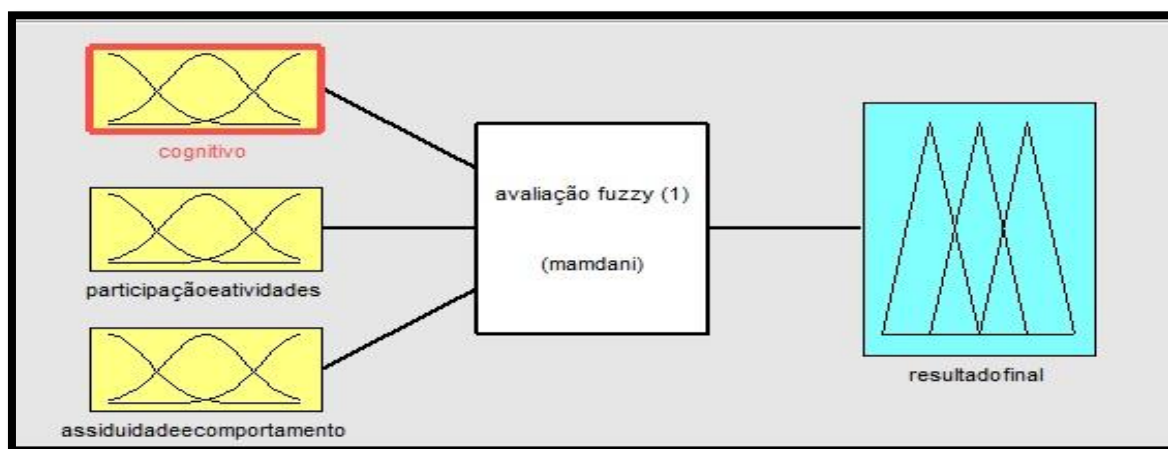
Fica evidente no discurso do professor o fato de que eles fazem uso de outros critérios para compor a sua avaliação final, isto é, que o processo avaliativo é feito de forma continuada, observando-se uma série de variáveis imprecisas, a saber, a participação, a assiduidade, o comportamento e a execução de atividades. Ainda mais, essas variáveis se tornaram elementos essenciais para a avaliação, dado que não há a possibilidade de se atribuir notas numéricas no sistema de ensino em ciclos.

Ao analisarmos as informações obtidas na primeira fase da pesquisa, observamos que os critérios particulares de avaliação utilizados pelos professores aumentam a subjetividade do processo. Todavia, conseguimos identificar alguns critérios que foram comuns as falas desses profissionais, os quais levamos em consideração para o estabelecimento do nosso sistema: o conhecimento cognitivo (CC), a participação dos estudantes nas atividades (PA), assim como, a assiduidade e comportamento (AC).

Dada a quantidade de critérios, a princípio, pensamos em estabelecer cada um desses critérios como uma variável de entrada. Entretanto, a inserção de todas essas variáveis causaria a necessidade de um grande número de regras para a base de inferência, o que poderia trazer dificuldades ao professor durante a utilização da proposta, dado o número de possibilidades a serem investigadas.

Dessa forma, optamos por agrupá-las em três conjuntos de variáveis de entradas, considerando suas correlações e importância (peso) na avaliação, organizadas da seguinte maneira: CC, PA e AC. Já a variável de saída possui apenas uma variável denominada de resultado final. A Figura 7 remete ao esquema estabelecido.

Figura 7: Proposta de avaliação do desempenho dos estudantes



Fonte: Matlab R2013a.

Para cada um desses conjuntos de variáveis (entradas Fuzzy), foram associados conceitos linguísticos correspondentes ao desempenho dos estudantes nesses aspectos, a saber: *Ruim*, *Regular*, *Bom* e *Ótimo*; para as variáveis de entrada e saída. Apesar de não corresponderem aos termos utilizados para a avaliação no contexto investigado (*sim*, *não*, *ainda não* e *não avaliado*), adotamos essas variáveis, pois ao conversarmos com o professor ao qual observamos suas práticas, notamos que esse profissional faz uma correlação entre os termos linguísticos e as variáveis utilizadas pela secretaria de Educação do município. Ou seja, o professor faz sua avaliação, baseando-se nesses conceitos e ao final, faz uma conversão para o sistema proposto para avaliação em ciclos. Fomos também inspirados em utilizar os termos linguísticos *Ruim*, *Regular*, *Bom* e *Ótimo* pois são termos muito utilizados pelos professores para se avaliar questões subjetivas em geral.

Ainda durante as observações, notamos que para utilizar os termos linguísticos descritos acima na sua avaliação, o professor atribui uma nota quantitativa entre zero e dez e a partir desse parâmetro, faz uma conversão mental, em escala, para o conceito linguístico. No caso do professor ao qual investigamos a sua prática, se um dos estudantes da turma em que leciona obter a nota de 7,6; em sua classificação esse sujeito investigado será classificado como *ótimo* e correlacionado com os indicadores do município, o seu desempenho será registrado como *sim*.

Portanto, o nosso olhar enquanto pesquisadores remete que o uso dos termos linguísticos diferentes do utilizado no contexto investigador poderá englobar a chance de ser

utilizados em contextos escolares diferentes. Assim, para cada um desses termos, correlacionamos as funções de pertinência que permitem indicar a medida em que um elemento pertence a um determinado conjunto, especificamente, qual o grau do desempenho do estudante dentro da variável analisada.

Levando-se em consideração os elementos apresentados acima decidimos, no nosso sistema, considerar que as variáveis CRISP de entrada, serão três notas numéricas dentro do intervalo  $[0,10]$ , uma para cada critério avaliativo (CC, PA e AC). A vantagem em desenvolver uma proposta dessa maneira, se deve ao fato do professor não necessitar fazer uma conversão mental entre nota quantitativa e qualitativa, pois isso será feito automaticamente. Outra vantagem está na padronização dessa relação, evitando que cada profissional estabeleça uma relação particular entre nota numérica e termo linguístico.

Logo, o primeiro passo para desenvolver o fuzzificador, é elaborar as funções de pertinência que representarão as variáveis linguísticas (conjuntos Fuzzy). Segundo Faria et. al (2008) definir uma função de pertinência para ser utilizada em uma aplicação da Lógica Fuzzy é uma etapa fundamental e difícil no desenvolvimento de uma aplicação. Dentre os formatos dessas funções de pertinência (triangular, trapezoidal, gaussiana, sigmoideal) observando a correlação descrita pelo professor durante o período da observação não participante, chegamos à conclusão que tanto as variáveis de entrada como as variáveis de saída, deveriam ser construídas por uma função triangular (representa o termo *Ruim*), e três funções trapezoidais (*Regular*, *Bom* e *Ótimo*).

Optamos por representar as variáveis de entrada e saída com os mesmos termos linguísticos e com as mesmas funções de pertinência, pois dado o ambiente escolar que investigamos, associado aos fatores observados na primeira fase da pesquisa, acreditamos que utilizar os mesmos intervalos traduziria uma parametrização regular dos conceitos, evitando a possíveis disparidades no resultado do desempenho dos estudantes.

Logo, expomos no Quadro 6 os conjuntos Fuzzy de entrada, que estão definidos no domínio  $R^+$  (Conjuntos dos Números Reais positivos):

Quadro 6: Funções de pertinência dos termos linguísticos

<p><b>Ruim (R):</b></p> $\mathbf{R(x)} : \begin{cases} 1, se x = 0 \\ \frac{-x}{4} + 1, se 0 \leq x \leq 4 \\ 0, se x \geq 4 \end{cases}$	<p><b>Regular (Re):</b></p> $\mathbf{Re(x)} : \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}, se 2.5 \leq x < 4 \\ 1, se 4 \leq x \leq 5 \\ -x + 6, se 5 < x \leq 6 \end{cases}$
<p><b>Bom (B):</b></p> $\mathbf{B(x)} : \begin{cases} x - 5, 5 \leq x \leq 6 \\ 1, se 6 \leq x \leq 7 \\ -x + 8, se 7 \leq x \leq 8 \end{cases}$	<p><b>Ótimo(O):</b></p> $\mathbf{O(x)} : \begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{14}{3}, se 7 \leq x \leq 8,5 \\ 1, se 8,5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

Fonte: Dados da pesquisa.

A elaboração dessas funções de mais de uma sentença foi necessária para associar cada termo linguístico a um intervalo de notas na escala de [0,10] para os critérios conhecimentos cognitivos (CC), participação dos estudantes nas atividades (PA) e assiduidade e comportamento (AC). Para a escolha desses intervalos, levamos em consideração as informações fornecidas pelo professor Davi na primeira fase da pesquisa, a qual aprimoramos os intervalos de forma a abranger a intervalos mais adequados para cada variável. Com isso, consideramos o intervalo entre [0;4] para o termo *Ruim*; [2.5; 6] para o termo *Regular*; [6;8] para o termo *Bom* e o intervalo [8.5;10] para o termo *Ótimo*.

Essas funções foram escolhidas visando descrever de forma linear os possíveis desempenhos dos estudantes. Além disso, considerando que na Teoria Fuzzy a relação de um elemento no conjunto é dada pelos graus de pertinência do elemento no conjunto, por exemplo, “Joãozinho tem um desempenho Bom, com o grau de pertinência de 0.7” o estabelecimento das funções de pertinência para cada variável se faz necessário para ter um sistema no qual o professor ao inserir notas quantitativas terá como resultado o desempenho do estudante em função das variáveis linguísticas.

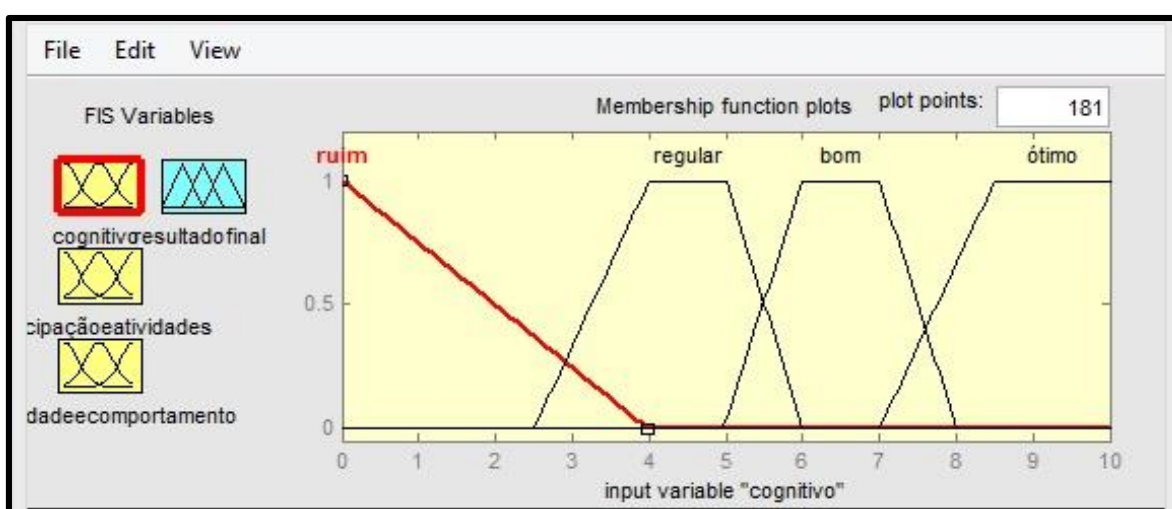
Assim, considerando as funções descritas no Quadro 6, se supormos que o estudante Joãozinho tenha obtido o seguinte desempenho: 2.0 para CC, 5.5 para PA e 7.5 para AC. Esse estudo tem seu desempenho quanto ao conhecimento cognitivo *Ruim*, ativando a segunda

sentença de  $R(x)$  que substituindo a nota relativa ao conhecimento cognitivo, determinamos o grau de pertinência do desempenho de Joaozinho. Dessa forma, temos que o desempenho dele no CC é *Ruim* com o grau de pertinência de 0.5.

Em relação a participação nas atividades, com a nota 5.5 o desempenho do estudante é caracterizado como *Regular*, ativando a terceira sentença, a qual vemos que o grau de pertinência será de 0.5. Por fim, com a nota de 7.5 no critério assiduidade e comportamento, o desempenho de Joãozinho é *Bom* agrupada na terceira sentença de  $B(x)$ , logo, tem o grau de pertinência de 0.5 a esse conjunto.

Para evidenciamos como essas funções foram representadas no Matlab R2013a, realizamos uma conversão do registro analítico para o registro gráfico, correspondentes a representação exposta na Figura 8, que exhibe os gráficos das funções de pertinência, dentre as quais, apresentamos a seguir os gráficos das variáveis de entrada e saída em um único gráfico.

Figura 8: Gráfico das funções de pertinência para as variáveis de entrada



Fonte: Matlab R2013a.

Partindo do exemplo de Joãozinho, ao qual foram atribuídos termos linguísticos para o desempenho no aspecto cognitivo, afetivo e psicomotor. Para estabelecer o conceito final de Joãozinho, é necessário que o pesquisador estabeleça bases de regras condizentes com o ambiente investigado. Sendo assim, apresentamos na sequência como desenvolvemos as bases de regras dessa proposta de avaliação.



### *Segunda etapa: Base de regras*

Essa parte do sistema Fuzzy é essencial para o seu bom funcionamento do sistema. É nesse momento em que o conhecimento especializado a respeito da teoria e do problema tratado são inseridos no modelo matemático. É o cérebro do processamento, no qual o sistema toma sua base para fazer as inferências e tomar decisões. Uma base de regras ajustada permite um processamento sutil e sensível a interpretação das variáveis de entrada. No sistema de Mamdani, a base de regras é fundamentada na lei Modus Ponens generalizada, isto é, “ se “ (antecedentes) “então” (consequente).

Sendo assim, rememorando a história da avaliação do desempenho dos estudantes em questão, poderíamos ter como uma das bases de regras nesse caso, a seguinte proposição: “Se Joãozinho tem o desempenho *Ruim* no cognitivo e tem um desempenho *Regular* na participação em atividades e tem um desempenho *Ótimo* no comportamento e assiduidade então Joãozinho tem um rendimento *Regular*”.

Segundo Tiago, Baroni e Fonseca (2014) todos os *conjuntos Fuzzy* representando as variáveis relacionadas por funções de pertinência são denominadas de bases de conhecimento. Nesse aspecto, a elaboração de um conjunto de base de regras tem o objetivo de permitir a manipulação da base de conhecimento, sendo o método mais utilizado para a sua representação.

Para Corcoll-Spina (2010) quando o pesquisador conhece o fenômeno é mais fácil a construção das bases de regras. Nessa investigação, as elaborações das bases de regras foram modeladas por meios das informações coletadas na primeira fase da pesquisa, com a nossa inserção no contexto escolar pesquisado.

Ao analisar os dados coletados por meio da técnica da árvore de possibilidades foram determinadas 64 regras, visando contemplar o maior número possíveis de situações para avaliar o desempenho dos estudantes. Todavia, ao observar as bases de regras descritas, observamos que nem todos os casos por ela retratados são plausíveis de acontecer na avaliação do desempenho dos estudantes, assim, optamos por retirar essas regras que não eram condizentes com a nossa proposta.

Por exemplo, na base composta por 64 regras, existia o caso em que o estudante poderia ter conceito *Ruim* para o cognitivo, *Ótimo* para a participação em atividades e *Ruim*

para a assiduidade e comportamento. Contudo, analisando o contexto escolar investigado, é improvável que o estudante não tenha dificuldades com a aquisição do conhecimento, sendo ele um aluno com um grande número de faltas e um ótimo rendimento na participação em atividades, isto é, essas informações são, de certa forma, contraditórias.

Justificamos essa inferência, mencionando o fato que ao associar o desempenho *do* cognitivo com a assiduidade e comportamento, irá refletir conseqüentemente na participação em atividades. Por isso, remodelamos as bases de regras, chegando ao total de 44 condições (Apêndice E), com o mesmo peso, dentre as quais, listamos algumas no Quadro 7.

Quadro 7: Exemplos da base de regras presentes na proposta de avaliação

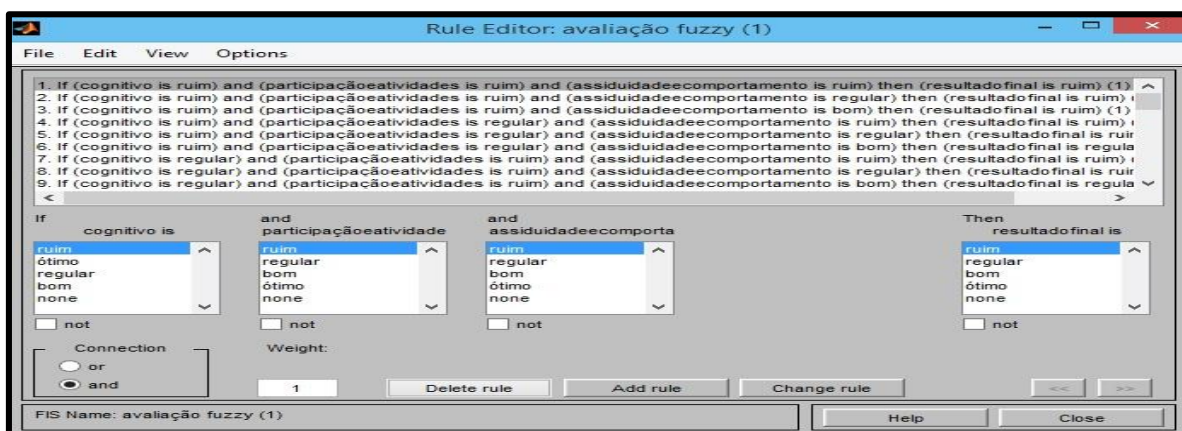
1. *Se* o cognitivo é ruim e a participação /atividades são ruins e a assiduidade comportamento são ruins *então* o resultado final é ruim.
2. *Se* o cognitivo é ruim e a participação /atividades são regulares e a assiduidade/comportamento são bons *então* o resultado final é regular.
3. *Se* o cognitivo é regular e a participação /atividades são boas e a assiduidade comportamento são regulares *então* o resultado final é regulares.
4. *Se* o cognitivo é regular e a participação /atividades são bons e a assiduidade comportamento são ótimas *então* o resultado final é bom.
5. *Se* o cognitivo é bom e a participação /atividades são ótimas e a assiduidade comportamento são regulares *então* o resultado final é bom.

Fonte: Dados da pesquisa.

O estabelecimento dessa base de regras é uma das vantagens para a modelagem matemática dessa proposta de avaliação, pois ao tratar-se de termos linguísticos cada professor pode vir a ter opiniões distintas quanto ao desempenho do estudante. Todavia, essa base de regras permitem a avaliação de forma igualitária para todos os avaliados, de forma que o professor não calcule a nota do estudante sem considerar a sua conotação qualitativa, além de uma exatidão nos termos linguísticos, reduzindo a imprecisão das informações.

Após definirmos a base de regras que iria compor a proposta de avaliação, inserimos no Matlab R2013a, particularmente no campo *Rule Editor* como evidencia a imagem da Figura 9.

Figura 9: Conjunto de base de regras no Sistema Fuzzy



Fonte: Matlab 9R2013a.

Observando essa imagem, podemos visualizar que no trecho superior está localizado o espaço para listar as regras incluídas. Na parte central da imagem, temos a esquerda três caixas de diálogo para a inclusão das variáveis de entrada e a direita a caixa de diálogo para a inclusão das variáveis de saída. Na parte inferior é indicado o operador selecionado para a combinação das proposições das variáveis de entrada, no nosso caso, optamos pelo operador *And*, ao permitir que a avaliação do desempenho considere todos os critérios inseridos no sistema, nesse caso: CC, PA e AC.

Na sequência, descrevemos a terceira etapa da elaboração da proposta de avaliação, que consistiu na escolha do método de inferência.

### *Terceira Etapa: Inferência*

Após delimitar a base de regras, definimos o modelo de inferência a ser utilizado na proposta que elaboramos. Dentre os tipos de sistema de inferência apresentados no Capítulo I que permitem representar a diversos tipos de informações, na forma representada pela base de regras, escolhemos nesse estudo em utilizar o sistema de Mamdani. Segundo Faria et. al (2008) esse modelo é o mais utilizado na literatura, além de incluir modelos linguísticos baseados em coleções de regra *se- então*.

As conclusões obtidas por meio desse sistema de inferência são baseadas na análise de todas as regras que foram implementadas pelo pesquisador, que ao serem combinadas auxiliaram na tomada de decisão, em nossa pesquisa, no conceito final relativo ao desempenho dos estudantes. Assim, ao inserirmos no sistema de inferência, as notas correspondentes a cada uma das variáveis de entrada, o próprio sistema por meio dos conjuntos das bases de regras

que exemplificamos no Quadro 6, seleciona quais as regras que serão ativadas e qual o resultado final do desempenho do estudante.

Dadas as notas do desempenho em relação ao *cognitivo*, *participação em atividades* e a *assiduidade* e *comportamento*, o sistema fornecerá uma nota correspondente ao resultado final do estudante e qual a base de regras foi ativada, permitindo ao professor saber quais os termos linguísticos correspondentes a cada variável de entrada, além do termo equivalente ao desempenho final.

Para situar como essa situação acontece com o desenvolvimento dessas três etapas (fuzzificação, base de regras e inferência), utilizamos a situação hipotética do desempenho de Joãozinho que apresentamos na Tabela 4.

Tabela 4: Simulação do desempenho de Joãozinho

<b>Variáveis</b>	<b>Conhecimento Cognitivo (CC)</b>	<b>Participação em Atividades (PA)</b>	<b>Assiduidade e Comportamento (AC)</b>	<b>Resultado final</b>
<b>Notas quantitativas</b>	2.0	5.5	7.5	4.31
<b>Notas qualitativas</b>	Ruim	Regular	Bom ou Ótimo	Regular

Fonte: Dados da pesquisa.

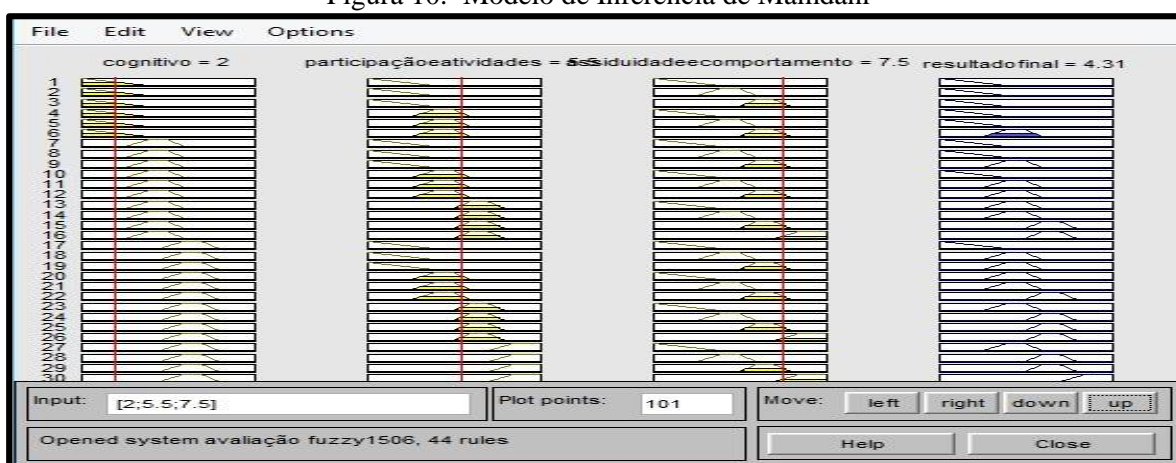
Ao inserirmos nos sistemas de inferência as notas quantitativas para as variáveis consideradas, esses resultados são associados as funções de pertinência fornecendo as notas de forma qualitativa. Dessa forma, temos que para CC a nota 2.0 equivale a nota qualitativa *Ruim* (com o grau de pertinência de 0.5); para PA a nota 5.5 é equivalente a *Regular* (com o grau de pertinência de 0.5) e para AC a nota 7.5 é equivalente a variável *Bom* ou *Ótimo* (com o grau de pertinência de 0.5).

Dada as notas referentes aos três critérios, ao inseri-las no sistema de inferência temos a variável de saída correspondente ao resultado final do desempenho dos estudantes nas formas quantitativa (correspondente ao índice Fuzzy) e qualitativa (correspondente as bases de regras).

Esse sistema de inferência pode ser visto de forma resumida na imagem da Figura 10, em que as três primeiras colunas mostram graficamente os valores das variáveis de entrada na parte superior (nota quantitativa) e nas linhas localizadas na parte inferior os termos

linguísticos (notas qualitativas). A última coluna traz na parte superior o índice Fuzzy análogo a o resultado final do desempenho do estudante, já na parte inferior é descrito a variável linguística desse desempenho. Considerando as notas da avaliação do desempenho de Joãozinho, temos que a sua nota quantitativa será de 4.31 e a nota qualitativa dada pelo termo Regular.

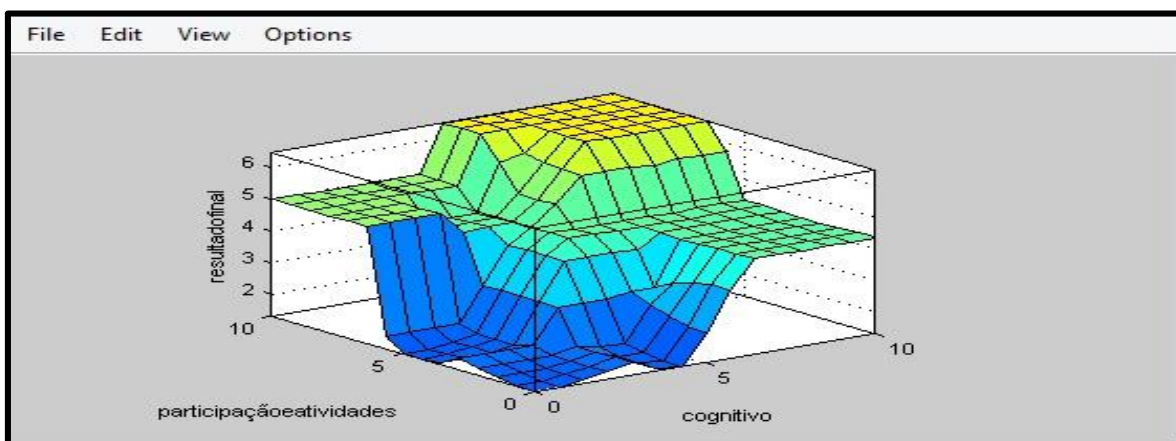
Figura 10: Modelo de Inferência de Mamdani



Fonte: Matlab R2013a.

Os resultados apresentados na saída do sistema é um conjunto Fuzzy, que é determinado a partir das definições dos conjuntos que elaboramos nos conjuntos de entrada Fuzzy. De maneira geral, apresentamos na Figura 11 a superfície que representa a relação estabelecida entre o conjunto de base de regras (44 regras) as variáveis de entrada e saída (entrada: cognitivo, participação em atividades, assiduidade e comportamento; saída: resultado final) do sistema interligadas ao modelo de inferência de Mamdani.

Figura 11: Mapeamento de entrada-saída do sistema de avaliação



Fonte: Matlab R2013a.

A construção desse gráfico foi possível utilizando o comando “ Surface Viewer” que permitiu observamos a superfície definida pela combinação das bases de regra com o modelo de inferência.

#### *Associação do Resultado da Inferência aos Critérios da Escola*

Nessa pesquisa, ao analisarmos o contexto investigado na primeira fase, observamos que os resultados do desempenho dos estudantes são apresentados através dos termos: *sim, não, ainda não e não avaliado*. Logo, não propomos a conversão dos termos linguísticos em uma nota para representar o desempenho dos estudantes e sim, associamos as variáveis linguísticas (*Ruim, Regular, Bom e Ótimo*) com os indicadores adotados no ambiente escolar pesquisado (*sim, não, ainda não e não avaliado*). Dessa forma, apresentamos na Tabela 5, a correlação entre essas variáveis.

Tabela 5: Correlação entre os indicadores avaliativos do município e as variáveis utilizadas na proposta

<b>Variáveis utilizadas na proposta de avaliação</b>	<b>Indicadores adotados pelo município pesquisado.</b>	<b>Valor discreto</b>
Ruim	Não	0-4
Regular	Ainda Não	2.5- 6
Bom	Sim	5-8
Ótimo	Sim	7-10
Ainda não	Ainda não	Não tem rendimento

Fonte: Dados da pesquisa.

Ponderando sobre as variáveis utilizadas pelos professores entrevistados para atribuir o desempenho dos estudantes e correlacionando com a classificação Fuzzy, ao realizarmos a etapa da defuzzificação, temos que: a classificação *ruim* corresponde a variável *não*; a classificação *regular* corresponde a variável *ainda não*; a classificação *bom* corresponde a variável *sim*; a classificação *ótimo* corresponde a variável *sim*. Em relação a variável *ainda não*, não associamos a nenhuma classificação já que seu uso significa que o determinado conceito ainda não foi abordado pelo professor. Por fim, realizamos a quarta e última etapa correspondente a defuzzificação, conforme apresentamos na sequência.

#### *Quarta Etapa: Defuzzificação*

A última etapa da elaboração de um sistema Fuzzy consiste na defuzzificação, nos quais os resultados encontrados através do sistema de inferência são traduzidos para um número real. Na literatura vigente, alguns métodos de defuzzificação são utilizados, dentre eles: centro dos máximos, bissector, método da altura, média dos máximos e centroide. Nessa investigação optamos por utilizar como método de defuzzificação o centroide, pois este considera a área entre o grau de pertinência e o eixo relativo as notas atribuídas para o desempenho do estudante, calculando a média ponderada dessa região. Além disso, dentre os outros métodos supracitados, o centroide foi o que produziu os resultados mais adequados com a entrevista dos professores e com a observação não participante.

Após o desenvolvimento das quatro etapas para a elaboração da proposta de avaliação, considerando o nosso objetivo geral, decidimos realizar uma simulação com dados fictícios para testar a adequação da proposta com o campo investigado. Dessa maneira, segue a simulação com a discussão desses dados.

#### *Simulação da Proposta Avaliativa*

A nossa intenção nessa pesquisa foi sugerir uma proposta de avaliação e não apenas testar ou comparar os resultados em relação as médias clássicas. Todavia, para validar a proposta estabelecemos uma simulação para um conjunto de vinte dados, escolhidos de forma estratégica, buscando alcançar o máximo possível de situações que poderiam acontecer no ambiente escolar investigado. Nesse teste, procuramos confrontar os resultados encontrados pela nota gerada pela média aritmética das notas (índice clássico) e o índice Fuzzy (valor encontrado após a defuzzificação).

A nota que são representadas pelo índice clássico foram determinadas pela média aritmética da seguinte forma,  $NF = \frac{Nota(I) + Nota(II) + Nota(III)}{3}$ , sendo (I) as notas relacionadas aos aspectos cognitivos, (II) as notas pertinentes a participação em atividades (III) as notas associadas a assiduidade e comportamento; ambas no intervalo de 0 a 10. Já o índice Fuzzy, encontramos utilizando o comando *View* → *View Rules*, do Toolbox Fuzzy, que permite atribuir valores numéricos para as variáveis de entrada, sendo obtidos os resultados para as variáveis de saída. Calculamos as notas por meio da média clássica e pelo sistema Fuzzy, visando estabelecer uma comparação entre essas notas.

A Tabela 6 apresenta os resultados dessa simulação, descrevendo os índices clássicos e o índice Fuzzy, associando a nota quantitativa e a nota qualitativa para o desempenho dos estudantes.

Tabela 6: Comparação entre o Índice Clássico e o Índice Fuzzy

Estudante	(I)	(II)	(III)	Índice Clássico	Classificação Clássica	Índice Fuzzy	Classificação Fuzzy	Defuzzificação
1	0.5	1.4	5.0	2.3	Ruim	1.43	Ruim	Não
2	1.0	2.2	4.0	2.4	Ruim	1.57	Ruim	Não
3	1.5	5.3	7.3	4.7	Regular	4.32	Regular	Ainda não
4	3.4	5.8	7.7	5.63	Regular/Bom	5.73	Regular/Bom	Sim
5	2.5	7.5	8.3	6.1	Bom	5.0	Regular/Bom	Ainda Não/Sim
6	3.0	7.0	7.8	5.93	Regular/Bom	6.5	Bom	Sim
7	3.5	5.5	5.0	4.66	Regular	3.76	Regular	Ainda Não
8	4.0	1.3	6.5	3.93	Ruim	4.33	Regular	Ainda Não
9	4.5	7.1	9.0	6.86	Bom	6.5	Bom	Sim
10	5.0	3.1 5	7.2	5.11	Regular/Bom	5.17	Regular/Bom	Ainda Não/Sim
11	5.5	4.5	8.0	6.0	Bom	5.0	Regular/Bom	Ainda Não/Sim
12	6.0	6.5	7.0	6.5	Bom	6.5	Bom	Sim
13	6.5	3.8	4.0	4.76	Ruim	4.34	Regular	Ainda Não
14	7.0	5.3	8.9	7.06	Bom	6.5	Bom	Sim
15	7.5	3.0	5.0	5.16	Bom	4.29	Regular	Ainda Não
16	8.0	7.2	6.8	7.33	Bom/Ótimo	6.88	Ótimo	Sim
17	8.5	2.0	3.5	4.66	Regular	3,74	Regular	Ainda Não
18	9.0	6.5	2.8	6.1	Bom	6.5	Bom	Sim
19	9.5	9.0	9.0	9.16	Ótimo	8.86	Ótimo	Sim
20	10	7.4	5.5	7.83	Bom/Regular	7.28	Bom/Ótimo	Sim

Fonte: Dados da pesquisa.

A adoção dessas notas para a realização da simulação teve o objetivo de propor os diversos casos que podem aparecer nas práticas avaliativas dos professores. Sendo assim, para determinar o índice clássico para o desempenho dos estudantes, calculamos a média aritmética dessas três notas, tomamos como exemplo o rendimento do estudante 4:

$$\text{Índice clássico: } \frac{3.4 + 5.8 + 7.7}{3} = \frac{16,9}{3} = 5.63$$

Classificando o índice clássico por meio da correlação feita pelo professor na Tabela 3 (página 95) temos que esse estudante terá seu desempenho classificado como *Regular* e



*Bom*. A inserção desse desempenho em duas variáveis linguísticas advém dos intervalos propostos pelo professor Davi na primeira fase da pesquisa.

Já utilizando as notas do estudante 4 para determinar o seu desempenho com base na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, especificamente, o Toolbox Fuzzy do software Matlab e considerando as funções de pertinência que apresentamos no Quadro 5 (página 125) e as bases de regras exemplificadas no Quadro 7 (página 128) ao inserir as notas atribuídas ao estudante 4, temos os seguintes casos:

Assim, os resultados das variáveis de entrada foram: *Ruim* com o grau de pertinência de 0.15 (Conhecimento Cognitivo); *Regular* com o grau de pertinência de 0.2 e *Bom* com o grau de pertinência de 0.15 (Participação em Atividades); *Bom* com o grau de pertinência de 0.3 e *Ótimo* com o grau de pertinência de 0.7 (Assiduidade e Comportamento). Tais resultados ativaram quatro bases de regras descritas a seguir:

Tabela 7: Bases de Regras ativadas com as notas do estudante 4

<b>Conhecimento Cognitivo</b>	<b>Participação em Atividades</b>	<b>Assiduidade e Comportamento</b>	<b>Resultado Final</b>
Ruim	Regular	Bom	Regular
Ruim	Regular	Ótimo	Regular
Ruim	Bom	Bom	Regular
Ruim	Bom	Ótimo	Bom

Fonte: Dados da Pesquisa.

Observando esse quadro, quatro regras foram ativadas fornecendo como resultado final as variáveis linguísticas *Regular* e *Bom*. Realizando o processo de defuzzificação (centroide) temos que o Índice Fuzzy correspondente ao resultado final do desempenho do estudante foi de 5.73 que se aproxima do Índice Clássico. Além disso, associando essas variáveis aos indicadores adotados pela secretaria de educação do município que investigamos, temos que essa nota corresponde a variável *Sim*.

Ao realizarmos essa simulação, destacamos o ganho de realizar o processo avaliativo com base na Teoria Fuzzy, já que a sua utilização permite dar uma padronização nessa ação, evitando as disparidades, no sentido da representação das variáveis linguísticas. Conjecturemos que dois professores distintos tenham avaliado o desempenho do estudante 5, com ambos aferindo uma nota de 2.5 para o CC, 7.5 para a PA e 8.3 para a AC.

Para o professor A, o estudante 5 pode ser caracterizado como *Ruim* no primeiro critério e o segundo e terceiro critérios como *Bom*. Já o professor B considera esse estudante *Regular* em relação a CC, *Bom* em relação a PA e *Ótimo* enquanto a AC. Se esses profissionais fossem inserir esses conceitos como o resultado da avaliação do estudante, apesar das notas serem iguais, os resultados finais podem ser diferentes.

Essa divergência entre os termos pode ser suavizada com o uso dessa proposta de avaliação, pois ao inserir a nota correspondente a avaliação do estudante 5, dada a base de regras estabelecidas previamente, o resultado do estudante será fornecido tanto em relação ao quantitativo (nota) e ao qualitativo (termos linguísticos), evitando distorções.

Analisando de forma geral, as notas dos estudantes obtidas pela média clássica e pela média Fuzzy, observamos que essas se diferem na maioria dos casos (95 %), sendo apenas a nota do estudante 12 iguais nos dois casos. Do total de vinte notas, as médias clássicas se apresentam maiores em quatorze casos (70%), igual em um caso (5%) e as médias Fuzzy são maiores em cinco casos (25 %).

Diferentemente desse resultado, Malvezzi (2010) observou em sua investigação que as médias Fuzzy se apresentaram maiores do que as médias aritméticas em 65 % do total simulado, iguais em 1% e as médias aritméticas foram maiores em 34%, além de ressaltar que os valores médios Fuzzy foram 1,2 vezes maiores do que os das médias aritméticas. Já os resultados dessa classificação no índice clássico e no índice Fuzzy divergiram dos resultados encontrados por Barrantes (2011) ao afirmar que uma nota baixa diminui a média consideravelmente no índice clássico, todavia, não diminui tanto no índice Fuzzy.

Em nossa proposta, essa diferença entre as médias clássica e Fuzzy não foram tão destoantes como na pesquisa supracitada, com exceção das notas dos estudantes 1, 2,5 e 11, no qual há uma diferença maior que 0.8. Inferimos que esses resultados tão distintos, estão relacionados ao método de defuzzificação (centroide), no sentido de encontrar um centro entre as regiões da base de regras, e por ter pelo menos uma das notas que estão na área relacionada a variável ruim, essas notas tendem a levar a nota para mais próximo do zero, diferentemente de calcularmos a nota utilizando a média clássica.

Também salientamos que a redução na maioria das notas Fuzzy que simulamos para os estudantes pode indicar qual o seu real desempenho, pois esses resultados são ponderados considerando os diferentes aspectos relacionados as variáveis de entrada.

Em relação aos termos linguísticos, as classificações do desempenho dos estudantes foram iguais em doze casos (60%). Por exemplo, o estudante 9, apesar de obter notas distintas, a classificação de seu desempenho foi o mesmo (*bom*). Essa situação vai ao encontro dos resultados encontrados por Ribeiro (2012) que ao comparar os conceitos atribuídos pelas professoras e os conceitos fornecidos pelo sistema Fuzzy, observou a compatibilidade entre os mesmos, havendo apenas dois conceitos diferentes.

Entre os dez casos em que a classificação utilizando o índice clássico foi diferente da classificação utilizando o índice Fuzzy, destacamos, o estudante 15 que obteve uma nota alta no aspecto cognitivo, uma nota baixa no aspecto da participação em atividades e uma nota média no aspecto associado a assiduidade e comportamento, e a classificação utilizando o índice clássico foi *bom*, enquanto com o índice Fuzzy, o resultado foi *regular*. Assim, podemos perceber que apesar das notas simuladas para esse estudante ser a mesma, a influência dos métodos utilizados é suficiente para mudar a classificação do desempenho.

Em relação aos estudantes que possuem mais de uma variável em sua classificação (classificação clássica: 4, 10, 16 e 20; classificação Fuzzy: 5, 10, 11 e 20), essa situação se justifica pois na correlação entre as notas quantitativas e qualitativas, tanto o professor como nós, enquanto pesquisadores, delimitamos intervalos que integralizam em duas variáveis

Vale salientar que o único caso em que o estudante precisa repetir a fase do ciclo, está quando o seu desempenho é descrito como *não*. Assim, observando os resultados da nossa tabela com a simulação das notas, apenas dois estudantes seriam reprovados de acordo com a classificação Fuzzy, dado o rendimento *ruim* em pelo menos dois dos aspectos. Observando os resultados no caso da classificação clássica, quatro estudantes seriam reprovados, evidenciando a diferença entre esses dois processos avaliativos. De maneira geral, essas situações vão ao encontro da avaliação do desempenho dos estudantes do contexto em que investigamos, no qual os professores mencionaram que em poucos casos, há a “retenção” do estudante, até por que essa prática não consiste ao sistema de ensino em ciclo.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A avaliação do desempenho dos estudantes é uma ação inerente ao processo de ensino e aprendizagem, independentemente da modalidade e esfera de ensino a qual nos referimos. Todavia, a avaliação traz em sua essência um caráter de subjetividade, dada as concepções particulares de cada professor, sua relação com os estudantes, os procedimentos utilizados para analisar a compreensão dos conceitos, dentre outros fatores associados.

Essa subjetividade pode ser ressaltada, quando nos pautamos no processo avaliativo por meio de variáveis linguísticas, tais como, *Regular, Bom, Excelente*; característica presente no sistema de ensino em ciclos, o que remete a um aspecto impreciso nessa ação. Tal situação de incerteza e imprecisão, também pode ser diagnosticada na avaliação do desempenho em matemática, no sentido do professor tentar representar o desempenho discente por intermédio de critérios subjetivos, além das dificuldades em representar o desempenho utilizando termos linguísticos.

Essas dificuldades de avaliar em matemática não se limitam apenas ao uso dos termos linguísticos, podemos mencionar também o fato dos estudantes em muitos casos não compreenderem significativamente aos conceitos, tornando-se evidente no momento em que o professor realiza essa ação de analisar o desempenho de sua turma. Em relação ao processo de ensino e aprendizagem, especificamente em geometria, estudos desenvolvidos descrevem como um dos pontos cruciais para a compreensão dos conceitos, que o estudante coordene os diferentes registros e consiga interpretar uma situação- problema, produzindo uma explicação para a mesma.

Nesse contexto, estabelecemos como questões de pesquisa: **Quais são as contribuições de uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos? Quais são as contribuições de uma sequência de ensino envolvendo área de triângulos, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação, para avaliação do aspecto cognitivo?**

Para buscar as possíveis soluções para esses questionamentos, escolhemos como contexto a ser investigado, uma unidade escolar do Sul da Bahia, organizado no sistema de ensino em Ciclos. Nesta escola coletamos as informações relevantes para materializar nosso

objetivo, qual seja: Desenvolver uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos, que foi o objetivo geral dessa pesquisa. Além disso, objetivamos: Investigar os métodos de avaliação utilizados pelos professores no contexto escolar investigado e elaborar uma Sequência de Ensino envolvendo área de triângulos fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica visando avaliar o aspecto cognitivo do desempenho dos estudantes.

Organizamos metodologicamente essa investigação em duas fases. Na primeira fase, objetivamos investigar os métodos de avaliação do desempenho dos estudantes no contexto pesquisado, para tal realizamos uma entrevista com quatro professores de matemática e uma coordenadora pedagógica, além da observação da prática de um desses professores.

Ao analisar os dados coletados nessa fase, observamos a subjetividade imersa na atividade docente, pois cada um desses profissionais possui uma concepção sobre avaliação. Também identificamos que esses professores consideram os aspectos cognitivos (aquisição do conhecimento, trabalhos em grupos, formulação e resolução de problemas), afetivos (mudanças e atitudes, assiduidade) e psicomotores (capacidade de expressão oral e escrita, observação diagnóstica, jogos e brincadeiras).

Em relação a exposição dos resultados do processo avaliativo, descobrimos que esses são relatados por meio de termos linguísticos, especificamente: *sim, não, ainda não e não avaliado*), descrevendo o desempenho dos estudantes em relação aos indicadores adotados pela Secretaria de Educação. Quanto a esses indicadores, chamamos a atenção para a presença de indicadores avaliativos que focalizavam a conversão entre os registros dos objetos matemáticos, fortalecendo o nosso interesse em desenvolver uma Sequência de Ensino privilegiando essas conversões.

No que se refere as observações às aulas de matemática de uma turma do Ciclo da Adolescência – Fase III (CAD III), percebemos que o professor avaliava os estudantes de forma contínua, considerando a assiduidade, a participação nas aulas, a relação entre os colegas de classes, o desenvolvimento das atividades. Além disso, um fator interessante foi a possibilidade do professor explicitar como faz a associação entre os aspectos qualitativos e quantitativos para a conversão de valores discretos e variáveis linguísticas.

A análise dos dados coletados com a entrevista e observação forneceram subsídios suficientes para o desenvolvimento da segunda fase da pesquisa que consistiu na elaboração

de uma sequência de ensino (SE) para avaliar o desempenho dos estudantes em relação ao aspecto cognitivo no que tange o conceito de área de triângulos, baseando-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Organizamos a SE em cinco etapas, privilegiando a conversão e o tratamento dos registros, fator que acreditamos colaborar para a apreensão desse conceito, conforme observamos ao realizar uma análise a priori dessa SE.

Abordamos inicialmente os processos utilizados para a medição de superfícies (cordas; ladrilhamento e multiplicação das medidas); o cálculo da área de figuras e de figuras planas (retângulos e quadrados), para enfim, formalizar o conceito da área de triângulos. Quanto aos recursos didáticos adotados nessa sequência de ensino, utilizamos a malha quadriculada para o cálculo da área de figuras planas com quadradinhos de 1 cm como unidade de medida, assim como, as próprias medidas da sala de aula. Optamos em adotar o uso da malha quadriculada, visando estimular a compreensão intuitiva do conceito, permitindo a composição e decomposição de figuras; auxiliando na visualização do sujeito. Acreditamos que esse recurso pode vir a favorecer a interpretação na dedução da fórmula da área do triângulo.

Essa sequência compõe um dos aspectos que foram considerados para a criação da proposta de avaliação fundamentada na Teoria Fuzzy, com o uso do software Matlab e pautada na utilização de variáveis linguísticas que pudesse colaborar com os professores no momento de determinar o desempenho dos estudantes nos aspectos cognitivos, afetivos e psicomotor. Como não realizamos a coleta de dados reais para verificar a aplicabilidade dessa proposta, restringimo-nos a testá-la com a composição fictícia da nota de vinte estudantes. Ao realizar essa simulação, observamos que essa proposta se adequa para o contexto que investigamos, apesar de divergir em alguns casos da nota calculada pelo método da média aritmética e dos termos linguísticos resultante desses dois métodos.

De forma geral, esses procedimentos e resultados descritos aqui de maneira sucinta, colaboraram de forma significativa para respondermos as nossas questões de pesquisa. Sendo assim, apresentamos as reflexões que fizemos quanto a esses questionamentos: **Quais são as contribuições de uma proposta com base na Teoria Fuzzy para a avaliação do desempenho dos estudantes em atividades envolvendo área de triângulos?**

Realizando a leitura dos estudos relativos ao uso da Teoria Fuzzy no contexto da modelagem matemática, encontramos a sua aplicação para casos envolvendo recursos tecnológicos (programação de lavadoras de roupa), agricultura (cálculo da densidade do solo),

saúde (identificação de doenças), entre outros. Da mesma forma, nós, enquanto pesquisadores, vislumbramos as contribuições que essa teoria fornece para a investigação no campo da avaliação, nessa pesquisa especificamente, para o campo da avaliação em matemática.

A utilização dessa teoria possibilitou a construção de uma proposta avaliativa, levando em consideração as diferentes concepções dos professores, além de contemplar aos diversos instrumentos utilizados para a avaliação discente, permitindo a criação de regras condizentes com a realidade do ambiente escolar investigado. Outro diferencial da utilização dessa proposta de avaliação foi usar a Teoria dos Conjuntos Fuzzy associada ao software Matlab, especificamente o Toolbox Fuzzy dando a possibilidade do professor poder determinar o desempenho dos estudantes por meio das variáveis linguísticas, no qual próprio programa fornece (com base nas funções elaboradas pelo professor) o conceito relativo a avaliação que permite tratar de forma mais adequada as questões subjetivas inerentes ao contexto escolar que investigamos, suavizando a imprecisão e incerteza que permeiam essa prática educativa.

Nesse aspecto, a utilização dessa proposta pode permitir ao professor adequar os parâmetros utilizados para avaliar o desempenho dos estudantes, contemplando a diversos aspectos, não se resumindo exclusivamente a aplicação de provas no caso da matemática, caracterizando uma prática mais coerente e dinamizadora. Também, se compararmos com a Teoria da Resposta ao Item e com a Taxonomia de Bloom (ambos modelos propostos para a avaliação do desempenho), a proposta de avaliação baseada na Teoria Fuzzy traz uma facilidade para o professor, por não se tratar de um software de menor complexidade se comparado com os softwares estatísticos utilizados para analisar as respostas dos estudantes na TRI e não traz uma avaliação pautada em níveis de hierarquização (Taxonomia de Bloom) o que pode vir a dificultar a ação do professor.

Sendo assim, descrevemos como importante a aplicação da Teoria Fuzzy na elaboração de uma proposta de avaliação que possa oferecer ao professor um suporte tecnológico para acompanhar a progressão dos estudantes de forma personalizada, suavizando as discrepâncias entre os parâmetros observados. Para tal, o professor necessitará ter uma atenção maior em acompanhar a atuação de cada estudante, visando estabelecer um mecanismo que seja condizente com o perfil.

Ao compararmos a avaliação do desempenho pelo modelo clássico (cálculo da média aritmética), com esse mesmo processo pautado na Teoria Fuzzy, verificamos como uma das

vantagens a chance de aperfeiçoar as funções que modelam as variáveis linguísticas. Mencionamos também a oportunidade do professor fornecer ao estudante um retorno de seus resultados finais em tempo hábil. O estabelecimento desse sistema não se limita ao contexto em que investigamos, podendo ser um recurso para ser utilizado em diferentes ambientes de ensino, tais como, na modalidade de ensino presencial, semipresencial, a distância.

Um aspecto inovador desse estudo, está no fato de não encontramos na literatura até o presente momento, a utilização dessa teoria, associado ao software como um instrumento tecnológico para a investigação do desempenho dos estudantes do sistema de ensino em ciclos, trazendo informações que visem suprir a falta de materiais/investigações nessa temática.

Em relação a nosso segundo questionamento: **Quais são as contribuições de uma sequência de ensino envolvendo área de triângulos, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação, para avaliação do aspecto cognitivo?** Temos que:

No tocante ao ensino desse conceito fundamentado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), ao elaborarmos uma sequência de ensino pautada nas conversões e tratamento de registros, confiamos que o estudante compreenda a dedução da fórmula da área dessa figura plana de maneira espontânea. Desse modo, acreditamos que para a devida compreensão desse conceito, o estudante precisa coordenar os diversos registros de representação, articulando-os.

Pela análise a priori, percebemos que essa sequência possui uma boa sistematização para a dedução do conceito de área de triângulos, visto que, a sua organização privilegia que o estudante se conscientize dos processos de medições de áreas que foram utilizados na antiguidade e dos atuais processos, ressaltando as diversas transformações realizadas ao longo dos tempos e compreendendo de forma natural como são consideradas as unidades de áreas de uma figura plana, dada a composição e decomposição de figuras.

Além disso, vemos como importante o fato do conceito ir sendo construído pelo sujeito ao longo das etapas e não apresentado de maneira formal pelo professor. Confiamos que ao realizar o processo de ensino nessa perspectiva, o estudante internalize de maneira simples esse conceito, o que poderá refletir de maneira positiva na avaliação do seu desempenho. Almejamos que para a resolução de questões envolvendo a área de figuras planas, especificamente, a área de triângulos, que os estudantes não se restrinjam ao uso de fórmulas desprovidas de significado, e sim, que possa fazer uma análise e interpretação das



representações desse objeto matemático, estimulando o desenvolvimento da reflexão e habilidades matemáticas.

Relacionando a SE com o processo avaliativo, salientamos que nessa proposta a avaliação não fica restrita ao uso de provas e testes, já que o professor pode acompanhar o estudante por meio de suas explicações e opiniões apresentadas em sala de aula; sua desenvoltura em resolver as situações; as discussões com os colegas de classe; o interesse e assiduidade nas aulas de matemática; modificando a possível visão dos estudantes que a avaliação em matemática está restrita a testes ou provas; além de estabelecer um processo de ensino e aprendizagem no qual o professor não será o detentor do conhecimento e o estudante um mero reprodutor

Para isso, o professor precisará repensar a sua prática, de forma a ter uma maior relação com os estudantes, observando como está sendo a sua aprendizagem; romper com a visão tradicional de aula, na qual os estudantes devem permanecer em fileiras, evitando conversa com os colegas. Na prática que elaboramos, o professor precisa estar disponível para visitar as duplas/grupos, levantar questionamentos e fazer intervenções nos momentos de discussão coletiva e na resolução das questões.

Ao chegarmos a esse ponto da pesquisa percebemos que um sentimento de satisfação desponta em nós pela possibilidade de poder auxiliar no desenvolvimento de discussões e investigações atreladas ao campo da avaliação e educação matemática, dada a evidente necessidade de mais investigações nesse sentido. Por fim, esperamos poder contribuir para que nós, matemáticos, assim como toda a comunidade escolar, utilize a avaliação do desempenho como uma aliada na prática educativa e conseqüentemente para a aquisição do conhecimento; na esperança de que a avaliação do desempenho dos estudantes seja repensada e desmitificada como uma atividade apenas para “ atribuir uma nota ou conceito”.

### ***Perspectivas Futuras***

Dado o objetivo dessa pesquisa, estabelecemos a princípio uma entrevista com professores de matemática e observação da prática docente, seguido da criação de uma proposta para avaliar o desempenho dos estudantes, associada a elaboração de sequência de ensino abordando o conceito da área de figuras planas. Todavia, em função do tempo para a realização dessa investigação, tanto a proposta como a sequência foram limitadas as suas construções, sendo então interessante a sua aplicação no contexto de uma sala de aula.

Os resultados evidenciados com a análise da entrevista e da observação não participante, sinalizaram a necessidade de olhar com maior atenção para o sistema de ensino no contexto que investigamos, dados os pontos cruciais sinalizados pelos professores, tais como: a falta de critérios para avaliar; a não participação dos pais no processo avaliativo; as dificuldades encontradas pelos estudantes para a aprendizagem dos conceitos de matemática. Esses aspectos nos incitam a investigar com maior profundidade a avaliação no sistema de ensino em ciclos.

Focalizando a proposta de avaliação, sugerimos como pesquisas futuras a aplicação do sistema avaliativo fundamentado pela Teoria dos Conjuntos Fuzzy no contexto do sistema de ensino em ciclos, para verificar as potencialidades e limitações desse sistema para esse contexto. Também sugerimos a adaptação dessa proposta para a avaliar o desempenho dos estudantes que estudam na modalidade de ensino em séries (anos).

Nessa pesquisa, adotamos o sistema de inferência de Mamdani para a criação da proposta avaliativa, assim, indicamos replicar essa mesma organização com sistemas de inferência distintos, tais como, o modelo de inferência de Takagi-Sugeno; repensar a possibilidade de estabelecer outras funções de pertinência para as variáveis de entrada e saída do sistema; aplicação com dois professores visando comparar os resultados das turmas; a inclusão de novas variáveis de entrada, dentre outras possibilidades.

Em relação a sequência de ensino, a elaboramos pensando a princípio nos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, já que esse foi o contexto que investigamos na primeira fase da pesquisa. Todavia, recomendamos que além de ser aplicada nesse contexto, que essa seja aplicada a estudantes do sétimo ano, pois acreditamos na possibilidade da realização dos mesmos. Também sugerimos que sejam acrescentadas a sequência de ensino, novas etapas ou momentos, privilegiando a conversão entre os registros de representação.

Ao desenvolvermos uma sequência de ensino fundamentada em torno de uma teoria e com objetivos e situações- problemas claros, acreditamos que essa sequência não se limita a aplicação do conceito da área de triângulos, podendo ser adaptada, abordada e desenvolvida com qualquer conceito matemático.

Dadas essas perspectivas de futuras investigação, parafraseando Luckesi (2011), salientamos que é necessário “ aprender a avaliar a aprendizagem” de forma a aprender um novo modo de ser e agir enquanto avaliador, repensando nossos conceitos, desmitificando

nossas crenças e história que vivemos enquanto estudantes, de forma a modificar essa ação no presente e refletindo no futuro próximo.

## REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática: Registros de representações semióticas**. Campinas: Papirus, 2003, p. 125-148.
- ARRUDA, D.M., et al . Seminarios de Lógica Fuzzy - Tutorial Toolbox Fuzzy: MatLab. **Nota Técnica – Instituto Nacional de Tecnologia**, jul. 2008, 51 p.
- BARRANTES, A.C. **Avaliação Discente Baseado em Lógica Fuzzy**. 2011. 47 f.Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação)- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, São Paulo, 2011.
- BARRETO, E.S de S.; SOUSA, S.Z. Reflexões Sobre as Políticas de Ciclos no Brasil. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 35, n. 126, p. 659-688, 2005.
- BARROS, L.C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Coleção IMECC. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2006.354p.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto Editora, 1994.
- BURIASCO, R. L. C.; SOARES, M. T. C. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção matemática. In: VALENTE, W. R. **Avaliação em matemática: histórias e perspectivas atuais**. 2ª ed. Campinas: Editora Papirus, 2013. p. 11-38.
- BURATTO, I. C. **Representação semiótica no ensino da geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores**. 2006. 142f. Mestrado em Educação Matemática. UFSC, Santa Catarina. 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.
- CARDOSO, F. C. **O Ensino Da Geometria Analítica e os Registros De Representação Sob Um Enfoque Epistemológico**. In: IX ANPED SUL SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 2012, Caxias do Sul. **Anais....**2012. p. 01-12.
- CORCOLL-SPINA, C. O. **Lógica Fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático**. 2010. 165f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
- COSTA, K.C.F da. et al. **Acompanhamento do Estudante em Ambientes de Aprendizagem Utilizando a Lógica Fuzzy**. In: XXVI CONGRESSO DA SBC, 2006, Campo Grande. **Anais...**p. 41- 49.

COSTA, W. V.; FERNANDES, J.L.; BROCHADO, M.R. **Proposta o uso de confiabilidade por meio da Lógica Fuzzy no processo de avaliação dos alunos do curso de engenharia de produção do cefet-rj.** In: COBENGE: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA. 35 edição,2007, Curitiba.**Anais...10 p.**

DALLEMOLE, J. J.; GROENWALD, C. L. O. **O Ensino e a Aprendizagem da Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica.** In: XVI ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Canoas-RS. **Anais...2012.**

DANTAS, L.M. V. **As contribuições das políticas de avaliação educacional em larga escala: o caso da avaliação da aprendizagem na Bahia.** 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Núcleo de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2009.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012, p.266-297.

FARIA, M. N. et al. Um Sistema de Avaliação em Ead baseado em Lógica Fuzzy. **Horizonte Científico**, v. 1, p. 8, 2008.

FERRAZ, A.P.C.M.; BELHOT, R.V. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. **Gest.Prod.**, São Carlos, v.17, n.2, p. 421-431, 2010.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 2ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 240 p.

FREITAS, J. L. M. de.; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. In: **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, n. 3, p. 10–34, jan. 2013.

GALHARDI, A. C.; AZEVEDO, M. M. de. **Avaliações de aprendizagem: o uso da taxonomia de Bloom.** In: WORKSHOP DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DO CENTRO PAULA SOUZA, 2013, São Paulo. **Anais...**, 2013.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 6.ed. São Paulo: Atlas,2008. 200p.

GONÇALVES, A. P. **Aplicação de Lógica Fuzzy em Guerra Eletrônica.** Instituto Tecnológico da Aeronáutica, 2007.Disponível em:  
[http://www.sige.ita.br/anais/IXSIGE/Artigos/AO\\_07.pdf](http://www.sige.ita.br/anais/IXSIGE/Artigos/AO_07.pdf). Acesso em: 19/01/2015.

HOFFMANN, J. **Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré- escola a universidade.** Porto Alegre: Mediação, 2009.

KLEIN, R. Utilização da Teoria da Resposta ao Item no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – Saeb. **Meta-Avaliação**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 2, p. 125-140, maio/ago. 2009.

KLUPPEL, G.T. **Reflexões Sobre O Ensino Da Geometria Em Livros Didáticos À Luz Da Teoria De Representações Semióticas**. 2012. 10ª f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

LAKATOS, E.M.; MARCONI, M de A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 2003, 311p.

LEITE, J. M; LEVANDOSKI, A. A. **Materiais didáticos manipuláveis no ensino de Geometria Espacial**. [2009]. Disponível em: <  
<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1664-8.pdf>. Acesso em: 10/02/2015.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar: Estudo e Proposições**. 22ª Edição, São Paulo, Ed. Cortez, 2011, 272 p.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MALVEZZI, W. R. **Uma ferramenta baseada em teoria Fuzzy para o acompanhamento de alunos aplicado ao modelo de educação presencial mediado por tecnologia**. 2010. 125 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

MARRO, A.A. et al. **Lógica Fuzzy: conceitos e aplicações**. [2010]. Disponível em: [http://aquilesburlamaqui.wdfiles.com/local--files/logica-aplicada-a-computacao/texto\\_Fuzzy.pdf](http://aquilesburlamaqui.wdfiles.com/local--files/logica-aplicada-a-computacao/texto_Fuzzy.pdf). Acesso em: 25/02/2015.

MERLI, R.F. **Modelos clássico e Fuzzy na educação matemática: um olhar sobre o uso da linguagem**. 2012. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, 2012.

MONDLANE, A. J ; CORREA, D.A. **A Avaliação de Desempenho Comentada Por um Grupo de Estudantes Que Integram o Mestrado Profissional Em Administração Da Unimep: Um Estudo Preliminar**. In: 4ª MOSTRA ACADÊMICA UNIMEP. 2006.

MOREIRA JÚNIOR, F. Aplicações da Teoria de Resposta ao Item (TRI) no Brasil. In: **Rev. Bras. Biom.**, São Paulo, v.28, n.137 4, 2010. p.137-170.

NERES, R.L. **Trabahando Registros de Representação Semiótica em Atividades de Matemática no Ensino Fundamental**. In: XIV CONFERENCIA INTERNACIONAL DE EDUCACION MATEMÁTICA, 2015, Chiapas, México.

NICOLETTI, M. C.; CAMARGO, H. A. **Fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy**. Série Apontamentos. São Carlos, SP: EdUFSCar, 2004. p. 105.

OLIVEIRA NETO, J. D.; FELÍCIO, A.C. ; CARITÁ, E. C. **Percepção docente quanto à utilização da taxonomia de Bloom e rubricas para avaliação da aprendizagem no curso de gestão da produção industrial na modalidade a distância da universidade de Ribeirão Preto.** In: 18º CIAED CONGRESSO INTERNACIONAL ABED, 2012, São Luis. 17º CIAED - CONGRESSO INTERNACIONAL ABED DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA. **Anais...**2012.

OTHMAN, M.; KU-MAHAMUD, K.R.; ABU BAKAR, A. Fuzzy Evaluation Method Using Fuzzy Rule Approach In Multicriteria Analysis. In: **Yugoslav Journal of Operations Research**, v. 18, n.1, February, 2008. p. 95- 107.

PAIS, L.C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**, 2001. Disponível em: < [http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_23/analise\\_significado.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf) >. Acesso em 18 de maio de 2015.

PATRUS, R.; SHIGAKI, H.B.; COUTINHO, D.D.R.; VILLELA, C.; B, G.L. O Ensino de Sustentabilidade e ética nos negócios com a taxonomia de Bloom. **Administração : Ensino e Pesquisa**, Rio de Janeiro v.13, nº 4 , p. 763-803 ,2012.

PERRENOUD, P. **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens.** Porto Alegre: Artmed, 2007, 183 p.

PERRENOUD, P. **Os Ciclos de Aprendizagem: um caminho para combater o fracasso escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2004, 229p.

PESSOA, G da S. **Um Estudo Diagnóstico Sobre o Cálculo da Área de Figuras Planas na Malha Quadrada: influência de algumas variáveis.** 2010.142f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

RIBEIRO, A.P.M. **A avaliação da Aprendizagem: Aplicação de um Modelo Fuzzy para se Obter Notas Mais Justas na Disciplina de Língua Portuguesa.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

RIGNEL, D.G de S.; CHENCI, G.P.; LUCAS, C.A. uma introdução a Lógica Fuzzy. **Revista Eletrônica de Sistemas de Informação e de Gestão Tecnológica**, v.01, n.1, 2011.

RISSOLI, V. R. V. **Uma proposta metodológica de acompanhamento personalizado para Aprendizagem Significativa apoiada por um Assistente Virtual de Ensino Inteligente.** 224 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

SANTANA, E.R.S. **Estruturas Aditivas: o suporte didático influencia a aprendizagem dos estudantes?** 2010. 343f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) . Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANTOS, W de S.; JUCÁ, R de S. **O Ensino das Áreas das Figuras Planas com a Utilização do Software Kig**. Revista WEB-MAT, Belém, vol. 1, n. 1, p. 31-50 Janeiro-Julho.2014.

SILVA, A. B. **Um Estudo da Representação de Triângulos em Livros Didáticos da Alfabetização Matemática**. In: VI CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 2013, Canoas.

SILVA, F. F. B. **Desvendando a Lógica Fuzzy**. 2011. 129 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura). Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.

SILVA, S. H.; BARRETO, M. C. **Conhecimento de professores polivalentes em geometria: a contribuição da teoria dos registros de representação semiótica**. In: XV ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Campina Grande. XV EBRAPEM em movimento: desafios e perspectivas. Campina Grande, 2011.

SOUSA, J.V.; FREITAS, K.S. **Progestão: como articular a gestão pedagógica da escola com as políticas públicas da educação para a melhoria do desempenho escolar?** Módulo X. Brasília: CONSED- Conselho Nacional de Secretários de Educação, 2009.

SOUZA, J. V.B de. **Os Materiais Manipuláveis e a Participação dos Alunos na Aula de Matemática**.2011.74f.Dissertação (Programa de pós-graduação em ensino, filosofia e história das ciências). Universidade Federal da Bahia /Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2011.

SOUZA, O. N.; MESQUITA, M. E. R. V. **Introdução à Teoria dos Conjuntos Fuzzy**. 2010.

TIAGO, G.M.; BARONI, M.P.M.A.; FONSECA, R.F. Avaliação Discente: uma proposta utilizando a Lógica Fuzzy. **Revemat : Revista Eletrônica de Educação Matemática** , v. 9, p. 87-109, 2014.

VIGHI, P. **The triangle as a mathematical object**, In: EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION III CONGRESS PROCEEDINGS, Bellaria, Italy, 28 February-3 March, 1-10, 2003.

ZADEH, L. A. **Fuzzy Sets, Inform. and Control**. 8, P. 338-353, 1965.

WANG, H. Y.; CHEN, S. M. (2006c). **New methods for evaluating students' answerscripts using vague values**.In: 9TH JOINT CONFERENCE ON INFORMATION SCIENCES, October 8-11, 2006, Kaohsiung, Taiwan.

WILGES,B. et al. Avaliação da Aprendizagem por meio de Lógica Fuzzy Validado por uma Árvore de Decisão ID3. **Novas Tecnologias na Educação**, V.8, n. 3 , dezembro, 2010. 11p.



## ANEXOS

## Anexo A- Diário Eletrônico do Contexto Escolar Investigado.

Registro de Análises

Unidade: 118 ESCOLA MUNICIPAL EDUARDO FONSECA

Curso: 10 - ENSINO FUNDAMENTAL - CICLO II

Classe: 301 - M 1º ANO A - (07:30 - 11:30)

Série: CICLO II - 4º ANO

Disciplina: 5 - CIÊNCIAS

Tipo: 1 - Trimestral - Indicadores - Diário

Ordemação: None

Período: 1º Trimestre

Dias Letivos: 22

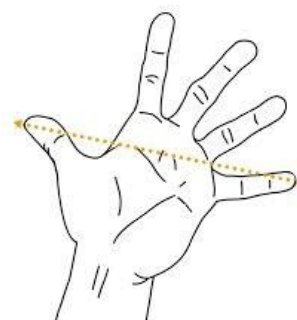
Aluno/Indicador	Conceito	Justificativa	Faltas
11783 - CAIO LUCAS MILHOR	S - SIM	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> 6-Percebe-se como parte integrante de um ecossistema e responsável por sua conservação.	S - SIM	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> 3-Estabelece relações entre seres vivos de um mesmo ambiente, observando as suas funções.	S - SIM	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> 8-Utiliza adequadamente os recursos naturais com os quais tem contato no seu dia a dia.	S - SIM	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> 2-Compreende as limitas e possibilidades do uso da tecnologia para a preservação e conservação do meio ambiente.	INT - INDICADOR AINDA NÃO TRABALHADO	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> 1-Adota uma atitude responsável com o meio ambiente.	PAR - PARCIALMENTE	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> 5-Identifica como o corpo humano está organizado, suas funções e os cuidados que deve ter para sua boa funcionalidade.	INT - INDICADOR AINDA NÃO TRABALHADO	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> 7-Reconhece as propriedades dos alimentos e princípios de uma boa alimentação para ter uma vida saudável.	INT - INDICADOR AINDA NÃO TRABALHADO	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> 4-Identifica as relações entre água, solo, seres vivos e clima, considerando as ações de outros lugares e tempos.	S - SIM	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11744 - CARLOS ALBERTO SANTOS VIEIRA JUNIOR			
1090 - CARLOS DANIEL TEIXEIRA ROSA			
15663 - DANIEL HENRIQUE DOS SANTOS LIMA			
15725 - DOUGLAS FONSECA SILVA			
11721 - EMILY OLIVEIRA DE JESUS			
11745 - ESTER DE SOUZA GOIS			

Salvar Cancelar Sair

## Anexo B- Texto utilizado na Primeira Etapa da Sequência de Ensino

### DESVELANDO A HISTÓRIA: O PROCESSO DE MEDIÇÃO DE TERRENOS.

Imagine se, para medir um terreno qualquer, cada pessoa utilizasse o comprimento da palma de sua mão como unidade de medida? Considerando que cada pessoa possui uma medida diferente de sua mão, poderíamos ter diversas confusões.

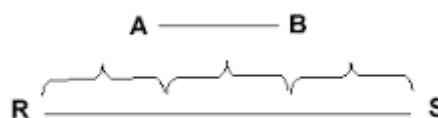


Para evitar as possíveis confusões, no antigo Egito, um Faraó decretou que todo o povo egípcio deveria usar a mesma unidade de medida para a contagem dos números de terras. Sendo assim, criou-se a unidade do Faraó para marcar a propriedade de cada agricultor após o período de cheia do rio Nilo.

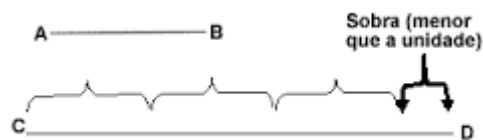


Os responsáveis por essas marcações foram denominados de "estiradores de corda" pois utilizavam as cordas para fazer as suas contagens. Dessa maneira, os estiradores tomavam a unidade de medida assinalada na própria corda, esticavam as cordas nos limites do terreno e verificavam quantas vezes a unidade de medida estava contida nas dimensões do terreno.

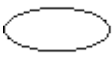
Por exemplo, suponhamos que a unidade do Faraó fosse A \_\_\_\_\_ B, enquanto a dimensão a ser mensurada correspondesse R \_\_\_\_\_ S. Para determinar essa medida, os estiradores de corda mediam quantas vezes a unidade do faraó estavam contidas dentro da dimensão a medir. Nesse caso, cada unidade da medida do Faraó era representada pela escrita numeral "I" para indicar quantidades. A medida do comprimento RS, por exemplo, era indicada por "III", isto é, 3 unidades.



Entretanto, se o valor do terreno não fosse exato, como medir uma quantidade de terra que não possui dimensões inteiras da unidade do Faraó? A partir dessa situação, os estimadores de corda optaram por subdividir essa metragem em unidades iguais menores (subunidades). Primeiro em duas "subunidades" menores. Após essa subdivisão, os estimadores tentavam medir com esta subunidade a "sobra".



Dessa forma, caso houvessem sobras, a unidade padrão era dividida em subunidades (menores) e comparadas com a sobra. Esse processo ocorria até os estimadores de corda encontrarem uma subunidade que corresponda à sobra, obtendo assim, o número obtido com a medição.

Muitos séculos depois, os matemáticos deram o nome de fração. A parte fracionária era indicada pelo sinal . Este sinal era o desenho de um pão que deveria ser repartido em porções iguais. Ele indica que a unidade foi dividida. O número de partes em que foi dividida vinha indicado abaixo dele. No caso do exemplo aqui apresentado, a medida da sobra seria indicada por:



Autor: \*Roberto P. Moisés é mestre em educação matemática (USP) e prof. do Col. Santa Cruz e das Universidades Sumaré e São Judas. Luciano Castro Lima é coordenador de matemática do Ceteac - Centro de estudos e trabalho em educação e cultura.

Fonte: <http://metroconlogiagcescon.blogspot.com.br/2010/10/como-era-medido-um-terreno-antigamente.html> . Acessado em : 29/05/2015

## APÊNDICES

## Apêndice A- Carta de Anuência

11 de março de 2014.

Ao:  
Comitê de Ética em Pesquisa com seres humanos  
Universidade Estadual de Santa Cruz

Senhor(a) Coordenador(a) do CEP-UESC

Eu Maria Lúcia Rosa de Jesus Sousa, responsável pelo Centro de Atenção Integral à Criança - Jorge Amado, conheço o Protocolo de Pesquisa intitulado "**Avaliação da Aprendizagem em Matemática: Uma Abordagem Utilizando a Lógica Fuzzy**", desenvolvido pelo pesquisador **Caio Sérgio Oliveira Xavier** e concordo com sua realização após a apresentação do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido devidamente preenchido e assinado pelas partes.

O início desta pesquisa neste Serviço só poderá ocorrer, a partir da apresentação da carta de aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa da UESC.

Atenciosamente,



Assinatura e carimbo com o nome do responsável institucional

*Maria Lúcia Rosa de Jesus Sousa*  
Diretora  
Aut. 042/2013

## Apêndice B- Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Sr/Sr<sup>a</sup>.

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a) da pesquisa intitulada: **Avaliação da Aprendizagem em Matemática: Uma Abordagem Utilizando a Lógica Fuzzy** que tem como objetivo geral, desenvolver um modelo de avaliação da aprendizagem em matemática no sistema de ensino em ciclos, a partir dos critérios de avaliação utilizados pelos professores da rede municipal de Itabuna. Também tem como seus objetivos específicos, compreender o processo avaliativo adotado pelos professores no sistema de ensino em ciclos, identificar as dificuldades dos professores para o desenvolvimento desse processo e elaborar o modelo de avaliação com base na Lógica Fuzzy. Nesta pesquisa serão realizadas análise da Proposta da Escola Grapiúna, análise do Projeto Político Pedagógico (PPP), entrevista estruturada e observação, sem interferência do pesquisador, das práticas avaliativas do professor. No caso de aceitar fazer parte da mesma, o Sr.(a) participará da entrevista estruturada, que será totalmente descritiva e/ou da observação, sem interferência do pesquisador. Ambas as ações ocorrerão na unidade escolar, sem a necessidade de deslocamento para outros ambientes. Sua participação na entrevista estruturada e/ou na observação, sem interferência do pesquisador, não lhe causará riscos. Caso deseje, você poderá solicitar esclarecimento sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa não irá acarretar qualquer penalidade ou perda de benefícios. Como responsável por este estudo comprometo-me em manter sigilo de todos os seus dados pessoais e indenizá-lo (a), em caso de dano e ressarcir-lo (a) caso sofra alguma despesa decorrente do mesmo. Em caso de dúvidas, a informação poderá ser obtida com o estudante Caio Sérgio Oliveira Xavier no telefone (73) 88374352 ou Email: [caiosergio01@hotmail.com](mailto:caiosergio01@hotmail.com), ou com o **Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UESC**, setor da UESC que conhece o nosso estudo, Endereço: Campus Soane Nazaré de Andrade, Rodovia Jorge Amado, Km 16, Bairro: Salobrinho. Torre Administrativa - 3º andar CEP: 45662-900. Ilhéus-Bahia, telefone: (73) 3680-5319 ou Email: [cep\\_uesc@yahoo.com.br](mailto:cep_uesc@yahoo.com.br) e [cep\\_uesc@uesc.br](mailto:cep_uesc@uesc.br) **Horário de Funcionamento:** Segunda a Sexta-feira de 8:00h às 12:00h e de 13:30 às 16:00h.

Declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Itabuna- Bahia, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Nome	Assinatura do Participante	Data
Nome	Assinatura do Pesquisador	Data

## **Apêndice C- Roteiro da Entrevista Estruturada**

### **ROTEIRO DA ENTREVISTA ESTRUTURADA**

Para os professores de matemática com objetivo de compreender o processo de avaliação dos professores, através do relato de suas práticas.

#### **IDENTIFICAÇÃO**

Nome:

Sexo:

Cargo/função:

Formação:

#### **Questões**

1. Há quanto tempo você atua na educação municipal?
2. Em sua concepção, o que é avaliação da aprendizagem?
3. Quais tipos de avaliação da aprendizagem estão inseridos em sua prática?
4. Para você, a avaliação da aprendizagem na modalidade de ensino em ciclos possui diferenças do sistema de ensino em séries? Quais?
5. A avaliação da aprendizagem em matemática na modalidade de ensino em ciclos apresenta dificuldades? Quais?
6. Quais critérios são utilizados em sua prática docente para a avaliação da aprendizagem dos estudantes?
7. Existe um modelo de avaliação que auxilie em sua prática?
8. O uso de provas e testes faz parte de sua metodologia de avaliação?

9. Como são atribuídas as notas ou conceitos aos estudantes? Como essas avaliações são relatadas? Há um programa específico para essa ação?
10. Como você vê a participação dos pais em relação a avaliação de seus filhos (as)?
11. A rede municipal de ensino fornece subsídios necessários para o desenvolvimento de sua prática?
12. Quais mudanças no processo avaliativo, você enquanto professor acredita ser necessário para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem em matemática?
13. Em sua opinião, o processo de avaliação em ciclos apresenta alguma vantagem em relação aos processos clássicos (educação seriada)? Quais?

## **Apêndice D- Roteiro da Observação não Participante**

### **ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO – Professor**

#### **Local onde será desenvolvida a observação**

A observação ocorrerá nas aulas de matemática com o objetivo de visualizar na prática, a metodologia adotada pelo professor em sala de aula para a avaliação dos estudantes.

#### **Tópicos a serem observados:**

1. Como o professor desenvolve a prática avaliativa?
2. Quais tipos de avaliações são utilizados?
3. O uso da prova faz parte da prática docente?
4. Quais as dificuldades encontradas pelo professor no processo de avaliação?
5. Como essas dificuldades são contornadas pelo professor?
6. Qual o comportamento dos estudantes em relação à avaliação da aprendizagem desenvolvida em sala de aula?
7. O professor utiliza variáveis linguísticas no processo avaliativo? Quais?



### Apêndice E- Base de Regras Fuzzy para Proposta de Avaliação

**Variáveis de Entrada:** (I) Conhecimento Cognitivo, (II) Participação em Atividades (III) Assiduidade e Comportamento.

**Variáveis de Saída:** Resultado Final

**Conceitos:** Ruim, Regular, Bom e Ótimo.

Base de regras	( I )	( II )	( III )	Resultado Final
$R_1$	Ruim	Ruim	Ruim	Ruim
$R_2$	Ruim	Ruim	Regular	Ruim
$R_3$	Ruim	Ruim	Bom	Ruim
$R_4$	Ruim	Regular	Ruim	Ruim
$R_5$	Ruim	Regular	Regular	Ruim
$R_6$	Ruim	Regular	Bom	Regular
$R_7$	Regular	Ruim	Ruim	Ruim
$R_8$	Regular	Ruim	Regular	Ruim
$R_9$	Regular	Ruim	Bom	Regular
$R_{10}$	Regular	Regular	Ruim	Ruim
$R_{11}$	Regular	Regular	Regular	Regular
$R_{12}$	Regular	Regular	Bom	Regular
$R_{13}$	Regular	Bom	Ruim	Regular
$R_{14}$	Regular	Bom	Regular	Regular
$R_{15}$	Regular	Bom	Bom	Bom
$R_{16}$	Regular	Bom	Ótimo	Bom
$R_{17}$	Bom	Ruim	Ruim	Ruim
$R_{18}$	Bom	Ruim	Regular	Regular
$R_{19}$	Bom	Ruim	Bom	Regular
$R_{20}$	Bom	Regular	Ruim	Regular
$R_{21}$	Bom	Regular	Regular	Regular
$R_{22}$	Bom	Regular	Bom	Bom
$R_{23}$	Bom	Bom	Ruim	Regular
$R_{24}$	Bom	Bom	Regular	Bom
$R_{25}$	Bom	Bom	Bom	Bom
$R_{26}$	Bom	Bom	Ótimo	Bom
$R_{27}$	Bom	Ótimo	Ruim	Regular
$R_{28}$	Bom	Ótimo	Regular	Bom
$R_{29}$	Bom	Ótimo	Bom	Bom
$R_{30}$	Bom	Ótimo	Ótimo	Ótimo
$R_{31}$	Ótimo	Ruim	Ruim	Ruim
$R_{32}$	Ótimo	Ruim	Regular	Regular
$R_{33}$	Ótimo	Ruim	Bom	Bom
$R_{34}$	Ótimo	Regular	Ruim	Regular
$R_{35}$	Ótimo	Regular	Regular	Regular
$R_{36}$	Ótimo	Regular	Bom	Bom

$R_{37}$	Ótimo	Bom	Ruim	Bom
$R_{38}$	Ótimo	Bom	Regular	Bom
$R_{39}$	Ótimo	Bom	Bom	Bom
$R_{40}$	Ótimo	Bom	Ótimo	Ótimo
$R_{41}$	Ótimo	Ótimo	Ruim	Bom
$R_{42}$	Ótimo	Ótimo	Regular	Bom
$R_{43}$	Ótimo	Ótimo	Bom	Ótimo
$R_{44}$	Ótimo	Ótimo	Ótimo	Ótimo